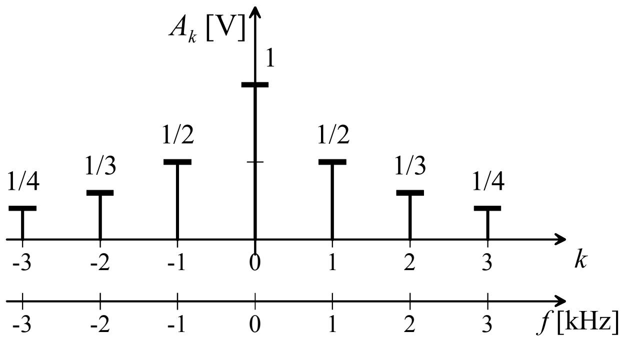
Rešitve nalog pisnega izpita

PROCESIRANJE SIGNALOV

Datum: 7. 6. 2001

1. Na spodnjem grafu je podan kompleksni spekter periodičnega signala. Poleg koeficientov kompleksne vrste A_k je podana tudi frekvenčna os.

- Kolikšna je perioda časovnega signala T?
- Ali časovni signal $f(t)$ soda, oz. liha funkcija časa t?
- Izračunajte efektivno vrednost napetosti na izhodu pasovno prepustnega filtra z mejnima frekvencama f_s = 300 Hz in f_z = 3400 Hz, če na vhod pripeljemo signal $f(t)$ s podanim spektrom !



Rešitev:

- Iz spodnjega merila kompleksnega amplitudnega spektra je razvidno, da je razmak spektralnih črt 1 kHz, kar pomeni, da je perioda časovnega signala $T = 1/f = 1$ ms.

- Ker so koeficienti kompleksne Fourierjeve vrste realni je funkcija $f(t)$ soda.

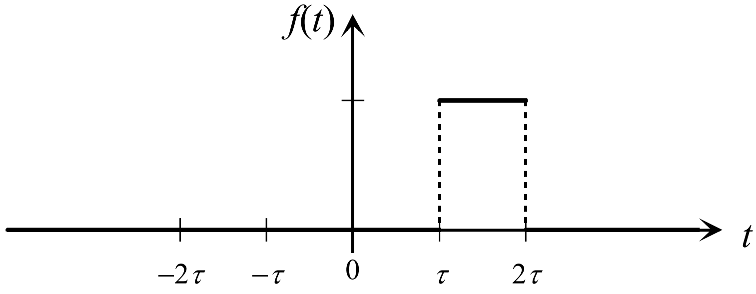
- Filter poreže vse spektralne komponente pod f_s = 300 Hz in nad f_z = 3400 Hz, kar pomeni, da na izhodu ostanejo samo tri spektralne črte s svojimi zrcalnimi frekvencami. Filter prepušča komponente s frekvencami 1 kHz, 2 kHz in 3 kHz. Parsevalov izrek nam da odgovor na iskano efektivno vrednost na izhodu

$$X_{ef}^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k^2 = \sum_{k=-3}^{-1} A_k^2 + \sum_{k=1}^{3} A_k^2 \tag{1.1}$$

Zaradi simetričnost lahko (1.1) napišemo krajše

$$\begin{aligned} X_{ef}^2 &= 2\sum_{k=1}^{3} A_k^2 = 2\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2\right] = 2\left[\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}\right] = 0{,}847 \\ X_{ef} &= \sqrt{0{,}847} = \underline{0{,}92} \end{aligned} \tag{1.2}$$

2. Izračunajte Fourierjev transform $H(\omega)$ narisanega časovnega signala.



Rešitev:

Direktna rešitev:

