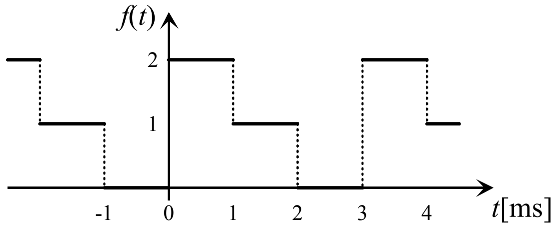
Rešitve pisnega izpita

PROCESIRANJE SIGNALOV

Datum: 12. 09. 2006

1. Izrazite komponente amplitudnega in faznega spektra podanega signala! Tabelirajte prve tri amplitude!

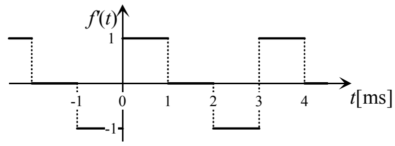


Rešitev:

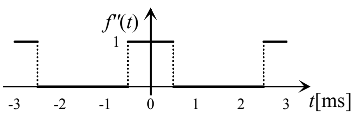
Komponenta X_0 je enosmerna vrednost signala, ki jo enostavno določimo iz slike:

$$X_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt = 1 \tag{1.1}$$

Preostali del spektra je neodvisen od enosmerne komponente, zato lahko signal po višini poljubno premaknemo:



Fouriereva transformacija je linearna, zato lahko izračunamo spektre posameznih delov signala in jih nato seštejemo. Signal je sestavljen iz dveh pravokotnih impulzov. Eden je pozitiven drugi je negativen. Vsak od njiju je malo zamaknjen v svojo stran. Najprej bomo izračunali spekter za en nepremaknjen impulz, nato pa uporabili pravila za premik.

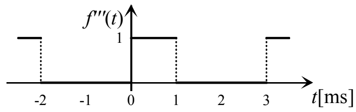


$$X_k'' = \frac{1}{T}\int_{\tau}^{T+\tau} f''(t)\,e^{-jk\omega_0 t}\,dt = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{6}}^{\frac{T}{6}} e^{-jk\frac{2\pi}{T}t}\,dt = -\frac{1}{\cancel{T}}\cdot\frac{1}{jk\frac{2\pi}{\cancel{T}}}\cdot e^{-jk\frac{2\pi}{T}t}\Bigg|_{-\frac{T}{6}}^{\frac{T}{6}} \tag{1.2}$$

$$X_k'' = -\frac{1}{jk2\pi}\cdot\left(e^{-jk\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{T}{6}} - e^{+jk\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{T}{6}}\right) = -\frac{1}{jk2\pi}\cdot\left(-2j\cdot\sin\left(k\cdot\frac{\pi}{3}\right)\right) \tag{1.3}$$

$$X_k'' = \frac{1}{k\pi}\cdot\sin\left(k\cdot\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{3}\cdot\frac{\sin\left(k\cdot\frac{\pi}{3}\right)}{k\cdot\frac{\pi}{3}} \tag{1.4}$$

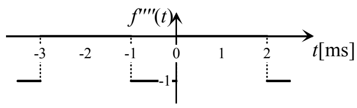
Premik v desno:



$$y(t) = x(t-\tau) \leftrightarrow Y_k = X_k \cdot e^{-jk\omega_0\tau} \tag{1.5}$$

$$f'''(t) = f''\left(t - \frac{T}{6}\right) \leftrightarrow X_k''' = X_k'' \cdot e^{-jk\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{T}{6}} = X_k'' \cdot e^{-jk\frac{\pi}{3}} \tag{1.6}$$

Premik v levo in sprememba polaritete:



$$f''''(t) = -f''\left(t + \frac{T}{6}\right) \leftrightarrow X_k'''' = -X_k'' \cdot e^{+jk\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{T}{6}} = -X_k'' \cdot e^{+jk\frac{\pi}{3}} \tag{1.7}$$

