Naloge 1. kolokvija

PROCESIRANJE SIGNALOV

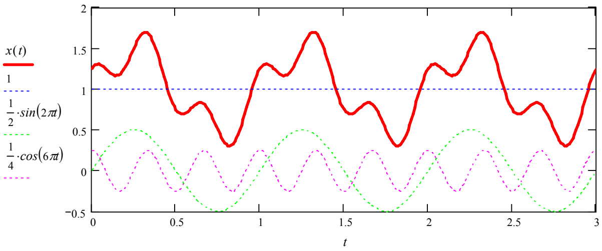
Datum: 7. 12. 2006

1. Skicirajte signal $x(t)$ in izračunajte njegovo normalizirano moč ($R = 1\ \Omega$) ter koeficiente X_k kompleksne Fouriereve vrste! Za reševanje uporabite pravila!

$$x(t) = 1 + \frac{1}{2}\sin(2\pi t) + \frac{1}{4}\cos(6\pi t)$$

Rešitev:

Preden lahko signale zapišemo s Fourierevo vrsto, je potrebno določiti osnovno frekvenco ω_O. To lahko ugotovimo iz zapisa ali iz skice signala.



Perioda signala je $T = 1$, torej je osnovna frekvenca $\omega_O = \frac{2\pi}{T} = 2\pi$.

Fouriereva vrsta signala, ki je vsota več signalov, je enaka vsoti Fourierevih vrst posameznih signalov (glej Gradivo, Fouriereva transformacija, enačba (3.2.30)):

$$x(t) = f(t) + g(t) + h(t) \leftrightarrow X_k = F_k + G_k + H_k \tag{1.1}$$

Dani signal je sestavljen iz treh signalov:

$$\begin{aligned} f(t) &= 1 \\ g(t) &= \frac{1}{2}\sin(2\pi t) = \frac{1}{2}\sin(\omega_O t) \\ h(t) &= \frac{1}{4}\cos(6\pi t) = \frac{1}{4}\cos(3\omega_O t) \end{aligned} \tag{1.2}$$

Signal $f(t)$ je le enosmerna vrednost. Torej je:

$$F_0 = 1 \tag{1.3}$$

$$F_k = 0 \quad ; \quad k \neq 0 \tag{1.4}$$

Signal $g(t)$ je sinus s polovično amplitudo. Fourierevo vrsto za sinus poznamo:

$$\sin(\omega_O t) \leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2j} & ; \quad k = 1 \\ -\frac{1}{2j} & ; \quad k = -1 \\ 0 & ; \quad k \neq \pm 1 \end{cases} \tag{1.5}$$

Ker je $g(t)$ za polovico manjši so tudi koeficienti njegove Fouriereve vrste manjši:

$$G_k = \begin{cases} \dfrac{1}{4j} & ; \quad k = 1 \\ -\dfrac{1}{4j} & ; \quad k = -1 \\ 0 & ; \quad k \neq \pm 1 \end{cases} \tag{1.6}$$

Prav tako poznamo Fourierevo vrsto za cosinus:

$$\cos\left(\omega_O t\right) \leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{2} & ; \quad k = 1 \\ \dfrac{1}{2} & ; \quad k = -1 \\ 0 & ; \quad k \neq \pm 1 \end{cases} \tag{1.7}$$

Funkcija $h(t)$ je za faktor 4 zmanjšan cosinus, zato bodo koeficienti zmanjšani za enak faktor. Ker je frekvenca cosinusa 3-krat višja od osnovne, gre za $k = \pm 3$.

$$H_k = \begin{cases} \dfrac{1}{8} & ; \quad k = 3 \\ \dfrac{1}{8} & ; \quad k = -3 \\ 0 & ; \quad k \neq \pm 3 \end{cases} \tag{1.8}$$

Upoštevajmo (1.1) in dobimo:

$$F_k = \begin{cases} 1 & ; \quad k = 0 \\ \dfrac{1}{4j} & ; \quad k = 1 \\ -\dfrac{1}{4j} & ; \quad k = -1 \\ \dfrac{1}{8} & ; \quad k = \pm 3 \\ 0 & ; \quad sicer \end{cases} \tag{1.9}$$

Če ne poznamo Fouriereve vrste za sinus in cosinus, uporabimo pravili iz Gradiva, Fouriereva transformacija, (3.2.32) in (3.2.33).

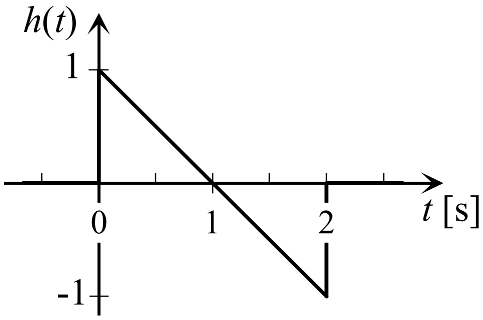
Moč danega signala je najlaže izračunati s pomočjo Parsevalovega izreka:

$$P_X = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left|X_k\right|^2 = \frac{1}{8^2} + \frac{1}{4^2} + 1 + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{8^2} = \frac{1}{64} + \frac{1}{16} + 1 + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} \tag{1.10}$$

$$P_X = \frac{1}{64} + \frac{4}{64} + \frac{64}{64} + \frac{4}{64} + \frac{1}{64} = \frac{74}{64} = \frac{37}{32} = 1{,}15625 \tag{1.11}$$

2. Določite odziv LTI sistema na signal $x(t)$. Odziv sistema na enotin impulz je podan na sliki.

$$x(t)=\begin{cases}3 & ; \quad 0\,\mathrm{s}<t<5\,\mathrm{s}\\ 0 & ; \quad sicer\end{cases}$$



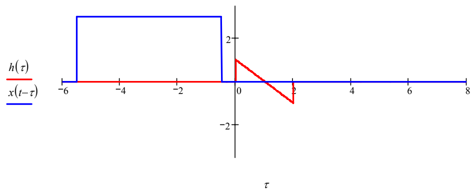
Rešitev:

Zapišemo $h(t)$ v analitični obliki:

$$h(t)=\begin{cases}1-t & ; \quad 0<t<2\\ 0 & ; \quad sicer\end{cases} \tag{1.12}$$

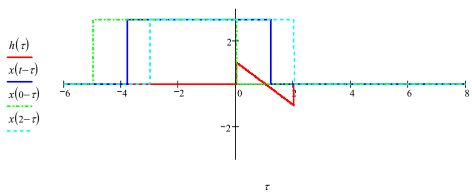
Odločimo se, katero funkcijo bomo obrnili. Lažje je obračati tiste funkcije, pri katerih se v zapisu manjkrat pojavlja neodvisna spremenljivka (t). V danem primeru je lažje obrniti $x(t)$.

$t<0$:



$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t-\tau)h(\tau)d\tau=0 \tag{1.13}$$

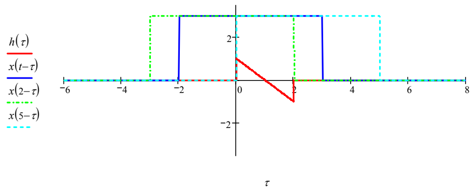
$0<t<2$:



$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t-\tau)h(\tau)d\tau=\int_{0}^{t}3\cdot(1-\tau)d\tau=3\cdot\int_{0}^{t}(1-\tau)d\tau=3\cdot\left(\int_{0}^{t}d\tau-\int_{0}^{t}\tau d\tau\right) \tag{1.14}$$

$$y(t)=3\cdot\left(\tau\Big|_0^t-\frac{\tau^2}{2}\Big|_0^t\right)=3\cdot\left((t-0)-\frac{1}{2}\left(t^2-0^2\right)\right)=3t-\frac{3}{2}t^2 \tag{1.15}$$

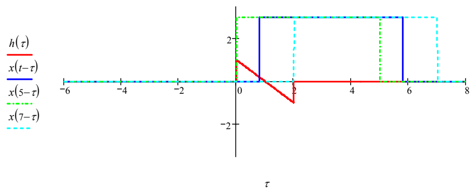
$2 < t < 5$:



$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t-\tau)h(\tau)d\tau=\int_{0}^{2}3\cdot(1-\tau)d\tau=3\cdot\left(\int_{0}^{2}d\tau-\int_{0}^{2}\tau d\tau\right) \tag{1.16}$$

$$y(t)=3\cdot\left(\tau\Big|_{0}^{2}-\frac{\tau^{2}}{2}\Bigg|_{0}^{2}\right)=3\cdot 2-\frac{3}{2}2^{2}=0 \tag{1.17}$$

$5 < t < 7$:



$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t-\tau)h(\tau)d\tau=\int_{t-5}^{2}3\cdot(1-\tau)d\tau=3\cdot\left(\int_{t-5}^{2}d\tau-\int_{t-5}^{2}\tau d\tau\right) \tag{1.18}$$

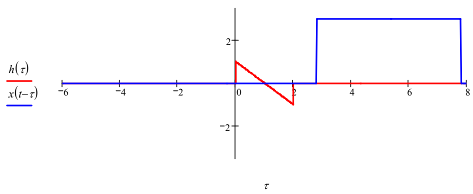
$$y(t)=3\cdot\left(\tau\Big|_{t-5}^{2}-\frac{\tau^{2}}{2}\Bigg|_{t-5}^{2}\right)=3\cdot\left(2-(t-5)-\frac{1}{2}\left(2^{2}-(t-5)^{2}\right)\right) \tag{1.19}$$

$$y(t)=3\cdot\left(2-t+5-\frac{1}{2}\left(4-\left(t^{2}-10t+25\right)\right)\right)=3\cdot\left(7-t-\frac{1}{2}\left(4-t^{2}+10t-25\right)\right) \tag{1.20}$$

$$y(t)=3\cdot\left(7-t-\frac{1}{2}\left(-21-t^{2}+10t\right)\right)=3\cdot\left(7-t+\frac{21}{2}+\frac{t^{2}}{2}-5t\right) \tag{1.21}$$

$$y(t)=3\cdot\left(\frac{35}{2}+\frac{t^{2}}{2}-6t\right)=\frac{3}{2}t^{2}-18t+\frac{3}{2}\cdot 35 \tag{1.22}$$

$7 < t$:

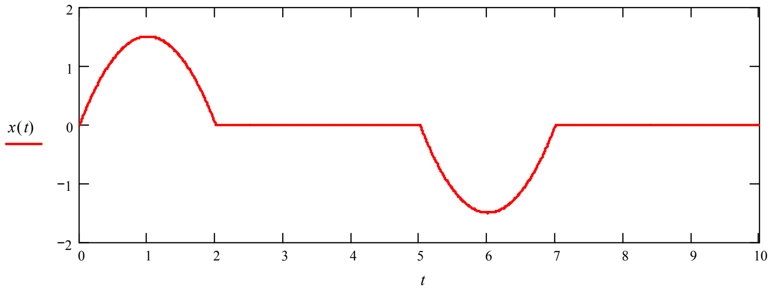


$$y(t)=0 \tag{1.23}$$

Izračunane odseke združimo v zapis funkcije:

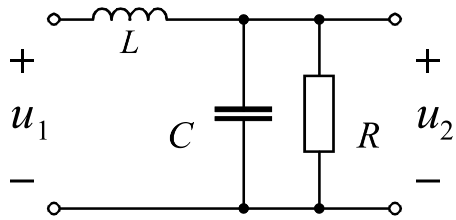
$$y(t)=\begin{cases} 3t-\frac{3}{2}t^2 & ; \quad 0<t<2 \\ \frac{3}{2}t^2-18t+\frac{3}{2}\cdot 35 & ; \quad 5<t<7 \\ 0 & ; \quad sicer \end{cases} \tag{1.24}$$

Skica (ni bila potrebna):



3. Izračunajte sistemsko funkcijo $H(s)$ narisanega vezja in narišite lego ničel in polov v ravnini kompleksne frekvence s! Skicirajte frekvenčni odziv $H(\omega)$!

$R=150\,\Omega \qquad L=100\text{ mH} \qquad C=10\,\mu\text{F}$



Rešitev:

$$I(s)=\frac{U_1(s)}{X_L+\frac{X_C\cdot R}{X_C+R}} \tag{1.25}$$

$$U_2(s)=I(s)\cdot\frac{X_C\cdot R}{X_C+R}=\frac{U_1(s)}{X_L+\frac{X_C\cdot R}{X_C+R}}\cdot\frac{X_C\cdot R}{X_C+R} \tag{1.26}$$

$$H(s)=\frac{U_2(s)}{U_1(s)}=\frac{\frac{U_1(s)}{X_L+\frac{X_C\cdot R}{X_C+R}}\cdot\frac{X_C\cdot R}{X_C+R}}{U_1(s)}=\frac{1}{X_L+\frac{X_C\cdot R}{X_C+R}}\cdot\frac{X_C\cdot R}{X_C+R} \tag{1.27}$$

$$H(s)=\frac{X_C\cdot R}{X_L\cdot(X_C+R)+X_C\cdot R}=\frac{\frac{1}{Cs}\cdot R}{Ls\cdot\left(\frac{1}{Cs}+R\right)+\frac{1}{Cs}\cdot R}\cdot\frac{Cs}{Cs} \tag{1.28}$$

$$H(s)=\frac{R}{Ls\cdot(1+RCs)+R}=\frac{R}{Ls+RCLs^2+R}=\frac{R}{RLC\left(s^2+s\frac{1}{RC}+\frac{1}{LC}\right)} \tag{1.29}$$

$$H(s)=\frac{1}{LC\left(s^2+s\frac{1}{RC}+\frac{1}{LC}\right)} \tag{1.30}$$

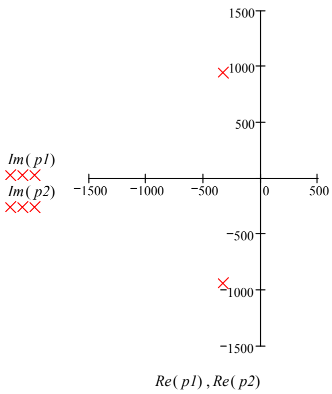
Ničle: jih ni
Poli:

$$H(s)=\frac{1}{LC(s-p_1)(s-p_2)} \tag{1.31}$$

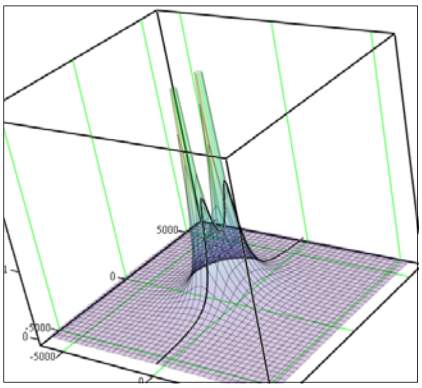
$$p_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-\frac{1}{RC}\pm\sqrt{\left(\frac{1}{RC}\right)^2-\frac{4}{LC}}}{2}=-\frac{1}{2RC}\pm\sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2-\frac{1}{LC}} \tag{1.32}$$

$$p_{1,2}=-333\pm j943 \tag{1.33}$$

Lega polov v *s* ravnini:

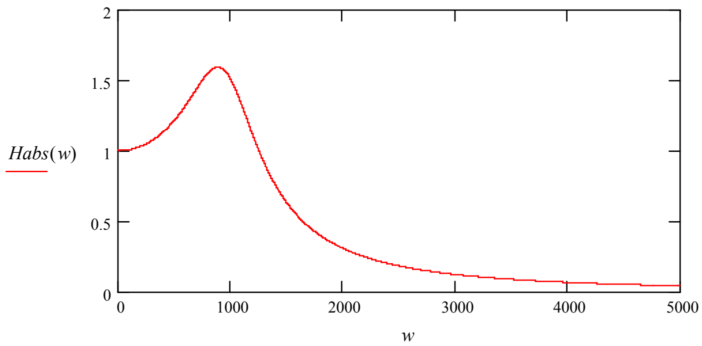


3D pogled(dodan le za boljšo predstavo):



(X, Y, Z), (Wx, Wy, Wz)

Skica frekvenčnega poteka:



4. Teoretična vprašanja:

a) Napišite Parsevalov izrek (teorem) za aperiodičen signal $x(t)$!

$$E_X = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \left|X(\omega)\right|^2 d\omega$$

b) Kaj mora veljati za močnostne signale?

Da je njihova moč omejena in večja od nič.

c) Kje morajo ležati ničle in poli časovno zveznega stabilnega sistema z maksimalno fazo?

Poli stabilnega sistema so na levi strani s ravnine.

Ničle sistema z maksimalno fazo so na desni strani s ravnine.

d) Kako vplivajo ničle in poli v s ravnini na amplitudo frekvenčnega odziva sistema?

Ničle v bližini y osi s ravnine znižujejo frekvenčni odziv, poli pa ga zvišujejo.

e) Napišite zvezo med koeficienti Fouriereve vrste X_k in c_n.

$$c_k = 2\left|X_k\right| \tag{1.34}$$

$$c_0 = X_0 \tag{1.35}$$