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt=\int_{\tau}^{2\tau} e^{-j\omega t}dt=-\left.\frac{e^{-j\omega t}}{j\omega}\right|_{\tau}^{2\tau}=\frac{e^{-j\omega\tau}-e^{-j\omega 2\tau}}{j\omega}=\frac{e^{-j\omega\frac{3\tau}{2}}\left(e^{j\omega\frac{\tau}{2}}-e^{-j\omega\frac{\tau}{2}}\right)}{j\omega}=$$

$$=\frac{e^{-j\omega\frac{3\tau}{2}}}{\frac{\omega}{2}}\frac{\left(e^{j\omega\frac{\tau}{2}}-e^{-j\omega\frac{\tau}{2}}\right)}{2j}=\frac{e^{-j\omega\frac{3\tau}{2}}}{\frac{\omega}{2}}\sin(\omega\frac{\tau}{2})=e^{-j\omega\frac{3\tau}{2}}\tau\frac{\sin(\omega\frac{\tau}{2})}{\omega\frac{\tau}{2}}$$

Gornji rezultat je lahko tudi v manj dodelani obliki

$$F(\omega)=e^{-j\omega\frac{3\tau}{2}}2\frac{\sin(\omega\frac{\tau}{2})}{\omega}$$

Uporaba izreka o časovni premaknitvi

Signal $f(t)$ dobimo lahko s premikom simetričnega impulza, ki traja od -τ/2 do τ/2.

$$f(t)\xleftrightarrow{\mathcal{F}}F(\omega)=\tau\frac{\sin(\omega\frac{\tau}{2})}{\omega\frac{\tau}{2}}$$

$$f(t-t_0)\xleftrightarrow{\mathcal{F}}F(\omega)e^{-j\omega t_0}$$

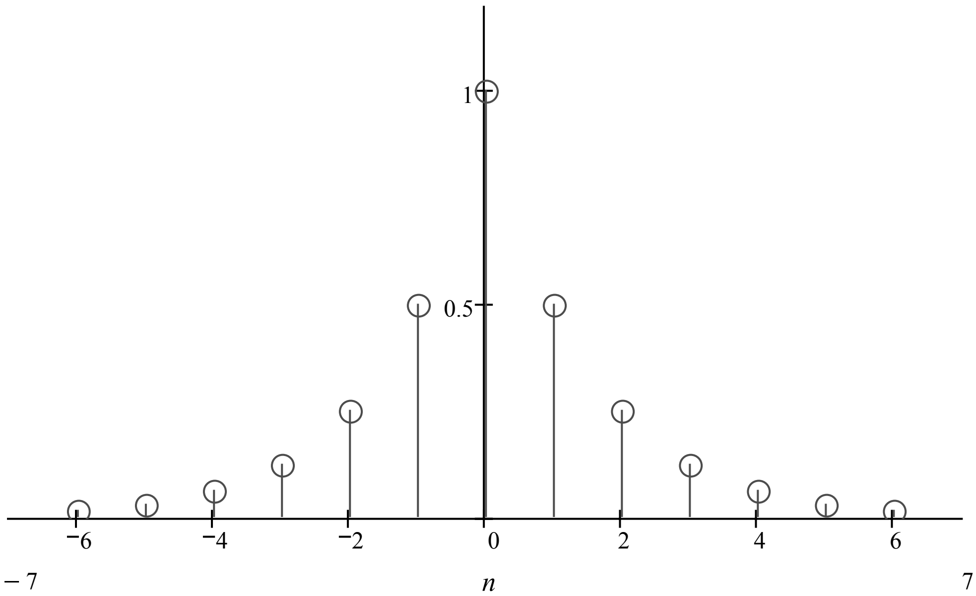
$$t_0=\frac{3\tau}{2}$$

$$f(t-\frac{3\tau}{2})\xleftrightarrow{\mathcal{F}}\tau\frac{\sin(\omega\frac{\tau}{2})}{\omega\frac{\tau}{2}}e^{-j\omega\frac{3\tau}{2}}$$

Izračun simetričnega impulza je bil izveden na vajah in predavanjih.

3. Izračunajte TDF transform časovno diskretnega signala $x(n) = a^{|n|}$ če je a = 0,5. Narišite tudi graf signala $x(n)$!

