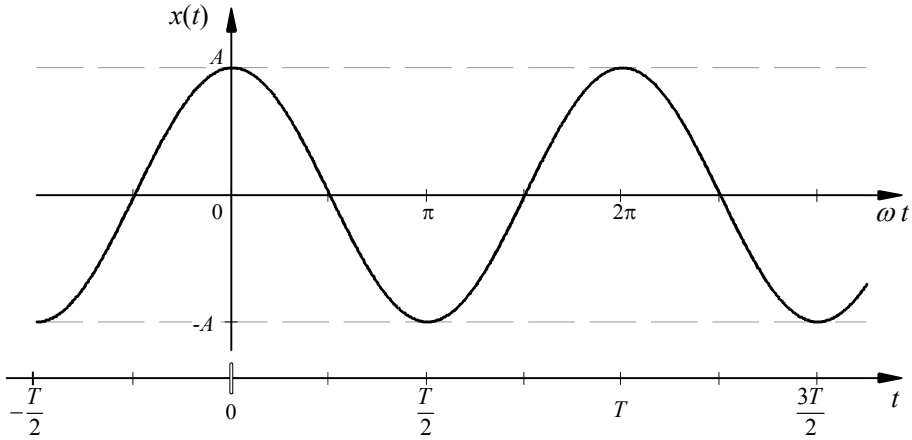
1 Harmonični signali in njihova predstavitev z vektorji – kazalci

Osnovni harmonični signal predstavlja kosinusna časovna odvisnost

$$x(t) = A\cos\omega t\,. \tag{1.1}$$

Časovni diagram tega signala je prikazan na sliki 1.1, in sicer v odvisnosti od faznega kota in

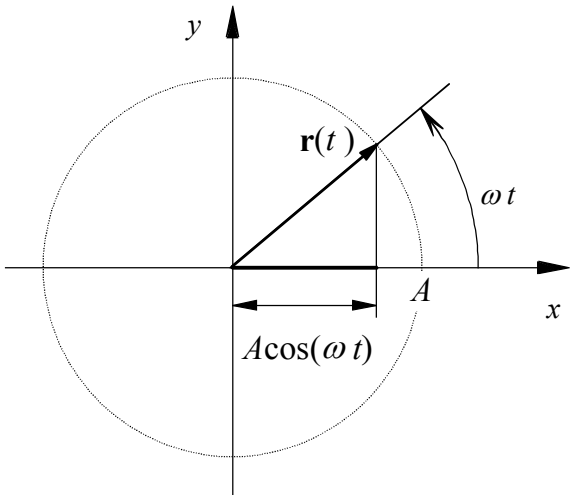


Slika 1.1 – Kosinus z amplitudo A v odvisnosti od faznega kota ωt in časa t

od časa. Zvezo med faznim kotom ωt in časom predstavlja krožna frekvenca

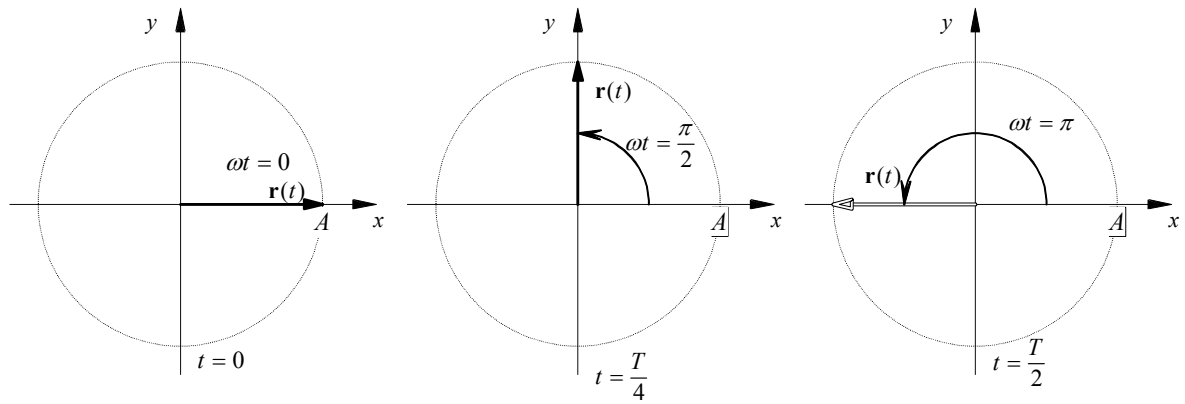
$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}, \tag{1.2}$$

Enota krožne frekvence je radian/s. Ker enote za kot (radian) običajno ne pišemo, je enota krožne frekvence s^{-1}, za razliko od enote za frekvenco, ki je Hz. Kot izražen v radianih ustreza dolžini krožnega loka na enotskem krogu z radijem $r = 1$. Trenutno vrednost signala $x(t)$ lahko predstavimo s projekcijo vektorja $\mathbf{r}(t)$ na os x v ravnini (x, y). Vektor $\mathbf{r}(t)$ z dolžino A, se enakomerno vrti okoli koordinatnega izhodišča s kotno hitrostjo ω (slika 1.2).