Vsota:

$$X_k' = X_k''' + X_k'''' = X_k'' \cdot e^{-jk\frac{\pi}{3}} - X_k'' \cdot e^{jk\frac{\pi}{3}} = X_k'' \cdot \left(e^{-jk\frac{\pi}{3}} - e^{jk\frac{\pi}{3}}\right) \tag{1.8}$$

$$X_k' = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sin\left(k \cdot \frac{\pi}{3}\right)}{k \cdot \frac{\pi}{3}} \cdot \left(e^{-jk\frac{\pi}{3}} - e^{jk\frac{\pi}{3}}\right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sin\left(k \cdot \frac{\pi}{3}\right)}{k \cdot \frac{\pi}{3}} \cdot \left(-2j\sin\left(k \cdot \frac{\pi}{3}\right)\right) \tag{1.9}$$

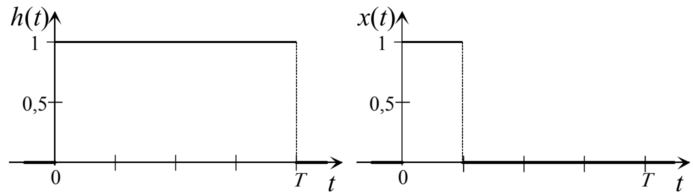
$$X_k = \begin{cases} 1 & ; \quad k = 0 \\ -\frac{2j}{3} \cdot \frac{\sin^2\left(k \cdot \frac{\pi}{3}\right)}{k \cdot \frac{\pi}{3}} & ; \quad k \neq 0 \end{cases} \tag{1.10}$$

$$|X_k| = \begin{cases} 1 & ; \quad k = 0 \\ \frac{2}{3} \cdot \frac{\sin^2\left(k \cdot \frac{\pi}{3}\right)}{k \cdot \frac{\pi}{3}} & ; \quad k \neq 0 \end{cases} \tag{1.11}$$

$$\phi_k = \arctan\left(\frac{\mathrm{Im}(X_k)}{\mathrm{Re}(X_k)}\right) \text{(Do tukaj bi bilo že super)} \tag{1.12}$$

$$\phi_k = \begin{cases} 0 & ; \quad k = 0 \\ -\frac{\pi}{2} & ; \quad k \neq 3 \cdot n, k > 0 \\ \frac{\pi}{2} & ; \quad k \neq 3 \cdot n, k < 0 \\ \textit{nedoločen} & ; \quad k = 3 \cdot n, k \neq 0 \end{cases} \tag{1.13}$$

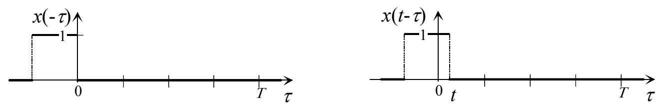
2. Določite odziv $y(t)$ sistema s podanim odzivom na enotin impulz $h(t)$ za dani vhodni signal $x(t)$.



Rešitev:

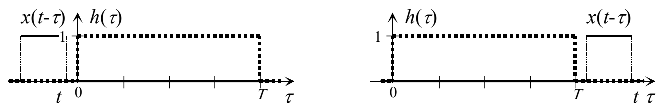
$$y(t)=x(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)\cdot h(t-\tau)\,d\tau=\int_{-\infty}^{\infty}h(\tau)\cdot x(t-\tau)\,d\tau \tag{2.1}$$

Katero varianto enačbe izberemo je odvisno od tega katera se nam zdi lažja za izračunat. V tem primeru bomo poskusili z drugo ($x(t-\tau)$). Najprej iz funkcije $x(t)$ narišimo funkcijo $x(t-\tau)$:



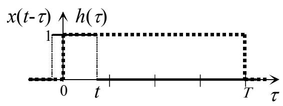
S spreminjanjem t premikamo celo funkcijo levo in desno. Zato je konvolucijski integral za vsak t drugačen in ga je potrebno za vsak t posebej izračunati. Na srečo je v velikem območju kar enak nič, v določenih območjih pa ga lahko izrazimo kot funkcijo spremenljivke t. Najprej je potrebno določiti območja t, v katerih je integral nič, nato pa območja, kjer se ga da določiti kot posamezno funkcijo.

