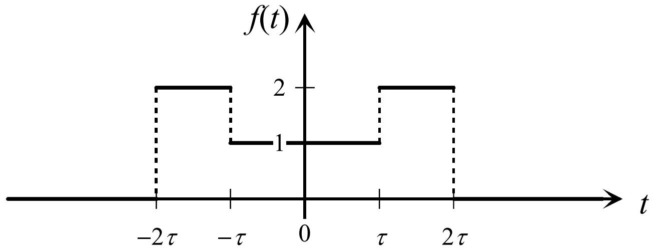
Naloge pisnega izpita

PROCESIRANJE SIGNALOV

Datum: 25. 1. 2006

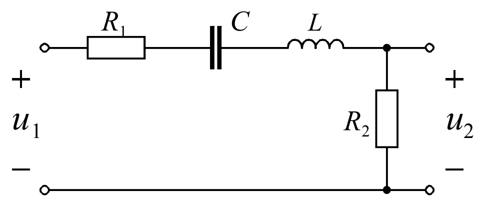
1. Izračunajte Fourierjev transform podanega aperiodičnega signala! Koliko znaša $F(0)$?



Rešitev:

Glej rešeni izpit 25.01.1999.

2. Izračunajte sistemsko funkcijo $H(s)$ narisanega vezja! Narišite ničle in pole v s-ravnini ter skicirajte približni potek amplitudnega frekvenčnega odziva $|H(\omega)|$ vezja! Elementi vezja so $R_1 = 10\ \Omega$ $R_2 = 100\ \Omega$ $C = 100\ \mathrm{nF}$ $L = 30\ \mathrm{mH}$.



Rešitev:

$$U_2(s) = I(s) \cdot R_2$$

$$I(s) = \frac{U_1(s)}{R_1 + \frac{1}{Cs} + Ls + R_2}$$

$$U_2(s) = U_1(s) \cdot \frac{R_2}{Ls + R_1 + R_2 + \frac{1}{Cs}} \cdot \frac{Cs}{Cs} = U_1(s) \cdot \frac{sR_2C}{s^2LC + s(R_1 + R_2)C + 1}$$

$$H(s) = \frac{sR_2C}{LC\left(s^2 + s\frac{(R_1 + R_2)}{L} + \frac{1}{LC}\right)} = \frac{R_2}{L} \cdot \frac{s}{\left(s^2 + s\frac{(R_1 + R_2)}{L} + \frac{1}{LC}\right)}$$

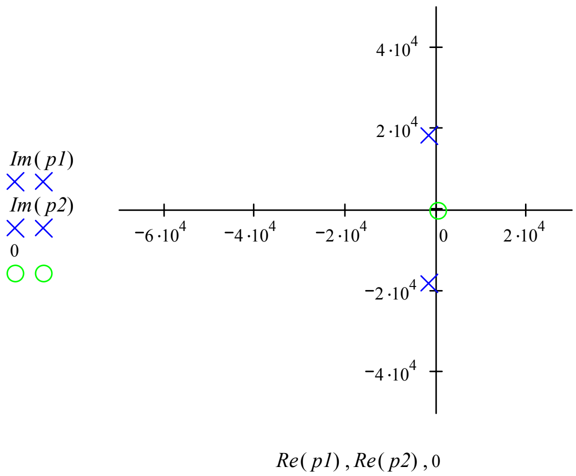
$$n = 0$$

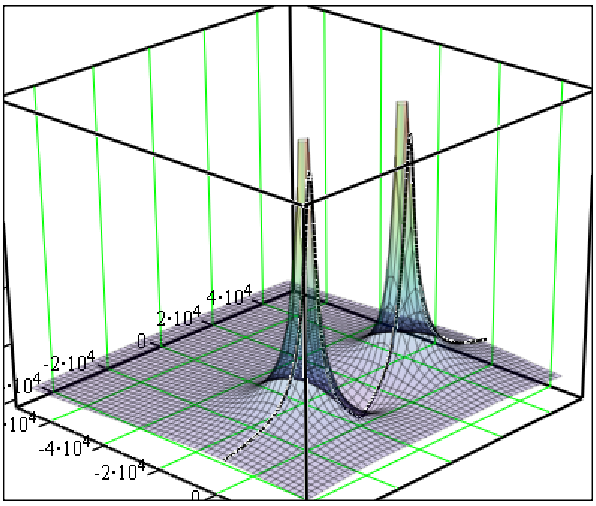
$$p_{1,2}=\frac{-\frac{R_1+R_2}{L}\pm\sqrt{\left(\frac{R_1+R_2}{L}\right)^2-4\cdot\frac{1}{LC}}}{2}=-\frac{R_1+R_2}{2L}\pm\sqrt{\left(\frac{R_1+R_2}{2L}\right)^2-\frac{1}{LC}}$$

