7. Diskretna Fouriereva Transformacija (DFT)

1. Naloga

Izračunajte DFT in DFS za signal z dolžino oziroma periodo $N = 4$.

$$x[n] = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^n & ; \quad 0 \le n < 4 \\ 0 & ; \quad sicer \end{cases} \qquad \text{oziroma} \qquad x_P[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-4\cdot i} \quad ; \quad 0 \le n - 4\cdot i < 4 \quad , \quad i \in \mathbb{Z}$$

Rešitev:

DFT:
Diskretna Fouriereva transformacija (DFT) je izračunljiv približek časovno diskretne Fouriereve transformacije (DtFT). DtFT lahko določimo, če poznamo vrednost signala v vseh časih (od -∞ od +∞), sicer lahko določimo le DFT. Ker delamo transformacijo signala le na podlagi nekaj znanih vrednosti (od 0 do N-1), je dobljeni rezultat le približek.
Vsaka od teh transformacij preslika začetno število točk iz časovnega prostora v enako število točk v frekvenčnem prostoru. Pri DtFT je število točk v časovnem prostoru neskončno, zato je frekvenčen spekter zvezen (neskončno število točk).
Pri DFT je število točk v časovnem prostoru končno mnogo, zato jih je tudi v frekvenčnem prostoru končno mnogo. Zato je DFT diskretna funkcija.

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}k\cdot n} \tag{6.2.1}$$

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}k\cdot n} = \sum_{n=0}^{N-1} \left(\frac{1}{2} e^{-j\frac{2\pi}{N}k}\right)^n = \frac{1 - \left(\frac{1}{2} e^{-j\frac{2\pi}{N}k}\right)^N}{1 - \frac{1}{2} e^{-j\frac{2\pi}{N}k}} = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^N \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}k\cdot N}}{1 - \frac{1}{2} e^{-j\frac{2\pi}{N}k}} = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^N e^{-j2\pi k}}{1 - \frac{1}{2} e^{-j\frac{2\pi}{N}k}} \tag{6.2.2}$$

$$X[k] = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^4}{1 - \frac{1}{2} e^{-j\frac{2\pi}{4}k}} = \frac{1 - \frac{1}{16}}{1 - \frac{1}{2} e^{-j\frac{\pi}{2}k}} = \frac{15}{16 \cdot \left(1 - \frac{1}{2} e^{-j\frac{\pi}{2}k}\right)} = \frac{15}{8} \cdot \frac{1}{2 - e^{-j\frac{\pi}{2}k}} = \frac{15}{8} \cdot \frac{1}{2 - (-j)^k} \tag{6.2.3}$$

k	$X[k]$
0	$\frac{15}{8}\cdot\frac{1}{2-(-j)^0}=\frac{15}{8}\cdot\frac{1}{2-1}=\frac{15}{8}$
1	$\frac{15}{8}\cdot\frac{1}{2-(-j)^1}=\frac{15}{8}\cdot\frac{1}{2+j}=\frac{15}{8}\cdot\frac{2-j}{(2+j)(2-j)}=\frac{15}{8}\cdot\frac{2-j}{2^2+1^2}=\frac{3}{8}\cdot(2-j)$
2	$\frac{15}{8}\cdot\frac{1}{2-(-j)^2}=\frac{15}{8}\cdot\frac{1}{2-(-1)}=\frac{15}{8}\cdot\frac{1}{3}=\frac{5}{8}$
3	$\frac{15}{8}\cdot\frac{1}{2-(-j)^3}=\frac{15}{8}\cdot\frac{1}{2-(+j)}=\frac{15}{8}\cdot\frac{1}{2-j}=\frac{15}{8}\cdot\frac{2+j}{(2-j)(2+j)}=\frac{3}{8}(2+j)$

$$X[k]=\left|X[k]\right|\cdot e^{j\Phi[k]} \tag{6.2.4}$$

$$\Phi[k]=\arctan\left(\frac{\operatorname{Im}(X[k])}{\operatorname{Re}(X[k])}\right) \tag{6.2.5}$$