Konvolucijski integral je enak 0, kjer se funkciji $h(t)$ in $x(t-\tau)$ ne pokrivata. Tam je njun produkt enak 0 in zato je tudi integral enak 0:



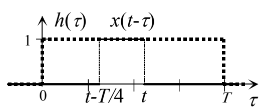
To velja kadar je t manjši od 0 in kadar je večji od 5/4 T.

Kadar je t malo večji od 0, je produkt obeh signalov 1 na območju od 0 do t:



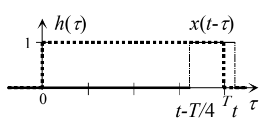
$$y(t)=\int_{0}^{t}1\cdot d\tau=\tau\Big|_{0}^{t}=t-0=t \tag{2.2}$$

To velja dokler je t manjši od $T/4$. Od $T/4$ naprej je produkt obeh funkcij 1 v območju od t-$T/4$ do t. To je po celi širini funkcije $x(t-\tau)$:



$$y(t)=\int_{t-\frac{T}{4}}^{t}1\cdot d\tau=\tau\Big|_{t-\frac{T}{4}}^{t}=t-\left(t-\frac{T}{4}\right)=\frac{T}{4} \tag{2.3}$$

Ko t preseže T, se meje integrala spet spremenijo, produkt funkcij v teh mejah ostane 1:

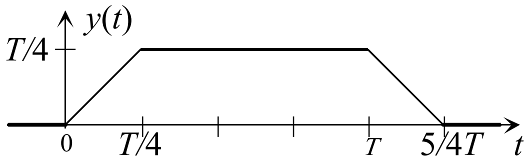


$$y(t)=\int_{t-\frac{T}{4}}^{T}1\cdot d\tau=\tau\Big|_{t-\frac{T}{4}}^{T}=T-\left(t-\frac{T}{4}\right)=\frac{5}{4}T-t \tag{2.4}$$

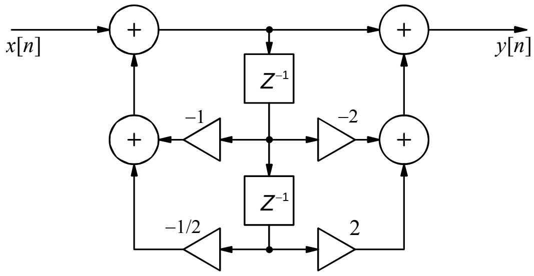
Povzemimo izračunano:

$$y(t)=\begin{cases} t & ; \quad 0<t<\dfrac{T}{4} \\ \dfrac{T}{4} & ; \quad \dfrac{T}{4}<t<T \\ \dfrac{5}{4}T-t & ; \quad T<t<\dfrac{5}{4}T \\ 0 & ; \quad sicer \end{cases} \tag{2.5}$$

Skica:

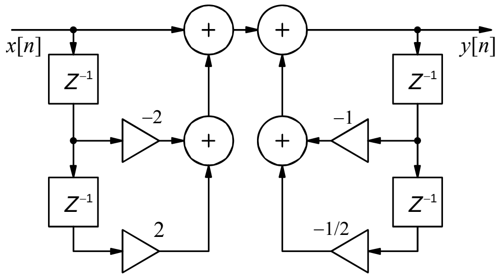


3. Ali je podano časovno diskretno linearno vezje stabilno? Izračunajte sistemsko funkcijo $H(z)$? V z-ravnini narišite lego ničel in polov! Skicirajte potek frekvenčnega odziva $|H(\Omega)|$!



Rešitev:

Enačbo vezja je lažje izpisati iz direktne oblike I zato bomo to vezje, ki je narisano v direktni obliki II, narisali še enkrat:



Sedaj lahko enačbo enostavno izpišemo iz vezja:

$$Y(z)=X(z)-2\cdot X(z)z^{-1}+2\cdot X(z)z^{-2}-1\cdot Y(z)z^{-1}-0,5\cdot Y(z)z^{-2} \tag{3.1}$$

In jo uredimo:

$$Y(z)+1\cdot Y(z)z^{-1}+0,5\cdot Y(z)z^{-2}=X(z)-2\cdot X(z)z^{-1}+2\cdot X(z)z^{-2} \tag{3.2}$$

$$Y(z)\left(1+z^{-1}+0,5z^{-2}\right)=X(z)\left(1-2z^{-1}+2z^{-2}\right) \tag{3.3}$$