$$p_{1,2}=-\frac{110\ \text{V/A}}{60\cdot10^{-3}\ \text{Vs/A}}\pm\sqrt{\left(\frac{110\ \text{V/A}}{60\cdot10^{-3}\ \text{Vs/A}}\right)^2-\frac{1}{30\cdot10^{-3}\ \text{Vs/A}\cdot100\cdot10^{-9}\ \text{As/V}}}$$

$$p_1=-1833+j18165 \qquad\qquad p_2=-1833-j18165$$

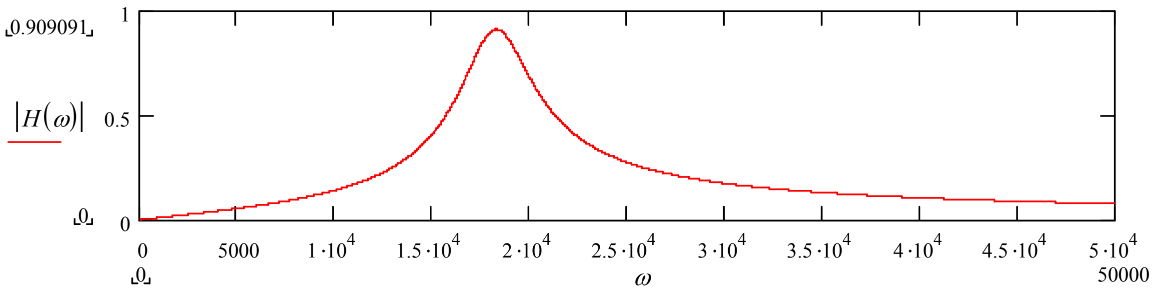
Lega ničel in polov (3D-graf je dodan za boljšo predstavo, na izpitu ga ni bilo potrebno risati):



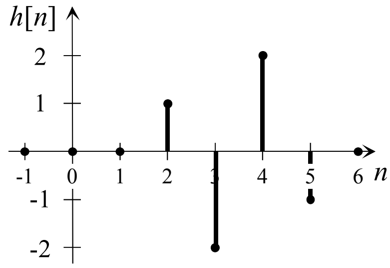


(X , Y , Z) , (Wx , Wy , Wz)

Skica frekvenčnega poteka:



3. Diskretno časovno linearno vezje ima narisani impulzni odziv $h[n]$. Izračunajte sistemsko funkcijo $H(z)$ in narišite shemo vezja? V z-ravnini narišite lego ničel in polov! Kolikšna je vrednost frekvenčnega odziva $|H(f)|$ za zvezne signale pri frekvenci 1 kHz, če je vzorčevalna frekvenca $f_0 = 4$ kHz.

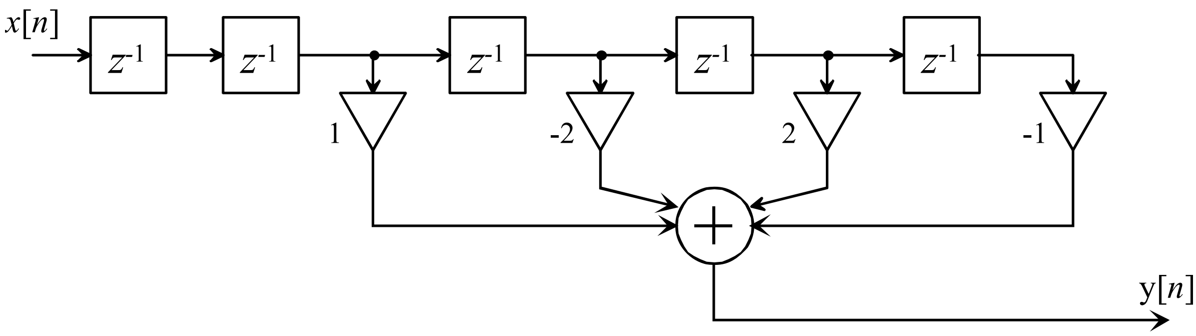


Rešitev:

Sistemsko funkcijo $H(z)$ lahko prepišemo direktno iz slike

$$H(z) = z^{-2} - 2z^{-3} + 2z^{-4} - z^{-5}$$

Shema vezja:



Za določitev ničel in polov moramo funkcijo $H(z)$ malo preoblikovati

$$H(z) = \left(z^{-2} - 2z^{-3} + 2z^{-4} - z^{-5}\right) \cdot \frac{z^5}{z^5} = \frac{z^3 - 2z^2 + 2z - 1}{z^5}$$

Vidimo, da imamo pol petega reda v izhodišču: $p_{1,2,3,4,5} = 0$

Da se dokopljemo do ničel, moramo polinom v števcu sistemske funkcije razstaviti na produkte. Tega se najlažje lotimo s Hornerjevim algoritmom. Poskusimo, če je ena od ničel 1.

