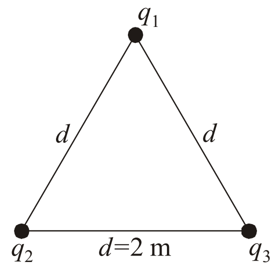
OSNOVE ELEKTROTEHNIKE I (VSŠ)
izpit, 23. januar 2003

1. Tri 10 km dolge vzporedne daljnovodne vrvi so na stebrih razmeščene tako, da so si med seboj oddaljene 2 m. Naelektrene so z naboji $q_1 = 2$ μC/m, $q_2 = -1$ μC/m in $q_3 = -1$ μC/m. Izračunajte absolutno vrednost električne sile na prvo (zgornjo) vrv! (Zanemarite vpliv bližine zemlje.)

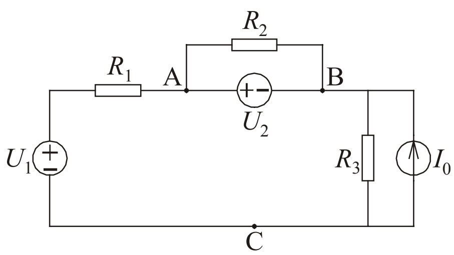


2. Vodna kaplja v obliki krogle polmera 1.6 mm nosi določen električni naboj. Kasneje se ta (z delitvijo) razprši na 64 enakih krogelnih kapljic z enakimi naboji. Kolikšno je razmerje med vrednostjo električne poljske jakosti ob površini manjših kapljic glede na vrednost električne poljske jakosti ob površini prvotne, večje kaplje? Kapljice so po razpršitvi med seboj zelo oddaljene.

3. Zračen ploščni kondenzator, ki ima razmak med ploščama 3 cm, je priključen na napetost 12 kV. Med ploščama je električno polje jakosti 400 kV/m. Nato vzporedno med plošči vstavimo izolant debeline 2 cm in relativne dielektričnosti 2. Kolikšna je potem poljska jakost v zračni špranji širine 1 cm?

4. Med žilo in oklopom 10 km dolgega koaksialnega kabla priključimo napetost 10 kV. Premer žile je 4 mm, notranji premer oklopa je 8 mm, vmesni prostor pa je izolant s specifično električno upornostjo $2.4 \cdot 10^{11}\ \Omega \cdot \mathrm{m}$. Kolikšen je skupen izolacijski tok in koliko vatov izolacijskih izgub ima kabel?

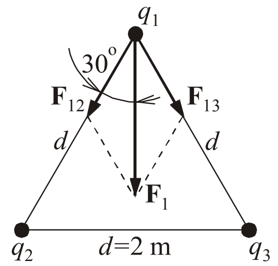
5. Določite potenciale spojišč A, B in C po metodi spojiščnih potencialov! Vrednosti elementov vezja so: $R_1 = R_3 = 1\ \mathrm{k\Omega}$, $R_2 = 3\ \mathrm{k\Omega}$, $I_0 = 2$ mA, $U_1 = 3$ V in $U_2 = 5$ V.



Rešitve so objavljene na: http://torina.fe.uni-lj.si/oe.

OSNOVE ELEKTROTEHNIKE I (VSŠ)
izpit, 23. januar 2003
Rešitve

1. Silo $\vec{F}_1$ na prvo vrv določimo s superpozicijo sile $\vec{F}_{12}$, s katero druga vrv deluje na prvo, in sile $\vec{F}_{13}$, s katero tretja vrv deluje na prvo: $\vec{F}_1 = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13}$. Sili $\vec{F}_{12}$ in $\vec{F}_{13}$ imata enaki komponenti v smeri rezultančne sile $\vec{F}_1$: $F_{12}\cos 30^\circ = F_{13}\cos 30^\circ$. Absolutna vrednost rezultančne sile je enaka dvakratni eni od teh dveh komponent: $F_1 = 2F_{12}\cos 30^\circ = \sqrt{3}F_{12}$. Absolutna vrednost električne poljske jakosti, ki jo na mestu prve vrvi povzroča druga vrv, je $\dfrac{|q_2|}{2\pi\varepsilon_0 d}$. Produkt te absolutne vrednosti in množine elektrine na celi dolžini prve vrvi je enak absolutni vrednosti sile $\vec{F}_{12}$: $F_{12} = \dfrac{|q_2|}{2\pi\varepsilon_0 d} q_1 l$, kjer je l dolžina vrvi. Absolutna vrednost celotne električne sile na prvo vrv je potem: $F_1 = \sqrt{3}\dfrac{|q_2|}{2\pi\varepsilon_0 d} q_1 l \cong \boxed{311\ \text{N}}$.



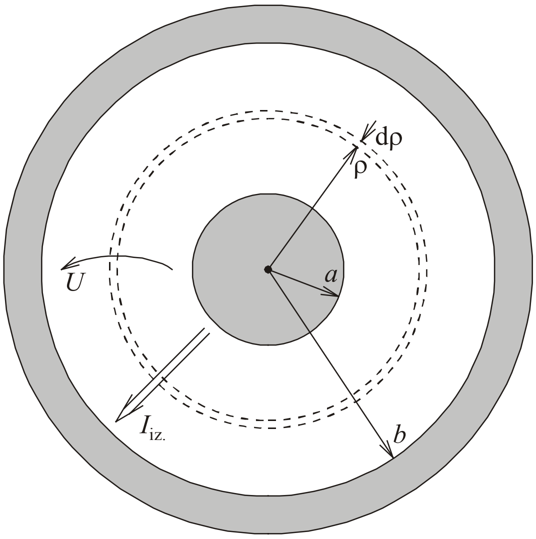
2. Naboj prvotne, večje kaplje, njen polmer, volumen in vrednost električne poljske jakosti ob njeni površini označimo po vrsti z Q_0, $r_0 = 1.6$ mm, $V_0 = \dfrac{4}{3}\pi r_0^3$ in $E_0 = \dfrac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0 r_0^2}$. Ker so manjše kapljice, ki so nastale po razpršitvi večje, med seboj zelo oddaljene, lahko vsako od njih obravnavamo kot osamljeno. Naboj ene od manjših kapljic, njen polmer, volumen in vrednost električne poljske jakosti ob njeni površini označimo po vrsti z $Q_1 = \dfrac{Q_0}{64}$ (zakon o ohranitvi elektrine), r_1,

$$V_1 = \frac{4}{3}\pi r_1^3 = \frac{V_0}{64} = \frac{4}{3}\pi\frac{r_0^3}{64} \quad \left(\Rightarrow r_1^3 = \frac{r_0^3}{64} = \frac{r_0^3}{4^3} \Rightarrow r_1 = \frac{r_0}{4}\right) \quad \text{in} \quad E_1 = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_1^2} = \frac{Q_0/64}{4\pi\varepsilon_0 (r_0/4)^2} =$$

$= \dfrac{1}{4}\dfrac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0 r_0^2} = \dfrac{E_0}{4}$. Razmerje vrednosti poljske jakosti ob površini manjših kapljic glede na vrednost poljske jakosti ob površini večje kaplje je: $E_1/E_0 = \boxed{1/4}$.

3. Napetost, na katero je priključen kondenzator, označimo z $U = 12$ kV. Razmak med ploščama in jakost električnega polja med ploščama pred vstavitvijo izolanta označimo z $d = 3$ cm in $E = U/d = 400$ kV/m. Debelino zračne špranje, ki ostane po vstavitvi izolanta, in jakost električnega polja v njej označimo z $d_0 = 1$ cm in E_0. Debelino izolanta, njegovo dielektričnost in jakost električnega polja v njem pa z $d_1 = 2$ cm, $\varepsilon_1 = 2\varepsilon_0$ in E_1. Ker je električno polje pravokotno na mejo izolant-zrak (ta meja je vzporedna s ploščama kondenzatorja), prehaja vektor gostote električnega pretoka (vektor $\vec{D}$) to mejo zvezno: $\varepsilon_1 E_1 = \varepsilon_0 E_0 \;\Rightarrow\; E_1 = E_0\,\varepsilon_0/\varepsilon_1 = E_0/2$. Kondenzator je po vstavitvi izolanta še vedno priključen na isti napetostni vir. Padec napetosti med ploščama kondenzatorja je enak vsoti padcev napetosti na izolantu in na zračni špranji: $U = E_1 d_1 + E_0 d_0$. V tej enačbi poljsko jakost E_1 izrazimo z jakostjo E_0 (glej prejšnjo enačbo): $U = (E_0/2)d_1 + E_0 d_0 = E_0(d_1/2 + d_0) \;\Rightarrow\; E_0 = \dfrac{U}{d_1/2 + d_0} = \boxed{600\ \text{kV/m}}$.

4. Dolžino kabla označimo z $l = 10$ km, specifično upornost izolacije pa z $\rho_{\text{iz.}} = 2.4 \cdot 10^{11}\ \Omega \cdot \text{m}$. Izolacijski tok je enak razmerju napetosti ter izolacijske upornosti med žilo in plaščem: $I_{\text{iz.}} = U/R_{\text{iz.}}$. Pri računanju izolacijske upornosti razdelimo izolacijo kabla na diferencialno tanke valjne lupine, ki so koncentrične z kablom. Polmer in debelino splošne med temi lupinami označimo z ρ in $\text{d}\rho$. Njena upornost (glede na radialno smer izolacijskega toka) je: $\text{d}R_{\text{iz.}} = \rho_{\text{iz.}} \dfrac{\text{d}\rho}{2\pi\rho l}$. Z integracijo teh diferencialnih upornosti od površine žile do notranje površine plašča dobimo celotno izolacijsko upornost:



$$R_{\text{iz.}} = \int_a^b \rho_{\text{iz.}} \frac{\text{d}\rho}{2\pi\rho l} = \frac{\rho_{\text{iz.}}}{2\pi l}\int_a^b \frac{\text{d}\rho}{\rho} = \frac{\rho_{\text{iz.}}}{2\pi l} \ln\frac{b}{a} \cong 2.65\ \text{M}\Omega.$$

Izolacijski tok in moč izolacijskih izgub sta potem enaki: $I_{\text{iz.}} = U/R_{\text{iz.}} \cong \boxed{3.77\ \text{mA}}$ in $P_{\text{iz.}} = UI_{\text{iz.}} \cong \boxed{37.7\ \text{W}}$.

5. Če spojišče B izberemo za referenčno ($V_\text{B} = 0$), je potencial spojišča A znan, saj je med tema spojiščema idealen napetostni vir: $V_\text{A} = U_2 = 5$ V. Ker je neznan le še potencial spojišča C, zapišimo (po metodi spojiščnih potencialov) I. Kirchhoffov zakon za to spojišče:

$$\frac{V_\text{C} + U_1 - V_\text{A}}{R_1} + \frac{V_\text{C}}{R_3} + I_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad V_\text{C} = \frac{V_\text{A} - U_1 - R_1 I_0}{2} = 0, \text{ saj je } R_1 = R_3.$$

Potenciali spojišč so: $\boxed{V_\text{A} = 5\ \text{V},\ V_\text{B} = 0 \text{ in } V_\text{C} = 0}$.