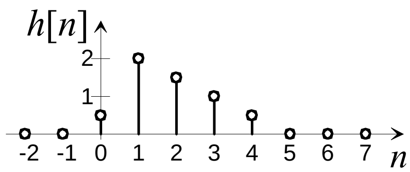
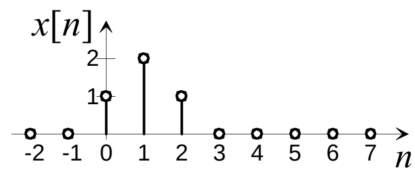
8. Diskretni LTI sistemi

1. Naloga

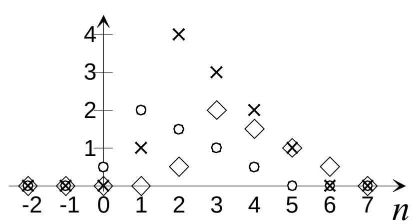
Določite odziv diskretnega LTI sistema s podanim odzivom na enotin impulz, na podani vhodni signal.



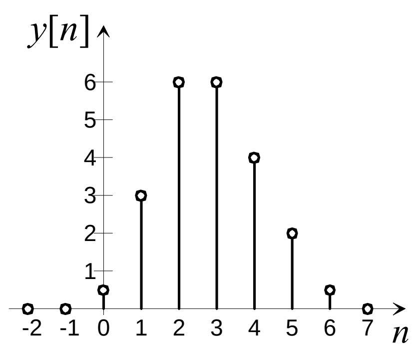


Rešitev:
LTI sistem se na vsak enotin impulz $\delta[n]$ na vhodu odzove z impulznim odzivom $h[n]$ na izhodu. Pri diskretnih sistemih je vsak vhodni signal sestavljen iz enotinih impulzov, od katerih je vsak pomnožen z neko konstanto. Ker je sistem linearen, vsak enotin impulz, ki je skaliran z neko konstanto povzroči impulzni odziv, ki je skaliran z isto konstanto. Torej če se na vhodu LTI sistema pojavi enotin impulz z dvojno višino, se bo na izhodu sistema pojavil impulzni odziv z dvojno višino. Če se na vhodu pojavi več enotinih impulzov, se sistem na vsakega odzove z impulznim odzivom. Če se odzivi med sabo prekrivajo, je izhod vsota vseh odzivov (kar sledi iz linearnosti sistema).

Najprej narišimo odzive za vsakega od enotinih impulzov, ki sestavljajo vhodni signal:

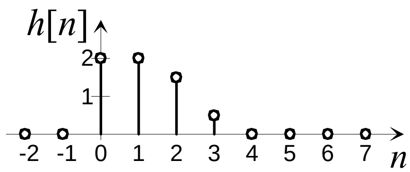


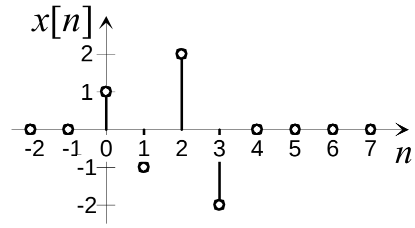
Nato seštejmo vse odzive:



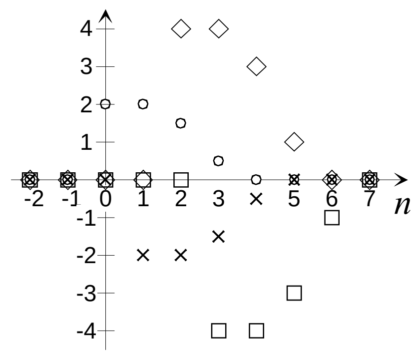
2. Naloga

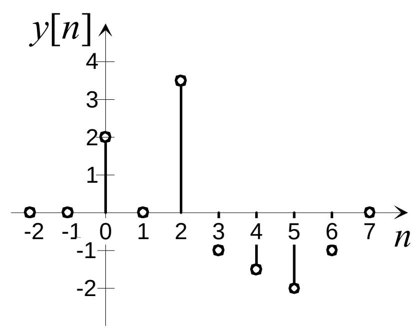
Določite odziv diskretnega LTI sistema s podanim odzivom na enotin impulz, na podani vhodni signal.





Rešitev:





3. Naloga

Iz diferenčne enačbe LTI sistema narišite impulzni odziv.

$y[n] = 0,5 \cdot x[n] + x[n-1] - x[n-2] - 0,5 \cdot x[n-3]$

Določite odziv sistema na signal $x[n] = \{\underset{\uparrow}{1}, 1, -1, -1\}$.

Iz diferenčne enačbe narišite shemo vezja.