	1	-2	2	-1
1		1	-1	1
	1	-1	1	0

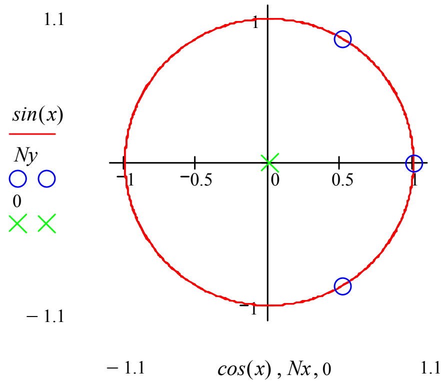
Postopek se je izšel, torej je res ena ničla 1: $n_1 = 1$

$H(z)$ je sedaj:

$$H(z) = \frac{(z-1) \cdot (z^2 - z + 1)}{z^5}$$

Preostali del polinoma lahko razstavimo kar s formulo: $n_{2,3} = \dfrac{1 \pm \sqrt{1^2 - 4}}{2} = 0{,}5 \pm j\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Lega ničel in polov v z-ravnini:



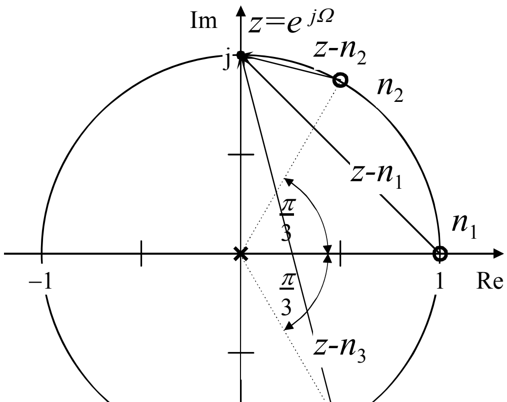
Za izračun vrednosti frekvenčnega odziva $|H(f)|$, se splača najprej izračunati normirano krožno frekvenco, ki ustreza zahtevani frekvenci 1 kHz.

$$\Omega = \frac{f}{f_0} \cdot 2\pi = \frac{1\ \text{kHz}}{4\ \text{kHz}} \cdot 2\pi = \frac{\pi}{2}$$

$$\left|H(f)\right| = \left|H(\Omega)\right|_{\Omega = \frac{f}{f_0}2\pi}\Big| = \left|H(z)\right|_{z=e^{j\Omega}}\Big|$$

$$z = e^{j\Omega} = e^{j\frac{\pi}{2}} = j$$

Točka, v kateri nas zanima vrednost frekvenčnega odziva se nahaja ravno pri $z = j$.



Rezultat lahko izračunamo grafično – produkt razdalj ničel do izbrane točke, deljeno s produktom razdalj polov do izbrane točke. Ker so vsi poli v izhodišču, je razdalja od polov do katerekoli točke na enotni krožnici ravno 1. Zato poli v tem primeru nič ne vplivajo na vrednost frekvenčnega odziva.

Druga možnost je, da vstavimo namesto z v sistemsko funkcijo j, in izračunamo absolutno vrednost tako dobljenega izraza. Ker smo že prej ugotovili, da poli v izhodišču ne vplivajo na amplitudni odziv, jih že takoj izpustimo.

$$\left|H(1\ \text{kHz})\right| = \left|j^3 - 2j^2 + 2j - 1\right| = \left|-j + 2 + 2j - 1\right| = \left|j + 1\right| = \sqrt{2}$$

$$\underline{\underline{\left|H(1\ \text{kHz})\right| = \sqrt{2}}}$$

4. Časovno zvezni energijski signali:

a) Napišite njihovo definicijo (potrebni pogoj, ki ga izpolnjujejo energijski signali)!

b) Kolikšna je povprečna moč energijskih signalov?

c) Kateri signali so nasprotje energijskih signalov?

d) Ali so to periodični oziroma aperiodični signali?

e) Kakšen je spekter energijskih signalov in s katerim mat. orodjem ga izračunamo?

Rešitev:

a) Energijski signali so tisti, ki imajo končno energijo večjo od 0

$$0 < E_x < \infty \quad \text{kjer je energija dana z integralom} \quad E_x = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)dt$$

b) Povprečna moč energijskih signalov je 0:

$$P_x = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x^2(t)dt = \lim_{T\to\infty} \frac{E_x}{2T} = 0$$

ker je energija E_x končna vrednost.

c) Če signal ni energijski, potem mora biti močnostni.

d) Energijski signali so lahko le aperiodični. Periodični signali so vedno močnostni.

e) Aperiodični zvezni signali imajo zvezen aperiodičen spekter. Za preslikavo iz časovnega v frekvenčni prostor uporabljamo Fourierevo transformacijo.