Rešitev:



$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\Omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^{|n|}e^{-j\Omega n} = \sum_{n=-\infty}^{-1} a^{|n|}e^{-j\Omega n} + \sum_{n=0}^{\infty} a^{n}e^{-j\Omega n}$$

V zadnji vsoti, kjer je n le pozitiven lahko znak absolutne vrednosti izpustimo. V prvi vsoti bomo odstranili absolutno vrednost s tem, da pred n pišemo minus, saj so vrednosti diskretnega časa tu negativne. Prva vsota tudi na vsebuje člena z n = 0, zato ga bomo dodali in seveda odšteli. Vrednost člena pri n = 0 je a^0e^0 = 1.

$$X(\Omega) = (\sum_{n=-\infty}^{0} a^{-n}e^{-j\Omega n} - 1) + \sum_{n=0}^{\infty} a^{n}e^{-j\Omega n} = \sum_{n=-\infty}^{0} \left(ae^{j\Omega}\right)^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} \left(ae^{-j\Omega}\right)^{n} - 1$$

V prvi vsoti izvedemo zamenjavo:

$$-n = \nu: \quad n = -\infty \Rightarrow \nu = \infty$$
$$n = 0 \Rightarrow \nu = 0$$

Od tod dobimo

$$X(\Omega) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(ae^{j\Omega}\right)^{\nu} + \sum_{n=0}^{\infty} \left(ae^{-j\Omega}\right)^{n} - 1$$

Obe vsoti sta neskončni geometrijski vrsti. Ker je absolutna vrednost koeficientov vrst manjša od 1, vrsti konvergirata, zato lahko uporabimo formulo za takšno vrsto

$$\left|ae^{j\Omega}\right| = |a| \cdot \left|e^{j\Omega}\right| = 0,5 \cdot 1 = 0,5 < 1$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} b^n = 1 + b^2 + b^3 + ... = \frac{1}{1-b} \quad \text{če velja} \quad |b| < 1$$

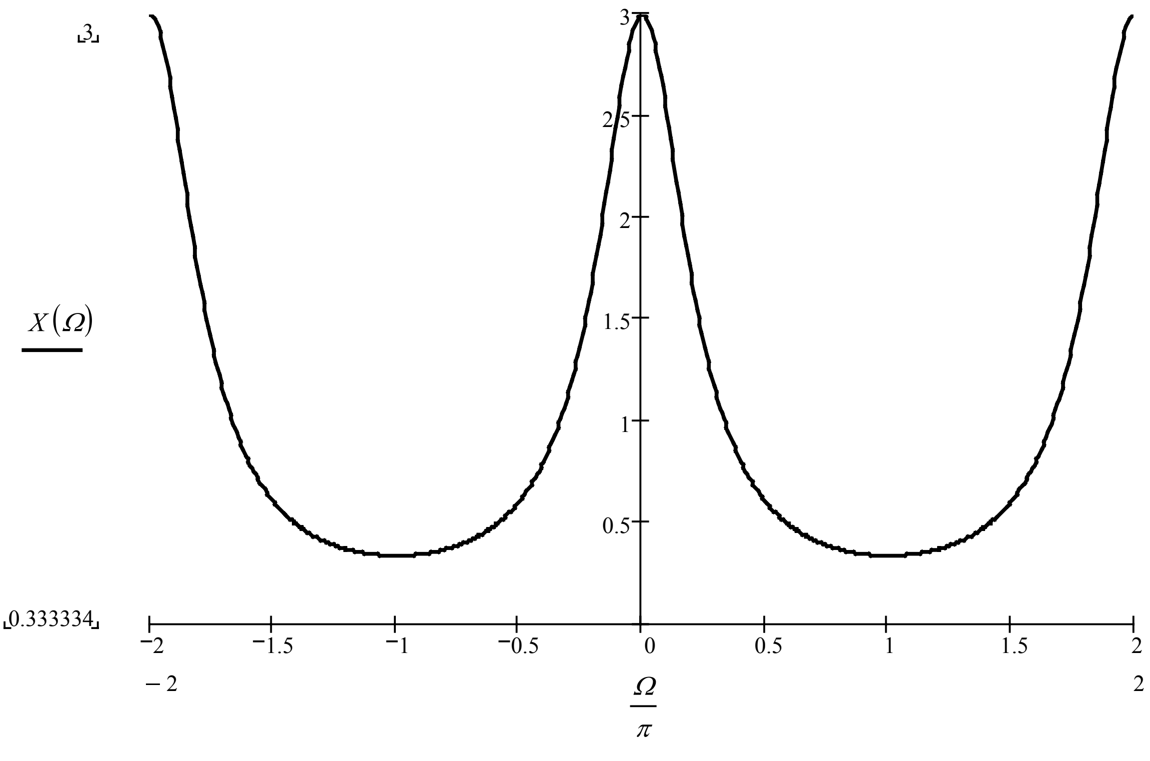
$$X(\Omega) = \frac{1}{1-ae^{j\Omega}} + \frac{1}{1-ae^{-j\Omega}} - 1 = \frac{1-ae^{-j\Omega}+1-ae^{j\Omega}}{\left(1-ae^{j\Omega}\right)\left(1-ae^{-j\Omega}\right)} - 1 = \frac{2-a(e^{j\Omega}+e^{-j\Omega})}{1-ae^{j\Omega}-ae^{-j\Omega}+a^2} - 1 =$$