Rešitev:

Impulzni odziv sistema je odziv sistema na enotin impulz. Zato na vhod sistema postavimo enotin impulz

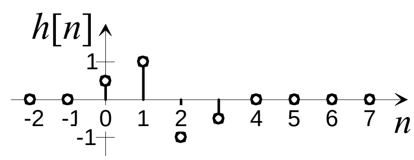
$$x[n] = \delta[n]$$

Odziv, ki ga dobimo, je impulzni odziv

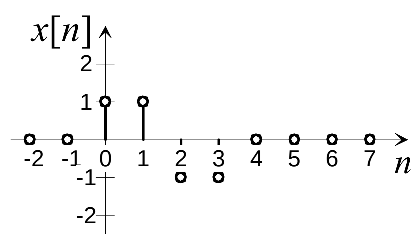
$$h[n] = y[n]\Big|_{x[n]=\delta[n]}$$

$$h[n] = 0,5 \cdot \delta[n] + \delta[n-1] - \delta[n-2] - 0,5 \cdot \delta[n-3] \qquad (6.4.1)$$

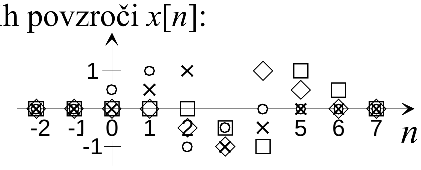
To narišemo:



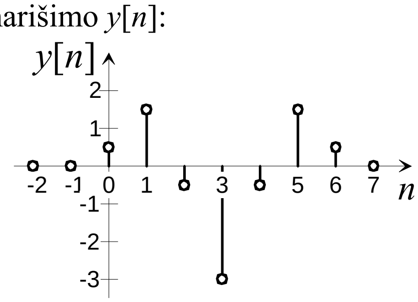
Narišimo še $x[n]$:



Narišimo vse impulzne odzive, ki jih povzroči $x[n]$:

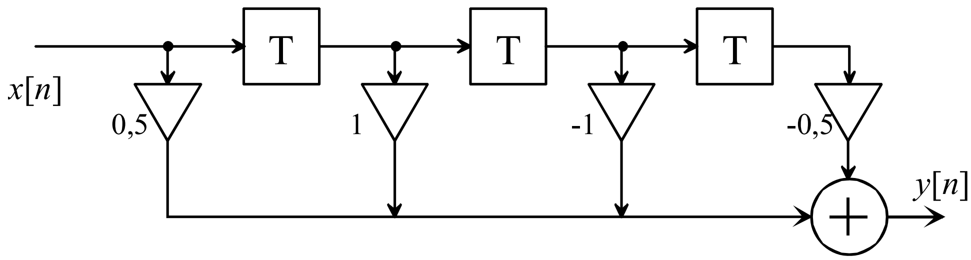


Seštejemo vse impulzne odzive in narišimo $y[n]$:



Narišimo shemo vezja, ki ga opisuje enačba:

$$y[n] = 0,5 \cdot x[n] + x[n-1] - x[n-2] - 0,5 \cdot x[n-3]$$



4. Naloga

Iz diferenčne enačbe LTI sistema narišite impulzni odziv.

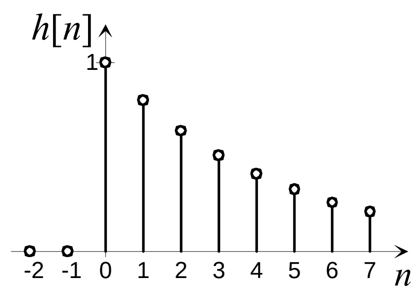
$y[n] = x[n] + 0,8 \cdot y[n-1]$

Narišite shemo vezja, ki ga opisuje enačba.

Rešitev:

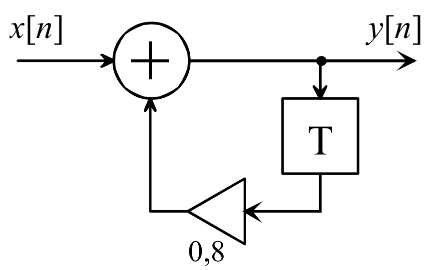
Impulzni odziv sistema je odziv sistema na enotin impulz. Zato na vhod sistema postavimo enotin impulz. Ker so vrednosti odziva odvisne od prejšnjih vrednosti odziva, jih najlaže izračunamo s pomočjo tabele.

n	$\delta[n]$	$h[n]$	
-1	0	0	0
0	1	1+0,8·0	1
1	0	0+0,8·1	0,8
2	0	0+0,8·0,8	0,64
3	0	0+0,8·0,64	0,512
4	0	0+0,8·0,512	0,4096
5	0	0+0,8·0,4096	0,32768
6	0	0+0,8·0,32768	0,262144
7	0	0+0,8·0,262144	0,2097152
8	0	0+0,8·0,2097152	0,16777216



Vidimo, da se impulzni odziv sistema ves čas zmanjšuje, nikoli pa se ne neha. Take sisteme imenujemo IIR (Infinite Impulse Response). Sisteme s končnim odzivom imenujemo FIR (Finite Impulse Response).

Shema:



5. Naloga

Izpeljite povezavo med spektri signalov, če velja $v[n]=x[n]\cdot o[n]$.