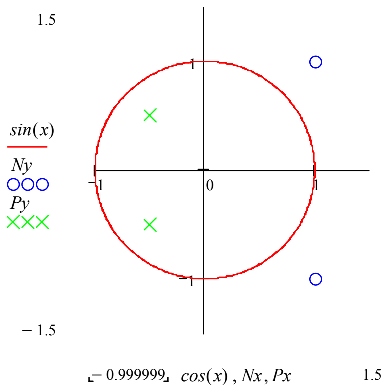
$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{1-2z^{-1}+2z^{-2}}{1+z^{-1}+0,5z^{-2}}\cdot\frac{z^2}{z^2}=\frac{z^2-2z+2}{z^2+z+0,5} \tag{3.4}$$

Izračunamo ničle in pole:

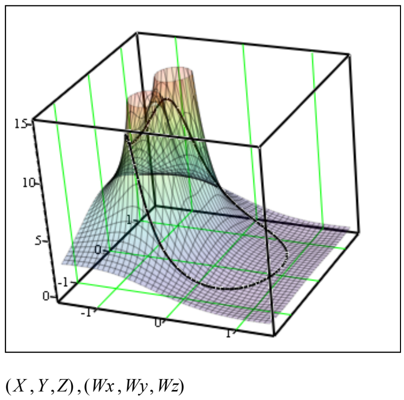
$$n_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{2\pm\sqrt{4-4\cdot 2}}{2}=1\pm j \tag{3.5}$$

$$p_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-1\pm\sqrt{1-4\cdot 0,5}}{2}=\frac{-1\pm j}{2} \tag{3.6}$$

Ničle in poli v z ravnini:



3D slika $H(z)$ v z ravnini (tu podana le za boljšo predstavo, na izpitu ni bila potrebna):

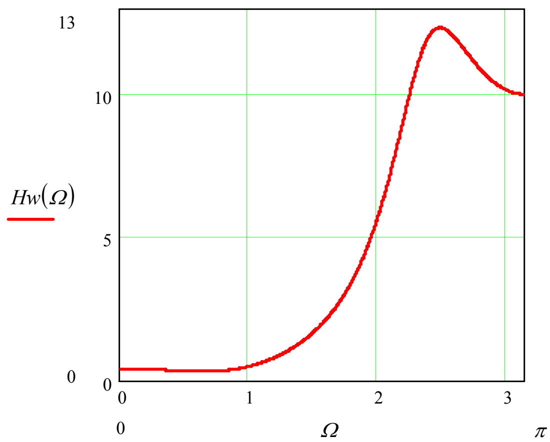


Iz razdalj od ničel in polov do določene točke na krožnici izračunamo nekaj vrednosti, ki so nam v pomoč pri risanju skice. Ker gre samo za skico, ni nujno potrebno računati teh vrednosti, lahko samo narišemo približno obliko frekvenčne karakteristike:

$$|H(0)|=\frac{1\cdot 1}{\left(\sqrt{1,5^2+0,5^2}\right)^2}\approx 0,4$$

$$|H(\pi)|=\frac{\sqrt{2^2+1^2}^{\,2}}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}=10$$

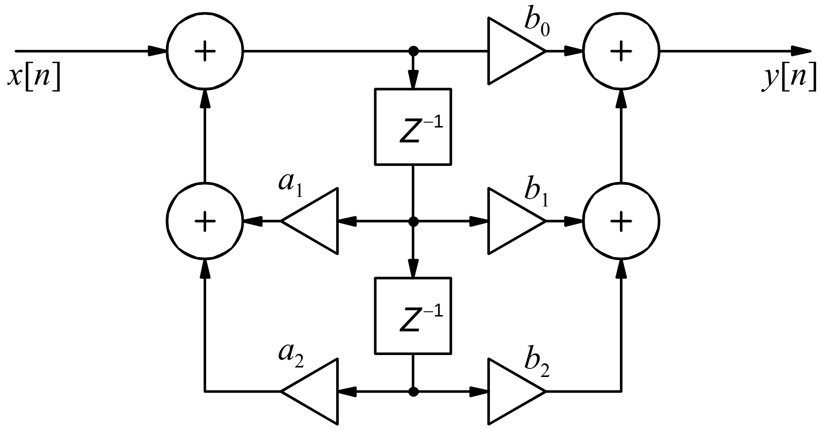
$$\left|H\left(\frac{3}{4}\pi\right)\right|=\frac{\left(1+\sqrt{2}\right)\cdot\left(\sqrt{\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}\right)}{\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\cdot\sqrt{\left(0,5+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-0,5\right)^2}}\approx 11,7$$



4. Teoretična vprašanja

a. Kaj je IIR filter (LTI sistem)?
IIR filter je časovno diskreten LTI sistem z neskončnim impulznim odzivom (Infinite Impulse Response). IIR filter je rekurziven in ima vsaj en koeficient $a_i \neq 0$.

b. Narišite splošno shemo IIR sistema drugega reda v direktni obliki II !



$$H(z) = H_1(z) \cdot H_2(z) = \frac{1}{1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2}} \cdot \left(b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} \right) =$$

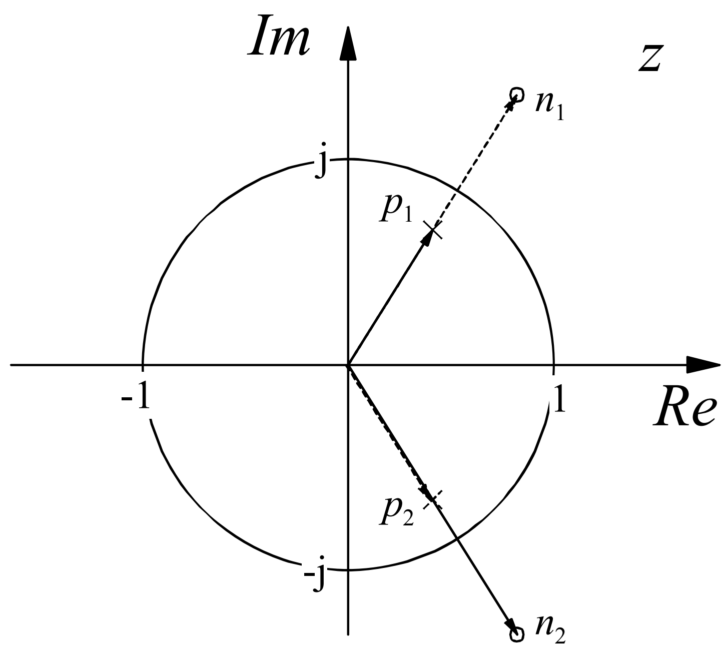
$$= \frac{b_0 z^2 + b_1 z + b_2}{z^2 - a_1 z - a_2}$$

c. Kakšna mora biti razporeditev polov in ničel faznega sukalnika?
Ponazorite na primeru sistema drugega reda?

Ničle in poli morajo biti recipročne vrednosti. Za sistem drugega reda to pomeni, da mora imeti dva pola znotraj enotinega kroga in dve ničli izven njega.

$$p_2 = p_1^* \qquad |p_1| = |p_2| < 1$$

$$n_1 = \frac{1}{p_2} \qquad n_2 = \frac{1}{p_1}$$



d. Kaj mora veljati za impulzni odziv $h[n]$ kavzalnega (fizikalno uresničljivega) sistema? Kako se kavzalnost odraža na številu ničel oziroma polov?

Odziv kavzalnega (fizikalno uresničljivega sistema) ne more prehitevati vhodnega signala, zato mora veljati: $h[n] = 0$ za $n < 0$.
Število ničel je manjše kvečjemu enako številu polov.

e. Kaj velja za lego ničel in polov sistema z minimalno fazo?

Sistem z minimalno fazo mora imeti vse ničle znotraj enotskega kroga, kjer se nahajajo tudi poli stabilnega sistema.

$$|n_i| < 1 \text{ za } \quad i = 1, 2, \ldots, M$$