k	$\lvert X[k]\rvert$	$\Phi[k]$
0	$\frac{15}{8}$	0
1	$\frac{3}{8}\cdot\lvert(2-j)\rvert=\frac{3}{8}\cdot\sqrt{2^2+1^2}=\frac{3\sqrt{5}}{8}$	$\arctan\left(\frac{-1}{2}\right)=-\arctan\left(\frac{1}{2}\right)=-26,6°=-0,464$
2	$\frac{5}{8}$	0
3	$\frac{3}{8}\cdot\lvert(2+j)\rvert=\frac{3\sqrt{5}}{8}$	$\arctan\left(\frac{1}{2}\right)=26,6°=0,464$

DFS:

Diskretna Fouriereva vrsta opisuje periodične signale v frekvenčnem prostoru.

$$X_k=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}x[n]\cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}k\cdot n}=\frac{X[k]}{N} \tag{6.2.6}$$

k	$\lvert X[k]\rvert$	$\lvert X_k\rvert$	$\Phi[k]$	Φ_k
0	$\frac{15}{8}$	$\frac{15}{32}$	0	0
1	$\frac{3\sqrt{5}}{8}$	$\frac{3\sqrt{5}}{32}$	$-26,6°=-0,464$	$-26,6°=-0,464$
2	$\frac{5}{8}$	$\frac{5}{32}$	0	0
3	$\frac{3\sqrt{5}}{8}$	$\frac{3\sqrt{5}}{32}$	$26,6°=0,464$	$26,6°=0,464$

2. Naloga

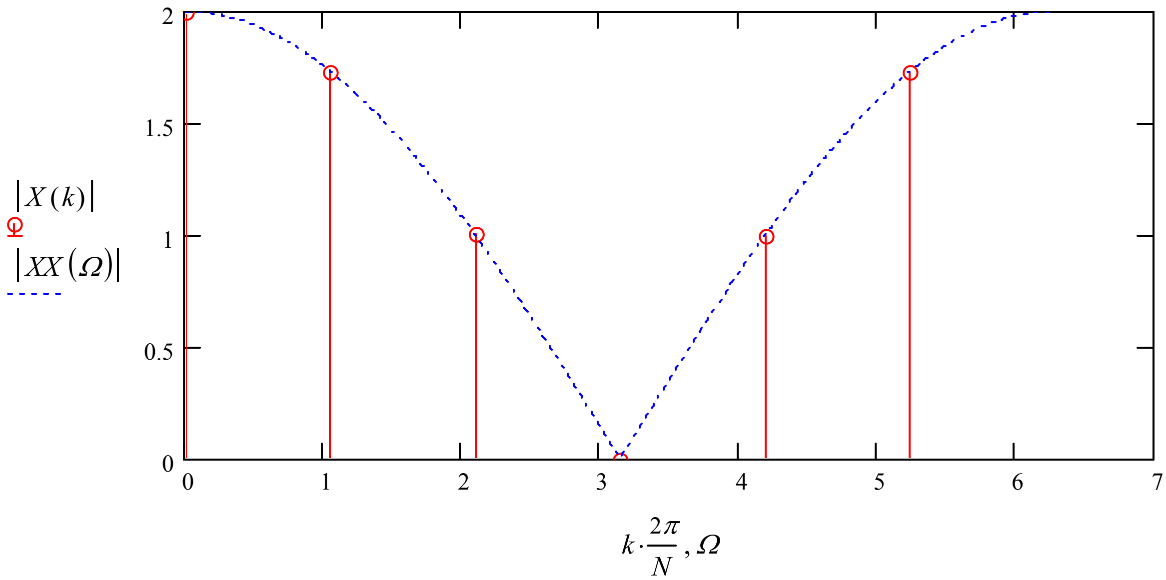
Izračunajte DFT za podani signal in narišite amplitudni spekter.

$$x[n] = \begin{cases} 1 & ; \quad n = 0,1 \\ 0 & ; \quad n = 2,3,4,5 \end{cases} \quad , \quad N = 6$$

Rešitev:

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}k \cdot n} = \sum_{n=0}^{5} x[n] \cdot e^{-j\frac{2\pi}{6}k \cdot n} = \sum_{n=0}^{1} e^{-j\frac{\pi}{3}k \cdot n} \tag{6.3.1}$$

k	$X[k]$
0	$\sum_{n=0}^{1} e^{-j\frac{\pi}{3}0 \cdot n} = \sum_{n=0}^{1} 1 = 1+1 = 2$
1	$\sum_{n=0}^{1} e^{-j\frac{\pi}{3}1 \cdot n} = 1 + e^{-j\frac{\pi}{3}} = 1 + \left(\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{3}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} =$ $= \frac{\sqrt{3^2 + \sqrt{3}^2}}{2} \cdot e^{j\arctan\left(\frac{-\sqrt{3}}{3}\right)} = \frac{\sqrt{12}}{2} e^{-j\frac{\pi}{6}} = \sqrt{3} e^{-j\frac{\pi}{6}}$
2	$\sum_{n=0}^{1} e^{-j\frac{\pi}{3}2 \cdot n} = 1 + e^{-j\frac{\pi}{3}2} = 1 + \left(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}$ $= e^{-j\frac{\pi}{3}}$
3	$\sum_{n=0}^{1} e^{-j\frac{\pi}{3}3 \cdot n} = 1 + e^{-j\pi} = 1 - 1 = 0$
4	$\sum_{n=0}^{1} e^{-j\frac{\pi}{3}4 \cdot n} = 1 + e^{-j\frac{\pi}{3}4} = 1 + \left(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}$ $= e^{j\frac{\pi}{3}}$
5	$\sum_{n=0}^{1} e^{-j\frac{\pi}{3}5 \cdot n} = 1 + e^{-j\frac{\pi}{3}5} = 1 + \left(\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{3}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}$ $= \sqrt{3} e^{j\frac{\pi}{6}}$



3. Naloga

Izračunajte DFT za podani signal in narišite amplitudni spekter.

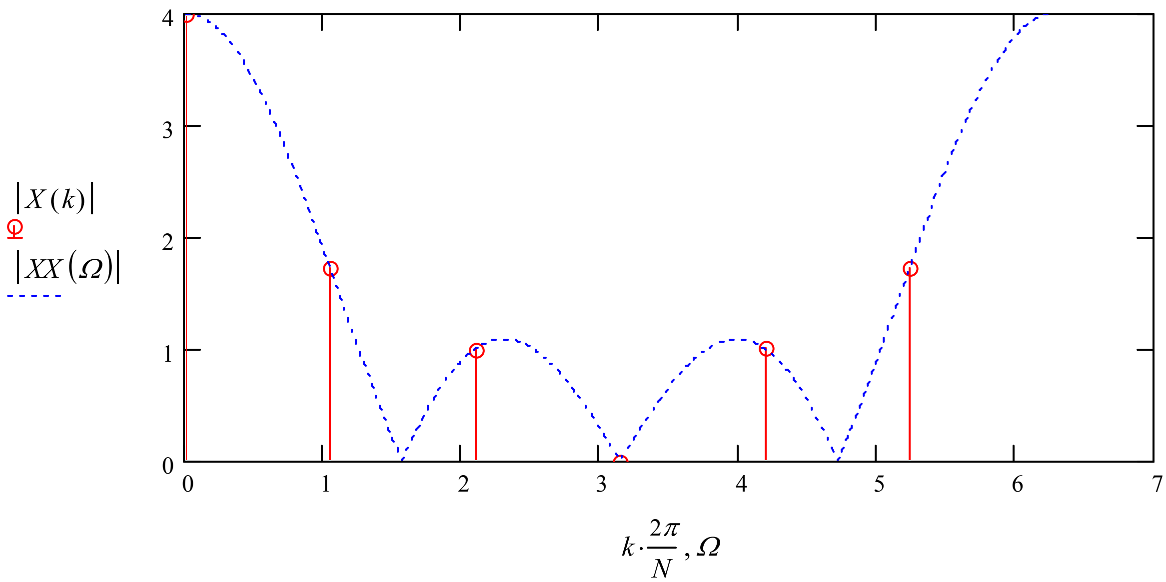
$$x[n]=\begin{cases}1 & ; \quad n=0,1,2,3\\ 0 & ; \quad n=4,5\end{cases} \quad , \quad N=6$$

Rešitev:

$$X[k]=\sum_{n=0}^{N-1}x[n]\cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}k\cdot n}=\sum_{n=0}^{5}x[n]\cdot e^{-j\frac{2\pi}{6}k\cdot n}=\sum_{n=0}^{3}e^{-j\frac{\pi}{3}k\cdot n} \tag{6.4.1}$$

k	$X[k]$
0	$\sum_{n=0}^{3}e^{-j\frac{\pi}{3}0\cdot n}=\sum_{n=0}^{3}1=1+1+1+1=4$
1	$\sum_{n=0}^{3}e^{-j\frac{\pi}{3}1\cdot n}=1+e^{-j\frac{\pi}{3}}+e^{-j\frac{2\pi}{3}}+e^{-j\pi}=1+\left(\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\left(-\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-1=$ $=-j\sqrt{3}=\sqrt{3}e^{-j\frac{\pi}{2}}$
2	$\sum_{n=0}^{3}e^{-j\frac{\pi}{3}2\cdot n}=1+e^{-j2\frac{\pi}{3}}+e^{-j4\frac{\pi}{3}}+e^{-j2\pi}=1+\left(-\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\left(-\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+1=1$
3	$\sum_{n=0}^{3}e^{-j\frac{\pi}{3}3\cdot n}=1+e^{-j\pi}+e^{-j2\pi}+e^{-j3\pi}=1-1+1-1=0$

4	$\sum_{n=0}^{3} e^{-j\frac{\pi}{3}4\cdot n} = 1 + e^{-j4\frac{\pi}{3}} + e^{-j8\frac{\pi}{3}} + e^{-j4\pi} = 1 + \left(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 1 = 1$
5	$\sum_{n=0}^{3} e^{-j\frac{\pi}{3}5\cdot n} = 1 + e^{-j5\frac{\pi}{3}} + e^{-j10\frac{\pi}{3}} + e^{-j5\pi} =$ $= 1 + \left(+\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - 1 =$ $= j\sqrt{3} = \sqrt{3}e^{j\frac{\pi}{2}}$



4. Naloga

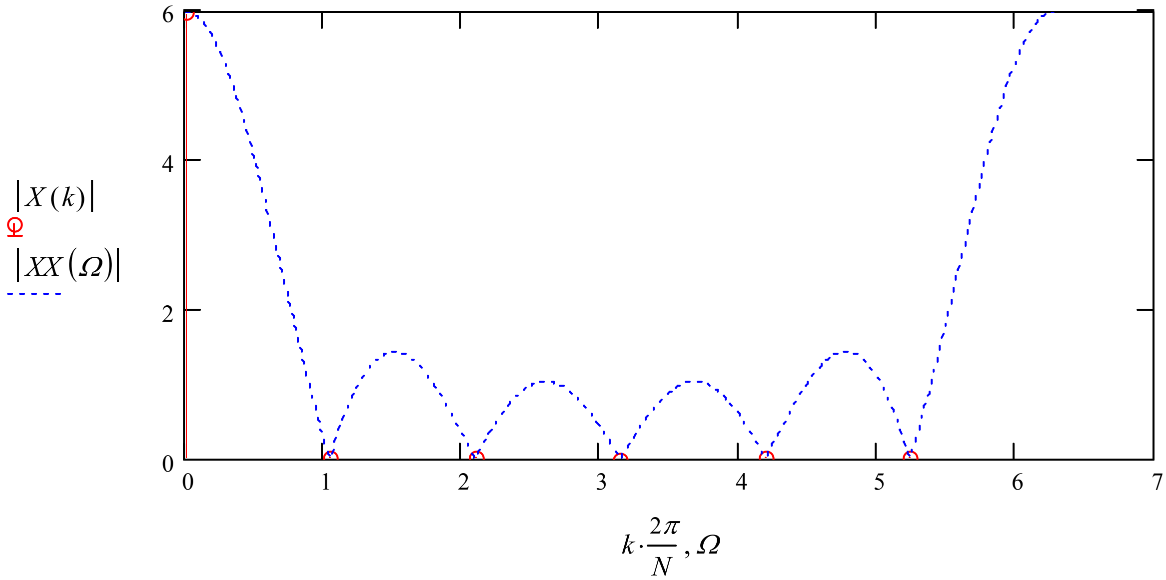
Izračunajte DFT za podani signal in narišite amplitudni spekter.

$$x[n] = \begin{cases} 1 & ; \quad n = 0,1,2,3,4,5 \\ 0 & ; \end{cases} \quad , \quad N = 6$$

Rešitev:

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}k\cdot n} = \sum_{n=0}^{5} x[n] \cdot e^{-j\frac{2\pi}{6}k\cdot n} = \sum_{n=0}^{5} e^{-j\frac{\pi}{3}k\cdot n} \qquad (6.5.1)$$

k	$X\left[k\right]$
0	$\sum_{n=0}^{5} e^{-j\frac{\pi}{3}0\cdot n} = \sum_{n=0}^{5} 1 = 1+1+1+1+1+1 = 6$
1	$\sum_{n=0}^{5} e^{-j\frac{\pi}{3}1\cdot n} = 1+e^{-j\frac{\pi}{3}}+e^{-j\frac{2\pi}{3}}+e^{-j\pi}+e^{-j\frac{4\pi}{3}}+e^{-j\frac{5\pi}{3}} =$ $=1+\left(\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\left(-\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-1+\left(-\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\left(+\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=$ $=0$
2	$\sum_{n=0}^{5} e^{-j\frac{\pi}{3}2\cdot n} = 1+e^{-j2\frac{\pi}{3}}+e^{-j4\frac{\pi}{3}}+e^{-j2\pi}+e^{-j8\frac{\pi}{3}}+e^{-j10\frac{\pi}{3}} =$ $=1+\left(-\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\left(-\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+1+\left(-\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\left(-\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=$ $=0$
3	$\sum_{n=0}^{5} e^{-j\frac{\pi}{3}3\cdot n} = 1+e^{-j\pi}+e^{-j2\pi}+e^{-j3\pi}+e^{-j4\pi}+e^{-j5\pi} = 1-1+1-1+1-1=0$
4	$\sum_{n=0}^{5} e^{-j\frac{\pi}{3}4\cdot n} = 1+e^{-j4\frac{\pi}{3}}+e^{-j8\frac{\pi}{3}}+e^{-j4\pi}+e^{-j16\frac{\pi}{3}}+e^{-j20\frac{\pi}{3}} =$ $=1+\left(-\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\left(-\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+1+\left(-\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\left(-\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=$ $=0$
5	$\sum_{n=0}^{5} e^{-j\frac{\pi}{3}5\cdot n} = 1+e^{-j5\frac{\pi}{3}}+e^{-j10\frac{\pi}{3}}+e^{-j5\pi}+e^{-j20\frac{\pi}{3}}+e^{-j25\frac{\pi}{3}} =$ $=1+\left(+\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\left(-\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-1+\left(-\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\left(+\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=$ $=0$



Včasih pri izračunu DFT obdelovani signal podaljšamo tako, da mu dodamo na konec še enkrat toliko ničel, kot je dolg obdelovani signal. S tem dobimo dodatne vmesne vrednosti DFT-ja. Vmesne vrednosti, ki jih dobimo, ne dodajajo informacije. So le pripomoček, ki lahko olajša razpoznavanje lastnosti signala, lahko pa tudi zavaja.

Primer:
Če vzamemo N vzorcev signala, in so vsi vzorci tega signala enako visoki, je zelo verjetno, da gre za enosmeren signal. Če bi vzorčen signal razširili z dodajanjem ničel, bi se temeljito zmotili, ker bi iz enosmerne vrednosti naredili pravokoten impulz in bi **napačno** dobili vmesne vrednosti na črtkani črti. Če bi obstoječim vzorcem enosmernega signala dodali še enkrat toliko pravih vzorcev, bi imele tudi vmesne točke vrednost nič.