Rešitev:

Za izpeljavo moramo poznati enačbi za časovno diskretno Fourierevo transformacijo in inverzno časovno diskretno Fourierevo transformacijo ter enačbo za konvolucijo:

$$F(\Omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} f[n]\cdot e^{-j\Omega n} \tag{6.6.1}$$

$$f[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\Omega)e^{j\Omega n}d\Omega \tag{6.6.2}$$

$$x(t)*y(t)=\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\cdot y(t-\tau)d\tau \tag{6.6.3}$$

Signala $x[n]$ in $o[n]$ izrazimo z njunima spektroma:

$$x[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\Omega)e^{j\Omega n}d\Omega \tag{6.6.4}$$

$$o[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} O(\Omega)e^{j\Omega n}d\Omega \tag{6.6.5}$$

Signal $v[n]$ zapišimo z dobljenima izrazoma:

$$v[n]=x[n]\cdot o[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\Omega)e^{j\Omega n}d\Omega\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} O(\Omega)e^{j\Omega n}d\Omega \tag{6.6.6}$$

Da ne bi med sabo zamešali integracijskih spremenljivk obeh integralov, ju zamenjajmo z drugima črkama. V prvem integralu naj bo integracijska spremenljivka α v drugem pa β.

$$v[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\alpha)e^{j\alpha n}d\alpha\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} O(\beta)e^{j\beta n}d\beta \tag{6.6.7}$$

Ker sta integrala med sabo neodvisna, lahko enega vrinemo v drugega.

$$v[n]=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^2\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} O(\beta)e^{j\beta n}d\beta\cdot X(\alpha)e^{j\alpha n}d\alpha \tag{6.6.8}$$

$$v[n]=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^2\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} O(\beta)e^{j(\beta+\alpha)n}d\beta\cdot X(\alpha)d\alpha \tag{6.6.9}$$

Uvedimo novo spremenljivko γ.

$$\begin{aligned}\beta+\alpha&=\gamma\\ \beta&=\gamma-\alpha\\ d\beta&=d\gamma\end{aligned} \tag{6.6.10}$$

$$v[n]=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^2\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} O(\gamma-\alpha)e^{j\gamma n}d\gamma\cdot X(\alpha)d\alpha \tag{6.6.11}$$

$$v[n]=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^2\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} X(\alpha)O(\gamma-\alpha)d\alpha\cdot e^{j\gamma n}d\gamma \tag{6.6.12}$$

Notranji integral v (6.6.12) predstavlja konvolucijo med $X(\gamma)$ in $O(\gamma)$. Zato lahko zapišemo:

$$v[n] = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} \left(X(\gamma) * O(\gamma)\right) e^{j\gamma n} d\gamma \tag{6.6.13}$$

Spremenljivka γ je le integralska spremenljivka, zato jo lahko zamenjamo s poljubnim znakom. Izberimo črko **Ω**.

$$v[n] = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} \left(X(\Omega) * O(\Omega)\right) e^{j\Omega n} d\Omega \tag{6.6.14}$$

$$v[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{X(\Omega) * O(\Omega)}{2\pi}\right) e^{j\Omega n} d\Omega \tag{6.6.15}$$

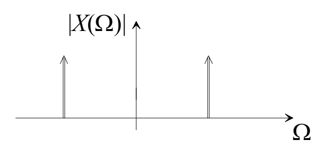
Integral v (6.6.15) je inverzna časovno diskretna Fouriereva transformacija, izraz v oklepaju pa je spekter $V(\Omega)$ signala $v[n]$.

$$V(\Omega) = \frac{1}{2\pi} X(\Omega) * O(\Omega) \tag{6.6.16}$$

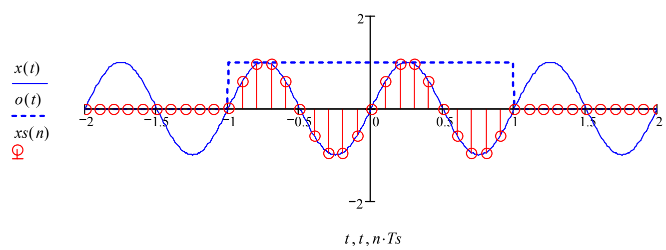
To pomeni, da če med sabo pomnožimo dva signala, je spekter dobljenega signala konvolucija spektrov originalnih signalov.

Primer:

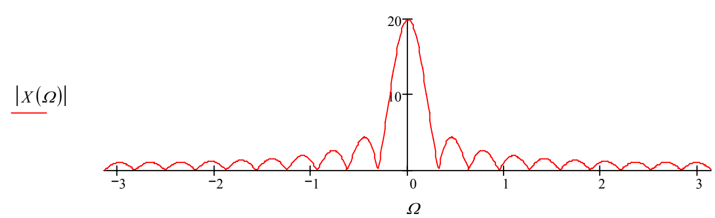
Za spekter cosinusnega signala bi pričakovali le komponenti, ki sta za Ω_0 oddaljeni od izhodišča.



Ker realen sistem ne more izračunati spektra za neskončno časa trajajoč signal, ga je treba skrajšati. Če ga enostavno odsekamo, je to tako, kot bi ga množili s pravokotnim impulzom.



Spekter pravokotnega impulza je funkcija oblike $\left|\frac{\sin(x)}{x}\right|$.



Spekter vzorčenega in odsekanega signala je konvolucija spektra originalnega signala s spektrom pravokotnega impulza: