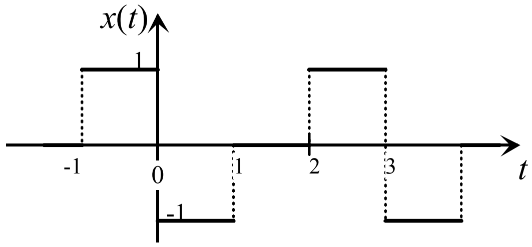
Naloge pisnega izpita

# PROCESIRANJE SIGNALOV

Datum: 11. 09. 2007

**1.** Določite Fourierevo vrsto podanega signala.




Ali je signal močnostni ali energijski? Izračunajte energijo ali moč signala (tisto veličino, ki se da določiti). Kolikšna je enosmerna komponenta signala?

Rešitev:

$$T=3, \omega_0=\frac{2\pi}{T}=\frac{2\pi}{3} \tag{1.1}$$

$$X_k=\frac{1}{T}\int_{\tau}^{T+\tau} f(t)e^{-jk\omega_0 t}dt=\frac{1}{3}\left(\int_{-1}^{0}1\cdot e^{-jk\omega_0 t}dt+\int_{0}^{1}(-1)\cdot e^{-jk\omega_0 t}dt\right) \tag{1.2}$$

$$X_k=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{-jk\omega_0}e^{-jk\omega_0 t}\Big|_{-1}^{0}-\frac{1}{-jk\omega_0}e^{-jk\omega_0 t}\Big|_{0}^{1}\right) \tag{1.3}$$

$$X_k=\frac{1}{-j3k\omega_0}\left(e^{-jk\omega_0 0}-e^{-jk\omega_0(-1)}-\left(e^{-jk\omega_0 1}-e^{-jk\omega_0 0}\right)\right) \tag{1.4}$$

$$X_k=\frac{1}{-j3k\omega_0}\left(1-e^{-jk\omega_0(-1)}-e^{-jk\omega_0}+1\right)=\frac{j}{3k\omega_0}\left(2-e^{+jk\omega_0}-e^{-jk\omega_0}\right) \tag{1.5}$$

$$X_k=\frac{j}{3k\omega_0}\left(2-2\cos(k\omega_0)\right)=\frac{2j}{3k\omega_0}\left(1-\cos(k\omega_0)\right) \tag{1.6}$$

$$X_k=\frac{2j}{3k\frac{2\pi}{3}}\left(1-\cos\left(k\frac{2\pi}{3}\right)\right)=\underline{\underline{\frac{j}{k\pi}\left(1-\cos\left(k\frac{2\pi}{3}\right)\right)}} \tag{1.7}$$

$$X_k=\underline{\underline{\frac{j}{k\pi}\left(2\sin^2\left(k\frac{\pi}{3}\right)\right)}} \tag{1.8}$$

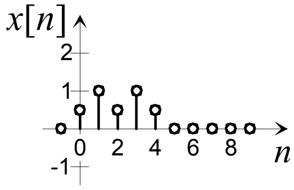
Enosmerna komponenta signala ($X_0$):

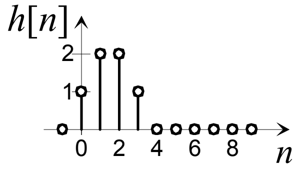
$$X_0=\frac{1}{T}\int_{\tau}^{T+\tau} f(t)e^{-j0\omega_0 t}dt=\frac{1}{T}\int_{\tau}^{T+\tau} f(t)dt=\frac{1}{3}\left(\int_{-1}^{0}dt+\int_{0}^{1}(-1)dt\right)=0 \tag{1.9}$$

Signal je močnostni, ker je periodičen in je zato njegova energija neskončna.

$$P=\frac{1}{T}\int_{\tau}^{T+\tau} f^2(t)dt=\frac{1}{3}\left(\int_{-1}^{0}1^2dt+\int_{0}^{1}(-1)^2dt\right)=\frac{2}{3} \tag{1.10}$$

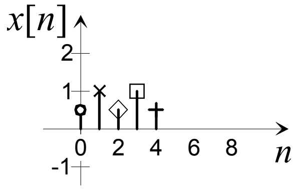
**2.** Za sistem s podanim odzivom na enotin impulz $h[n]$ izračunajte in narišite odziv na narisani signal $x[n]$.



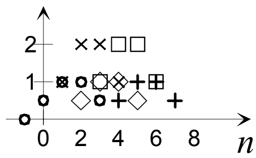




Rešitev:

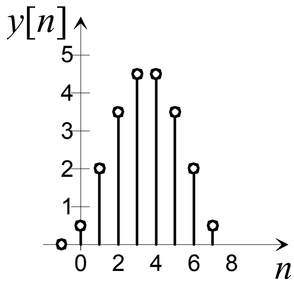
Vsaka neničelna vrednost vhodnega signala $x[n]$ povzroči na izhodu ustrezno skaliran (povečan ali pomanjšan) in zamaknjen impulzni odziv $h[n]$. Kjer se več odzivov prekriva, se seštejejo. Da lahko ločimo odzive na izhodu, označimo posamezne vrednosti vhoda z različnimi znaki, na izhodu pa cel odziv z enakimi znaki:




Slika 1: Z različnimi znaki označene vrednosti vhodnega signala




Slika 2: Odzivi vezja na posamezne vrednosti vhodnega signala



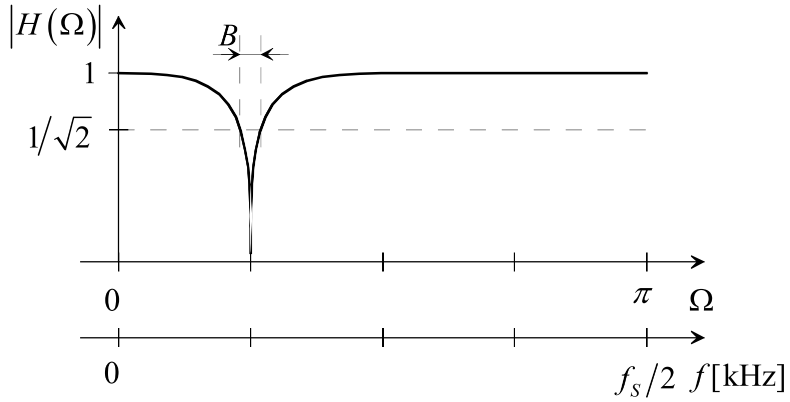

Slika 3: Odziv vezja na vhodni signal

Do iste rešitve pridemo, če enega od signalov prezrcalimo okoli ordinatne osi, ga zapeljemo čez drugi signal in v vsakem koraku seštejemo vse produkte istoležnih vrednosti.

**3.** Skicirajte potek frekvenčnega odziva časovno diskretnega zareznega (notch) sita s frekvenco vzorčenja 16 kHz, zarezo pri 2 kHz in pasovno širino 400 Hz. Določite in narišite lego ničel in polov v z-ravnini. Določite sistemsko funkcijo $H(z)$, zapišite diferenčno enačbo in narišite shemo vezja.

Rešitev:

Skica poteka frekvenčnega odziva zareznega sita:

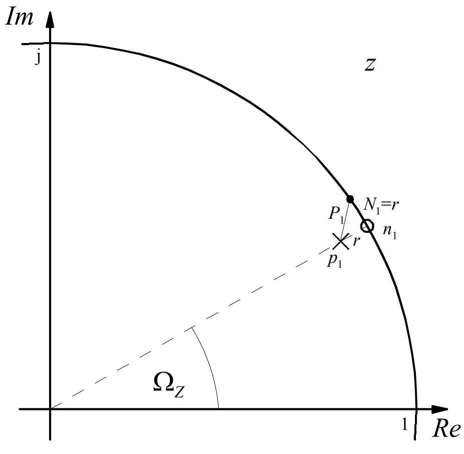



Vse frekvence preračunamo v diskretne frekvence:

$$\Omega_Z = 2\pi \cdot \frac{f_Z}{f_S} = 2\pi \cdot \frac{2\text{ kHz}}{16\text{ kHz}} = \frac{\pi}{4} \tag{3.1}$$

$$\Omega_B = 2\pi \cdot \frac{B}{f_S} = 2\pi \cdot \frac{0,4\text{ kHz}}{16\text{ kHz}} = \frac{\pi}{20} \tag{3.2}$$

Odziv nič pri določeni frekveni dosežemo tako, da pri tisti diskretni frekvenci postavimo ničlo na enotsko krožnico. Da vpliv ničle pri drugih frekvencah kompenziramo, moramo v bližino postaviti pol. Od razdalje med ničlo in polom je odvisno kako hitro se bo odziv ničle izničil z vplivom pola – kolikšna bo pasovna širina sita.