$$= \frac{2-2a\cos\Omega}{1-2a\cos\Omega+a^2} - 1 = \frac{(2-2a\cos\Omega)-\left(1-2a\cos\Omega+a^2\right)}{1-2a\cos\Omega+a^2} = \frac{1-a^2}{1+a^2-2a\cos\Omega}$$

Upoštevamo še podano vrednost $a = 0,5 = ½$ in dobimo končno obliko

$$X(\Omega) = \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2\frac{1}{2}\cos\Omega} = \frac{1-\frac{1}{4}}{1+\frac{1}{4}-\cos\Omega} = \frac{3}{5-4\cos\Omega}$$

Spodaj je podan še graf transforma, ki se sicer ni zahteval v nalogi. Ker je časovna funkcija soda, je transformacija realna.



4. Časovno diskretno linearno vezje je opisano z ničlami in poli sistemske funkcije

$$H(z) = \frac{\prod_{i=1}^{4}(z-n_i)}{\prod_{j=1}^{4}(z-p_i)} \quad , n_{1,2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \pm j\frac{\sqrt{2}}{2}, n_{3,4} = \pm j,$$

$p_j = 0$ za vse j. Narišite shemo tega vezja in izračunajte njegov impulzni odziv $h(n)$! Koliko znaša frekvenčni odziv $|H(\Omega = \pi/2)|$?

Rešitev:

Najprej izračunamo sistemsko funkcijo:

$$H(z) = \frac{\left(z - \frac{\sqrt{2}}{2}(1+j)\right)\left(z - \frac{\sqrt{2}}{2}(1-j)\right)(z-j)(z+j)}{z^4} =$$

$$= \frac{\left((z - \frac{\sqrt{2}}{2}) - j\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left((z - \frac{\sqrt{2}}{2}) + j\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(z^2+1)}{z^4} =$$

$$= \frac{\left(\left(z - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\right)(z^2+1)}{z^4} = \frac{\left(z^2 - \sqrt{2}z + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)(z^2+1)}{z^4} =$$

$$= \frac{(z^2 - \sqrt{2}z + 1)(z^2+1)}{z^4} = \frac{z^4 - \sqrt{2}z^3 + 2z^2 - \sqrt{2}z + 1}{z^4} =$$

$$= 1 - \sqrt{2}z^{-1} + 2z^{-2} - \sqrt{2}z^{-3} + z^{-4}$$

Sistemska funkcija je Z-transform impulznega odziva, zato dobimo $h(n)$ z inverzno transformacijo. Upoštevamo osnovni transform

$$\delta(n) \xleftrightarrow{Z} 1$$

in pravilo o premiku

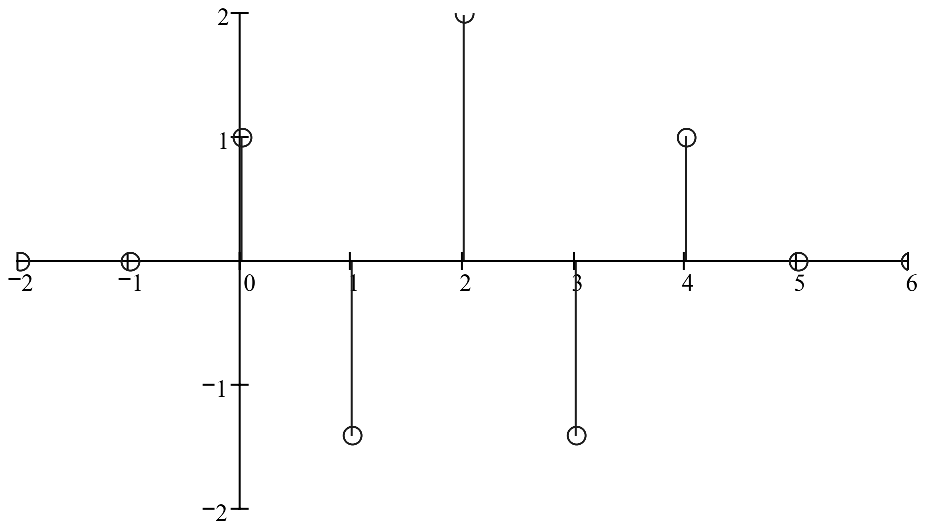
$$x(n-n_0) \xleftrightarrow{Z} X(z)z^{-n_0}$$

in dobimo

$$H(z) = 1 - \sqrt{2}z^{-1} + 2z^{-2} - \sqrt{2}z^{-3} + z^{-4}$$

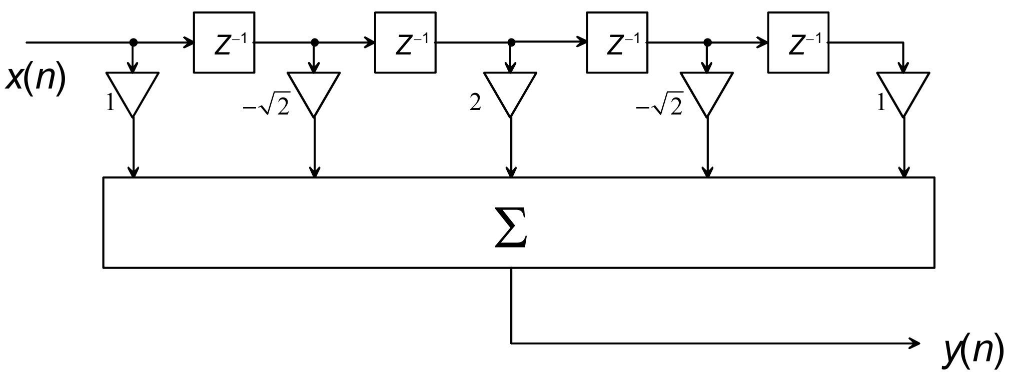
$$\xleftrightarrow{Z}$$

$$h(n) = \delta(n) - \sqrt{2}\delta(n-1) + 2\delta(n-2) - \sqrt{2}\delta(n-3) + \delta(n-4)$$



Graf impulznega odziva *h*(*n*)

Iz impulznega odziva sledi tudi shema linearnega diskretnega sistema



Frekvenčni odziv za $\Omega = \pi/2$ pomeni, da v $H(z)$ vstavimo $z = e^{j\pi/2} = j$

$$\left|H(\Omega = \frac{\pi}{2})\right| = \left|H(z = j)\right| = \left|\frac{\left(j - \frac{\sqrt{2}}{2}(1+j)\right)\left(j - \frac{\sqrt{2}}{2}(1-j)\right)\overbrace{(j-j)}^{=0}(j+j)}{z^4}\right| = 0$$

Uporabili smo razstavljeno obliko sistemske funkcije, ker je ničla $n_3 = j$.