

5. Sistemska funkcija $H(s)$

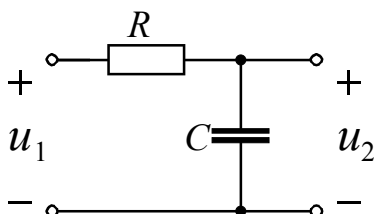
UVOD

1. Naloga

Za podano vezje določite sistemsko funkcijo $H(s)$ in frekvenčni odziv $H(\omega)$. Določite lego ničel in polov. Pri kateri frekvenci je odziv največji?

$$R = 1 \text{ k}\Omega$$

$$C = 100 \text{ nF}$$



Rešitev:

Laplaceova transformacija impedance kondenzatorja je

$$X_C(s) = \frac{1}{Cs} \quad (5.1.1)$$

Izrazimo izhodno napetost vezja v odvisnosti od vhodne:

$$I(s) = \frac{U_1(s)}{R + X_C(s)} \quad (5.1.2)$$

$$U_2(s) = I(s) \cdot X_C(s) = U_1(s) \cdot \frac{X_C(s)}{R + X_C(s)} \quad (5.1.3)$$

Sistemska funkcija je razmerje med Laplaceovo transformacijo izhodnega in Laplaceovo transformacijo vhodnega signala.

$$H(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)} = \frac{U_1(s) \cdot \frac{X_C(s)}{R + X_C(s)}}{U_1(s)} = \frac{X_C(s)}{R + X_C(s)} \quad (5.1.4)$$

V (5.1.4) vstavimo (5.1.1):

$$H(s) = \frac{\frac{1}{Cs}}{R + \frac{1}{Cs}} = \frac{1}{RCs + 1} \quad (5.1.5)$$

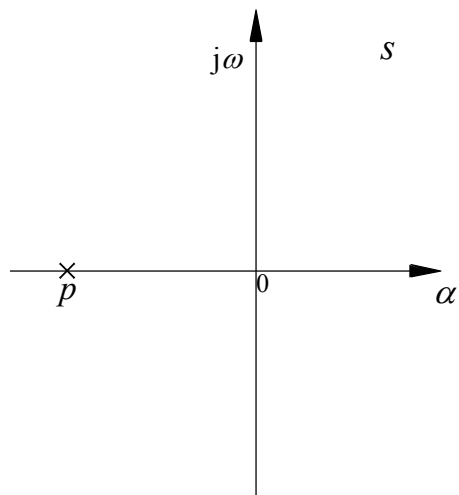
Enačbo (5.1.5) preoblikujemo tako, da se da direktno izpisati ničle in pole:

$$H(s) = \frac{1}{RC} \cdot \frac{1}{\left(s + \frac{1}{RC}\right)} \quad (5.1.6)$$

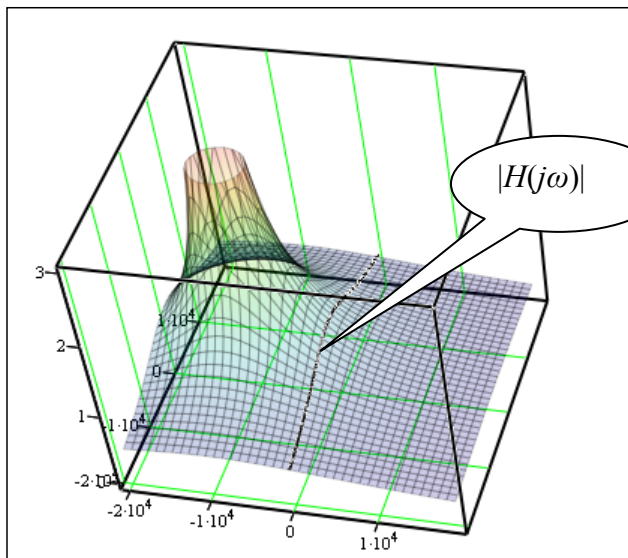
Iz enačbe (5.1.6) je razvidno, da ničel ni. Pol je eden:

$$p = -\frac{1}{RC} = -10000 \text{ s}^{-1} \quad (5.1.7)$$

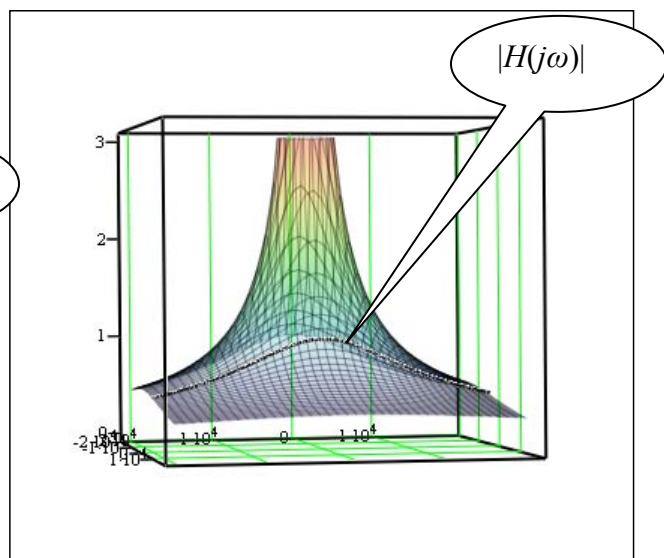
Ničle in poli:



3D-pogled iz dveh perspektiv:



(X, Y, Z), (Wx, Wy, Wz)



(X, Y, Z), (Wx, Wy, Wz)

Prameter s je kompleksno število

$$s = \sigma + j\omega \quad (5.1.8)$$

Če postavimo σ na 0, ostane le še $j\omega$. Da dobimo frekvenčni odziv vezja vstavimo v sistemsko funkcijo le $j\omega$.

$$H(\omega) = |H(s)|_{s=j\omega} \quad (5.1.9)$$

$$H(\omega) = \left| \frac{1}{RC \cdot \left(j\omega + \frac{1}{RC} \right)} \right| = \frac{1}{RC} \cdot \frac{1}{\sqrt{\omega^2 + \frac{1}{(RC)^2}}} \quad (5.1.10)$$

Iz gornjih grafov in iz enačbe (5.1.10) vidimo, da je frekvenčni odziv največji pri frekvenci 0 s^{-1} .

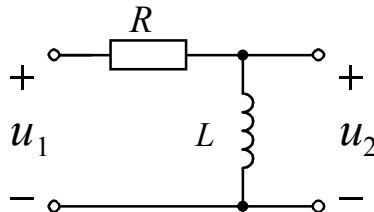
$$H(0) = \frac{1}{RC} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{(RC)^2}}} = \frac{1}{RC \cdot \frac{1}{RC}} = 1 \quad (5.1.11)$$

2. Naloga

Za podano vezje določite sistemsko funkcijo $H(s)$ in frekvenčni odziv $H(\omega)$. Določite lego ničel in polov. Pri kateri frekvenci je odziv najmanjši?

$$R = 10 \Omega$$

$$L = 100 \text{ mH}$$



Rešitev:

Laplaceova transformacija impedance tuljave je

$$X_L(s) = Ls \quad (5.2.1)$$

V nadaljevanju se zgledujemo po prejšnji nalogi. Zavoljo manj pisanja v enačbah spuščamo " s ", razen pri sistemski funkciji, da še vedno vemo za kaj gre.

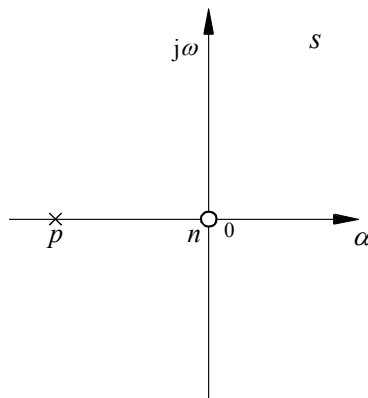
$$U_2 = U_1 \cdot \frac{X_L}{R + X_L} \quad (5.2.2)$$

$$H(s) = \frac{X_L}{R + X_L} = \frac{Ls}{R + Ls} = \frac{s}{s + \frac{R}{L}} \quad (5.2.3)$$

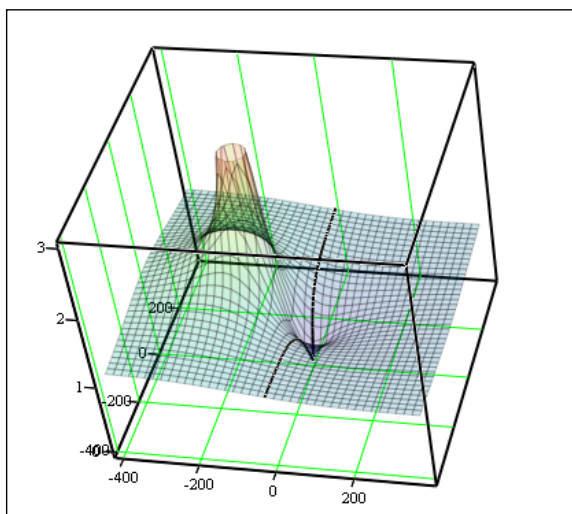
Ničle in poli:

$$n = 0 \text{ s}^{-1} \quad (5.2.4)$$

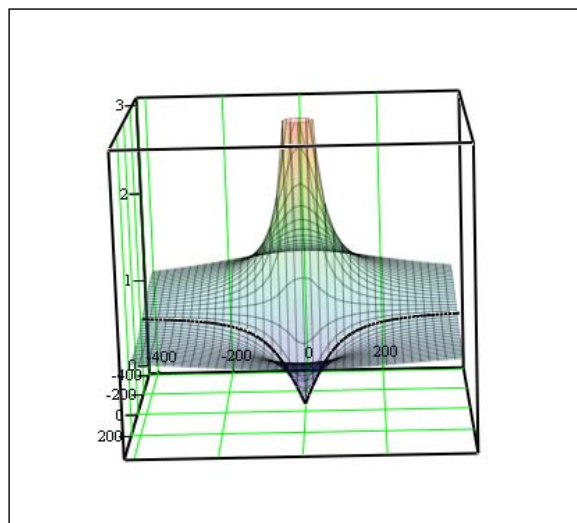
$$p = -\frac{R}{L} = -100 \text{ s}^{-1} \quad (5.2.5)$$



3D-pogled iz dveh perspektiv:



(X, Y, Z), (Wx, Wy, Wz)



(X, Y, Z), (Wx, Wy, Wz)

Frekvenčni odziv:

$$H(\omega) = |H(s)|_{s=j\omega} = \left| \frac{j\omega}{j\omega + \frac{R}{L}} \right| = \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 + \left(\frac{R}{L}\right)^2}} \quad (5.2.6)$$

Frekvenčni odziv je najmanjši pri frekvenci 0 Hz:

$$H(0) = 0 \quad (5.2.7)$$

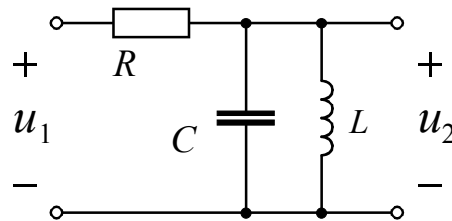
3. Naloga

Za podano vezje določite sistemsko funkcijo $H(s)$ in frekvenčni odziv $H(\omega)$. Določite lego ničel in polov. Pri kateri frekvenci je odziv najmanjši oziroma največji?

$$R = 100 \, \Omega$$

$$L = 10 \, \text{mH}$$

$$C = 1 \, \mu\text{F}$$



Rešitev:

$$U_2 = U_1 \cdot \frac{X_L \parallel X_C}{R + X_L \parallel X_C} \quad (5.3.1)$$

$$H(s) = \frac{X_L \parallel X_C}{R + X_L \parallel X_C} = \frac{\frac{X_L \cdot X_C}{X_L + X_C}}{R + \frac{X_L \cdot X_C}{X_L + X_C}} \quad (5.3.2)$$

$$H(s) = \frac{\frac{Ls \cdot \frac{1}{Cs}}{Ls + \frac{1}{Cs}}}{R + \frac{Ls \cdot \frac{1}{Cs}}{Ls + \frac{1}{Cs}}} = \frac{\frac{\frac{L}{C}}{Ls + \frac{1}{Cs}}}{R + \frac{\frac{L}{C}}{Ls + \frac{1}{Cs}}} \cdot \frac{\left(Ls + \frac{1}{Cs}\right)}{\left(Ls + \frac{1}{Cs}\right)} = \frac{\frac{L}{C}}{R \cdot \left(Ls + \frac{1}{Cs}\right) + \frac{L}{C}} \cdot \frac{Cs}{Cs} \quad (5.3.3)$$

$$H(s) = \frac{Ls}{R \cdot \left(Ls + \frac{1}{Cs}\right) Cs + Ls} = \frac{Ls}{R \cdot (LsCs + 1) + Ls} = \frac{Ls}{RLCs^2 + Ls + R} \quad (5.3.4)$$

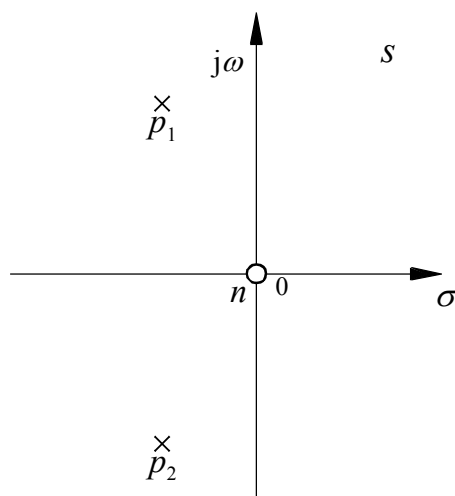
$$H(s) = \frac{Ls}{RLC \left(s^2 + s \cdot \frac{1}{RC} + \frac{1}{LC}\right)} = \frac{1}{RC} \cdot \frac{s}{\left(s^2 + s \cdot \frac{1}{RC} + \frac{1}{LC}\right)} \quad (5.3.5)$$

Ničle in poli:

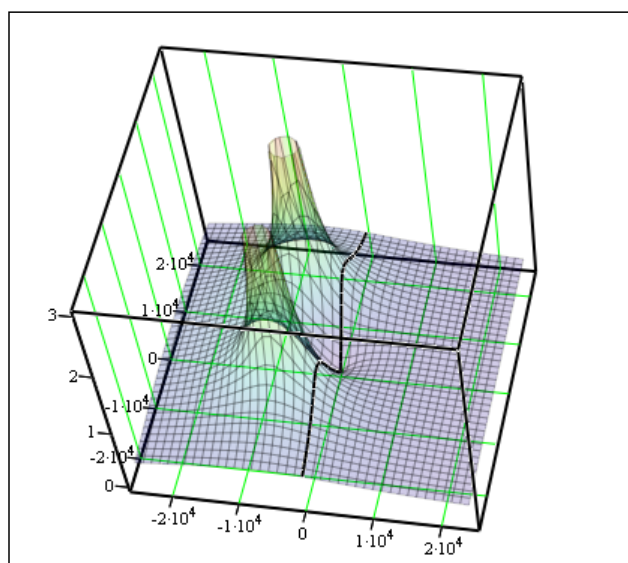
$$(5.3.6)$$

$$p_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-\frac{1}{RC} \pm \sqrt{\frac{1}{(RC)^2} - \frac{4}{LC}}}{2} = \frac{-10000 \pm \sqrt{-300000000}}{2} \text{ s}^{-1} \quad (5.3.7)$$

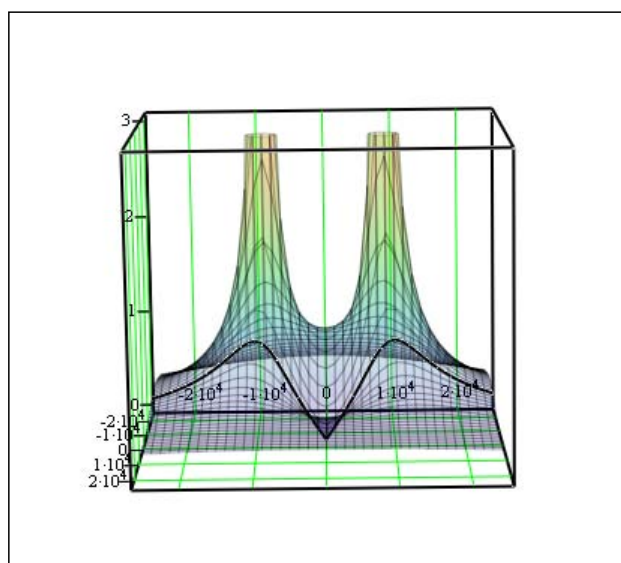
$$p_{1,2} = -5000 \text{ s}^{-1} \pm j8660 \text{ s}^{-1} \quad (5.3.8)$$



3D-pogled iz dveh perspektiv:



(X, Y, Z), (Wx, Wy, Wz)



(X, Y, Z), (Wx, Wy, Wz)

Frekvenčni odziv:

$$H(\omega) = |H(s)|_{s=j\omega} = \frac{1}{RC} \left| \frac{j\omega}{(j\omega)^2 + \frac{j\omega}{RC} + \frac{1}{LC}} \right| = \frac{1}{RC} \cdot \frac{\omega}{\left| \left(\frac{1}{LC} - \omega^2 \right) + j \frac{\omega}{RC} \right|} \quad (5.3.9)$$

$$H(\omega) = \frac{1}{RC} \cdot \frac{\omega}{\sqrt{\left(\frac{1}{LC} - \omega^2 \right)^2 + \left(\frac{\omega}{RC} \right)^2}} \quad (5.3.10)$$

Iz grafa ali iz enačbe vidimo, da je odziv najmanjši pri frekvenci 0 Hz.

Iz grafa vidimo, da je odziv največji približno pri polu, torej pri $\omega = 8660 \text{ s}^{-1}$ oziroma $f = 1378 \text{ Hz}$.

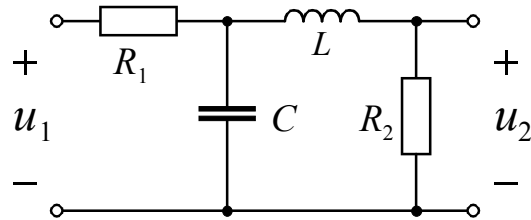
4. Naloga

Za podano vezje določite sistemsko funkcijo $H(s)$ in frekvenčni odziv $H(\omega)$. Določite lego ničel in polov. Pri kateri frekvenci je odziv največji?

$$R_1 = R_2 = 100 \Omega$$

$$L = 10 \text{ mH}$$

$$C = 1 \mu\text{F}$$



Rešitev:

Potencial v vozlišču med uporom R_1 , kondenzatorjem in tuljavo označimo z u_a .

$$I_{R1} = \frac{U_1}{R_1 + (X_L + R_2) \parallel X_C} \quad (5.4.1)$$

$$U_A = I_{R1} \cdot ((X_L + R_2) \parallel X_C) = \frac{U_1}{R_1 + (X_L + R_2) \parallel X_C} \cdot ((X_L + R_2) \parallel X_C) \quad (5.4.2)$$

$$U_A = U_1 \frac{(X_L + R_2) \parallel X_C}{R_1 + (X_L + R_2) \parallel X_C} = U_1 \frac{\frac{(X_L + R_2) \cdot X_C}{X_L + R_2 + X_C}}{R_1 + \frac{(X_L + R_2) \cdot X_C}{X_L + R_2 + X_C}} = U_1 \frac{(X_L + R_2) \cdot X_C}{R_1 \cdot (X_L + R_2 + X_C) + (X_L + R_2) \cdot X_C} \quad (5.4.3)$$

$$I_{R2} = \frac{U_A}{X_L + R_2} \quad (5.4.4)$$

$$U_2 = I_{R2} \cdot R_2 = U_A \cdot \frac{R_2}{X_L + R_2} \quad (5.4.5)$$

$$U_2 = U_1 \cdot \frac{\cancel{(X_L + R_2)} \cdot X_C}{R_1 \cdot (X_L + R_2 + X_C) + (X_L + R_2) \cdot X_C} \cdot \frac{R_2}{\cancel{(X_L + R_2)}} \quad (5.4.6)$$

$$U_2 = U_1 \cdot \frac{R_2 X_C}{R_1 X_L + R_1 R_2 + R_1 X_C + X_L X_C + R_2 X_C} \quad (5.4.7)$$

$$H(s) = \frac{R_2 X_C}{R_1 X_L + R_1 R_2 + R_1 X_C + X_L X_C + R_2 X_C} \quad (5.4.8)$$

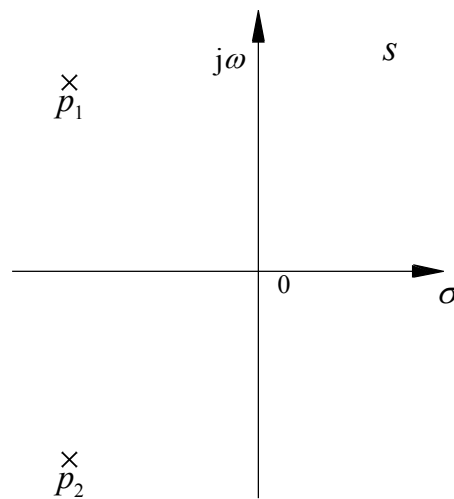
$$H(s) = \frac{R_2 \frac{1}{Cs}}{R_1 Ls + R_1 R_2 + R_1 \frac{1}{Cs} + Ls \frac{1}{Cs} + R_2 \frac{1}{Cs}} = \frac{R_2}{CsR_1 Ls + CsR_1 R_2 + R_1 + Ls + R_2} \quad (5.4.9)$$

$$H(s) = \frac{R_2}{R_1 L C s^2 + (R_1 R_2 C + L)s + R_1 + R_2} = \frac{R_2}{R_1 L C} \cdot \frac{1}{\left(s^2 + s \frac{R_1 R_2 C + L}{R_1 L C} + \frac{R_1 + R_2}{R_1 L C} \right)} \quad (5.4.10)$$

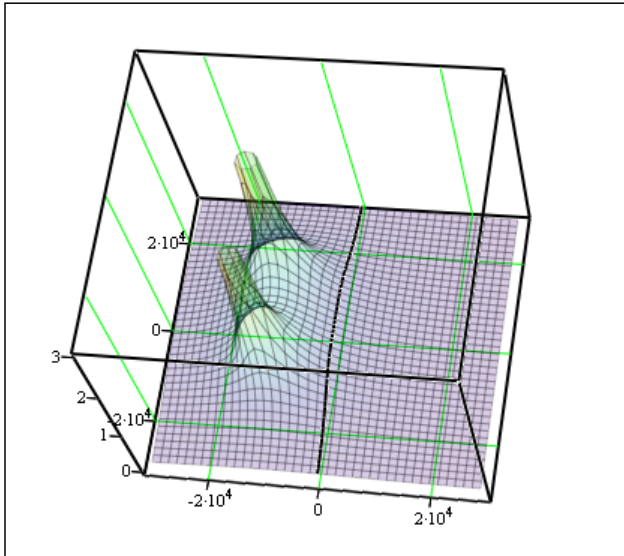
Ničle in poli:
Ničel ni.

$$p_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-\frac{R_1 R_2 C + L}{R_1 L C} \pm \sqrt{\left(\frac{R_1 R_2 C + L}{R_1 L C} \right)^2 - 4 \frac{R_1 + R_2}{R_1 L C}}}{2} \quad (5.4.11)$$

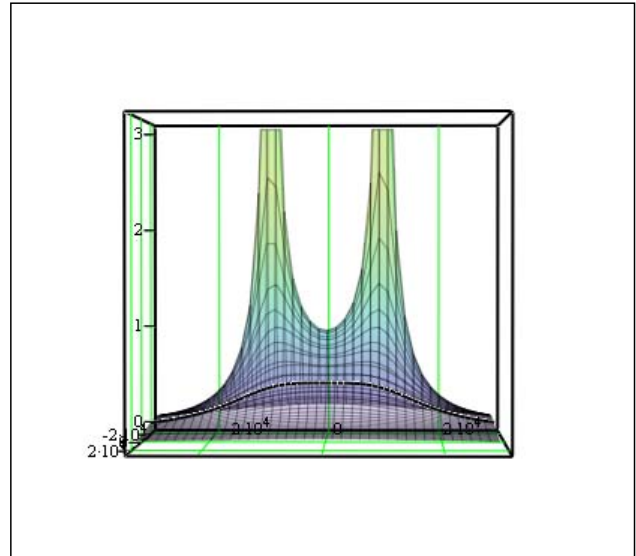
$$p_{1,2} = -10000 \text{ s}^{-1} \pm j10000 \text{ s}^{-1} \quad (5.4.12)$$



3D-pogled iz dveh perspektiv:



(X, Y, Z), (Wx, Wy, Wz)



(X, Y, Z), (Wx, Wy, Wz)

Frekvenčni odziv:

$$H(\omega) = |H(s)|_{s=j\omega} = \frac{R_2}{R_1 LC} \frac{1}{\left| (j\omega)^2 + j\omega \frac{R_1 R_2 C + L}{R_1 LC} + \frac{R_1 + R_2}{R_1 LC} \right|} \quad (5.4.13)$$

$$H(\omega) = \frac{R_2}{R_1 LC} \cdot \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{R_1 + R_2}{R_1 LC} - \omega^2 \right)^2 + \left(\omega \frac{R_1 R_2 C + L}{R_1 LC} \right)^2}} \quad (5.4.14)$$

Odziv je največji približno pri polih torej pri $\omega = 10000 \text{ s}^{-1}$ oziroma $f = 1592 \text{ Hz}$. Vendar vidimo, da to v tem primeru ne drži več zelo dobro.

Več nalog lahko najdete v rešenih izpitih in kolokvijih
(izpit 25.01.2006, 1. kolokvij 08.12.2005)