Slika 1.2 – Predstavitev kosinusnega signala s projekcijo rotirajočega vektorja

Ob času $t = 0$ leži kazalec v smeri osi x, zato je njegova projekcija $+A$, kar predstavlja maksimalno pozitivno vrednost kosinusnega signala. Na sliki 1.3 so prikazani položaji tega vektorja v treh značilnih časih in z njimi povezanimi faznimi koti. Ustrezno povezavo lahko poiščemo z časovnim diagramom na sliki 1.1 .

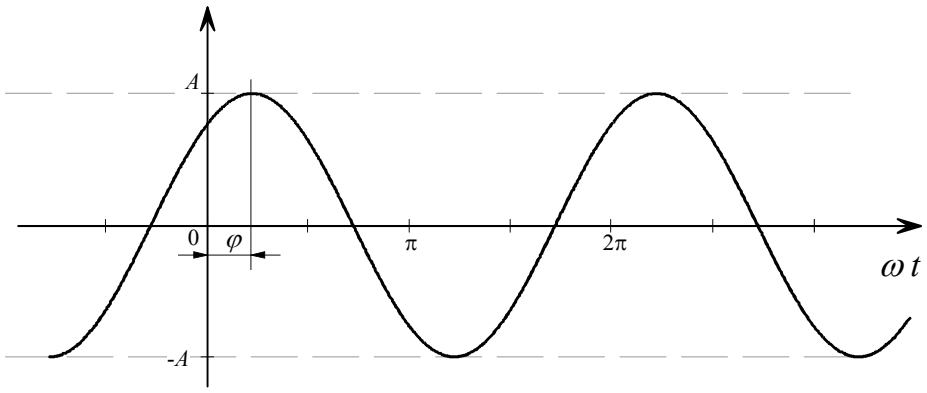


Slika 1.3 – Položaj kazalca **r**(t) v treh značilnih trenutkih

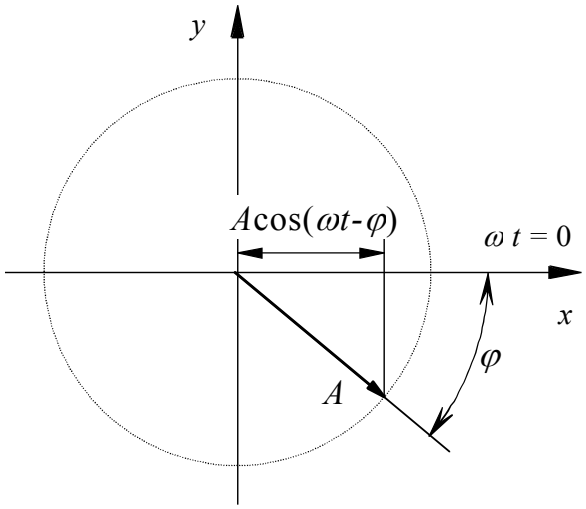
V kolikor harmonični signal nima ob času $t = 0$ maksimuma, ga lahko zapišemo z ustreznim premikom osnovne funkcije

$$x(t) = A\cos(\omega t - \varphi)\,. \tag{1.3}$$

Časovni diagram in ustrezna predstavitev s kazalcem sta prikazana na slikah 1.4 in 1.5 .



Slika 1.4 – Kosinusni signal premaknjen za kot φ

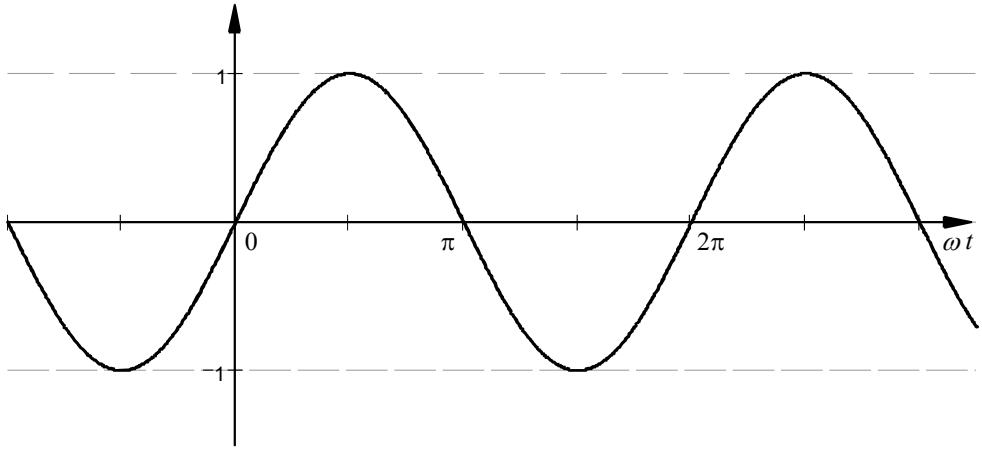


Slika 1.5 – Položaj kazalca v trenutku $t = 0$

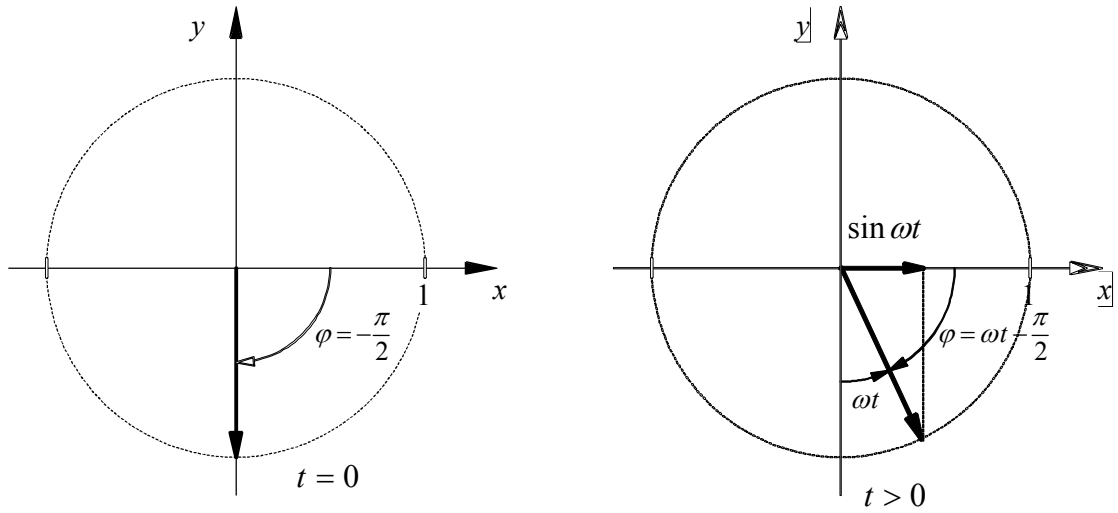
Iz obeh slik vidimo, da zakasnitev signala lahko predstavimo z ustreznim izhodiščnim položajem kazalca **r**(t). Ker velja

$$\sin x = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right), \tag{1.4}$$

prikažemo signal $x(t) = \sin\omega t$, kot kazalec z začetno fazo -π/2, kar je prikazano na slikah 1.6 in 1.7.



Slika 1.6 – Graf signala $x(t) = \sin\omega t$



Slika 1.7 – Položaj kazalca, ki predstavlja $\sin\omega t$ ob času t = 0 in nekaj trenutkov kasneje.

Iz slike 1.7 nazorno vidimo, da mora biti začetna faza kazalca -π/2. Na ta način projekcija kazalca raste s časom in je za $0 < \omega t < \pi$ pozitivna.

Opisovanje harmoničnih signalov istih frekvenc a različnih amplitud in faz z ustreznimi vektorji oz. kazalci ob času $t = 0$, omogoča poenostavljeno računanje različnih kombinacij takšnih signalov. Pri tem uporabljamo pravila, ki veljajo za aritmetiko ravninskih vektorjev.

Na sliki 1.8 je prikazano seštevanje dveh ortogonalnih signalov

$$y(t) = x(t) + y(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t = C\cos(\omega t - \varphi)\,. \tag{1.5}$$

Z uporabo pravil za seštevanje ortogonalnih vektorjev dobimo amplitudo C s Pitagorovim pravilom

$$C = \sqrt{A^2 + B^2}\,, \tag{1.6}$$

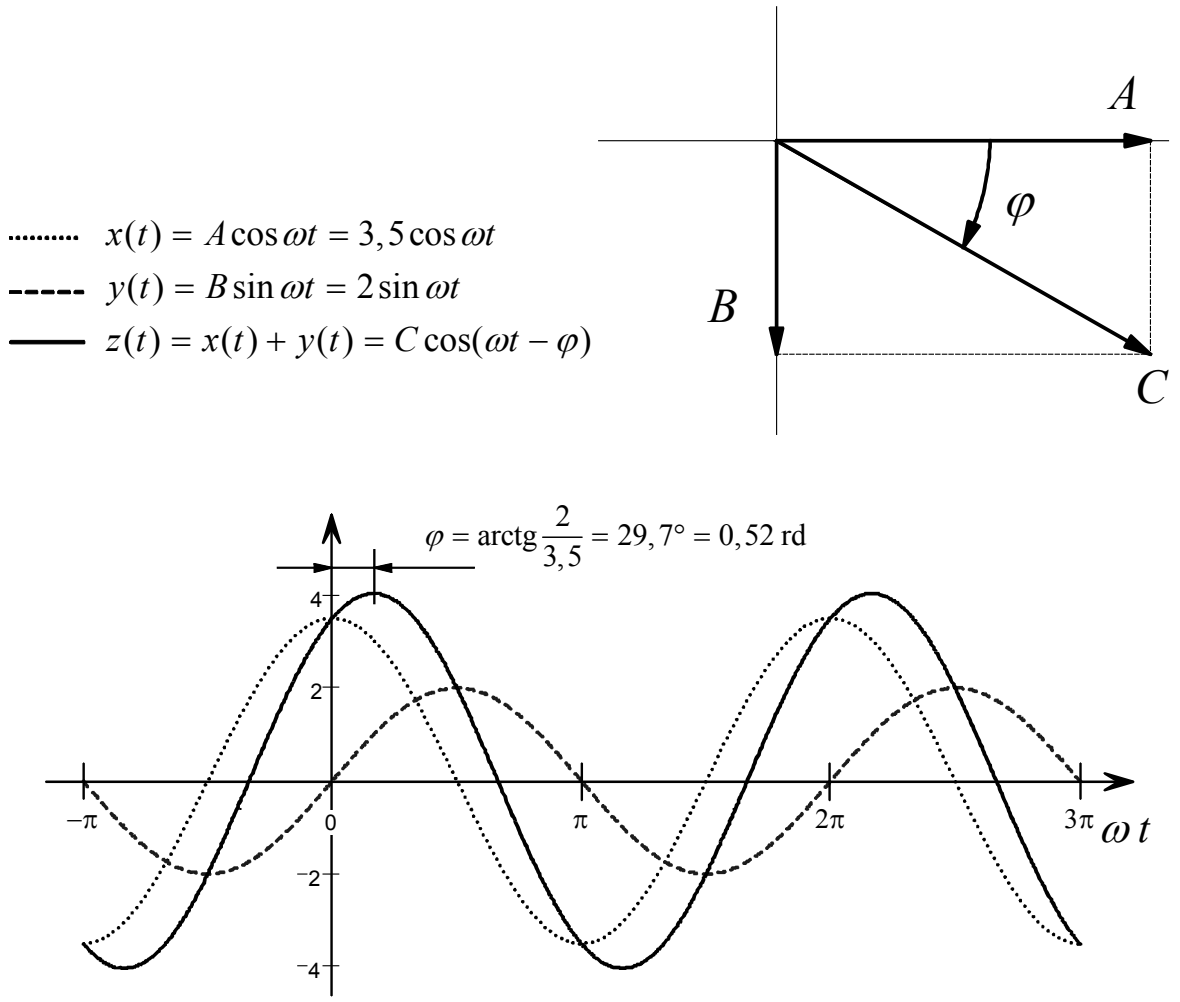
kot φ pa iz razmerja komponent

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{B}{A} + m\pi\,. \tag{1.7}$$

kjer je

$$m = \begin{cases} 0 \text{ za } & A \geq 0 \\ 1 \text{ za } & A < 0 \end{cases} \tag{1.8}$$

Zaloga vrednosti funkcije arctg [-π/2, π/2] ne pokriva kotov φ, ki ležijo v drugem in tretjem kvadrantu, zato v enačbi (1.7) nastopa člen $m\pi$, ki vpliva na rezultat, če je amplituda kosinusne komponente negativna.

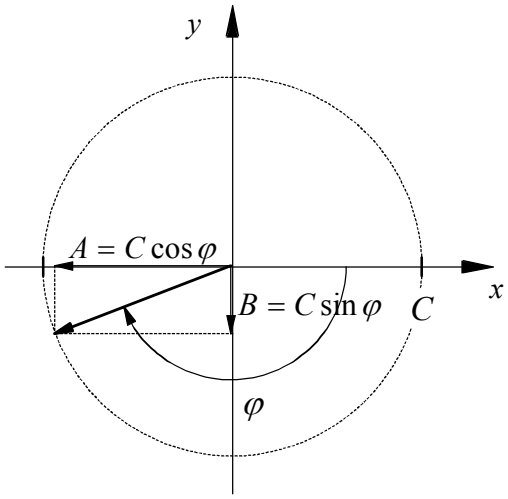


Slika 1.8 – Ilustracija seštevanja sinusnega in kosinusnega signala

Na podoben način, kot poteka seštevanje, lahko poljuben harmonični signal razstavimo na njegovi ortogonalni (tudi kvadraturni) komponenti (kosinus in sinus) z uporabo adicijskega izreka za kosinus

$$\begin{aligned} C\cos(\omega t - \varphi) &= C\left[\cos\omega t\cos\varphi + \sin\omega t\sin\varphi\right] = (C\cos\varphi)\cos\omega t + (C\sin\varphi)\sin\omega t = \\ &= A\cos\omega t + B\sin\omega t \end{aligned} \tag{1.9}$$

Takšno razstavljanje je prikazano na sliki z uporabo geometrijske ponazoritve.



Slika 1.9 – Razstavljanje signala na kvadraturni komponenti

2 Eksponentna funkcija z imaginarnim eksponentom

Imaginarna enota ***j*** je definirana kot vrednost, ki izpolnjuje enačbo

$$j^2 = -1. \tag{2.1}$$

Ker je enačba drugega reda, je njena rešitev tudi –*j*. Z uvedbo imaginarne enote se nam razširi številska premica realnih števil v kompleksno ravnino. Vsako število je predstavljeno z realno in kompleksno komponento. Računanje s kompleksnimi števili je preprosto, dokler uporabljamo le osnovne algebrske operacije, kot so seštevanje, množenje in potenciranje. Za zgled si oglejmo množenje kompleksnih števil:

$$(3+2j)(5-j) = 3\cdot 5 + 2j\cdot 5 - 3\cdot j - 2\cdot j^2 = 15 + 10j - 3j + 2 = 17 + 7j \tag{2.2}$$

Vprašanje vrednosti transcendentnih funkcij za imaginarne oz. kompleksne argumente, rešimo z uporabo funkcijskih potenčnih vrst (Taylorjeva potenčna vrsta). Eksponentno funkcijo lahko zapišemo v obliki neskončne vrste

$$\exp(x) = e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots. \tag{2.3}$$

V enačbo (2.3) vstavimo namesto realne vrednosti čisto imaginarno vrednost *jx* in pri tem upoštevamo definicijo imaginarne enote (2.1) pri računanju potenc

$$\begin{aligned} (jx)^2 &= j^2x^2 = -x^2 \\ (jx)^3 &= j^3x^3 = -jx^3 \\ (jx)^4 &= j^4x^4 = x^4 \end{aligned} \tag{2.4}$$

Višje cele potence se ponavljajo po modulu 4, saj velja

$$j^{n+4k} = j^n j^{4k} = j^n \left(j^4\right)^k = j^n 1^k = j^n \quad \text{za } k \in \mathbb{Z}, \tag{2.5}$$

kjer $\mathbb{Z}$ označuje množico celih števil {..., -2, -1, 0, 1, 2, 3,...}. Z upoštevanjem pravil (2.4) in (2.5) dobimo iz enačbe (2.3)

$$e^{jx} = 1 + \frac{jx}{1!} + \frac{(jx)^2}{2!} + \frac{(jx)^3}{3!} + \frac{(jx)^4}{4!} + \ldots = 1 + j\frac{x}{1!} - \frac{x^2}{2!} - j\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + j\frac{x^5}{5!}\ldots =$$
$$= \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots\right) + j\left(\frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots\right) \tag{2.6}$$

V prvem oklepaju, ki predstavlja realno komponento števila e^{jx} je potenčna vrsta funkcije $\cos x$, v drugem oklepaju pa je vrsta za funkcijo $\sin x$. Enačbo (2.6) predstavlja *Eulerjevo formulo* za kompleksna števila, ki jo kratko zapišemo

$$e^{jx} = \cos x + j \sin x\,. \tag{2.7}$$

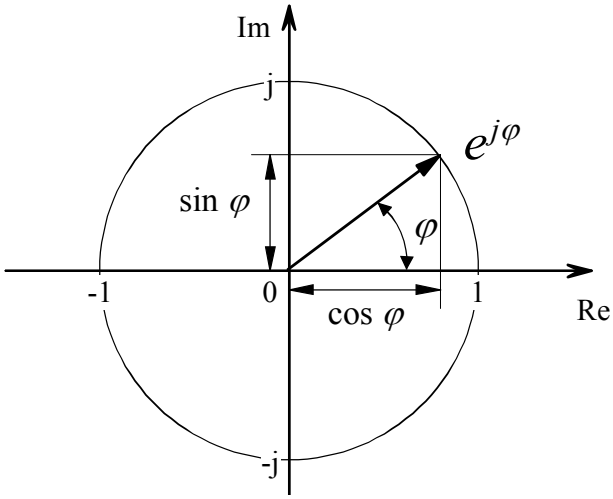
Iz *Eulerjeve formule* (2.7) lahko ugotovimo sledeča dejstva:

- e^{jx} je kompleksno število z absolutno vrednostjo 1

$$|\, e^{jx} \,| = \left|\cos x + j \sin x\right| = \cos^2 x + \sin^2 x = 1\,, \tag{2.8}$$

- vektor, ki v kompleksni ravnini prestavlja število e^{jx} oklepa z realno osjo kot *x,* zato ponavadi vrednost imaginarne komponente eksponenta označujemo z grškimi črkami, ki jih običajno uporabljamo za kote. Na sliki 2.1 je predstavitev števila $e^{j\varphi}$ v kompleksni ravnini
- zaradi periodičnosti funkcij sinus in kosinus je eksponentna funkcija imaginarnega eksponenta periodična s periodo 2π

$$e^{j(x+k2\pi)} = e^{jx} \quad \text{za} \quad k \in \mathbb{Z} \tag{2.9}$$



Slika 2.1 – Grafična predstavitev števila $z = e^{j\varphi}$ v ravnini kompleksnih števil

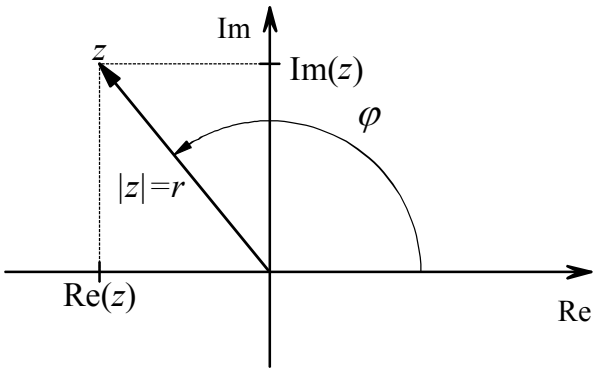
Iz slike 2.1 vidimo, da lahko značilna števila na enotskem krogu izrazimo v eksponentni obliki oziroma s faznim kotom

$$\begin{aligned} 1 &= e^0 = e^{j2k\pi} \\ j &= e^{j\frac{\pi}{2}} = e^{j\frac{\pi}{2} + j2k\pi} \\ -1 &= e^{\pm j\pi} = e^{j(2k+1)\pi} \\ -j &= e^{-j\frac{\pi}{2}} = e^{-j\frac{\pi}{2} + j2k\pi} \end{aligned} \tag{2.10}$$

Na osnovi Eulerjeve formule (2.7) lahko vsako število zapišemo v tako imenovani polarni obliki, t. j. z absolutno vrednostjo in polarnim kotom

$$
\begin{aligned}
z &= \mathrm{Re}(z) + j\,\mathrm{Im}(z) = a + jb = re^{j\varphi} \\
r &= |\,z\,| = \sqrt{\mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2} = \sqrt{a^2 + b^2} \\
\varphi &= \mathrm{arctg}\frac{\mathrm{Im}(z)}{\mathrm{Re}(z)} + (2k+m)\pi = \mathrm{arctg}\frac{b}{a} + (2k+m)\pi \,. \\
m &= \begin{cases} 0 \Leftarrow a \geq 0 \\ 1 \Leftarrow a < 0 \end{cases}, \qquad k \in \{\ldots,-2,-1,0,1,2,\ldots\}
\end{aligned}
\tag{2.11}
$$

Pri določanju kota φ na osnovi realne in imaginarne komponente moramo ponovno upoštevati, da glavna veja funkcije arctg zajema le vrednosti kotov med -π/2 in π/2, s katerimi pokrijemo le kompleksna števila, ki imajo pozitivno realno komponento. Števila z negativno realno komponento imajo polarni kot φ na intervalu (π/2, 3π/2). Zaradi periodičnosti eksponentne funkcije v obsegu kompleksnih števil (2.9) ima vsako kompleksno število z neskončno možnih polarnih kotov φ.



Slika 2.2 – Polarni zapis kompleksnega števila

3 Eksponentni zapis harmoničnih signalov

Iz Eulerjeve formule (2.7) sledi

$$e^{jx} + e^{-jx} = (\cos x + j\sin x) + (\cos(-x) + j\sin(-x)) \,. \tag{3.1}$$

Ker je kosinus soda funkcija

$$\cos(-x) = \cos x \,, \tag{3.2}$$

sinus pa je liha funkcija

$$\sin(-x) = -\sin x \,, \tag{3.3}$$

se imaginarni dela v desni strani enačbe (3.1) uničita. dobimo

$$e^{jx} + e^{-jx} = 2\cos x \,. \tag{3.4}$$

Enačbo (3.4) obrnemo in izrazimo kosinus z eksponentno funkcijo s čisto imaginarnim eksponentom

$$\cos x = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2} \,. \tag{3.5}$$

Če namesto vsote kompleksnih števil v (3.1) izračunamo razliko, dobimo

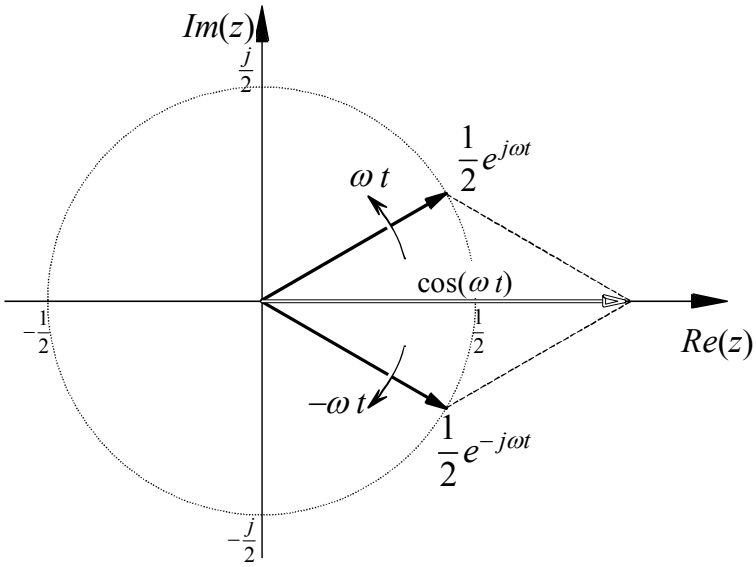
$$e^{jx} - e^{-jx} = 2j\sin x \tag{3.6}$$

in od tod

$$\sin x = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j}. \tag{3.7}$$

Z uporabo zveze (3.5) lahko kosinusni signal predstavimo kot vsoto dveh kompleksnih števil (kazalcev z dolžino ½), ki se s kotno hitrostjo ω vrtita v nasprotnih smereh

$$x(t) = \cos(\omega t) = \frac{1}{2}e^{j\omega t} + \frac{1}{2}e^{-j\omega t}. \tag{3.8}$$



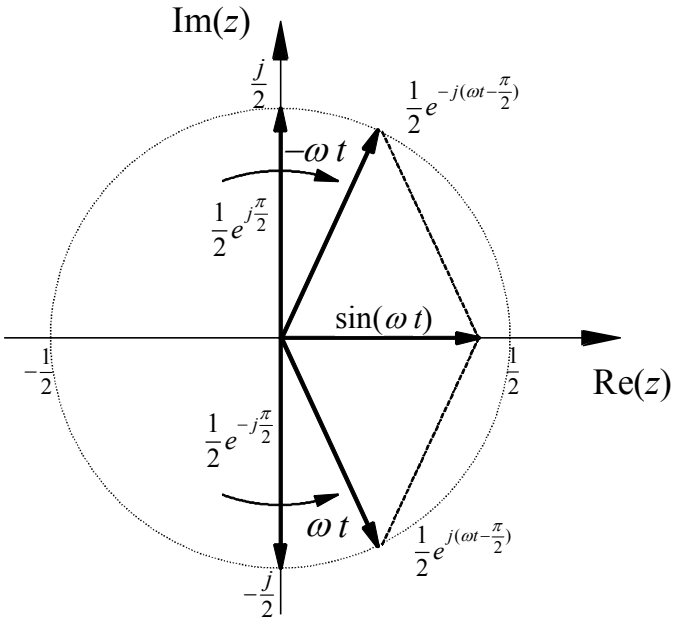
Slika 3.1 – Vsota dveh nasprotno vrtečih kazalcev je realna

Iz slike 3.1 vidimo, da v trenutku $t = 0$ oba kazalca oklepata kot 0, njuna vsota pa je maksimalna. Z ustreznim faznim zasukom lahko na enak način predstavimo tudi sinusni signal. Uporabimo enačbo (3.7) in vanjo vstavimo vrednosti za j in $-j$ zapisane s faznim kotom (2.10)

$$\begin{aligned} x(t) = \sin\omega t &= \frac{1}{2j}e^{j\omega t} - \frac{1}{2j}e^{-j\omega t} = \frac{1}{2}(-j)e^{j\omega t} + \frac{1}{2}je^{-j\omega t} = \\ &= \frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{2}}e^{j\omega t} + \frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{2}}e^{-j\omega t} \end{aligned}. \tag{3.9}$$

Sinusni signal dobimo kot vsoto dveh kazalcev z dolžino ½ in začetno fazo $\varphi = \pm\pi/2$. Kazalec, ki se vrti v pozitivnem smislu ($+\omega$), ima fazo $-\pi/2$, kot je razvidno iz slike 3.2.

Za realne signale je faza kazalca z negativno frekvenco vedno nasprotno enaka fazi kazalca s pozitivno frekvenco, zato zadostuje, da signale opisujemo le s fazo pri pozitivni frekvenci. Fizikalno resnične so le pozitivne frekvence. Z uvedbo pojma negativne frekvence se poenostavi obravnavanje različnih signalov in njihovih spektrov, ker so pravila za računanje z eksponentno funkcijo bolj preprosta, kot so pravila in lastnosti trigonometričnih funkcij.



Slika 3.2 – Položaj kazalcev signala $\sin\omega t$ ob času $t = 0$ in $\omega t = \dfrac{\pi}{7}$

4 Fouriereva analiza

Kompleksna Fouriereva vrsta

Periodičen signal $x(t)$ s periodo T lahko predstavimo s Fourierevo kompleksno vrsto

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{jk\omega_0 t}, \quad k \in \mathbb{Z}, \tag{4.1}$$

kjer je osnovna krožna frekvenca določena s periodo signala

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f . \tag{4.2}$$

Koeficiente kompleksne vrste X_k izračunamo z enačbo

$$X_k = \frac{1}{T} \int_{\tau}^{t+T} x(t) e^{-jk\omega_0 t} . \tag{4.3}$$

Začetni čas τ, ki je spodnja meja integrala v (4.3) je poljuben. Izberemo ga tako, da poenostavimo računanje integrala.
Koeficienti X_k so v splošnem kompleksne vrednosti, ki predstavljajo spekter signala $x(t)$

$$X_k = |X_k| e^{j\Phi_k} \tag{4.4}$$

Za koeficiente realnih signalov (vrednost signala je realna vrednost) velja, da sta koeficienta z enako absolutno vrednostjo indeksa kompleksno konjugiran par

$$X_{-k} = X_k^* , \tag{4.5}$$

in iz tega sledi, da je amplitudni spekter soda funkcija diskretne spremenljivke k

$$|X_{-k}| = |X_k| . \tag{4.6}$$

Fazni spekter pa je liha funkcija

$$\Phi_{-k} = -\Phi_k . \tag{4.7}$$

Fouriereva trigonometrična vrsta

Osnovna oblika-koeficienti a_0, a_k in b_k

Periodične signale $x(t)$ lahko predstavimo tudi kot vsoto enosmerne in neskončno vsoto osnovne in višjih harmonskih komponent, ki jih zapišemo s trigonometričnima funkcijama sinus in kosinus

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\omega_0 t) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(k\omega_0 t) \tag{4.8}$$

Za razliko od kompleksne vrste imamo tu tri formule za izračun koeficientov. Koeficient a_0 predstavlja enosmerno vrednost, zato ga izračunamo kot povprečno vrednost signala

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{\tau}^{\tau+T} x(t)dt\,. \tag{4.9}$$

Koeficiente a_k in b_k izračunamo ločeno z različnima izrazoma

$$a_k = \frac{2}{T}\int_{\tau}^{\tau+T} x(t)\cos(k\omega_0 t)dt\,, \tag{4.10}$$

$$b_k = \frac{2}{T}\int_{\tau}^{\tau+T} x(t)\sin(k\omega_0 t)dt\,, \tag{4.11}$$

kjer je ω_0 krožna frekvenca osnovne harmonske komponente določene z osnovno periodo (4.2)

Če je periodični signal soda funkcija

$$x(-t) = x(t) \tag{4.12}$$

potem velja

$$b_k = 0 \quad k = 1, 2, 3, \ldots \tag{4.13}$$

Če je signal $x(t)$ liha funkcija časa

$$x(-t) = -x(t) \tag{4.14}$$

potem velja

$$a_k = 0 \quad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{4.15}$$

Druga oblika trigonometrične Fourireve vrste

Kosinusni in sinusni signal iste harmonske komponente lahko združimo v en sam kosinusni signal z amplitudo c_k in fazo φ_k. Amplitudni spekter c_k in fazni spekter φ_k izračunamo iz koeficientov a_k in b_k iz enačbe

$$a_k \cos(k\omega_0 t) + b_k \sin(k\omega_0 t) = c_k \cos(k\omega_0 t - \varphi_k)\,. \tag{4.16}$$

Za kosinus na desni strani enačbe uporabimo adicijski izrek in dobimo

$$\begin{aligned} a_k &= c_k \cos\varphi_k \\ b_k &= c_k \sin\varphi_k \end{aligned} \tag{4.17}$$

Iz tega sistema enačb izračunamo amplitudo in fazo

$$\begin{aligned} c_k &= \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \\ \varphi_k &= \operatorname{arctg}\frac{b_k}{a_k} + m\cdot\pi \qquad m = \begin{cases} 0 \Leftarrow a_k \geq 0 \\ 1 \Leftarrow a_k < 0 \end{cases} \end{aligned} \tag{4.18}$$

Koeficient c_0 je enosmerna komponenta in je enak a_0. S koeficienti c_0, c_k in φ_k zapisana Fouriereva vrsta se glasi

$$x(t) = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cos(k\omega_0 t - \varphi_k) \tag{4.19}$$

Zveze med koeficienti kompleksne in trigonometrične Fouriereve vrste

V zapisu s kompleksno vrsto predstavljata koeficienta pri frekvenci $k\omega_0$ in $-k\omega_0$ k-to harmonsko komponento

$$\begin{aligned} X_k e^{jk\omega_0 t} + X_{-k} e^{-jk\omega_0 t} &= |X_k| e^{j\Phi_k} e^{jk\omega_0 t} + |X_k| e^{-j\Phi_k} e^{-jk\omega_0 t} = \\ &= |X_k| \left(e^{j(k\omega_0 t + \Phi_k)} + e^{-j(k\omega_0 t + \Phi_k)} \right) = 2|X_k| \cos(k\omega_0 t + \Phi_k) \end{aligned} \tag{4.20}$$

Iz primerjave z (4.16) dobimo zveze

$$|X_k| = |X_{-k}| = \frac{c_k}{2} \quad k = 1, 2, 3, \ldots \tag{4.21}$$

$$X_0 = c_0 \tag{4.22}$$

$$\Phi_k = -\varphi_k \tag{4.23}$$

Parsevalov stavek – povprečna moč periodičnega signala

$$\begin{aligned} P_x &= \frac{1}{T} \int_{\tau}^{\tau+T} x^2(t) dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |X_k|^2 = \\ &= c_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 = a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k^2 + b_k^2 \right) \end{aligned} \tag{4.24}$$

Fouriereva transformacija

Definicija:

$$X(\omega) = \mathcal{F}\left[x(t)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt \tag{4.25}$$

$$X(\omega) = \mathrm{Re}(X(\omega)) + j\,\mathrm{Im}(X(\omega)) = \left|X(\omega)\right|e^{j\Phi(\omega)} \tag{4.26}$$

Inverzna FT:

$$x(t) = \mathcal{F}^{-1}\left[X(\omega)\right] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{j\omega t}d\omega \tag{4.27}$$

Za Fouriereva para časovnih signalov in njunih spektrov

$$\begin{aligned} x(t) &\xleftrightarrow{FT} X(\omega) \\ y(t) &\xleftrightarrow{FT} Y(\omega) \end{aligned} \tag{4.28}$$

veljajo naslednja pravila:

1. Linearnost

$$ax(t) + by(t) \xleftrightarrow{FT} aX(\omega) + bY(\omega) \tag{4.29}$$

2. Zrcaljenje časovne osi

$$x(-t) \xleftrightarrow{FT} X(-\omega) \tag{4.30}$$

3. Časovno skaliranje

$$x(at) \xleftrightarrow{FT} \frac{1}{|a|}X\left(\frac{\omega}{a}\right) \tag{4.31}$$

4. Časovni premik

$$x(t \pm t_0) \xleftrightarrow{FT} X(\omega)e^{\pm j\omega t_0} \tag{4.32}$$

5. Frekvenčni premik - modulacija

$$x(t)e^{\pm j\omega_0 t} \xleftrightarrow{FT} X(\omega \mp \omega_0) \tag{4.33}$$

6. Odvajanje po času

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &\xleftrightarrow{FT} j\omega X(\omega) \\ \frac{d^n x(t)}{dt^n} &\xleftrightarrow{FT} (j\omega)^n X(\omega) \end{aligned} \tag{4.34}$$

7. Integral časovne funkcije

$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau \xleftrightarrow{FT} \frac{X(\omega)}{j\omega} + \pi X(0)\delta(\omega) \tag{4.35}$$

8. Transform produkta

$$\begin{aligned} x(t)y(t) &\xleftrightarrow{FT} \frac{1}{2\pi} X(\omega) \otimes Y(\omega) \\ X(\omega) \otimes Y(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} X(\lambda)Y(\omega-\lambda)d\lambda \end{aligned} \tag{4.36}$$

9. Transform konvolucije

$$\begin{aligned} x(t) \otimes y(t) &\xleftrightarrow{FT} X(\omega)Y(\omega) \\ x(t) \otimes y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y(t-\tau)d\tau \end{aligned} \tag{4.37}$$

10. Dualnost

$$X(t) \xleftrightarrow{FT} 2\pi x(-\omega) \tag{4.38}$$

Parsevalov stavek – normalizirana energija aperiodičnih signalov

$$\begin{aligned} E_x &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \left|X(\omega)\right|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S(\omega)d\omega \\ E_x &= \int_{-\infty}^{\infty} S(f)df = 2\int_{0}^{\infty} S(f)df \end{aligned} \tag{4.39}$$