Frekvenčni odziv se zmanjša za $1/\sqrt{2}$ ko je razdalja med ničlo in trenutno diskretno frekvenco enaka razdalji med ničlo in polom. Takrat je namreč razdalja med polom in trenutno frekvenco za $\sqrt{2}$ večja kot razdalja med ničlo in polom: $N_1 = r$, $P_1 = r\sqrt{2}$

Zato mora biti razdalja med ničlo in polom $r = \dfrac{\Omega_B}{2} = \dfrac{\pi}{10}$

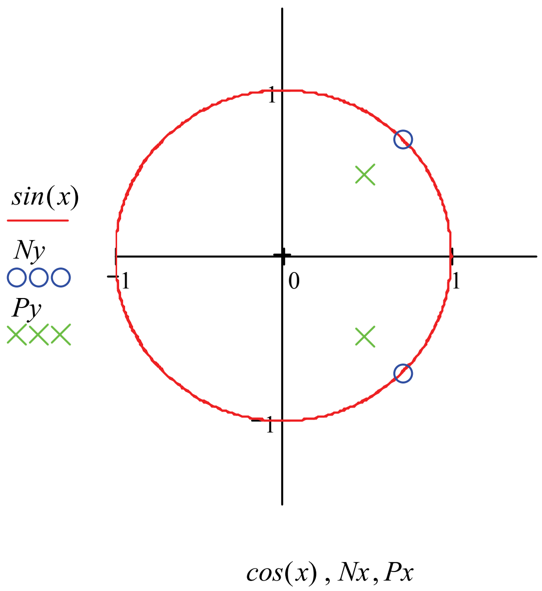
Vsaka ničla in vsak pol (razen realnih) ima svoj konjugiran par. Sedaj jih lahko zapišemo:

$$n_{1,2} = \cos(\Omega_Z) \pm j\sin(\Omega_Z) \tag{3.3}$$

$$n_{1,2} = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \pm j\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \pm j\frac{\sqrt{2}}{2} \tag{3.4}$$

$$p_{1,2} = (1-r)\left(\cos(\Omega_Z) \pm j\sin(\Omega_Z)\right) \tag{3.5}$$

$$p_{1,2} = \left(1-\frac{\pi}{10}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \pm j\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0,485 \pm j0,485 \tag{3.6}$$




Zapišimo sistemsko funkcijo $H(z)$ in iz nje izpeljimo diferenčno enačbo:

$$H(z) = \frac{(z-n_1)(z-n_2)}{(z-p_1)(z-p_2)} = \frac{z^2 - z(n_1+n_2) + n_1n_2}{z^2 - z(p_1+p_2) + p_1p_2} \tag{3.7}$$

$$n_1 + n_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - j\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \tag{3.8}$$

$$n_1n_2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - j\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 1 \tag{3.9}$$

$$p_1 + p_2 = 0,485 + j0,485 + 0,485 - j0,485 = 0,97 \tag{3.10}$$

$$p_1p_2 = (0,485 + j0,485)\cdot(0,485 - j0,485) = (0,485)^2 + (0,485)^2 = 0,47 \tag{3.11}$$

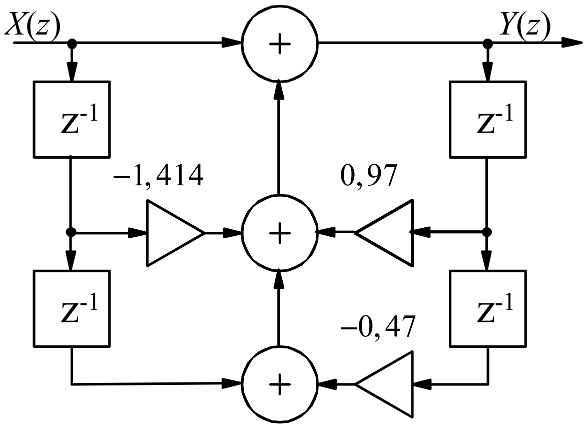
$$H(z) = \frac{z^2 - 1,414\cdot z + 1}{z^2 - 0,97\cdot z + 0,47} = \frac{1 - 1,414\cdot z^{-1} + z^{-2}}{1 - 0,97\cdot z^{-1} + 0,47\cdot z^{-2}} = \frac{Y(z)}{X(z)} \tag{3.12}$$

$$Y(z)\left(1 - 0,97z^{-1} + 0,47z^{-2}\right) = X(z)\left(1 - 1,414z^{-1} + z^{-2}\right) \tag{3.13}$$

$$Y(z) = X(z) - 1,414X(z)z^{-1} + X(z)z^{-2} + 0,97Y(z)z^{-1} - 0,47Y(z)z^{-2} \tag{3.14}$$

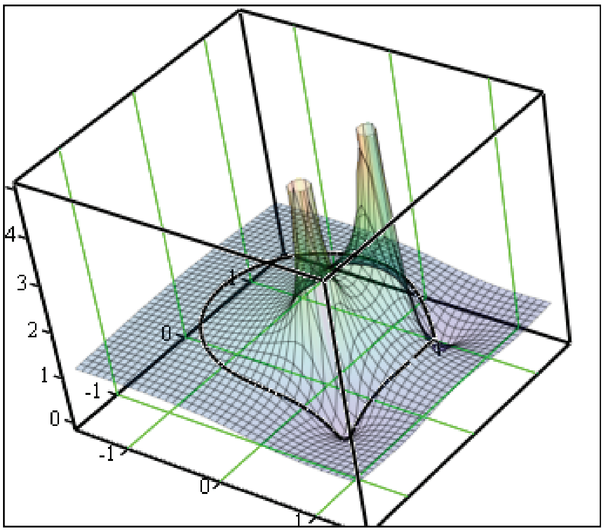
$$y[n] = x[n] - 1,414x[n-1] + x[n-2] + 0,97y[n-1] - 0,47y[n-2] \tag{3.15}$$

Iz diferenčne enačbe lahko narišemo shemo vezja:



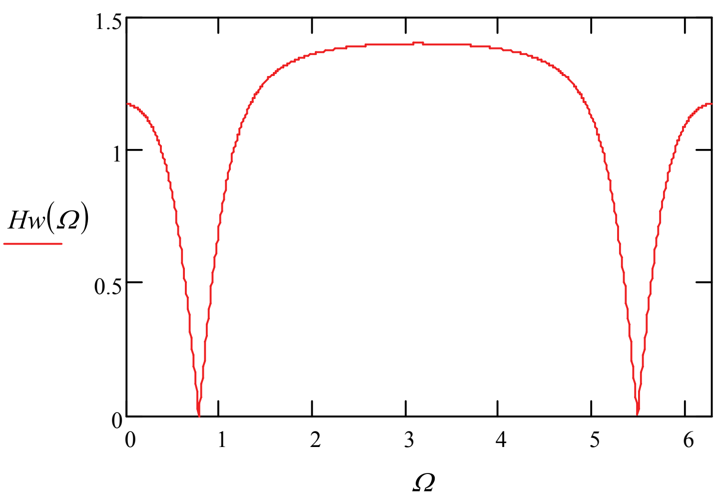

Za boljšo predstavo prilagam 3D sliko z-prostora in dejanski frekvenčni odziv:

3D z-prostor:



$(X, Y, Z), (Wx, Wy, Wz)$

Dejanski frekvenčni odziv:




Ker je pasovna širina dokaj velika glede na vzorčevalno frekvenco, sta ničla in pol precej narazen in zato odziv nikoli ne postane enakomeren. Poleg tega naraste precej čez 1.

Če bi bila pasovna širina manjša, bi bil odziv precej bolj podoben prvi skici.

Teoretična vprašanja

**a)** Ali je lahko IIR sistem nestabilen? Zakaj?

Da. IIR sistem ima povratno vezavo, kar je pogoj za nestabilnost. (Če izhodni signal vodimo nazaj v sistem, nikoli ne zmanjka vzbujanja. Če se pri tem signal še ojačuje, izhod ves čas narašča – to je nestabilnost.)

**b)** Zapišite vse rešitve enačbe $z^3 = 27$ !

$$z^3 = 27 = 27 \cdot e^{j2k\pi} \tag{4.1}$$

$$\left(z^3\right)^{\frac{1}{3}} = \left(27 \cdot e^{j2k\pi}\right)^{\frac{1}{3}} = 27^{\frac{1}{3}} \cdot e^{jk\frac{2\pi}{3}} \tag{4.2}$$

$$z = 3 \cdot e^{jk\frac{2\pi}{3}} \tag{4.3}$$

$$z_0 = 3 \tag{4.4}$$

$$z_1 = 3 \cdot e^{j\frac{2\pi}{3}} \tag{4.5}$$

$$z_2 = 3 \cdot e^{j\frac{4\pi}{3}} \tag{4.6}$$

**c)** Kaj mora veljati za pole in/ali ničle časovno diskretnega sistema, da je stabilen?

Poli časovno diskretnega sistema morajo biti znotraj enotske krožnice z-ravnine.

**d)** Napišite Fourierevo vrsto za funkcijo $x(t) = \cos(2\pi t)$

$$\omega_0 = 2\pi \tag{4.7}$$

$$X_k = \begin{cases} \frac{1}{2} & ; \quad k = \pm 1 \\ 0 & ; \quad k \neq \pm 1 \end{cases} \tag{4.8}$$

**e)** Napišite Fourierev transform funkcije $x(t) = \cos(2\pi t)$

$$X(\omega) = \pi\delta(\omega - 2\pi) + \pi\delta(\omega + 2\pi) \tag{4.9}$$