OSNOVE ELEKTROTEHNIKE 1

ELEKTROSTATIKA

Dejan Križaj

2010

Namenoma prazna stran

Spoštovani študenti!

Pred vami je skripta, ki jo lahko uporabljate za lažje spremljanje predavanj pri predmetu Osnove elektrotehnike 1 na visokošolskem študiju na Fakulteti za elektrotehniko, Univerzi v Ljubljani. Sestavljena je kot zbirka mojih priprav na predavanja.

Skripta večinoma ne vsebuje slikovnega materiala, razen v posebnih primerih. Je pa v skripti rezerviran določen prostor, kjer lahko narišete ustrezno sliko, ki ste jo že narisali na predavanjih. Na ta način si lahko z nekoliko lastne aktivnosti pripravite literaturo, primerno za pripravo na izpit.

Skripta je neke vrste delovni zvezek. Vsebuje teorijo, primere, napotke za obnavljanje znanja, dodatne naloge, poleg tega pa še usmerja k uporabi spleta za dopolnjevanje znanja.

Poleg »standardnega« teksta z razlagami osnovnih električnih pojavov in pojmov ter njihovega matematičnega zapisa sem dodal nekaj primerov uporabe Matlaba za izračun in vizualizacijo polja. Več primerov si lahko ogledate na moji spletni strani na http://lbm.fe.uni-lj.si/dejan/OE/OE.html. Predlagam, da tudi sami poskusite uporabiti Matlab ali pa kakšen soroden program.Na spletu so na voljo tudi brezplačni programi, ki tudi omogočajo zelo kakovostno delo. Poglejte na primer možnosti programov Scilab (www.scilab.org) ali Octave (www.gnu.org/software/octave).

Poleg analitične obravnave smo uporabili tudi programe za numeričen izračun električnega polja. Ta je posebno primeren za vizualizacijo polja, je pa tudi pogost način pri praktičnem delu. Uporabili smo komercialen programski paket Comsol Multiphysics (www.comsol.com), za študentsko delo pa so primerni tudi drugi nekomercialni programi (npr. Quickfield ali Maxwell SV).

Predmet Osnove elektrotehnike I sestavljajo predavanje, avditorne vaje in laboratorijske vaje. V sklopu laboratorijskih vaj boste opravili tudi krajši seminar. Navodila zanj najdete na strani http://lbm.fe.uni-lj.si/dejan/OE/OE.html . Laboratorjske vaje bodo ocenenje. Oceno laboratorijskih vaj sestavlja ocena samega dela v laboratoriju (ter pravilno in vestno izpolnjene skripte za laboratorijske vaje) ter ocena seminarja. Poleg tega bo pri oceni laboratorskega dela upoštevano tudi sprotno reševanje kvizov, ki so na strani http://lbm.fe.uni-lj.si/oe/OE1_2009/OE1.htm.

Na spletni strani http://torina.fe.uni-lj.si/oe/ se nahaja osnovna stran predmetov OE1 in OE2, kjer najdete tudi povezave na zbirko rešenih izpitnih in kolokvijskih nalog, ki so izdatno opremljene z rešitvami. To je gradivo, ki vam ga toplo priporočam kot gradivo za pripravo na izpite in kolokvije.

DOBER INŽENIR

bo razumel osnovne koncepte električnih pojavov. Jih znal razložiti z besedami in z enačbami. Znal bo uporabiti enačbe tako, da bo lahko ugotavljal vpliv različnih parametrov na električne pojave. Znal bo tudi uporabiti literaturo in raznovrstna orodja (npr. računalniška), ki omogočajo izboljševanje razumevanja in načrtovanja električnih naprav in pojavov. Znal bo delati samostojno in v skupini, opraviti raziskave in napisati ugotovitve in jih primerno predstaviti. In pri tem najti zadovoljstvo in ustrezno plačilo. Ste za?

*Pojasnilo: Zvezdica * pred naslovom podpoglavja pomeni, da gre za dodatno poglavje, ki ne spada med obvezno snov.*

Dejan Križaj, 2010

KAZALO

0. Uvod

Po vrsti, kot so hiše v Trsti. Naše spoznavanje električnih pojavov in zakonitosti bo temeljilo na postopnosti. Od preprostejših konceptov do bolj zahtevnih. Razlago električnih pojavov začnemo z ugotovitvijo, da so električni pojavi posledica učinkov električnih nabojev, elektronov in protonov ter da se naboj ne more izničiti niti ne more nastati. Preprosto je. Iz tega tudi sledi zakon o ohranitvi naboja. Če se naboj na določenem telesu ne ohranja pač pa se povečuje ali zmanjšuje, je to posledica odtekanja ali pritekanja nabojev, kar predstavimo s konceptom električnega toka. Med enako predznačenimi naboji deluje odbojna, med nasprotno predznačenimi pa privlačna sila. To opišemo s Coulombovim zakonom. Bolj splošen je pojem *električnega polja*, ki pravzaprav izhaja iz Coulombove sile. Je tudi bolj abstrakten, a se kasneje izkaže zelo pomemben. Nadalje se bomo srečali s pojmom *potenciala* oziroma *potencialne energije*. Če namreč dva enako predznačena naboja približamo, moramo opraviti določeno *delo*, saj deluje sila v smeri ločevanja. S tem smo povečali potencialno energijo (sistema) nabojev. Iz tega koncepta izhaja tudi pojem električnega potenciala oziroma *električne napetosti*. Nato sledijo pojmi *kapacitivnosti, gostote električnega pretoka, dielektričnosti, susceptibilnosti, različnih vrst gostote naboja, električnemu dipolu, vektorju polarizacije, gostoti energije, gostoti moči, moči, energiji, gostoti toka, specifični prevodnosti,* itd. Zelo veliko pojmov, pravzaprav veličin (fiziki bi rekli količin), s katerimi opisujemo električne pojave. In te veličine so med seboj v določenih relacijah. Če se na primer spremeni množina naboja med dvema prevodnikoma, se spremeni tudi napetost med njima. Ugotovili bomo, da je ta zveza pogosto linearna in jo lahko zapišemo v obliki $Q = kU$, kjer je *k* neka konstanta. Običajno jo označimo z veliko črko *C* in jo imenujemo – nič drugače kot kapacitivnost. Velja torej $Q = CU$. Piko kot operacijo množenja običajno opuščamo, mora pa biti prisotna, kadar predstavlja skalarno množenje dveh vektorjev. Podobno se izkaže, da je zveza med tokom skozi prevodnik in napetostjo na elektrodah, ki kontaktirata konca prevodnika tudi linearna. Lahko bi pisali $I = kU$, bolj pogosto pa za konstanto *k* pišemo velik *G*, ki ga imenujemo prevodnost $I = GU$. Bolj znana oblika te enačbe je v obliki, kjer je napetost zapisana kot funkcija toka $U = I / G = RI$. Zveze med veličinami so torej pogosto preproste. Poznati pa je potrebno veličine, njihovo povezavo, pogosto pa tudi omejitve uporabe.

$U = RI$ imenujemo pogosto Ohmov zakon in če je zakon, bi moral vedno veljati. V resnici Ohmov zakon ni zakon v pravem smislu, saj ne velja vedno. Vsaj ne v linearnem smislu. Dobro vemo, da obstaja vrsta naprav, kjer je zveza med napetostjo in tokom izrazito nelinearna. Osnovni tak element je polprevodniška dioda, ki izkazuje veliko prevodnost le v eni smeri.

SLIKA 0.1: A) POVEZAVA MED NABOJEM IN NAPETOSTJO MED DVEMA PREVODNIMA TELESOMA. B) POVEZAVA MED TOKOM IN NAPETOSTJO MED DVEMA PREVODNIMA TELESOMA. C) NELINEARNA POVEZAVA MED TOKOM IN NAPETOSTJO.

OSNOVNE ENAČBE (ZAKONI), KI OPISUJEJO ELEKTRIČNE POJAVE

Osnovne veličine v elektrotehniki, s katerimi opišemo elektromagnetne pojave, so električna poljska jakost *E*, gostota električnega pretoka *D*, gostota magnetnega pretoka *B* in magnetna poljska jakost *H*. Torej ne napetost in tok, kot bi morda pričakovali. So pa seveda te veličine z napetostjo in tokom neposredno povezane. Prav tako povezave med temi osnovnimi veličinami niso tako preproste, kot smo v prejšnjem odstavku ugotavljali za povezave med napetostjo in tokom in nabojem ter napetostjo. Za razumevanje povezav med E, D, B in H potrebujemo nekaj matematičnega znanja. Tega si bomo pridobili spotoma. Vseeno jih zapišimo, da bomo videli, kaj nas še čaka oziroma, do kam bi radi prišli. Enačbe so znane kot Maxwellove enačbe in so zapisane tako v integralni kot diferencialni obliki:

$$\oint_L \vec{H}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = i_{kond} + i_c = \int_A \left(\vec{J}_{kond} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right)\cdot \mathrm{d}\vec{A} \quad \text{ali} \quad \mathrm{rot}\vec{H} = \vec{J}_{kond} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \tag{0.1}$$

$$\oint_L \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = -\int_A \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot \mathrm{d}\vec{A} \quad \text{ali} \quad \mathrm{rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \tag{0.2}$$

$$\oint_A \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{A} = 0 \quad \text{ali} \quad \mathrm{div}\vec{B} = 0 \tag{0.3}$$

$$\oint_A \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{A} = \int \rho \mathrm{d}V \quad \text{ali} \quad \mathrm{div}\vec{D} = \rho \tag{0.4}$$

Da bi jih bolje razumeli potrebujemo čas in tudi nekaj matematičnega znanja. Vidimo, da jih zapišemo z integralnim računom, da so veličine večinoma vektorske (razen ρ, ki je gostota naboja), da gre za različne tipe integracij, po površini, po liniji, po volumnu, itd. Če bi jih znali »brati«, bi lahko iz prve enačbe zaključili, da električni tok in/ali sprememba električnega polja povzroča magnetno polje, iz druge enačbe pa, da sprememba magnetnega polja povzroča električno polje. To pa je tudi osnova za razumevanje elektromagnetnega valovanja. Iz tretje enačbe sledi, da magnetno polje nima ne začetka ne konca, je samo vase zaključeno, iz četrte pa, da so vir električnega polja električni naboji.

Toliko zaenkrat. Naj ponovim, da so enačbe le navržene, in to zato, da vidimo, da osnovnih enačb (zakonov) v elektrotehniki ni veliko in da niso zapisane s tokom in napetostjo (Ohmov zakon) pač pa z relacijami med električnim in magnetnim poljem. Na tem bo tudi poudarek v dveh semestrih. Na razumevanju pojmov povezanih z električnim in magnetim poljem, njihovim pomenom za razumevanje električnih pojavov in njihovim vplivom na okolico. Šele, ko bomo električno in magnetno polje sposobni ovrednotiti, ga bomo lahko poskušali »ukrotiti« oziroma uporabiti nam v korist.

Matematični uvod

Potrebna predznanja niso toliko povezana s predznanji iz elektrotehnike, čeprav je predvsem na začetku nekoliko lažje tistim študentom, ki že imajo določene izkušnje in znanje o električnih pojavih. Potrebna predznanja, ki jih najbolj pogrešamo, so predvsem matematična. Že v uvodnih poglavjih bomo ugotovili, da brez infinitezimalnega in integralnega računa (odvodov in integralov) ne bo šlo, saj so že najosnovnejše relacije med električnimi veličinami pogosto izražene z uporabo le teh. In kako to, da se je bilo v srednji šoli mogoče izogniti tem zapisom in kljub vsemu obravnavati elektrotehniške pojave? Zato, ker se jih je obravnavalo zelo poenostavljeno. Npr., če je tok *I* skozi določen presek (žice) konstanten, je množina naboja, ki se pretoči skozi ta presek v času *T* enaka zmnožku toka in časa, torej $Q = IT$ *. Kaj pa če tok ni ves ta čas konstanten? Potem nam da enačba napačen rezultat. Pravilnega dobimo šele z integracijo toka po času torej $Q = \int i \mathrm{d}t$. Pri tem moramo še označiti, od katerega do katerega časa računamo pretečen naboj. To zapišemo tako, da pod znak za integral napišemo začetni čas (npr. t_1), nad znak pa končni čas (npr. t_n). Ustrezen zapis za pretečen naboj v času od t_1 do t_n je torej $Q = \int_{t_1}^{t_n} i \mathrm{d}t$. Temu rečemo meje integracije, torej rečemo, da integriramo od časa t_1 do t_n. Prvemu integralu (brez označenih meja) rečemo nedoločen integral, drugemu (z označenimi mejami) pa določen integral. Pri matematiki se boste poučili, kako se računa integrale. V končni fazi gre za določena pravila oz. postopke, ki jih je potrebno znati. Večina integralov, ki jih bomo mi uporabljali, so zelo preprosti in so dostopni v vsakem matematičnem priročniku. Velja tudi opozoriti, da vsi integrali niso (analitično) rešljivi, torej ne moremo zapisati končne enačbe, v katero bi le še vstavili vrednosti in izračunali rezultat. V resnici lahko zelo hitro pridemo do takih zapisov integralov, ki nimajo analitične rešitve. Še posebno pogosto je to pri reševanju konkretnih problemov v praksi. Edini izhod nam ponuja numerično reševanje s pomočjo računalnika. Nekaj več o tem v nadaljevanju.

Od vsote do integrala

Prikažimo pot od izračuna naboja z vsotami produktov toka in časa, do zapisa z integralom. Naj se tok spreminja tako, da v času Δt_1 teče tok i_1, v času Δt_2 teče tok i_2, v času Δt_3 teče tok i_3, itd. V času Δt_1 torej steče $i_1 \Delta t_1$ naboja, v času Δt_2 steče $i_2 \Delta t_2$, itd. Celotni naboj, ki preteče od začetnega intervala Δt_1 do zadnjega intervala Δt_n je $Q = i_1 \Delta t_1 + i_2 \Delta t_2 + i_3 \Delta t_3 + ... + i_n \Delta t_n$, kar matematično bolj elegantno zapišemo z vsoto $Q = \sum_{i=1}^{n} i_i \Delta t_i$. Sedaj imalo le še korak do zapisa z integralom. Gre pa zato, da če se tok spreminja poljubno in seveda želimo natančno določiti pretečen naboj, moramo narediti časovne intervale izredno majhne. Naredimo jih infinitezimalno ali diferencialno majhne, da se tok v tem izredno kratkem času praktično ne spremeni. Iz časovnih *diferenc* tako z limitiranjem proti nič dobimo

* Pri avtomobilskih akumulatorjih se pogosto poda kapaciteta akumulatorjev v amerskih urah (Ah), kar po enačbi $Q = IT$ ustreza definiciji naboja. Gre za množino naboja, ki ga lahko izkoristimo. V praksi je ta množina odvisna tudi od načina porabe. Pri večjih obremenitvah (večjih tokih) se »kapaciteta« svinčenih akumulatorjev zmanjša. Za več vpiši Penkert's law v Google.

diferencial časa $\mathrm{d}t = \lim_{\Delta t \to 0} \Delta t$, iz vsote s časovnimi diferencami, ki limitirajo proti nič pa dobimo integral, torej $Q = \lim_{\Delta t \to 0} \sum_{i=1}^{n} i_i \Delta t = \int_{t_1}^{t_n} i \mathrm{d}t$.

SLIKA 0.2: PRIKAZ INTEGRACIJE TOKA: A) DIFERENCE, B) INTEGRAL

V konkretnem primeru smo si pogledali, kako pridemo do naboja z integracijo toka po času. Podoben primer je integracija npr. hitrosti po času. Rezultat je pot, ki jo objekt s hitrostjo v opravi v tem času. Če se hitrost spreminja le v smeri npr. X osi, potem je pot, ki jo opravi objekt s hitrostjo v_x $x = \int v_x \mathrm{d}t$. Hkrati vemo, da je hitrost lahko različno velika v različnih smereh, jo je potrebno pisati kot vektor $\vec{v}$. Rezultat integracije vektorja hitrosti po času pa je pot (v 3D), ki jo objekt s hitrostjo $\vec{v}$ opravi: $\vec{r} = \int \vec{v} \mathrm{d}t$

.

Ni pa nujno, da integracija vedno poteka po času pač pa po poljubni spremenljivki. Zelo pogosto je to razdalja. Če se npr. določena veličina, npr. sila, spreminja z razdaljo, dobimo kot rezultat integracije delo, ki jo pri tem sila opravi. Če se sila spreminja le v smeri poti, npr. X, kar lahko označimo z F_x, dobimo z integracijo energijo $W_x = \int F_x \mathrm{d}x$, kjer je sedaj d*x* diferencial poti. Bolj zapleteno integracijo pa dobimo v splošnem primeru, ko se sila po poljubni poti tudi poljubno spreminja. V tem primeru moramo tako silo kot pot opisati z vektorjema ($\vec{F}$ in $\vec{r}$), diferencial poti pa z vektorjem $\mathrm{d}\vec{r}$. Po definiciji (to pomeni, da smo si mi izbrali tak način izraažanja), je delo po poti odvisno le od tiste sile, ki deluje v smeri poti. To pa dobimo s skalarim produktom, ki (po definiciji) predstavlja produkt dveh vektorjev in cosinusa vmesnega kota $(C = \overline{A} \cdot \overline{B} = AB \cos \alpha_{AB})$. V našem konkretnem primeru to pomeni, da en del celotnega dela (tisti del na diferencialno majhni razdalji $\mathrm{d}\vec{r}$) dobimo s skalarnim množenjem vektorja sile in diferenciala poti $\mathrm{d}W = \overline{F} \cdot \overline{\mathrm{d}r}$, celotno delo pa z integracijo $W = \int \overline{F} \cdot \overline{\mathrm{d}r}$. Vse te, in tudi druge, oblike integralov bomo v nadaljevanju potrebovali, zato potrebujemo tako njihov »fizikalni« pomen, kot tudi matematični način reševanja integralov.

OD NAKLONA DO ODVODA

Poleg integracije, ki nam »govori« o kumulativnem seštevanju prispevkov, so pogosto relacije med fizikalnimi veličinami povezane s hitrostjo sprememb določene veličine. Če imamo veličino podano grafično (npr. kot spremembo opravljene poti po času), lahko dobimo hitrost spremembe poti v času (kar tudi običajno poimenujemo *hitrost*) iz naklona funkcije v določenem časovnem intervalu, npr Δt.

Vzemimo, da nas zanima hitrost spremembe (hitrost) ob času *t*. To naredimo tako, da naredimo razliko vrednosti funkcije (poti) v času t in nekoliko kasneje (ob času $t+\Delta t$), torej $\Delta x = x(t+\Delta t) - x(t)$ in jo delimo s časovnim intervalom Δt. Dobimo velikost spremembe poti v spremembi časa, kar je hitrost $v(t) \approx \frac{\Delta x}{\Delta t}$. V konkretnem primeru nismo uporabili enačaja, ker je hitrost ob času *t* izračunana s pomočjo kvocienta diferenc nekoliko odvisna od izbire intervala Δt, v katerem izračunamo hitrost. Najbolj natančno bi določili hitrost ob času *t* tako, da bi časovni interval zmanjšali proti nič. Dobili bi naklon krivulje ob času *t*, ki predstavlja tangento na krivuljo v tej točki. Z limitiranjem intervala Δt proti nič dobimo odvod, ki je definiran kot $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$, kar je tudi eksaktno enako hitrosti $v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$. (V splošnem sta tako pot kot hitrost vektorja in je ustreznejši (pravilnejši) zapis $\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}$).

SLIKA 0.3: DOLOČANJE NAKLONA V DOLOČENEM ČASOVNEM INTERVALU IN DOLOČANJE ODVODA V DOLOČENEM ČASU IZ TANGENTE NA FUNKCIJO V TEJ TOČKI (ČASU).

OSNOVNE VELIČINE

Veličine (fiziki uporabljajo namesto izraza veličina izraz količina) ki jih bomo obravnavali večinoma že poznate. Npr. električni naboj (v elektrotehniki pogosto imenujemo tudi elektrina), tok, napetost, moč, energija, itd. Iz srednje šole poznate tudi določene relacije med njimi, na primer povezavo med tokom in nabojem $Q = It$, med napetostjo in tokom $U = IR$ ipd. Ugotovili bomo, da so te zveze le pogojno ustrezne, npr. $Q = It$ le v primeru, ko je tok konstanten in $U = IR$ le za določene tipe elementov (linearnih uporov). Poleg tega tudi definicije določenih veličin niso najbolj preproste. Na primer definicija električne napetosti, ki je definirana kot delo, ki ga opravi električna sila pri premiku enote naboja (1 C) od enega do drugega mesta.

Merske enote in pisanje enačb

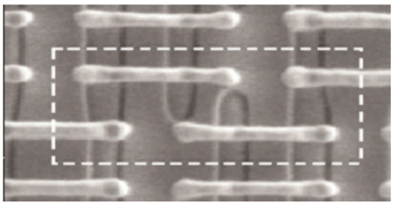
Za vsako veličino uporabljamo določen simbol, običajno eno črko abecede, pogosto grške[*]. Simbol za napetost je *U*, za tok *I*, temperaturo *T* itd. Opazili ste že, da pišemo simbole za veličine poševno. To pa zato, da jih ločimo od merskih enot, kratko kar enot, ki jih pišemo pokončno. Kot primer zapišimo $U = 5\ \mathrm{V}$. Med številsko vrednostjo in enoto je praviloma presledek. Mersko enoto predstavimo z imenom in simbolom. Ime enote za napetost je volt, simbol pa V.

V svetu se je uveljavil sistem merskih enot, ki ga s kratico imenujemo SI (Sisteme International). Obsega sedem osnovnih enot in vrsto izpeljanih[†]. Osnovne enote so kilogram (kg), meter (m), sekunda (s), amper (A), kelvin (K), kandela (cd), mol (mol), radian (rad) in steradian (sr). Izpeljane enote pa so na primer m/s za hitrost itd. Zanimivo je, da je električni tok edina električna veličina, ki spada med osnovne enote (kilogram, meter, sekunda, Amper). Bolj natančne definicije osnovnih enot si preberite v Uradnem listu RS št.26/2001 (http://www.uradni-list.si/1/objava.jsp?urlid=200126&stevilka=1594), ali pa v množici drugih spletnih strani, npr. http://www-f1.ijs.si/~ziherl/standardi.pdf.

Označevanje

V elektrotehniki pogosto uporabljamo predpone k merskim enotam. To je potrebno zato, ker je red velikosti veličin zelo različen. Kapacitivnosti so pogosto reda mikro, nano ali piko faradov (μF, nF, pF), uporabljajo se napetosti od mikro voltov do mega voltov itd. Zveze nam prikazuje preglednica:

vrednost	ime	predpona	primer
10^{-12}	piko	p	pF (piko farad)
10^{-9}	nano	n	ns (nano sekunda)
10^{-6}	mikro	μ	μA (mikro amper)
10^{-3}	mili	m	mV (mili volt)
10^{3}	kilo	k	kΩ (kilo ohm)
10^{6}	mega	M	MW (mega vat)



Intelova 65 nm tehnologija SRAM spominskih celic. Na mm^2 je nekaj 10 milijonov takih tranzistorjev.

[*] Simboli za veličine so več ali manj ustaljeni. Tako se za tok uporablja črka *i,* za napetost *U* itd. Ker pa nam v določenih primerih zmanjka črk ali pa se na drugih področjih uporabljajo iste črke uporabljajo za označevanje drugih veličin, je v določenih primerih potrebno biti previden in pravilno rabo razbrati iz »konteksta«. Npr., simbol ρ (grška črka ro) se uporablja kot simbol za volumsko gostoto naboja a hkrati tudi za specifično električno prevodnost. Podobnih primerov je še mnogo.

[†] Pogosto v literaturi zasledimo uporabo drugih merskih enot, kot smo jih navajeni. Te so lahko posledica uporabe drugega merskega sistema (npr. CGS: centimeter-gram-sekunda), kjer se na primer namesto enote tesla za gostoto magnetnega polja uporablja enota gauss. V konkretnem primeru je pretvorba direktna 1 T = 10^4 gaussa. Načeloma je uporaba starih enot prepovedana, zaradi inercije uporabnikov pa jih (še posebno v praksi) še vedno pogosto uporabljamo. Zato je v določenih primerih dobro poznati tudi enote, ki naj se ne bi več uporabljale.

10^9	giga	G	GJ (giga džul)
10^{12}	tera	T	TW (tera vat)

GRADNIKI SNOVI

Zavedati se moramo, da so električni pojavi posledica lastnost naše narave, ki je sestavljena iz atomov, ti pa iz jedra iz protonov, nevtronov in oblaka elektronov. Elektroni in protoni imajo lastnost, ki ji rečemo naboj. Elektroni imajo negativni naboj, protoni pa pozitivnega. Predznak nabojev je seveda naša odločitev. Prvi je koncept pozitivnih in negativnih nabojev vpeljal Benjamin Franklin. Čisto lahko bi se lahko Franklin odločil tudi za obratno pojmovanje.

Joseph John Thomson, profesor fizike na univerzi Cambridge, je leta 1897 v eksperimetih s katodno cevjo opazil delce (elektrone), ki so

Prevodniki, polprevodniki, izolatorji. Dokler ima atom enako število pozitivnih in negativnih nabojev, je nevtralen. Atomi so običajno vezani med seboj in tvorijo zelo različne tvorbe. V kovinah so atomi, ki običajno tvorijo vezi, pri katerih je del elektronov zelo šibko vezan na jedro in se z lahkoto od jedra odcepi in se »prosto« giblje po materialu. Zato za kovine smatramo, da so dobri prevodniki. Nasprotni primer so izolatorji. Pri izolatorjih ni prostih ali pa je zelo malo prostih elektronov, ki lahko delujejo kot nosilci toka. Zato so izolatorji slabi prevodniki električnega toka. Poseben primer predstavljajo polprevodniki. Že ime samo pove, da so njihove lastnosti nekaj vmes med prevodniki in izolatorji. Čisti polprevodniki so običajno izolatorji (npr. silicij ali germanij). Če pa jim vstavimo primesi (npr. z mikrotehnološkim procesom dopiranja), postanejo te snovi bolj prevodne. Prevodnost teh snovi torej lahko spreminjamo, še posebno pa je zanimivo, da je I-U karakteristika ustrezno dopiranih polprevodniških elementov pogosto nelinearna. Na tak način realiziramo polprevodniške elemente, ki jih poznamo kot diode, tranzistorje. Te lahko integriramo v mikroelektronske komponente (integrirana vezja)[*]. Poseben primer so še superprevodniki, snovi, ki pri določeni temperaturi izgubijo uporovne lastnosti.

Benjamin Franklin (1706-1790) je bil izjemen politik (pisec ameriške ustave) pa tudi izjemen znanstvenik. Prvi je ločil naboje na pozitivne in negativne, izumil izraze baterija, naboj, prevodnik, pozitivni in negativni naboj itd. Najbolj znan (in tudi nevaren) je njegov dokaz, da je strela električen pojav. To je pokazal z eksperimentom z zmajem, ki se ob dežju namoči in postane prevoden. Ob strelah se del toka razelektritve prenese preko zmaja na zemljo. Iz teh raziskav sledi tudi njegov izum strelovoda.

[*] Gordon E. Moore, soustanovitelj podjetja Intel, je že leta 1965 zapisal znamenito ugotovitev, da se gostota tranzistorjev na integriranem vezju veča eksponentno s časom – vsaki dve leti se približno podvoji. V podjetju Intel so leta 2007 prikazali zmožnost proizvajati tranzistorje velikosti 45 nm na 300 mm veliki silicijevi rezini. (http://en.wikipedia.org/wiki/Moore's_law).

1. Naboj in tok

Vsebina poglavja: naboj, zakon o ohranitvi naboja, tok, predznak toka, kontinuitetna enačba.

NABOJ (ELEKTRINA)

Vsi naboji prispevajo k električnim pojavom. V tem smislu bi morali pri analizi v principu upoštevati vse naboje v atomu, molekuli, snovi, tako elektrone kot protone. V praksi pa je pogosto dovolj, da se osredotočimo le na vplive presežkov nabojev, saj je njihov vpliv na električne pojave največji. Omenili smo že enoto naboja 1 C (Coulomb ali slovensko kulon). Najmanjša vrednost naboja je naboj elektrona, ki je približno 1,602.10^{-19} C in ker je ta naboj negativen, moramo upoštevati še negativen predznak. 1 C je torej mnogo elektronov. Koliko? $1/1,602\cdot10^{-19}\cong6,25\cdot10^{18}$. To pa je veliko delcev in da bi obravnavali vsakega posebej je praktično neizvedljivo. Bolj pogosto obravnavamo naboje v smislu njihove koncentracije oziroma gostote porazdelitve.

ZAKON O OHRANITVI NABOJA

Kako nastaja naboj? Ugotovitve kažejo, da naboj ne more iz nič nastati, niti se ga ne da izničiti. To dejstvo opišemo kot zakon o ohranitvi naboja, ki je fundamentalen (osnovni) zakon. Pravi, da je v izoliranem sistemu vsota vseh nabojev konstantna.

$$\boxed{\sum_i Q_i\Big|_{\substack{\text{znotraj}\\\text{izoliranega}\\\text{sistema}}}=\text{konstanta}}\qquad(1.1)$$

SLIKA 1.1: SISTEM IZOLIRANIH NABOJEV

Če je konstanta (vsota nabojev) pozitivna, govorimo o presežku pozitivnih nabojev, če je negativna o presežku negativnih nabojev, če pa je enaka nič, je sistem nevtralen (ima enako število pozitivnih in negativnih nabojev). Pri vseh prej omenjenih primerih razelektritve in naelektritve gre torej za prerazporejanje naboja. Naboj torej ne more »iz nič« nastati niti ne more »izginiti«. V tem smislu lahko rečemo, da je neuničljiv. Fizikalno – matematično rečemo, da je relativistična invarianta, je količina, ki se ne spremeni tudi če se sistem giblje s hitrostjo blizu svetlobne. (To pa ne drži za maso, ki se ob velikih hitrostih spreminja v skladu z znano povezavo med maso in energijo delcev (Einstein). Torej za maso ne moremo trditi, da velja zakon o ohranitvi mase. Ta velja le, če so hitrosti sistema majhne v primerjavi s svetlobno hitrostjo. Kar pa zelo pogosto drži.)

Primer: Vzemimo izoliran sistem v katerem imamo tri telesa. Dve nevtralni, na enem pa je presežek pozitivnega naboja 10 mC. Ob stiku teh treh teles se prenese 5 mC na eno, 2 mC pa na drugo telo. Koliko naboja je ostalo na prvotno naelektrenem telesu?

V skladu z zakonom o ohranitvi naboja mora veljati

$$Q_1 + Q_2 + Q_3 = 10\,\mathrm{mC}\,,$$

tako pred stikom teles kot po stiku. Po stiku teles je $Q_2 = 5\,\mathrm{mC}$, $Q_3 = 2\,\mathrm{mC}$ iz česar sledi $Q_1 = 10\,\mathrm{mC} - (Q_2 + Q_3) = 3\,\mathrm{mC}$.

V neposredni povezavi z zakonom o ohranitvi naboja je tudi kontinuitetna enačba, ki opisuje povezavo med električnim tokom in nabojem.

Električni tok (kontinuitetna enačba)

Nosilci električnega toka so naboji, rečemo jim lahko tudi elektrine. Če ti mirujejo, električnega toka ni. Tako kot ni vodnega toka, če je jez zajezen. Če pa jez odpremo, da lahko voda steče po strugi ali po cevi, pa seveda govorimo o vodnem toku. Tako je tudi pri elektriki. Če se naboji »pretakajo« iz enega mesta na drugo, govorimo o električnem toku. Če je časovna sprememba prenesenega naboja večja, pomeni, da je v tem času tekel večji tok. Matematično to na simbolni način lahko zapišemo v smislu pretečenega naboja skozi določen presek v določenem času $\mathrm{TOK} = \dfrac{\text{pretečen naboj}}{\text{čas pretakanja}}$ ali kot spremembo količine naboja v določenem objektu v določenem časovnem intervalu $\mathrm{TOK} = \dfrac{\text{sprememba naboja}}{\text{sprememba časa}}$. Matematično to zapišemo v obliki $i = \dfrac{Q(t+\Delta t) - Q(t)}{(t+\Delta t) - t} = \dfrac{\Delta Q}{\Delta t}$, kjer ΔQ predstavlja spremembo množine naboja v časovnem intervalu Δt. Če se sprememba naboja odvija zelo hitro, je potrebno časovne intervale Δt vzeti zelo male, v idealnem primeru tako majhne, da gre $\Delta t \to 0$. V tem primeru dobimo bolj splošno definicijo toka v obliki $i = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta Q}{\Delta t}$, kar pa v matematiki predstavlja definicijo odvoda. Električni tok lahko torej definiramo kot odvod naboja po času, kar zapišemo kot

$$\boxed{i = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}}. \qquad (1.2)$$

SLIKA 1.2: ELEKTRIČNI TOK JE ENAK HITROSTI SPREMINJANJA MNOŽINE NABOJA NA TELESU (OBJEKTU).

Primer: Naboj na objektu se linearno manjša s časom. Ob času t = 1 s je Q = 20 μC, ob času t =5 s pa 10 μC. Določimo tok (ki teče) iz objekta v tem času.

Izračun: $I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{10\,\mu\text{C} - 20\,\mu\text{C}}{5\,\text{s} - 1\,\text{s}} = -2{,}5\,\mu\text{C/s} = \underline{\underline{-2{,}5\,\mu\text{A}}}$.

PREDZNAK TOKA

Po dogovoru je smer toka v smeri premikanja (pretakanja) pozitivnega naboja. Npr. tok 2 A iz leve v desno predstavlja pretakanje 2 C naboja na sekundo iz leve v desno.

Če nas zanima kopičenje naboja na določenem telesu, usmerimo tok v smer pritekanja naboja in velja zveza

$$\boxed{i_{\text{v smeri pritekanja}} = +\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}}. \tag{1.3}$$

Če pa je smer toka stran od opazovanega naboja, je potrebno uporabiti negativni predznak (v smeri odtekanja pozitivnega naboja):

$$\boxed{i_{\text{v smeri odtekanja}} = -\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}}. \tag{1.4}$$

SLIKA 1.3: RAZLAGA PREDZNAKA PRI ZVEZI MED NABOJEM IN TOKOM.

Primer: Naboj na pozitivni sponki akumulatorja je konstanten – se ne spreminja s časom. Kolikšen je električni tok, ki izhaja iz sponke? Matematično lahko zapišemo, da je naboj na pozitivni sponki enak $Q(t) = Q_0$. Iz osnov matematike vemo, da je odvod konstante enak nič, torej bo ta tok seveda enak nič. Do enakega rezultata pridemo z razmislekom, da ker ni odtekanja naboja tudi ni toka.

Kaj pa, če recimo na akumulator priključimo žarnico in se naboj na pozitivni sponki akumulatorja manjša linearno, npr. v 10 sekundah za 12 C? Matematično to zapišemo kot $Q(t) = Q_0 - \frac{12\,\text{C}}{10\,\text{s}}t$. V tem primeru je skozi žarnico (stran od pozitivne sponke) električni tok $i = -\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = -\left(-\frac{12\,\text{C}}{10\,\text{s}}\right) = \underline{\underline{1{,}2\,\text{C/s}}}$. Ker vemo, da je enota za tok A(mper), je rezultat torej 1,2 A. Ponovno vidimo, da velja 1 C = 1 A.s.

Vprašanje: Kaj pomeni pozitivni predznak toka?

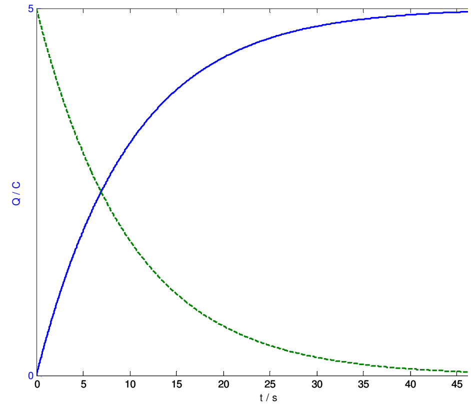
Odgovor: To, da s pozitivne sponke odtekajo pozitivni naboji s »hitrostjo« 1,2 C/s, oziroma bolje - s tokom 1,2 A.

Vprašanje: Kakšen pa je v resnici način gibanja nabojev v prevodnikih?

Odgovor: Kot smo že ugotovili, v prevodniku prevajajo elektroni, kar pomeni, da gre v resnici za prenos elektronov preko žarnice v smeri pozitivne sponke, kjer smo imeli prej višek pozitivnih nabojev oziroma pomanjkanje elektronov.

Vprašanje: Ali steče tok skozi žarnico šele tedaj, ko do nje pridejo elektroni iz akumulatorja?

Odgovor: poiščite ga sami ...



SLIKA: Elektrenje (polnenje) kondenzatorja. Naboj (modra polna črta) eksponentno narašča proti vrednosti 5 mC. Tok (zelena črta) je v začetku največji

Primer: Naboj na pozitivni elektrodi kondenzatorja se spreminja eksponentno po enačbi $Q(t)=5\left(1-e^{-\frac{t}{10\,\mathrm{s}}}\right)\mathrm{mC}$. Določimo tok naelektritve, če smer toka označimo v smeri pozitivne elektrode.

Izračun: Glede na označitev moramo uporabiti enačbo

$$i=i_{\substack{\text{v smeri}\\ \text{elektrode}}}=\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(5\left(1-e^{-\frac{t}{10\mathrm{s}}}\right)\mathrm{mC}\right)=-5e^{-\frac{t}{10\,\mathrm{s}}}\,\mathrm{mC}\cdot\left(-\frac{1}{10\mathrm{s}}\right)=0{,}5e^{-\frac{t}{10\,\mathrm{s}}}\,\mathrm{mA}.$$

Pozitivni rezultat pomeni, da teče v smeri pozitivne elektrode pozitiven naboj.

Kontinuitetna enačba

Enačbo $i(\mathrm{t})=-\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}$ imenujemo tudi kontinuitetna enačba, saj v smislu zakona o ohranitvi naboja pove, da v kolikor iz električno zaključenega sistema izhajajo naboji, je to posledica električnega toka.

Naboj kot integral toka

Kaj pa obratno? Če poznamo tok, koliko naboja se »pretaka«? Gornjo enačbo je potrebno »predelati«, kar naredimo tako, da na obeh straneh kontinuitetne enačbe množimo z dt in dobimo $i\mathrm{d}t=\pm\mathrm{d}Q$. Sedaj le še integriramo obe strani in dobimo

$\boxed{Q(t) = \pm\int i\mathrm{d}t + \mathrm{konst}}$. Z besedami: naboj je integral toka po času. (1.5)

Konstanta je odvisna od naboja, ki je bil na telesu pred vklopom toka. Lahko bi integral zapisali tudi kot določen integral z integracijo po času od nekega časa t_0 do časa t:

$\int\limits_{Q(t_0)}^{Q(t)} \mathrm{d}Q = \pm\int\limits_{t_0}^{t} i\mathrm{d}t$ kar dá

$$\boxed{Q(t) = Q(t_0) \pm \int\limits_{t_0}^{t} i\mathrm{d}t}. \tag{1.6}$$

Predznak pred integralom je pozitiven v primeru, ko je tok usmerjen v smer »kopičenja« naboja $Q(t)$.

Primer: Ob času t = 0 s priklopimo akumulator naelektren s 500 C na breme. Iz pozitivne sponke akumulatorja je v vezje konstanten tok 0,2 A. Koliko naboja je na pozitivni sponki akumulatorja ob času t = 10 minut?

Poglejmo si tri različne pristope k izračunu::

1. Izračunamo pretečen naboj in ga odštejemo od celotnega: $Q\big|_{\text{pretečen}}(t = 10\text{ min}) = \int\limits_{t_0}^{t}(0{,}2\text{ A})\mathrm{d}t = 0{,}2\text{ A}\cdot(t - t_0) = 0{,}2\text{ A}\cdot 10\text{ min} = 0{,}2\text{ A}\cdot 10\cdot 60\text{ s} = 120\text{ A}\cdot\text{s}$. V času 10 minut je skozi presek žice prešlo 120 As oziroma 120 C naboja. Na pozitivni sponki ga je torej ostalo še 500 C – 120 C = 380 C.

2. Izračun z nedoločenim integralom (en. (1.5)), kjer moramo dodatno izračunati konstanto: $Q(t) = -\int(0{,}2\text{ A})\mathrm{d}t + \text{konst} = -0{,}2\text{ A}\cdot t + \text{konst}$. Konstanto določimo iz pogoja $Q(t = 0) = 500\text{ C} \Rightarrow \text{konst} = 500\text{ C}$. Sledi $Q(t) = 500\text{ C} - 0{,}2\text{ A}\cdot t$ in $Q(t = 10\,\text{min}) = 500\text{ C} - 0{,}2\text{ A}\cdot 10\,\text{min} = 380\text{ C}$.

3. Izračun z določenim integralom (en. (1.6)): $Q(t) = Q(t = 0) - \int\limits_{0}^{10\,\text{min}}(0{,}2\text{ A})\mathrm{d}t = 500\text{ C} - 0{,}2\text{ A}t\big|_{0\,\text{min}}^{10\,\text{min}} = 120\text{ C}$.

Konstanten tok

Ob konstantnem toku velja linearna zveza med nabojem in tokom

$$\boxed{Q = \int_0^t I\mathrm{d}t = I\int_0^t \mathrm{d}t = It}. \tag{1.7}$$

To zvezo poznamo že iz srednješolske fizike: naboj je produkt toka in časa. Ugotovili smo že omejeno veljavnost zapisa $Q = It$, saj velja le za konstatne toke.

Za doma:

1. Odgovorite na vprašanja za obnovo.
2. Preberite si o osnovnih merskih enotah.
3. Obnovite znanja o odvodih in integralih. Priskrbite si list z osnovnimi odvodi in integrali.
4. Rešite Test1 na strani http://lbm.fe.uni-lj.si/oe/OE1/quiz/TEST1es.htm

Za raziskovalce:

Benjamin Franklin je znameniti Američan. Poiščite več informacij o njegovem življenju, delu in raziskavah, ki jih je opravil v elektrotehniški znanosti.

Vprašanja za obnovo:

1) Kolikšna je vrednost in predznak osnovnega naboja?
2) Kaj »pravi« zakon o ohranitvi naboja?
3) Kakšna je zveza med tokom in nabojem – kontinuitetna enačba? Kako iz toka izračunati pretečen naboj ali iz spemembe naboja tok.
4) Kdaj velja $i = +\frac{dQ}{dt}$ in kdaj $i = -\frac{dQ}{dt}$?

2. Coulombov zakon

Vsebina: sila med točkastima nabojema, dielektrična konstanta vakuuma, vektorski zapis sile, superpozicija sil.

Že stari Grki so ugotovili, da med naelektrenimi telesi deluje sila, ki jo je William Gilbert leta 1600 v znameniti knjigi De Magnete poimenoval električna sila. Kljub znanstvenim raziskavam je preteklo kar nekaj časa, da je bila dognana zveza med velikostjo sile in naboji, ki to silo povzročajo.

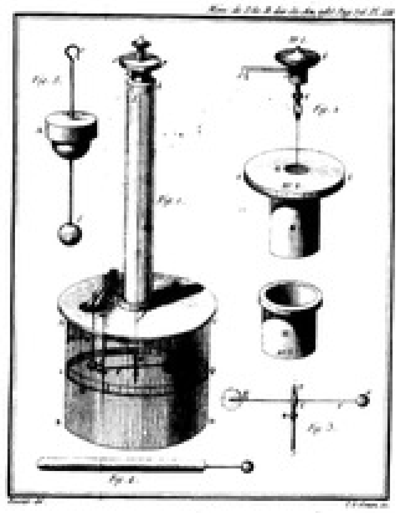
Osnovno zakonitost je s pomočjo eksperimenta s torzijsko tehtnico dognal Charles Augustin de Coulomb. Ugotovil je, da je sila med dvema naelektrenima kroglicama proporcionalna produktu nabojev in inverzno proporcionalna kvadratu razdalje med kroglicama. Matematično to zapišemo kot

$$\boxed{F = k\frac{Q_1 Q_2}{r^2}}, \qquad (2.1)$$

kjer je k konstanta. Odvisna je od izbire merskega sistema. V sistemu merskih enot, ki je v veljavi dandanes (SI), velja

$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \text{ in je približno enaka } k \cong 9\cdot 10^9 \frac{\mathrm{V\cdot m}}{\mathrm{A\cdot s}}.$$

ε_0 imenujemo dielektrična konstanta vakuuma* in je enaka $\varepsilon_0 \cong 8{,}854\cdot 10^{-12}\,\mathrm{As/Vm}$.



Coulombova torzijska tehtnica, s katero je izvajal poskuse in ugotovil povezavo med nabojem in silo.

Da bi bila enačba točna, morata biti kroglici čim manjši. Eksaktno enačba velja le za tako imenovane **točkaste elektrine**. To je čista matematična formulacija, saj točkastih nabojev v naravi ni. Še tako majhen naboj ima določen polmer, četudi majhen†. Je pa koncept točkaste elektrine (točkastega naboja) zelo pomemben v elektrotehniki in z njegovo pomočjo izpeljemo izraze za silo med naelektrenimi telesi.

Primer: Določimo električno silo med dvema točkastima nabojema Q_1 = 2 μC in Q_2 = 5 μC, ki sta oddaljena za 1 cm.

Izračun:

$$F = k\frac{Q_1 Q_2}{r^2} = 9\cdot 10^9 \frac{\mathrm{V\cdot m}}{\mathrm{A\cdot s}} \frac{2\,\mu\mathrm{C}\cdot 5\,\mu\mathrm{C}}{(0{,}01\,\mathrm{m})^2} = \underline{\underline{900\,\mathrm{N}}}.$$

---

* Pogosto tudi zrak smatramo za prostor brez nabojev, v katerem določamo silo med naboji na enak način kot v vakuumu. Kasneje bomo ugotovili, da je za izračun sil in električnega polja v različnih medijih potrebno upoštevati vpliv samega medija. Ta vpliv opišemo z relativno dielektrično kostanto. Za vakuuma je ta 1, za zrak pa 1,00059.

† Polmer elektrona je 2,8179 10^{-15} m.

Iz rezultata lahko ugotovimo, da smo enoto N(ewton) kar pripisali, saj bi po izvajanju morala biti enota za silo VAs/m. To tudi je ekvivalentna enota za silo, le da je bolj običajno, da silo izrazimo z enoto iz mehanike, newtnom (njutnom).

Izračun sile med točkastimi naboji je torej preprost. Potrebno pa je poudariti, da je sila vektorska veličina, saj ima poleg velikosti tudi smer. Kot smo že omenili, je smer sile taka, da se enako naznačena (predznačena) naboja odbijata, nasprotno naznačena pa privlačita. To pravilo moramo le še zapisati v matematični obliki in ga upoštevati pri izračunu sile. Pri tem si pomagamo z vektorskim zapisom. Silo zapišemo kot vektor, hkrati pa z vektorji zapišemo tudi pozicije mest, kjer se naboji nahajajo.

SLIKA 2.1: ODBOJNA IN PRIVLAČNA SILA MED NABOJI.

ZAPIS SILE V VEKTORSKI OBLIKI

Imejmo točkasta naboja Q_1 in Q_2, ki se nahajata v točkah T_1 in T_2, kjer je točka T_1 določena s koordinatami (x_1, y_1, z_1) in T_2 z (x_2, y_2, z_2). Vektor iz koordinatnega izhodišča do točke T_1 označimo z $\vec{r}_1$ in ima komponente (x_1, y_1, z_1) ter $\vec{r}_2$ s komponentami (x_2, y_2, z_2). Določimo še vektor, ki kaže iz točke T_1 v točko T_2. Ta je $\vec{r}_{12} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ oziroma $\vec{r}_{12} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$.

Da bi izračunali vektor sile, moramo velikosti sile, določeni z enačbo $F = k\dfrac{Q_1Q_2}{r^2}$, dodati še smer. Smer sile, ki jo naboj Q_1 povzroča na naboj Q_2 bo v smeri vektorja $\vec{r}_{12}$. Potrebujemo torej vektor, ki kaže v smeri vektorja $\vec{r}_{12}$, njegova velikost pa je 1. Ta vektor imenujemo **enotski vektor** in ga dobimo tako, da vektor $\vec{r}_{12}$ delimo z njegovo absolutno vrednostjo (velikostjo): $\vec{e}_{r_{12}} = \dfrac{\vec{r}_{12}}{|\vec{r}_{12}|}$.

Sila na Q_2, ki jo povzroča naboj $Q_{1,}$ zapisana v vektorski obliki, je

$$\boxed{\vec{F}_{Q_2} = \vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1Q_2}{r_{12}^2}\vec{e}_{r_{12}}}$$. To enačbo imenujemo **Coulombov zakon**. (2.2)

Zapisana sila je sila na naboj Q_2, če pa želimo izraziti silo na naboj Q_1, moramo obrniti vektor $\vec{r}_{12}$, oziroma upoštevati $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$.

SLIKA 2.2: SILA MED NABOJEMA Q1 IN Q2.

Primer: Vzdolž X osi sta na razdalji 3 m naboja Q_1 = 2 μC in Q_2 = 3 μC. Določimo silo na Q_2.

Izračun: $F \cong 9 \cdot 10^9 \dfrac{2 \cdot 10^{-6} \cdot 3 \cdot 10^{-6}}{3^2}\ \mathrm{N} = \underline{\underline{6 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{N}}}$.

Če si narišemo skico ugotovimo, da bo smer sile v smeri osi X. Silo lahko torej zapišemo kot vektor $\vec{F} \cong \underline{\underline{\vec{e}_x 6 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{N}}}$.

Primer: Določimo električno silo med točkastima nabojema Q_1 = 2 μC in Q_2 = -5 μC. Q_1 se nahaja v točki T_1(1,0,2) cm, naboj Q_2 pa v točki T_2(2,3,1) cm.

Izračun: Zapišimo točki z vektorjema $\vec{r}_1$ in $\vec{r}_2$ ter tvorimo vektor $\vec{r}_{12} = (2-1, 3-0, 1-2)\ \mathrm{cm} = (1,3,-1)\ \mathrm{cm}$. Enotski vektor dobimo tako, da delimo vektor z njegovo absolutno vrednostjo:

$$\left|\vec{r}_{12}\right| = \sqrt{1^2 + 3^2 + (-1)^2}\ \mathrm{cm} = \sqrt{11}\ \mathrm{cm} \text{ in } \vec{e}_{r_{12}} = \frac{\vec{r}_{12}}{\left|\vec{r}_{12}\right|} = \frac{(1,3,-1)\mathrm{cm}}{\sqrt{11}\mathrm{cm}} = \frac{(1,3,-1)}{\sqrt{11}}.$$

Sila na naboj Q_2 je torej

$$\vec{F}_{Q_2} = \vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1 Q_2}{r_{12}^2}\vec{e}_{r_{12}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2\mu\mathrm{C}\cdot(-5\mu\mathrm{C})}{11\mathrm{cm}^2}\frac{(1,3,-1)}{\sqrt{11}} =$$
$$= -9 \cdot 10^9 \frac{\mathrm{V}\cdot\mathrm{m}}{} \frac{10^{-11}\mathrm{A}\cdot\mathrm{s}}{11 \cdot 10^{-4}\mathrm{m}^2}\frac{(1,3,-1)}{\sqrt{11}} \cong \underline{\underline{-24,7 \cdot (1,3,-1)\ \mathrm{N}}}.$$

Rezultat je negativen, torej sila kaže v nasprotno smer kot vektor $\vec{r}_{12}$, kar je seveda pravilno, saj sta naboja nasprotnega predznaka in se torej privlačita.

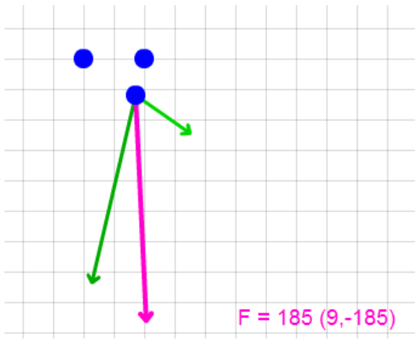
Dodatno: Kolikšna je komponenta sile v smeri določene osi?

Pomnožimo komponente z 24,7 in dobimo: $\vec{F}_{12} \cong -24,7\ \mathrm{N}\cdot\vec{e}_x - 74\ \mathrm{N}\cdot\vec{e}_y + 24,7\ \mathrm{N}\cdot\vec{e}_z$.

SUPERPOZICIJA SIL

Kaj pa če imamo tri ali več nabojev? Kako določimo silo na določen naboj? Določimo jo preprosto s seštevanjem posameznih prispevkov sil. Matematično temu rečemo superpozicija in princip seštevanja sil kot superpozicija sil. Sila na Q_1 bi bila torej enaka vsoti sil med nabojema Q_1 in Q_2, Q_1 in Q_3, Q_1 in Q_4, itd.

$$\vec{F}_{Q_1} = \vec{F}_{Q_2\to Q_1} + \vec{F}_{Q_3\to Q_1} + \vec{F}_{Q_4\to Q_1} + \cdots \quad (2.3)$$



VIRTUALNI EKSPERIMENT 1: PRIMER SUPERPOZICIJE SIL. VIR: HTTP://WWW.HEP.UIUC.EDU/HOME/MATS/FLASH/SUPER.HTML

Primer: Poleg nabojev Q_1 in Q_2 iz gornjega primera imamo še naboj Q_3 = 3 μC, ki se nahaja na mestu T_3(2,3,-3)cm. Določimo (skupno) silo na naboj Q_2.

Izračun: Silo med nabojema Q_3 in Q_2 je nekoliko lažje izračunati, saj je razdalja med nabojema 1 cm (razlika samo v smeri z osi). Ker je en naboj pozitiven drugi pa negativen, bo sila na Q_3 v smeri naboja Q_2, torej v smeri –z osi. Rezultat bo torej

$$\vec{F}_{32} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_3Q_2}{r_{32}^2}\vec{e}_{r_{12}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|3\mu\text{C}\cdot(-5\mu\text{C})|}{(4\text{cm})^2}(-\vec{e}_z) =$$

$$= -9\cdot 10^9\,\frac{\text{V}\cdot\text{m}}{}\frac{15\cdot 10^{-12}\,\text{A}\cdot\text{s}}{16\cdot 10^{-4}\text{m}^2}\vec{e}_z = \underline{\underline{-84{,}38\cdot\vec{e}_z\,\text{N}}}$$

Skupni seštevek je

$$\vec{F}_2 = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{32} = \underline{\underline{-24{,}7\,\text{N}\cdot\vec{e}_x + 74\,\text{N}\cdot\vec{e}_y + 59{,}675\,\text{N}\cdot\vec{e}_z}}\,.$$

Dva možna pristopa k računanju Coulombove sile:

1. matematični, pri katerem določimo vektorje $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_{12}, \vec{e}_{r_{12}}$ in nato vstavimo v enačbo $\vec{F}_{Q_2} = \vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1Q_2}{r_{12}^2}\vec{e}_{r_{12}}$. (kot v prvem primeru)

2. z razmislekom, pri čemer posebej določimo smer sile in velikost sile in nato zapišemo $\vec{F} = \vec{e}_F F$. (kot v drugem primeru)

Vprašanja za obnovo:

1) Kdaj je sila med dvema nabojema odbojna in kdaj je privlačna?
2) Razloži Coulombov zakon.
3) Kako določimo razdaljo med nabojema, če sta mesti nabojev podani s koordinatami?
4) Kako tvorimo enotski vektor?
5) Zapišite vektor sile med nabojema.
6) Kako računamo silo na naboj v okolici več nabojev?

3. Električna poljska jakost

Vsebina poglavja: definicija električne poljske jakosti, superpozicija električnega polja.

Pojem električne poljske jakosti je en najpomembnejših konceptov v elektrotehniki. V osnovi abstrakten pojem se bo kasneje izkazal kot ključen za določanje napetosti, energije in drugih pomembnih veličin.

Električna poljska jakost je definirana kot sila na enoto pozitivnega naboja $Q_{\mathrm{t}} = 1\,\mathrm{C}$:

$$\boxed{\vec{E} = \frac{\vec{F}}{Q_{\mathrm{t}}}}. \tag{3.1}$$

Električno poljsko jakost v poljubni točki v prostoru določimo tako, da v to točko postavimo poskusni (testni) naboj Q_t in določimo silo na ta naboj. Nato silo delimo silo s poskusnim nabojem Q_t in dobimo električno poljsko jakost.

Med točkastima nabojem *Q* in Q_t je sila $\frac{Q_{\mathrm{t}} Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$, kjer je *r* razdalja med nabojema. Električna poljska jakost na mestu naboja Q_t je torej $E = \frac{1}{Q_{\mathrm{t}}} \frac{Q_{\mathrm{t}} Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$.

Ker pa je tako sila kot električna poljska jakost vektorska veličina, moramo upoštevati še smer. Ta je v smeri vektorja ***r***, ki je vektor od mesta naboja *Q* do testnega naboja Q_t.

SLIKA 3.1: VEKTOR ELEKTRIČNE POLJSKE JAKOSTI NA ODDALJENOSTI *R* OD TOČKASTEGA NABOJA *Q*.

Električna poljska jakost na oddaljenosti *r* od točkastega naboja *Q* je torej enaka

$$\boxed{\vec{E} = \vec{e}_r \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}}. \tag{3.2}$$

Primer: Določimo električno poljsko jakost v koordinatnem izhodišču (0, 0, 0) cm, če se v točki T_1(1,0,2) cm nahaja Q = 2 μC.

Izračun: Izračuna se lahko lotimo na enak način, kot da bi določali silo na (pozitivni) naboj Q_t v točki (0, 0, 0).

$$\vec{F}_{Q_t} = \frac{Q_t Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}(\vec{e}_r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_t \cdot 2\mu\mathrm{C}}{5\mathrm{cm}^2}\cdot\frac{-(1,0,2)}{\sqrt{5}} =$$

$$= -9\cdot 10^9 \frac{\mathrm{V\cdot m}}{\mathrm{A\cdot s}}\frac{Q_t\cdot 2\cdot 10^{-6}\,\mathrm{A\cdot s}}{5\cdot 10^{-4}\mathrm{m}^2}\frac{(1,0,2)}{\sqrt{5}} = -Q_t\cdot 1,61\cdot 10^7(1,0,2)\ \mathrm{V/m}$$

Električna poljska jakost pa je

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}_{Q_t}}{Q_t} = -1,61\cdot 10^7(1,0,2)\,\mathrm{N/C} = \underline{\underline{-1,61\cdot 10^7(1,0,2)\ \mathrm{V/m}}}\,.$$

Enota za električno poljsko jakost je V/m.

Iz primera vidimo, da lahko smer električne poljske jakosti določimo kot smer sile na namišljen pozitivni naboj. V principu je vseeno, kako velik je ta testni naboj, saj vidimo, da v enačbi sploh ne nastopa – v enačbi nastopa naboj, ki povzroča silo na testni naboj. Naboj 1 C je zelo velika količina naboja, ki ga je (1) realno nemogoče zbrati v točki (v malem radiju) in (2) tak naboj bi vsekakor predstavljal izrazito veliko silo na okoliške naboje in povzročil njihovo premaknitev. Zato je bolj natančna **definicija za električno poljsko jakost, da je to sila na majhen poskusni pozitivni naboj**, matematično

$$\boxed{\vec{E} = \lim_{Q_t\to 0}\frac{\vec{F}}{Q_t}}. \qquad \textbf{(3.3)}$$

V čem je potem razlika med silo in električno poljsko jakostjo? Pomembna konceptualna razlika je v tem, da je mogoče sile določati le med naboji, medtem ko je **električna poljska jakost definirana v vsaki točki v prostoru**.

SUPERPOZICIJA ELEKTRIČNEGA POLJA

Kako določimo električno poljsko jakost v točki, če je v okolici več nabojev? Enako kot smo določali silo na naboj v okolici več nabojev. V točko postavimo poskusni naboj, izračunamo silo na poskusni (pozitivni) naboj kot superpozicijo posameznih prispevkov sile ter nato delimo s poskusnim nabojem. Oziroma, določimo električno poljsko jakost za vsak naboj posebej in prispevke seštejemo.

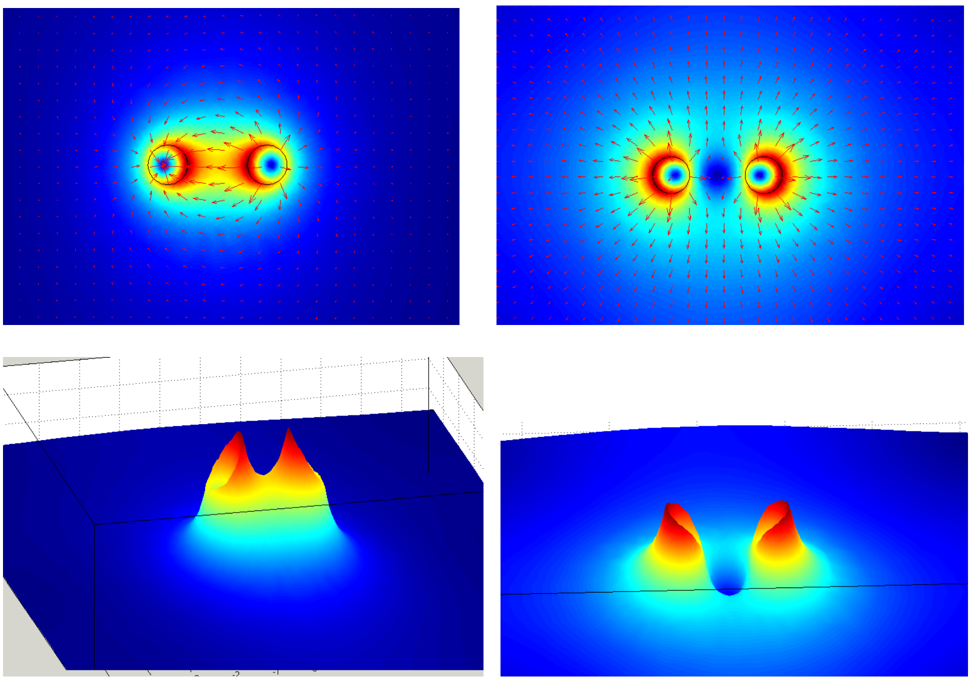
$$\boxed{\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \ldots = \sum_i \vec{E}_i} \qquad (3.4)$$

SLIKA 3.2: VEČ NABOJEV IN ELEKTRIČNA POLJSKA JAKOST V TOČKI KOT SUPERPOZICIJA ELEKTRIČNIH POLJSKIH JAKOSTI POSAMEZNIH NABOJEV.

PRIKAZOVANJE ELEKTRIČNE POLJSKE JAKOSTI V PROSTORU

Ker je polje definirano v vsaki točki prostora, pomeni, da lahko v vsaki točki prostora ponazorimo polje z vektorjem, ki kaže smer in velikost polja v točki. Običajno se spoprijaznimo s tem, da rišemo vektorje električne poljske jakosti v določenih točkah v prostoru in tako prikažemo vektorsko polje. Druga možnost je, da prikazujemo velikost polja (vendar ne smeri) z 2D ali 3D prikazom z obarvanjem, pri čemer lahko na enem grafu prikažemo le eno komponento E-ja, npr. E_x ali le E_y. Pogosto pa z obarvanjem prikažemo absolutno vrednost polja.

SLIKA 3.3: PRIKAZOVANJE ELEKTRIČNE POLJSKE JAKOSTI V OKOLICI TOČKASTEGA NABOJA: A) Z VEKTORJI, B) 1D PRIKAZ, C) 2D PRIKAZ, D) 3D PRIKAZ.



SLIKA 3.4: 2D IN 3D PRIKAZ ELEKTRIČNE POLJSKE JAKOSTI ZA POLJE V OKOLICI DVEH PREVODNIH NAELEKTRENIH VALJEV. NA DVEH SLIKAH NA LEVI JE PRIKAZANO ELEKTRIČNO POLJE V OKOLICI DVEH VALJEV NAELEKTRENIH Z NABOJI NASPROTNEGA PREDZNAKA (LEVI VALJ Z NEGATIVNIM, DESNI PA S POZITIVNIM NABOJEM), NA DESNI PA DVA VALJA Z ENAKO PREDZNAČENIM NABOJEM (POZITIVNIM). SMER POLJA PRIKAZUJEJO PUŠČICE (VEKTORJI), VELIKOST PA TAKO VELIKOST PUŠČIC, KOT TUDI OBARVANOST – TOPLEJŠA BARVA PREDSTAVLJA VEČJO POLJSKO JAKOST.

Vprašanja za obnovo:

1. Ponovite definicijo električne poljske jakosti.
2. Enota.
3. Izpopolnjena definicija.
4. Konceptualna razlika med silo in električno poljsko jakostjo.
5. Superpozicija poljske jakosti.

4. Porazdelitve nabojev

Vsebina poglavja: volumska, površinska in linijska porazdelitev naboja in zapis z ustrezno gostoto naboja.

Spoznali smo že koncept točkastega naboja, za katerega pa smo že rekli, da ga v naravi ni. Najmanjši naboj je naboj elektrona, s svojo maso, volumnom in kvantizirano množino naboja. Nadaljnji problem je, da je množine osnovnih enot naboja, ki jih moramo vzeti v poštev običajno zelo veliko. Če samo malo podrgnemo, se med telesi prenesejo milijoni elektronov. Mi pa smo sposobni »na papirju« izračunati silo na nekaj točkastih nabojev. No, v principu bi lahko s superpozicijo izračunali tudi silo med nekaj milijoni nabojev. Kar pa ni običajno. Potrebno je najti nek drug način obravnave naelektrenih teles. Našli ga bomo v konceptu določitve različnih tipov porazdelitve naboja v prostoru. Predpostavili bomo, da je naboj zaradi velike količine delcev porazdeljen zvezno. V tem smislu bomo definirali tri načine porazdelitve nabojev: volumsko, površinsko in linijsko porazdelitev naboja.

Volumska gostota naboja

Uporabljamo za opis naboja, porazdeljenega v volumnu. Opišemo ga z **gostoto volumske porazdelitve naboja ρ.** Enota je C/m^3. Če je tak naboj enakomerno porazdeljen po volumnu, lahko gostoto volumskega naboja določimo kot $\rho = \frac{Q}{V}$, oziroma celotni naboj kot $Q = \rho V$. Bolj pogosto je, da ta naboj ni porazdeljen enakomerno, tedaj lahko enakomerno porazdelitev smatramo le v nekem zelo omejenem malem delu celotnega volumna ΔV. Del celotnega naboja je torej $\Delta Q = \rho \Delta V$ in če ta delček limitiramo (naredimo infinitezimalno majhen), dobimo $\mathrm{d}Q = \rho \cdot \mathrm{d}V$. Celoten naboj dobimo z integracijo posameznih prispevkov po volumnu: $Q = \int_V \rho \mathrm{d}V$.

SLIKA 4.1: VOLUMSKA GOSTOTA NABOJA.

Površinska gostota naboja

Uporabljamo za opis naboja, porazdeljenega po površini. Opišemo ga z **gostoto površinske porazdelitve naboja σ.** Enota je C/m^2. Če je tak naboj enakomerno porazdeljen po površini, lahko površinsko gostoto naboja določimo kot $\sigma = \frac{Q}{A}$, oziroma celotni naboj kot $Q = \sigma A$. Bolj pogosto je, da ta naboj ni porazdeljen enakomerno. Tedaj velja zveza $Q = \sigma A$ le za en majhen del celotnega naboja na neki majhni površini, torej $\Delta Q = \sigma \cdot \Delta A$. Če ta delček limitiramo (naredimo infinitezimalno majhen), dobimo $\mathrm{d}Q = \sigma \cdot \mathrm{d}A$. Celotni naboj dobimo z integracijo posameznih prispevkov po površini: $Q = \int_A \sigma \cdot \mathrm{d}A$.

SLIKA 4.2: POVRŠINSKA GOSTOTA NABOJA.

LINIJSKA GOSTOTA NABOJA

Uporabljamo za opis naboja, porazdeljenega po liniji (žici). Opišemo ga z **gostoto linijske porazdelitve naboja *q*.** Enota je C/m. Če je tak naboj enakomerno porazdeljen po liniji, lahko linijsko gostoto naboja določimo kot $q = \frac{Q}{L}$, oziroma celotni naboj kot $Q = qL$. Če ta naboj ni porazdeljen enakomerno, velja zveza $Q = qL$ le za en majhen del celotnega naboja na neki majhni razdalji, torej . Če ta delček limitiramo (naredimo infinitezimalno majhen), dobimo $\mathrm{d}Q = q \cdot \mathrm{d}l$. Celotni naboj dobimo z integracijo posameznih prispevkov po liniji: $Q = \int_L q \cdot \mathrm{d}l$.

SLIKA 4.3: LINIJSKA GOSTOTA NABOJA.

Nekaj primerov....

(Kmalu pa se bomo soočili še z enim problemom. Če bi poznali porazdelitev naboja, bi še nekako izračunali posledice, torej električno poljsko jakost in sile med naboji, telesi. Običajno pa te porazdelitve niti ne poznamo, poznamo pa recimo napetosti med telesi. Potrebno bo torej poiskati še zvezo med napetostjo in porazdelitvijo naboja. A o tem kasneje.)

Vprašanja za obnovo:

1. Naštejte tri različne porazdelitve naboja.
2. Zapišite enačbe, ki povezujejo gostote porazdelitve naboja s celotnim nabojem.
3. Iz znane porazdelitve naboja prikažite način za izračun celotnega naboja.

5. Koordinatni sistemi

Vsebina: kartezični, valjni (cilindrični) in krogelni (sferični) koordinatni sistem. Točka v koordinatnem sistemu. Diferencialni elementi v koordinatnih sistemih.

Zakaj uporabljati več koordinatnih sistemov (KS), če nam je kartezični koordinatni sistem (KKS) najbolj poznan in najbolj razumljiv? Odgovor je preprost: zato, ker je v določenih primerih izračun mnogo bolj preprost z izbiro drugačnega koordinatnega sistema. Na primer, če je naboj porazdeljen po površini valja. Sama po sebi se ponuja najboljša izbira za matematični opis porazdelitve naboja uporaba valjnega koordinatnega sistema, itd.

Za koordinatne sisteme, ki jih obravnavamo mi, je značilno to, da so vse ravnine med sabo pravokotne. Takim koordinatnim sistemom rečemo ortogonalni.

Kartezični koordinatni sistem (KKZ)

Točko v kartezične koordinatnem sistemu določimo s presekom treh ravnin. V KKS so to tri ravnine:

$$\begin{aligned} x &= x_1 \\ y &= y_1 \, . \\ z &= z_1 \end{aligned}$$

Koordinate v KKS določa trojček (*x,y,z*).

SLIKA 5.1: KARTEZIČNI KOORDINATNI SISTEM.

Vzdolž vsake osi lahko določimo diferencial dolžine. Dobimo ga z limitiranjem (zmanjševanjem proti nič) majhnega dela dolžine: $\mathrm{d}l = \lim\limits_{\Delta L \to 0} \Delta L$. V smeri osi X je to d*x*, v smeri osi Y je d*y* in v smeri Z je d*z*. V splošnem lahko **diferencial poti** v KKS zapišemo kot vektor:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\vec{l} &= \vec{e}_x \mathrm{d}x + \vec{e}_y \mathrm{d}y + \vec{e}_z \mathrm{d}z \\ \mathrm{d}\vec{l} &= (\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z) \end{aligned} .$$

Če pomnožimo vse tri diferenciale dolžine dobimo majhen – **diferencialen volumen** zapisan v obliki

$$\mathrm{d}V = \mathrm{d}x \cdot \mathrm{d}y \cdot \mathrm{d}z \, .$$

Ploskvice tega diferencialnega volumna imenujemo **diferenciali ploskev** in so $\mathrm{d}x \cdot \mathrm{d}y$, $\mathrm{d}x \cdot \mathrm{d}z$ in $\mathrm{d}y \cdot \mathrm{d}z$. Pogosto jim bomo dodali še smer, ki bo pravokotna na površino. To imenujemo **smer normale** na površino. Kvadratku površine $\mathrm{d}x \cdot \mathrm{d}y$ bi torej pripisali smer osi Z. Velja torej:

$$\mathrm{d}\vec{A}_x = \vec{\mathrm{e}}_\mathrm{x} \mathrm{d}y \cdot \mathrm{d}z$$

$$\mathrm{d}\vec{A}_y = \vec{\mathrm{e}}_\mathrm{y} \mathrm{d}x \cdot \mathrm{dz}$$

$$\mathrm{d}\vec{A}_z = \vec{\mathrm{e}}_\mathrm{z} \mathrm{d}x \cdot \mathrm{d}y$$

SLIKA 5.2: SMER NORMALE.

Primeri: ….

Valjni (cilindrični) koordinatni sistem (CKS).

Točka je v valjnem koordinatnem sistemu določena s presekom treh ravnin

$$r = r_1$$
$$\varphi = \varphi_1$$
$$z = z_1$$

Prva ravnina je plašč valja, druga je polravnina okoli Z osi, ki jo določa kot φ, tretja pa ravnina z eno vrednostjo koordinate Z. Koordinate v CKS sestavlja torej trojček (r, φ, z).

Diferencial poti je

$$\mathrm{d}\vec{l} = \vec{e}_r \mathrm{d}r + \vec{e}_\varphi r \mathrm{d}\varphi + \vec{e}_z \mathrm{d}z \,.$$

Diferenciali površine so

$$\mathrm{d}\vec{A}_r = \vec{e}_r r \mathrm{d}\varphi \cdot \mathrm{d}z \,,$$

$$\mathrm{d}\vec{A}_\varphi = \vec{e}_\varphi \mathrm{dr} \cdot \mathrm{d}z \,,$$

$$\mathrm{d}\vec{A}_z = \vec{e}_z r \mathrm{d}\varphi \cdot \mathrm{d}r \,.$$

Pogosto je potrebno upoštevati le funkcijske spremembe v smeri osi R (rotacijska simetrija), V tem primeru je diferencial v smeri osi Z določen z $\mathrm{d}A_z = 2\pi r \mathrm{d}r$

Diferencial volumna je

$$\mathrm{d}V = \mathrm{d}r r \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}z .$$

SLIKA 5.3: VALJNI KOORDINATNI SISTEM.

Primer: Določimo ploščino diska z notranjim polmerom 1 cm in zunanjim polmerom 6 cm. Izračun: Vzamemo diferencial površine, ki kaže v smeri osi Z in zapišemo dvojni integral

$$P = \int_0^{2\pi} \int_{1\,\mathrm{cm}}^{6\,\mathrm{cm}} r \mathrm{d}r \mathrm{d}\varphi = 2\pi \int_{1\mathrm{cm}}^{6\mathrm{cm}} r \mathrm{d}r = 2\pi \left. \frac{r^2}{2} \right|_{1\,\mathrm{cm}}^{6\,\mathrm{cm}} = \pi \left[(6\,\mathrm{cm})^2 - (1\,\mathrm{cm})^2 \right] = \underline{\underline{35\pi\ \mathrm{cm}^2}} .$$

Primer: Po površini plašča valja višine 2 m polmera 5 cm se spreminja površinska gostota naboja z izrazom $\sigma = \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \mu\mathrm{C/m}^2$. Določimo naboj na plašču valja.

Izračun: Uporabimo zvezo $Q = \int_A \sigma \mathrm{d}A$, kar v našem primeru pomeni

$$Q = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\,\mathrm{m}} \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \mu\mathrm{C/m}^2 \cdot r \cdot \mathrm{d}\varphi \cdot \mathrm{d}z = 5\,\mathrm{cm} \cdot \left(-\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \cdot 2 \right)_0^{2\pi} \mu\mathrm{C/m} \cdot 2\,\mathrm{m} =$$

$$0{,}1 \cdot 4\,\mu\mathrm{C} = \underline{\underline{0{,}4\,\mu\mathrm{C}}}$$

KROGELNI (SFERIČNI) KOORDINATNI SISTEM (SKS).

Točka je v krogelnem koordinatnem sistemu določena s presekom treh ravnin

$$r = r_1$$
$$\vartheta = \vartheta_1$$
$$\varphi = \varphi_1$$

Prva ravnina je plašč krogle, druga je površina stožca (kjer je ϑ (theta) kot od Z osi navzdol), tretja pa polravnina znana iz CKS. Koordinate v SKS sestavlja torej trojček (r, ϑ, φ).

Diferencial poti je

$$\mathrm{d}\vec{l} = \vec{e}_r \mathrm{d}r + \vec{e}_\vartheta r \mathrm{d}\vartheta + \vec{e}_\varphi r \sin(\vartheta) \mathrm{d}\varphi .$$

Diferenciali površin so

$$d\vec{A}_r = \vec{e}_r r^2 \sin(\vartheta) d\vartheta d\varphi ,$$

$$d\vec{A}_\vartheta = \vec{e}_\vartheta r \sin(\vartheta) d\varphi dr ,$$

$$d\vec{A}_\varphi = \vec{e}_\varphi r dr d\vartheta .$$

Pogosto je potrebno upoštevati le funkcijske spremembe v smeri osi R (rotacijska simetrija). V tem primeru je diferencial v smeri osi R določen z $dA_\vartheta = 4\pi r dr$

Diferencial volumna je

$$dV = r^2 \sin(\vartheta) dr d\vartheta d\varphi .$$

SLIKA 5.4: KROGELNI KOORDINATNI SISTEM.

Primer: Določimo ploščino krogle polmera *R*.

Izračun: Vzamemo diferencial volumna krogle $dV = r^2 \sin(\vartheta) dr d\vartheta d\varphi$ in ga integriramo

$$V = \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r^2 \sin(\vartheta) dr d\vartheta d\varphi = \frac{r^3}{3}\bigg|_0^R \cdot (-\cos(\vartheta))\big|_0^\pi \cdot \varphi\big|_0^{2\pi} = \underline{\underline{\frac{4\pi R^3}{3}}} .$$

Povzetek diferencialov poti, površine in volumnov za kartezični, valjni in krogelni koordinatni sistem:

	Kartezični k.s.	Cilindrični k.s.	Sferični k.s.
dl	$dx,\ dy,\ dz$	$dr, r d\varphi, dz$	$dr, r d\vartheta, r \sin\vartheta d\varphi$
dA	$dx.dy,\ dx.dz,\ dy.dz$	$r d\varphi dz,\ dr dz,\ r d\varphi dz$	$r d\vartheta dr,\ r \sin\vartheta dr d\varphi,\ r^2 \sin\vartheta d\vartheta d\varphi$
dV	$dx.dy.dz$	$r dr d\varphi dz$	$r^2 \sin\vartheta dr d\vartheta d\varphi$

Tudi pri GPS signalih se uporabljajo ustrezni koordinatni sistemi. Več:

http://www.navigator.si/povezave/koordinatni_sistemi.htm

Kartezični kordinatni sistem: http://en.wikipedia.org/wiki/Cartesian_coordinate_system

Polarni koordinatni sistem: http://en.wikipedia.org/wiki/Polar_coordinate_system

Vprašanja za obnovo:

1. Točko v prostoru določimo s presekom treh ravnin. Katere ravnine so to v primeru kartezičnega, valjnega in krogelnega koordinatnega sistema?
2. Kako bi zapisali enačbo za izračun volumna kvadra v kartezičnem koordinatnem sistemu in kako določili naboj v njem iz poznane volumske gostote naboja?
3. Določite izraz za obseg kroga z uporabo integrala diferenciala poti po krožnici z uporabo cilindričnega koordinatnega sistema.
4. Ponovite diferenciale poti, površin in volumnov v treh obravnavanih koordinatnih sistemih.

6. Električna poljska jakost porazdeljenih nabojev

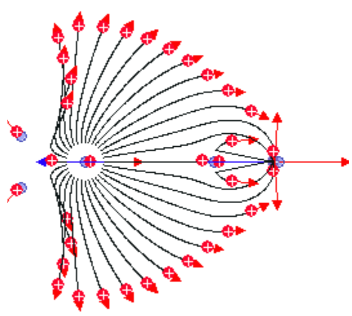
Vsebina: polje točkastega naboja, dela celotnega naboja in polje porazdeljenih nabojev. Izrazi za izračun polja v okolici premega naboja, naelektrene daljice, enakomerno naelektrenega obroča, diska in ravnine.

POLJE TOČKASTEGA NABOJA

Spoznali smo že definicijo električne poljske jakosti ter enačbo za izračun polja v okolici osamljenega točkastega naboja ($\vec{r}$ je vektor od točke, kjer se nahaja naboj *Q* do točke, kjer določamo polje).

$$\boxed{\vec{E} = \vec{e}_r \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}}$$ **Polje točkastega naboja** **(6.1)**

Nadalje smo ugotovili, da je število presežkov nabojev pogosto zelo veliko, kar pomeni, da se že ob manjšem drgnenju dveh teles prenese med telesi milijone in milijone elektronov. Da bi izračunali električno poljsko jakost, ki jo povzročajo ti naboji, bi potrebovali mnogo računanja, saj bi z upoštevanjem superpozicije lahko izračunali prispevek polja vsakega naboja posebej in vplive sešteli. Tak način računanja bi bil zelo zamuden in nepraktičen, čeprav v pedagoške namene lahko uporabljamo tudi tak postopek. Tipičen primer je program JaCoB (jacob.fe.uni-lj.si), ki računa silo med naboji in jih dinamično pomika v smeri rezultančne sile. Tak način izračunavanj se pogosto uporablja tudi v raziskavah osnovnih delcev, kjer pa se upošteva tudi lastnosti trkanja delcev.



Primer izračuna in ...anja sil med naboji s ...om JaCoB.

POLJE PORAZDELJENIH NABOJEV

Pri izračunu električne poljske jakosti porazdeljenih nabojev lahko predpostavimo, da je zaradi velikega števila nabojev le-ta porazdeljen zvezno. V obliki volumske, površinske ali linijske porazdelitve nabojev, ki jih izrazimo z ustreznimi gostotami porazdelitve.

Določiti moramo še ustrezen izraz za izračun polja, ki ga povzročajo tovrstne porazdelitve nabojev. Poslužimo se ideje, da če velja za polje točkastega naboja izraz $\vec{E} = \vec{e}_r \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$, potem lahko trdimo, da bo to veljalo tudi za neko malo količino naboja ΔQ, ki se nahaja na majhnem prostoru (majhnem v primerjavi z razdaljo *r*). V tem smislu bi za del celotnega naboja lahko določili polje, ki ga povzroča:

$$\Delta\vec{E} = \vec{e}_r \frac{\Delta Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,.$$

SLIKA 6.1: POLJE, KI GA POVZROČA DEL CELOTNEGA NABOJA.

S procesom limitiranja diferenčnih vrednosti dobimo izraz za diferencial polja, ki ga povzroča diferencial naboja:

$$\boxed{\mathrm{d}\vec{E} = \vec{e}_r \frac{\mathrm{d}Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}}. \tag{6.2}$$

Vpliv vseh delnih vrednosti oz. diferencialov naboja seštejemo s superpozicijo, ki v zveznem prostoru predstavlja integracijo:

$$\boxed{\vec{E} = \int\limits_{\substack{\text{po vseh}\\ \text{Q-jih}}} \frac{\mathrm{d}Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r}. \quad \textbf{Izraz za izračun polja porazdeljenih nabojev} \tag{6.3}$$

SLIKA 6.2: INTEGRACIJA PRISPEVKOV DIFERENCIALOV NABOJA ZA IZRAČUN ELEKTRIČNE POLJSKE JAKOSTI. *R* JE RAZDALJA OD D*Q*-JA DO TOČKE V KATERI RAČUNAMO POLJE.

Teoretično lahko na ta način določimo električno poljsko jakost za poljubno porazdelitev naboja. Praktično pa smo omejeni s primeri, ko je zapisan integral še analitično rešljiv. V nasprotnem primeru nam preostane numerična integracija vplivov posameznih majhnih delov celotnega naboja: $\vec{E} = \sum \Delta\vec{E}_i = \sum_i \vec{e}_{r_i} \frac{\Delta Q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i^2}$.*

Postopek za določitev polja porazdeljenih nabojev

Zapišimo postopek, po katerem določimo električno poljsko jakost za porazdeljene naboje z uporabo enačbe $\vec{E} = \int\limits_{\substack{\text{po vseh}\\ \text{Q-jih}}} \frac{\mathrm{d}Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r$, kjer je $\vec{r}$ vektor od mesta diferenciala naboja dQ do mesta, kjer računamo električno poljsko jakost; $\vec{e}_r$ je enotski vektor vektorja $\vec{r}$.

1) Da bi natančneje določili diferencial volumna, površine ali razdalje, moramo našo naelektreno strukturo umestiti v ustrezen koordinatni sistem. Če bo struktura na kateri se nahaja naboj v obliki žice, bo najbolj primerna uporaba cilindričnega koordinatnega sistema, če bo naboj v volumnu krogle, bo primeren sferični KS., itd.

* V praksi imamo na razpolago še nekaj drugih možnih načinov reševanja, ki jih bomo omenili v nadaljevanju.

Naboji, ki povzročajo polje so porazdeljeni po volumnu, površini ali liniji. V tem smislu bo diferencial naboja enak $\mathrm{d}Q = \rho \mathrm{d}V$, $\mathrm{d}Q = \sigma \mathrm{d}A$ ali $\mathrm{d}Q = q\mathrm{d}l$. Te določimo v skladu s sledečo tabelo:

	Kartezični k.s.	Cilindrični k.s.	Sferični k.s.
$\mathrm{d}l$	$\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$, $\mathrm{d}z$	$\mathrm{d}r, r\mathrm{d}\varphi, \mathrm{d}z$	$\mathrm{d}r, r\mathrm{d}\vartheta, r\sin\vartheta\mathrm{d}\varphi$
$\mathrm{d}A$	$\mathrm{d}x.\mathrm{d}y$, $\mathrm{d}x.\mathrm{d}z$, $\mathrm{d}y.\mathrm{d}z$	$r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z$, $\mathrm{d}r\mathrm{d}z$, $r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z$	$r\mathrm{d}\vartheta\mathrm{d}r$, $r\sin\vartheta\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi$, $r^2\sin\vartheta\mathrm{d}\vartheta\mathrm{d}\varphi$
$\mathrm{d}V$	$\mathrm{d}x.\mathrm{d}y.\mathrm{d}z$	$r\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z$	$r^2\sin\vartheta\mathrm{d}r\mathrm{d}\vartheta\mathrm{d}\varphi$

2) Glede na izbran koordinatni sistem določimo ustrezen diferencial naboja. Na primer, če se naboj nahaja vzdolž palice, postavljene na osi X, bo $\mathrm{d}\vec{l} = \vec{e}_x\mathrm{d}x$ in $\mathrm{d}Q = q\mathrm{d}x$. Če se naboj nahaja na površini valja, bo potrebno uporabiti izraz $\mathrm{d}Q = \sigma\mathrm{d}A$, pri čemer bo $\mathrm{d}A = r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z$, itd.
3) Na neko poljubno mesto na naelektrenem telesu postavimo diferencial naboja in določimo vektor *r* kot funkcijo koordinat. Vektor *r* je vektor od mesta diferenciala naboja *d*Q do točke v kateri želimo izračunati polje.
4) Zapišemo diferencial polja $\mathrm{d}\vec{E} = \vec{e}_r \dfrac{\mathrm{d}Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$ in vstavimo predhodno določena d*Q* in *r*.
5) Diferencial polja integriramo, pri čemer moramo določiti še meje integracije. Meje integracije so določene s koordinatami, ki zajamejo celoten naboj.
6) Rešimo integral in v rešitev vstavimo vrednosti mej integracije.

PRIMER IZPELJAVE IZRAZA ZA ELEKTRIČNO POLJSKO JAKOST NAELEKTRENE TANKE PALICE.

Določimo električno poljsko jakost h = 5 cm stran od sredine enakomerno naelektrene tanke palice doložine d = 10 cm. Naboj na palici je 2 μC.

Izračun: Postopamo na sledeči način.

1. Palico postavimo v koordinatni sistem. Primeren je valjni koordinatni sistem. Naj bo sredina palice v središču k.s. in Z os usmerjena vzdolž palice. Glede na izbran koordinatni sistem je dl = dz.
2. določimo dQ, ki je v našem primeru, ker gre za linijsko porazdelitev naboja, enak $\mathrm{d}Q = q \cdot \mathrm{d}l = q \cdot \mathrm{d}z$. Ker gre za enakomerno porazdelitev naboja je $q = Q/l = Q/d = 20\ \mu\mathrm{C/m}$.
3. Postavimo dQ na neko poljubno mesto na palici, oddaljeno od izhodišča za z. Od dQ do točke, kjer iščemo vrednost polja, narišemo vektor ***r*** in ga izrazimo s koordinatami: $r = \sqrt{z^2 + h^2}$.
4. Sedaj diferencial polja v točki zapišemo v obliki $\mathrm{d}E = \dfrac{\mathrm{d}Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \dfrac{q.\mathrm{d}z}{4\pi\varepsilon_0\left(z^2+h^2\right)}$. d$E$ moramo v principu zapisati v obliki vektorja, saj se vektor (tako velikost kot smer) električne poljske jakosti spreminja za različne lege dQ-ja, kar pomeni, da jih moramo seštevati vektorsko. Da bi se temu izognili, lahko upoštevamo, da dQ na zrcalni strani Z osi povzroča polje, ki je v iskani točki usmerjeno tako, da vsota kaže v smeri radija. To upoštevamo tako, da bomo seštevali le komponente polja, ki so usmerjene v smer radija: $\mathrm{d}E_r = \mathrm{d}E \cdot \cos(\alpha) = \mathrm{d}E \cdot \dfrac{h}{\sqrt{z^2+h^2}}$.
5. Seštevek prispevkov naredimo z integracijo: $E_r = \int \mathrm{d}E_r = \displaystyle\int_{-l/2}^{l/2} \frac{q.\mathrm{d}z}{4\pi\varepsilon_0\left(z^2+h^2\right)} \frac{h}{\sqrt{z^2+h^2}}$

$$E_r = \frac{qh}{4\pi\varepsilon_0} \int_{-l/2}^{l/2} \frac{\mathrm{d}z}{\left(z^2+h^2\right)^{3/2}}$$

$$E_r = \frac{qh}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{z}{h^2\left(z^2+h^2\right)^{1/2}}\right)_{-l/2}^{l/2} = \frac{q2l/2}{4\pi\varepsilon_0 h\sqrt{(l/2)^2+h^2}} = \frac{ql}{4\pi\varepsilon_0 h\sqrt{(l/2)^2+h^2}}$$

Dobili smo rešitev. Vstaviti moramo le še vrednosti za q, l, in h in določimo velikost radialne komponente polja: $E_r \cong \underline{\underline{2{,}54 \cdot 10^5\ \mathrm{V/m}}}$.

POLJE PREMEGA NABOJA (NESKONČNO DOLGA TANKA ENAKOMERNO NAELEKTRENA PALICA)

Zanimivo je pogledati, kakšno polje dobimo, če je naelektrena palica neskončno dolga. V tem primeru moramo limitirati razdaljo *l* proti neskončnosti in dobimo

$E_r = \frac{qh}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \left(\frac{z}{h^2\left(z^2+h^2\right)^{3/2}} \right)\Bigg|_{-\infty}^{\infty} = \frac{q2l/2}{4\pi\varepsilon_0 h(l/2)} = \underline{\underline{\frac{q}{2\pi\varepsilon_0 h}}}$. Dobimo izredno pomemben rezultat, to je, da polje z razdaljo od tanke, neskončne, naelektrene palice upada z $1/h$, medtem, ko polje v okolici točkaste elektrine upada s kvadratom razdalje.

Neskončno dolgo tanko naelektreno palico lahko smatramo kot naelektreno premico, zato taki strukturi tudi rečemo **premi naboj (prema elektrina)**. Zapišimo polje premega naboja še enkrat, tokrat v vektorski obliki. (pazi: v izpeljavi smo z *r* definirali razdaljo od d*Q*-ja do točke, sedaj je *r* definiran v smislu cilindričnega koordinatnega sistema – kot radialna oddaljenost od premega naboja):

$$\boxed{\vec{E} = \vec{e}_r \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 r}}. \quad \text{POLJE V OKOLICI PREMEGA NABOJA} \qquad (6.4)$$

SLIKA 6.3: POLJE V OKOLICI PREMEGA NABOJA.

POLJE ENAKOMERNO NAELEKTRENE DALJICE

Izhajamo lahko iz rešitve za polje v okolici premega naboja in namesto sredinske umestitve določimo razdalji od koordinatnega izhodišča do levega roba z l_1 in do desnega roba z l_2. Radialno komponento polja dobimo z rešitvijo integrala

$$E_r = \frac{qh}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-l_1}^{l_2}\frac{\mathrm{d}z}{\left(z^2+h^2\right)^{3/2}},$$

ki je

$$E_r = \frac{qh}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{z}{h^2\left(z^2+h^2\right)^{3/2}}\right)_{-l_1}^{l_2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 h}\left(\frac{l_2}{\sqrt{(l_2)^2+h^2}}-\frac{-l_1}{\sqrt{(l_1)^2+h^2}}\right).$$

SLIKA 6.4: POLJE V OKOLICI ENAKOMERNO NAELEKTRENE DALJICE.

Enostavnejšo obliko tega zapisa dobimo, če uporabimo izraz za kosinusa notranjih kotov (glej sliko):

$$E_r = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 h}\left(\cos(\alpha_2)+\cos(\alpha_1)\right).$$

Na podoben način bi lahko določili še Z komponento polja. Izkaže se, da je rezultat

$$E_r = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 h}\left(\sin(\alpha_1)-\sin(\alpha_2)\right).$$

Če tudi sedaj namesto razdalje h uporabimo razdaljo r od naelektrene daljice, dobimo enačbo*:

$$\boxed{\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\left[\vec{e}_r\left(\cos(\alpha_1)+\cos(\alpha_2)\right)+\vec{e}_z\left(\sin(\alpha_1)-\sin(\alpha_2)\right)\right]} \qquad (6.5)$$

* Enačba je v drugi literaturi lahko predstavljena z drugimi koti in je tem smislu spremenjena. Potrebno je torej pravilno določanje kotov α_1 in α_2.

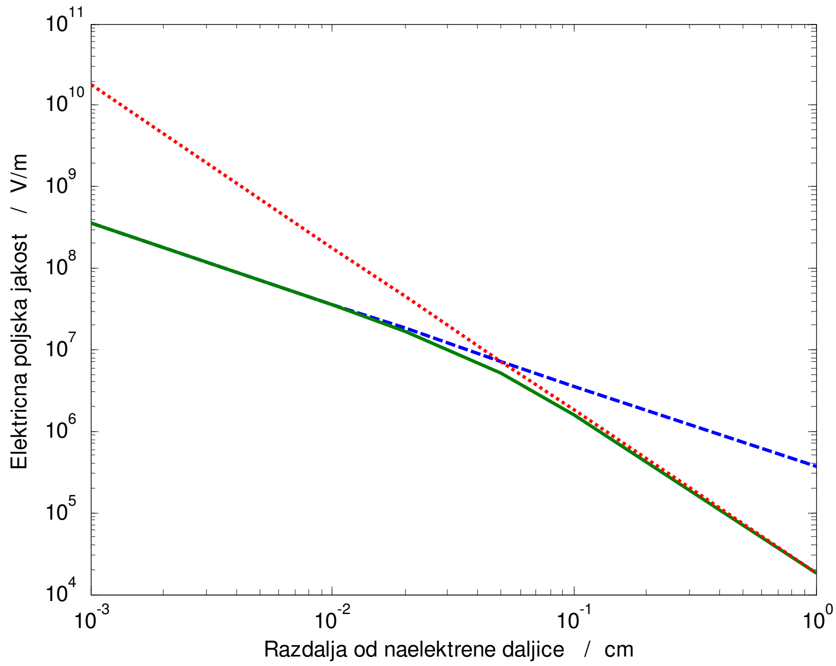
Ker je premi naboj le poseben primer naelektrene daljice, dobimo iz gornje enačbe tudi enačbo za premi naboj, ko velja $\alpha_1 = \alpha_2 \to 0$. Tedaj je $\cos(0) = 1$ in $\sin(0) = 0$. Sledi enačba za premi naboj.

SLIKA 6.5: NAELEKTRENA DALJICA V KOORDINATNEM SISTEMU.

Primer: Primerjajmo velikost polja v okolici naelektrene daljice s poljem naelektrene premice in točkastega naboja. Torej enačbe $\vec{E}_{\text{daljica}} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\left[\vec{e}_r\left(\cos(\alpha_1)+\cos(\alpha_2)\right)+\vec{e}_z\left(\sin(\alpha_1)-\sin(\alpha_2)\right)\right]$, $\vec{E}_{\text{premi}} = \vec{e}_r \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 r}$, $\vec{E}_{\text{točke}} = \vec{e}_r \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$. Vzemimo za primer naelektreno tanko palico dolžine d = 10 cm z enakomerno porazdeljenim nabojem 2 µC in primerjajmo velikost polja s poljem v okolici premega naboja z enako gostoto naboja in točkastega naboja z enako velikostjo celotnega naboja.

Primerjava pokaže, da je velikost polja naelektrene premice in daljice enaka za majhne razdalje od tanke palice (razdalja dosti manjša od dolžine palice), da pa je za razdalje, ki so dosti večje od dolžine palice bolj primeren približek polja tanke palice s poljem točkastega naboja.

Razdalja (cm)	E daljice (kV/m)	E premice (kV/m)	E točke (kV/m)
0,1	**359**	**359**	1797
1	**35**	**36**	179
2	17	18	45
5	5	7	7
10	**2**	3	**2**
100	**0,17**	0,36	**0,17**



SLIKA 6.6: PRIMERJAVA MED VREDNOSTJO POLJA V ODDALJENOSTI OD TANKE NAELEKTRENE PALICE (POLNA ZELENA ČRTA) IN PREMEGA (ČRTKANA MODRA ČRTA) TER TOČKASTEGA NABOJA (TOČKASTA RDEČA ČRTA).

POLJE V OSI NAELEKTRENEGA OBROČA

V tem primeru uporabimo cilindrični koordinatni sistem in zapišemo del naboja kot $\mathrm{d}Q = q\mathrm{d}l = q \cdot r\mathrm{d}\varphi$. Če označimo z *a* polmer obroča, velja $\mathrm{d}Q = qa\mathrm{d}\varphi$. Označimo d*Q* na skici in potegnemo vektor *r* od d*Q* do točke na Z osi, ki je od središča obroča oddaljena za razdaljo *z*. Razdalja od d*Q* do točke na Z osi je $r = \sqrt{a^2 + z^2}$. Nato ugotovimo, da se pri sumaciji prispevkov d*Q*-jev ohranjajo le komponente polja v smeri osi Z, kar pomeni, da moramo določiti le prispevek te komponente in ga integrirati. Pišemo

$$\mathrm{d}E_z = \mathrm{d}E \cdot \cos(\alpha) = \mathrm{d}E \cdot \frac{z}{r}$$

$$\mathrm{d}E = \frac{\mathrm{d}Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

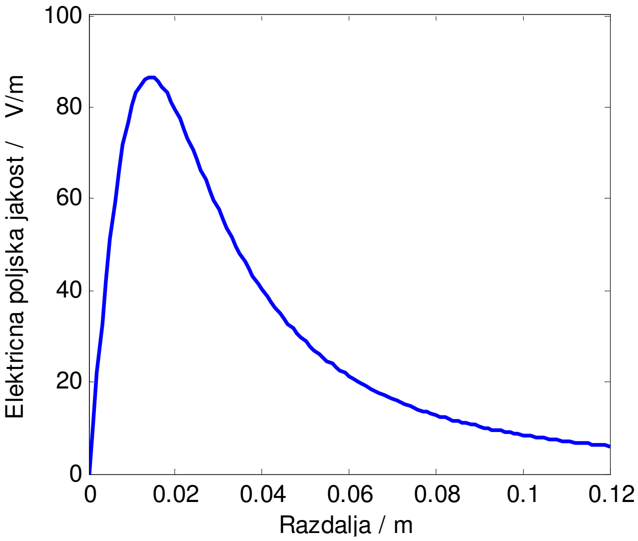
$$\mathrm{d}E_z = \frac{\mathrm{d}Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \cdot \frac{z}{r} = \frac{qaz\mathrm{d}\varphi}{4\pi\varepsilon_0 \left(a^2 + z^2\right)^{3/2}}.$$

Sedaj ugotovimo, da integriramo po kotu in da nobena od spremenljivk v enačbi ni funkcija kota, od koder sledi:

$$\mathrm{E}_z = \int\limits_{\text{po Q-jih}} \mathrm{d}E_z = \int_0^{2\pi} \frac{qaz\mathrm{d}\varphi}{4\pi\varepsilon_0 \left(a^2 + z^2\right)^{3/2}} = \frac{qaz}{4\pi\varepsilon_0 \left(a^2 + z^2\right)^{3/2}} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi = \frac{qaz}{2\varepsilon_0 \left(a^2 + z^2\right)^{3/2}},$$

kar je tudi že končen rezultat. Zapišimo ga še v vektorski obliki:

$$\vec{E} = \vec{e}_z \frac{qaz}{2\varepsilon_0 (a^2 + z^2)^{3/2}}$$ POLJE V OSI NAELEKTRENEGA OBROČA (6.6)



SLIKA 6.7: POLJE V OSI NAELEKTRENEGA OBROČA. POLMER OBROČA JE 2 CM, NA NJEM JE ENAKOMERNO (LINIJSKO) PORAZDELJEN NABOJ 0,1 NC.

POLJE V OSI NAELEKTRENEGA DISKA

Polje v osi naelektrenega diska izračunamo na podoben način kot za druge strukture. Disk umestimo v cilindrični koordinatni sistem, določimo $\mathrm{d}Q = \sigma \mathrm{d}A$, kjer d*A* določimo iz poznavanja diferencialnih površin v cilindričnem koordinatnem sistemu. Uporabimo $\mathrm{d}A = \mathrm{d}r \cdot r\mathrm{d}\varphi$, torej $\mathrm{d}Q = \sigma r \mathrm{d}r \mathrm{d}\varphi$. Skiciramo disk v cilindričnem koordinatnem sistemu, postavimo d*Q* na neko poljubno razdaljo r od središča diska, razdaljo od d*Q* do točke T, kjer računamo polje in je za razdaljo z oddaljena od središča diska, pa označimo z *R*. Velja $R^2 = r^2 + z^2$. Narišemo d*E* v točki T in ga zapišemo v obliki $\mathrm{d}E = \dfrac{\mathrm{d}Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$. Nadalje ugotovimo, da se radialne komponente polja odštevajo, seštevajo pa se prispevki polja v smeri osi Z. V tem smislu zapišemo diferencial komponente polja v smeri osi Z:

$$\mathrm{d}E_z = \mathrm{d}E \cdot \cos\delta = \mathrm{d}E \cdot \frac{z}{R} = \frac{\mathrm{d}Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2} \cdot \frac{z}{R}$$

$$\mathrm{d}E_z == \frac{\sigma r z \mathrm{d}r \mathrm{d}\varphi}{4\pi\varepsilon_0 R^3}$$

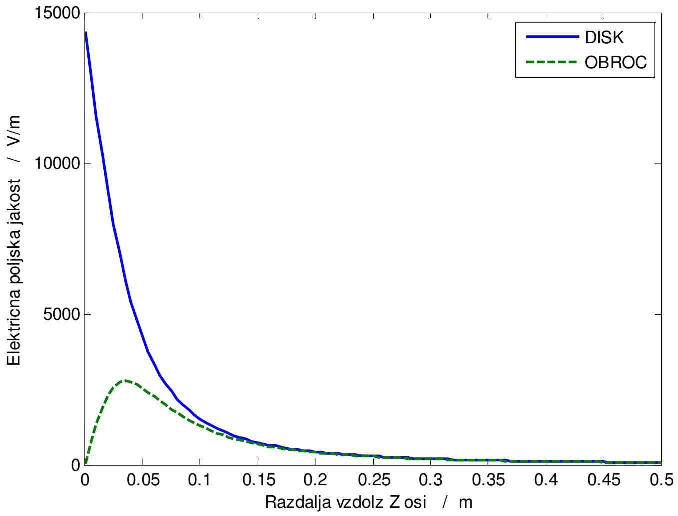
$$E_z = \int_0^{2\pi}\int_0^R \frac{\sigma r z}{4\pi\varepsilon_0 (r^2+z^2)^{3/2}} \mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi = \frac{\sigma z}{4\pi\varepsilon_0} 2\pi \int_0^R \frac{r}{(r^2+z^2)^{3/2}} \mathrm{d}r = \frac{\sigma z}{2\varepsilon_0}\left(-(r^2+z^2)^{-1/2}\right)_0^R = \frac{\sigma z}{2\varepsilon_0}\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{\sqrt{R^2+z^2}}\right)$$

Nekoliko še lahko spremenimo obliko enačbe in dobimo

$$E_z = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}\right) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1 - \cos(\delta)\right).$$

Polje v osi naelektrenega diska določimo torej iz enačbe*:

$$\boxed{\vec{E} = \vec{e}_z \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}}\right) = \vec{e}_z \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1 - \cos(\delta)\right)}; \quad \text{za } z > 0. \tag{6.7}$$



SLIKA 6.8: PRIMERJAVA POLJ VZDOLŽ Z OSI NAELEKTRENEGA OBROČA (ČRTKANA ZELENA ČRTA) IN NAELEKTRENEGA DISKA (POLNA MODRA ČRTA). NABOJ DISKA IN OBROČA JE 2 NC, POLMER DISKA IN OBROČA PA 5 CM.

Polje naelektrenega diska je največje na površini in upada z razdaljo, medtem ko je polje obroča pri z = 0 enako nič. V oddaljenosti je velikost polja podobna.

POLJE NAELEKTRENE RAVNINE

Naelektrena ravnina je le poseben slučaj naelektrenega diska in to tedaj, ko gre radij diska v neskončnost oziroma, ko gre $\delta \to \pi/2$. Tedaj je

$$\boxed{\vec{E} = \vec{e}_z \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}}. \quad \text{POLJE NAELEKTRENE RAVNINE (velja za } z > 0) \tag{6.8}$$

To je pomemben rezultat in kaže, da je polje v okolici naelektrene ravnine neodvisno od višine nad ravnino. Neskončne ravne površine seveda ni, lahko pa je to dober koncept v mnogih poenostavljenih primerih. Uporabili ga bomo tudi pri izračunu polja v ploščnem kondenzatorju, kjer je ena plošča naelektrena s pozitivnim, druga pa z negativnim nabojem. Polje znotraj ploščnega kondenzatorja bo torej očitno vsota prispevkov vsake posamezne plošče.

* Enačba velja za pozitivne z-je. Za negativne je potrebno spremeniti predznak polja, saj to kaže v smeri negativne Z osi (za pozitivni naboj na disku). Bolj splošna oblika je torej

$$\vec{E} = \vec{e}_z \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\frac{z}{|z|} - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}}\right)$$

Tudi ta enačba, ki smo jo izpeljali, velja za pozitivne *z*-je. Za negativne *z*-je je potrebno predznak spremeniti, torej $\boxed{\vec{E} = -\vec{e}_z \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}}$ za $z < 0$.

SLIKA 6.9: POLJE NAELEKTRENE RAVNINE.

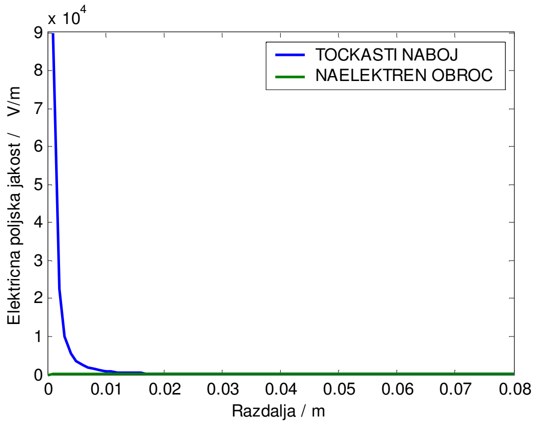
Primer: Ravni plošči sta naelektreni z nabojema $Q = \pm 20\ \mathrm{pC}$. Določimo električno poljsko jakost med ploščama, če je površina ene plošče 20 cm^2.

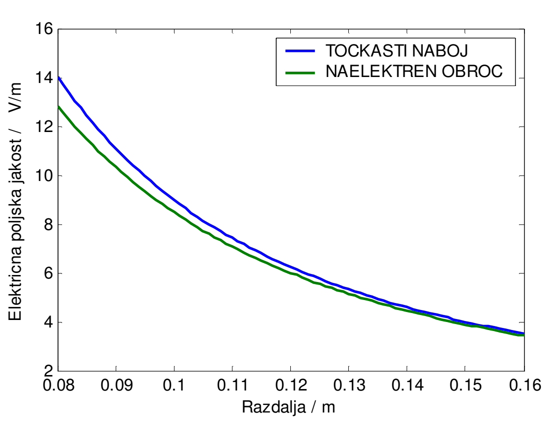
Izračun: Kot smo že omenili, je polje znotraj plošč vsota prispevkov vsake plošče, torej $E = 2 \cdot \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}$, kjer je $\sigma = \dfrac{Q}{A} = 10^{-8}\ \mathrm{C/m}$. Dobimo $E \cong \underline{\underline{1{,}23\ \mathrm{kV/m}}}$.

PRIMERJAVE POTEKOV POLJA

1.PRIMERJAVA MED POLJEM TOČKASTEGA NABOJA IN NAELEKTRENEGA OBROČA

pokaže, da je potek polja popolnoma različen v bližini naelektrenih struktur, saj polje točkastega naboja narašča s približevanjem naboju proti neskončnosti, v središču naelektrenega obroča pa je polje enako nič. V večji oddaljenosti od obroča oziroma točkastega naboja pa sta ti polji vedno bolj podobni.

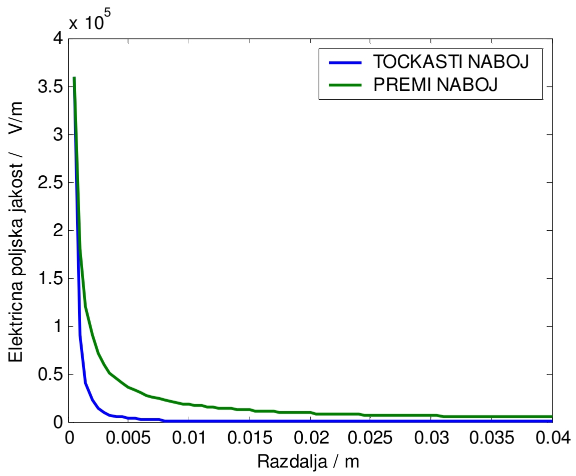




SLIKA 6.10: PRIMERJAVA MED POLJEM V ODDALJENOSTI OD TOČKASTEGA NABOJA IN V OSI NAELEKTRENEGA OBROČA. OBA IMATA ENAKO VELIK NABOJ (0,1 NC, POLMER PRSTANA JE 2 CM). LEVO: POLJE V BLIŽINI OBROČA. DESNO: POLJE V ODDALJENOSTI OD OBROČA. V ODDALJENOSTI OD OBROČA POSTANE IZRAZ $\vec{E} = \vec{e}_r \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$ ENAKOVREDEN IZRAZU $\vec{E} = \vec{e}_z \dfrac{qaz}{2\varepsilon_0 (a^2+z^2)^{3/2}}$, V BLIŽINI OBROČA (RAZDALJA MANJŠA OD NEKAJ POLMEROV OBROČA) PA JE RAZLIKA VELIKA (POLJA NAELEKTRENEGA OBROČA NA SLIKI LEVO NE VIDIMO, KER JE BISTVENO MANJŠI OD POLJA TOČKASTEGA NABOJA).

2. PRIMERJAVA MED POLJEM TOČKASTEGA IN PREMEGA NABOJA

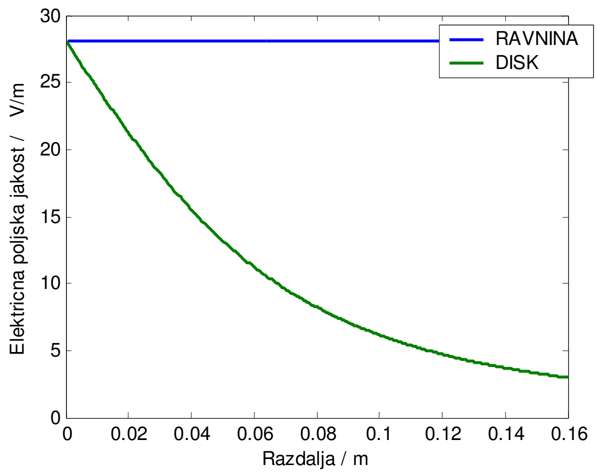
pokaže, da polje točkastega naboja mnogo hitreje (s kvadratom razdalje) upada z razdaljo kot polje premega naboja (1/*r*).

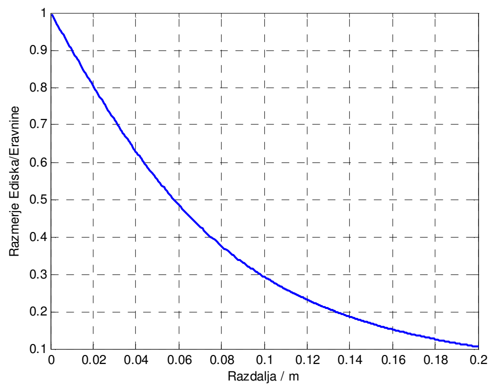


SLIKA 6.11: PRIMERJAVA MED POLJEM TOČKASTEGA (MODRA ČRTA) IN PREMEGA NABOJA (ZELENA ČRTA). POLJE TOČKASTEGA NABOJA UPADA S KVADRATOM RAZDALJE ($1/R^2$), POLJE PREMEGA PA Z RAZDALJO (1/R).

3. PRIMERJAVA MED POLJEM NAELEKTRENEGA DISKA IN NAELEKTRENE RAVNINE

V inženirskem smislu je potrebno vedno poiskati tisto strukturo, ki najbolj primerno opisuje električno polje. Na primer, če imamo opravka z enakomerno naelektrenim televizijskim zaslonom in nas zanima električno polje 1 cm stran od zaslona, je dovolj natančno, če upoštevamo zaslon kot neskončno naelektreno ravnino, če nas zanima polje naelektrenega zaslona 10 ali 15 m stran od ekrana, pa bi bilo mnogo bolj primerno zaslon smatrati kot točkast naboj, še bolj pa kot naelektren disk (ni pa tudi težko izpeljati eksakten izraz za polje v okolici enakomerno porazdeljenega naboja na ravni plošči).





SLIKA 6.12: PRIMERJAVA MED POLJEM NAELEKTRENEGA DISKA IN NESKONČNE RAVNINE Z ENAKO VELIKIM POVRŠINSKIM NABOJEM. POLMER DISKA JE 8 CM. DESNA SLIKA KAŽE RAZMERJE MED POLJEM DISKA IN POLJEM RAVNINE. TIK OB POVRŠINI JE IZRAČUN USTREZEN, NA RAZDALJI POLMERA DISKA PA JE POLJE DISKA 38 % POLJA RAVNINE.

POVZETEK IZPELJANIH ENAČB:

Polje naelektrene premice (premi naboj, prema elektrina):

$$\vec{E} = \vec{e}_r \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

Polje naelektrene daljice: (položene vzdolž Z osi) (glej sliko za razlago kotov):

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\left[\vec{e}_r\left(\cos(\alpha_1)+\cos(\alpha_2)\right)+\vec{e}_z\left(\sin(\alpha_1)-\sin(\alpha_2)\right)\right]$$

Polje v osi naelektrenega obroča (polmer obroča = *a*):

$$\vec{E} = \vec{e}_z \frac{qaz}{2\varepsilon_0 (a^2+z^2)^{3/2}}$$

Polje naelektrene ravnine (normala v smeri osi Z):

$$\vec{E} = \pm\vec{e}_z \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

Vprašanja za obnovo:

1) Kateri izraz nam omogoča izračun polja v okolici porazdeljenih nabojev? Kako ga dobimo iz izraza za točkasti naboj?
2) Kako uporabimo izraz za polje porazdeljenih nabojev na primeru izračuna polja naelektrene premice, obroča, diska?
3) Zapišite in uporabite izraze za polje premega naboja, polje v osi naelektrenega obroča, polje naelektrene ravnine.
4) Skicirajte poteke polj obdelanih struktur.
5) Katere aproksimativne izraze bi uporabili, če bi želeli izračunati polje tik nad enakomerno naelektreno mizo ali pa 15 m nad naelektreno mizo?

7. Gaussov zakon

Vsebina poglavja: silnice polja, gostotne cevke (gostotnice), homogeno in nehomogeno polje, pretok električnega polja, Gaussov zakon.

V tem poglavju bomo spoznali Gaussov zakon v integralni obliki, ki je v osnovi posledica Coulombovega zakona, torej dejstva, da polje v okolici točkastega naboja upada s kvadratom razdalje. Da bi razumeli njegov pomen, se moramo najprej seznaniti s pojmi kot so silnice polja, pretočne oz. gostotne cevke in električni pretok.

SILNICE

Električno poljsko jakost v prostoru lahko prikažemo z vektorji v prostoru. Če vektorje povežemo z linijami, le te imenujemo **silnice polja**. Prikaz s silnicami je zelo primeren in pogost način prikaza polja. (Konceptualno jih je vpeljal Michael Faraday, ki jih je imenoval lines of force.) Ker so silnice usmerjene v smeri polja, bi po silnici potoval naboj, če bi ga postavili v polje. Pri tem moramo predpostaviti, da vstavitev tega naboja v polje ne bi spremenila samega polja, saj bi tak naboj tudi deloval s silo na tiste naboje, ki ustvarjajo polje v katerem potuje.

SLIKA 7.1: VEKTORJI IN SILNICE POLJA ZA PRIKAZ ELEKTRIČNEGA POLJA V PROSTORU .

PRETOK ELEKTRIČNEGA POLJA

Nadalje je potrebno spoznati koncept *pretoka električnega polja* skozi neko ploskev.[*] Električnemu polju, ki je povsod enako veliko (konstantno) in ima enako smer, običajno rečemo *homogeno polje*. **Če je homogeno polje usmerjeno pravokotno na ravno ploskev ploščine *A*, potem je pretok skozi to površino določen kot produkt polja in ploščine:** $E \cdot A$. (V nekem smislu je pretok polja povezan s količino naboja iz katerih izhajajo silnice. Na površini naelektrenega telesa se izkaže produkt $E \cdot A$ direktno proporcionalen količini naboja.)

[*] Koncept pretoka nekega vektorja skozi določeno površino je splošen pojem, ki se pogosto uporablja za opis določenih veličin in ga pogosto imenujemo fluks. V nadaljevanju bomo spoznali novo veličino, gostoto električnega pretoka, ki jo bomo označili s črko D in bo za prazen prostor enaka $\varepsilon_0 \overline{E}$.

Če je ravna ploskev postavljena v smeri homogenega polja, je pretok enak nič, če pa je pod določenim kotom, je potrebno upoštevati kosinus vmesnega kota, pri čemer je to kot med normalo (pravokotnico) na površino in smerjo električnega polja $E \cdot A \cdot \cos(\alpha)$. Po definiciji skalarnega produkta lahko to zvezo zapišemo tudi s skalarnim produktom vektorja polja in vektorja površine, pri čemer je potrebno ponovno poudariti, da je smer vektorja površine določena z normalo na površino (smerjo, ki je pravokotna na površino). **Pretok homogenega polja skozi poljubno postavljeno ravno površino je enak skalarnemu produktu (vektorja) električnega polja in vektorja površine (ki ga določa normala na površino).**

$\boxed{\Phi_e = \vec{E} \cdot \vec{A}}$ **Pretok homogenega električnega polja preko ravne ploskve** **(7.1)**

SLIKA 7.2: PRETOK HOMOGENEGA ELEKTRIČNEGA POLJA SKOZI RAVNO PLOSKEV: A) PRAVOKOTNO ($\Phi_e = EA$), B) VZPOREDNO ($\Phi_e = 0$), POD KOTOM ($\Phi_e = EA\cos\alpha$).

Primer: Določimo pretok homogenega električnega polja velikosti 5 kV/m, ki je usmerjen pod kotom 30^0 na normalo ravne površine določene s pravokotnikom dimenzij 3 x 4 m^2.

Izračun:

1. način: Prikažemo polje v koordinatnem sistemu in zapišemo vektorja *E* in *A*:

$$\vec{E} = \vec{e}_E E = -\vec{e}_x E\sin\alpha - \vec{e}_y E\cos\alpha = E(-\sin\alpha, -\cos\alpha, 0)$$

$$\vec{A} = -\vec{e}_y A = (0,-1,0)A$$

$$\vec{E} \cdot \vec{A} = E(-\sin\alpha, -\cos\alpha, 0)(0,-1,0)A = EA\cos\alpha$$

2. način: Poiščemo komponento polja, ki je pravokotna na površino, to je $E_n = E\cos\alpha \cong 4{,}33\,\mathrm{kV/m}$. Sedaj le še pomnožimo normalno komponento polja s ploščino in dobimo pretok $\Phi_E \cong 4{,}33\,\mathrm{kV/m} \cdot 12\mathrm{m}^2 \cong \underline{\underline{52 \cdot 10^3\ \mathrm{V \cdot m}}}$.

Pretok nehomogenega polja skozi neravno površino

Kaj pa če polje ni homogeno in/ali površina skozi katero računamo pretok ni ravna? Tedaj bomo dobili pravilen izraz za pretok na že poznan način: najprej zapišemo pretok za neko diferenčno majhno površino, na kateri bi homogenost približno veljala, torej za $\Delta\Phi_e = \vec{E}\cdot\Delta\vec{A}$. To bi veljalo eksaktno, če bi $\Delta\vec{A}$ limitirali proti nič. V limiti pa dobimo diferencial pretoka $\mathrm{d}\Phi_e = \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{A}$, celotni pretok pa[*]

$$\boxed{\Phi_e = \int_A \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{A}}. \qquad \textbf{Pretok polja za poljubno obliko polja in površine} \qquad (7.2)$$

V splošnem je pretok električnega polja skozi poljubno površino enak integralu električnega polja po tej površini. Pri tem je potrebno upoštevati skalarni produkt vektorja polja in vektorja diferenciala površine. V smislu skalarnega produkta je potrebno upoštevati le komponento polja, ki je v smeri normale na površino: E_n. Lahko pišemo tudi $\Phi_e = \int_A E_n \cdot \mathrm{d}A$.

SLIKA 7.3: PRETOK NEHOMOGENEGA POLJA SKOZI NERAVNO POVRŠINO.

Pretočne cevke ali gostotnice

Tudi pretok električnega polja lahko ponazorimo na enak način kot ponazarjamo silnice polja, le da sedaj govorimo o gostotnih ali **pretočnih cevkah**, silnice pa ponazarjajo le stene gostotnih cevk. Večji pretok električnega polja dosežemo, če zajamemo več pretočnih cevk. V poljubnem preseku gostotne cevke je enak pretok.

[*] Ponovno velja opozoriti, da je bisten element izračuna pretoka vektorja skozi površino uporaba skalarnega produkta dveh vektorjev. V konkretnem primeru vektorja električne poljske jakosti E in vektorja (diferenciala) površine, pri čemer je smer vektorja površine določena z normalo (pravokotna smer) na površino: $\vec{A} = \vec{e}_n A$.

SLIKA 7.4: PRETOK ELEKTRIČNEGA POLJA ZNOTRAJ GOSTOTNIC JE KONSTANTEN (ENAKO VELIK NA POLJUBNEM PRESEKU).

PRETOK POLJA PO CELOTNI (ZAKLJUČENI) POVRŠINI

Sedaj pa si poglejmo vrednost tega pretoka po celotni - **zaključeni** površini. Včasih ji rečemo tudi **Gaussova površina**. To pomeni, da nas zanima pretok polja skozi površino krogle ali skozi vseh šest stranic kocke ali pač poljubne površine, ki v celoti zaobjame določen objekt. Pri tem niti ni potrebno, da računamo pretok skozi neko površino telesa, lahko je to popolnoma namišljeno (abstraktno) telo. Matematično integracijo po zaključeni površini naznačimo s krogcem v sredini simbola integrala:

Pretok polja skozi zaključeno površino = $\oint_A \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{A}$ (7.3)

PRETOK POLJA TOČKASTEGA NABOJA SKOZI ZAMIŠLJENO POVRŠINO KROGLE

Vzemimo kar najpreprostejši primer, kjer je naboj *Q* postavljen v središče krogelnega koordinatnega sistema in računamo pretok skozi neko zamišljeno površino krogle polmera *r*:

$$\oint_A \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \vec{e}_r \cdot \vec{e}_r r^2 \sin(\vartheta)\mathrm{d}\vartheta\mathrm{d}\varphi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \varphi\Big|_0^{2\pi} \cdot (-\cos(\vartheta))\Big|_0^{\pi} = \frac{Q}{\varepsilon_0} \qquad (7.4)$$

<u>Ugotovimo</u>, da je ta integral sorazmeren naboju, ki se nahaja v središču namišljene krogle.

Ali je to naključje, ali to morda velja za poljubno postavitev naboja znotraj namišljene krogle? Z razmislekom, da lahko naboj zamaknemo iz središča koordinatnega sistema, pa se število pretočnih cevk, ki »sekajo« površino krogle, ne spremeni, lahko <u>ugotovimo</u>, da bo rezultat enak tudi za poljubno postavitev naboja *Q* znotraj (namišljene) krogle polmera *r*.

SLIKA 7.5: ŠTEVILO PRETOČNIH CEVK, KI SEKAJO POVRŠINO NAMIŠLJENE KROGLE JE ENAKO ZA POLJUBNO POSTAVITEV NABOJA ZNOTRAJ KROGLE. ENAKO VELJA ZA POLJUBNO OBLIKO POVRŠINE ZAKLJUČENEGA OBJEKTA.

Pretok polja skozi zaključeno površino poljubne oblike v kateri se nahaja množica nabojev

Nadalje lahko razmislimo, kolikšen je pretok električnega polja, če se v prostoru z zaključeno površino nahaja več nabojev. Razmislek je podoben kot v prejšnjem primeru. Pomagamo si z veljavnostjo superpozicije polja $\left(\vec{E}=\vec{E}_1+\vec{E}_2+\vec{E}_3+...\right)$ in zapišemo:

$$\oint_A \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{A}=\oint_A\left(\vec{E}_1+\vec{E}_2+\vec{E}_3+...\right)\cdot \mathrm{d}\vec{A}=\oint_A \vec{E}_1\cdot \mathrm{d}\vec{A}+\oint_A \vec{E}_2\cdot \mathrm{d}\vec{A}+\dots=\frac{Q_1}{\varepsilon_0}+\frac{Q_2}{\varepsilon_0}+\dots=\frac{\sum_{\mathrm{i}} Q_i\big|_{\text{znotraj A}}}{\varepsilon_0}$$

(7.5)

SLIKA 7.6: PRETOČNE CEVKE VEČ NABOJEV, KI JIH ZAJAMEMO Z NAMIŠLJENO POVRŠINO KROGLE (ALI POLJUBNO ZAKLJUČENO POVRŠINO).

Primer: Določimo pretok skozi zaključene površine A_1, A_2 in A_3 za naboje na sliki.

Vpliv nabojev zunaj zaključene površine na pretok polja skozi notranjost površine

Kaj pa naboji, ki se nahajajo zunaj krogle? Ugotovimo lahko, da sicer povzročajo polje na površini krogle, vendar je pretok polja v kroglo enako veliko pretoku polja iz krogle.

SLIKA 7.7: PRETOK POLJA SKOZI ZAKLJUČENO POVRŠINO V KATERI NI NABOJEV JE ENAK NIČ. ČE SE V ZUNANJI OKOLICI POVRŠINE NAHAJAJO NABOJI, JE PRETOK POLJA, KI VSTOPA V PROSTOR ENAK PRETOKU POLJA, KI IZSTOPA IZ TEGA PROSTORA.

Povzemimo ugotovitve: **Pretok električne poljske jakost skozi sklenjeno (zaključeno) površino je enak zaobjetemu naboju (algebrajski vsoti nabojev) deljeno z ε_0. Ta zapis imenujemo Gaussov zakon.**

$$\oint_A \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = \frac{Q_{\text{znotraj A}}}{\varepsilon_0}. \qquad \textbf{GAUSSOV ZAKON} \qquad (7.6)$$

Pomen Gaussovega zakona:

1) Ugotavlja **izvornost** električnega polja. Električno polje izvira iz pozitivnih nabojev in se zaključuje (ponira) na negativnih.
2) **Omogoča izračun naboja** v določenem prostoru ob poznavanju električnega polja na mejah tega prostora.
3) **Omogoča izračun električnega polja** v primeru simetrične porazdelitve naboja. V tem primeru namreč polje ni funkcija spremenljivk integracije.
4) Gaussov zakon smo spoznali v t.i. integralni obliki. Zapisan je namreč z integralom in velja po določeni površini. Poznamo tudi zapis Gaussovega stavka v diferencialni obliki, ki definira povezavo med električnim poljem in nabojem (gostoto naboja) v točki v prostoru. Ta zakon je en od osnovnih zakonov, ki opisujejo naravo električnega polja. **Gaussov zakon je znan tudi kot ena od štirih Maxwellovih enačb**, ki v celoti opisujejo elektromagnetne pojave.

PRIMERI IZRAČUNOV Z UPORABO GAUSSOVEGA ZAKONA

NAELEKTRENA KROGLA

Krogla polmera *R* ima enakomerno volumsko porazdelitev naboja. Določimo električno poljsko jakost znotraj in zunaj krogle.

Izračun:

1. Znotraj krogle si zamislimo zaključeno površino krogle s polmerom *r*<*R* in zapišemo pretok polja skozi to ploskev. Uporabimo izraz

$\oint_{A(r)} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{A} = \frac{Q_A}{\varepsilon_0}$, kjer je Q_A naboj zajet s površino krogle polmera *r*. Ker je gostota naboja enakomerno porazdeljena, je celoten naboj zajet s kroglo površine *A*(r) kar $Q_A = \rho V = \rho\frac{4\pi r^3}{3}$. Polje je zaradi simetrične porazdelitve naboja usmerjeno radialno, kar lahko zapišemo v obliki $\vec{E} = \vec{e}_r E(r)$ in je le funkcija radija. Tudi diferencial površine je usmerjen v smeri radija (pravokotno na površino) in je enako $\mathrm{d}\vec{A} = \vec{e}_r \mathrm{d}A$. Skalarni produkt $\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{A}$ je enak $E\cdot\mathrm{d}A$. Poleg tega električno polje ni odvisno od integracijskih spremenljivk, saj je povsod kjer integriramo (po površini krogle) polje enako veliko - konstantno. Zato ga lahko pišemo pred integral:

$\oint_{A(r)} \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{A} = E\oint_{A(r)} \mathrm{d}A$, integral d*A* po zaključeni površini pa je kar enak tej površini (ploščini): $\oint_{A(r)} \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{A} = EA = E4\pi r^2$. Sedaj le še sestavimo levo in desno stran enačbe in preuredimo

$$E\cdot 4\pi r^2 = \rho\cdot 4\pi\frac{r^3}{3} / \varepsilon_0$$

$$E = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}.$$

Na koncu le še dodamo »nastavek« $\vec{E} = \vec{e}_r E(r)$ in polje je $\boxed{\vec{E} = \vec{e}_r\frac{\rho r}{3\varepsilon_0}}$. Ta zveza velja za poljubne radije znotraj krogle, torej za $r \le R$.

Ugotovimo, da znotraj krogle s konstantno volumsko porazdelitvijo gostote naboja polje narašča linearno z radijem.

2. Polje zunaj krogle dobimo na podoben način: zamislimo si neko površino krogle pri nekem radiju $r > R$ in zapišemo Gaussov zakon za to namišljeno površino. Ugotovimo, da bo leva stran enačbe enaka kot v prejšnjem primeru, desna pa se spremeni, saj je potrebno upoštevati, da smo zajeli

celotni naboj že pri $r = R$, za $r > R$ pa ni naboja. Torej bo desna stran enačbe kar $\rho \cdot 4\pi \frac{R^3}{3} / \varepsilon_0$, oziroma kar celoten naboj *Q*. Dobimo

$$E \cdot 4\pi r^2 = \rho \cdot 4\pi \frac{R^3}{3} / \varepsilon_0$$

$$E = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} \frac{R^3}{r^2}$$

Ugotovimo, da polje v zunanjosti krogle upada s kvadratom razdalje. In še več, enačbo lahko zapišemo tudi v obliki $\vec{E} = \vec{e}_r \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$, kar ni nič drugega kot polje v okolici točkastega naboja. Torej, krogla z enakomerno volumsko gostoto naboja ima v okolici enako polje, kot če bi bil celoten naboj skoncentriran v centru krogle.

SLIKA 7.8: POLJE V NOTRANJOSTI IN ZUNANJOSTI KROGLE Z ENAKOMERNO VOLUMSKO GOSTOTO NABOJA.

NALEKTRENA VALJA

Določimo polje med enakomerno in nasprotnosmerno naelektrenima neskončnima plaščema valjev z linijsko gostoto naboja. $q(r = r_n) = +q$ in $q(r = r_z) = -q$.

SLIKA 7.9: DVA PLAŠČA VALJA Z ISTO OSJO, NASPROTNO NAELEKTRENA.

<u>Izračun</u>: Zamislimo si nek plašč valja polmera r in dolžine l med notranjim in zunanjim polmerom in zapišemo Gaussov zakon za ta namišljeni objekt. Podobno kot za kroglo lahko ugotovimo, da je polje neodvisno od spremenljivk integracije velja

$\oint_{A(r)} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = EA = E2\pi rl + 0 + 0$. Z dvema ničlama smo zapisali pretok skozi stranske površine (ker je tam normalna komponenta polja enaka nič). Desna stran enačbe Gaussovega zakona je enaka naboju, ki ga zaobjamemo z namišljenim valjem. Ta je enaka $\frac{Q}{\varepsilon_0} = \frac{ql}{\varepsilon_0}$. Z združitvijo leve in desne strani enačbe dobimo $E2\pi rl = \frac{ql}{\varepsilon_0}$, od koder sledi $E = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 r}$. Dobili smo izraz, ki ga že poznamo – za polje premega naboja. Polje med naelektrenima valjema je enako $E = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 r}$.

Ugotovimo lahko, da pri izračunu polja med plaščema valjev nismo potrebovali upoštevati nabojev na zunanjem plašču. Njihov vpliv na polje znotraj plašča je enak nič. Vplivajo pa na polje zunaj valjev ($r > r_z$), tako, da se prispevek nabojev na notranjem in zunanjem plašču izničita: $E2\pi rl = \frac{ql}{\varepsilon_0} + \frac{-ql}{\varepsilon_0} = 0$.

NAELEKTRENA RAVNINA

S pomočjo Gaussovega zakona določimo polje v okolici naelektrene površine.

Izračun: Zapišemo Gaussov stavek skozi namišljeno kocko, katere polovica je na eni strani ravnine in polovica na drugi strani. Skozi stranske površine je pretok enak nič, skozi normalni pa je enak $\oint_A \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = EA + EA = 2EA$. Desna stran enačbe je sorazmerna zaobjetemu naboju $\frac{Q}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma A}{\varepsilon_0}$. Z združitvijo dobimo $E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$, kar je enak izraz, kot smo ga dobili v prejšnjem poglavju..

SLIKA 7.10: NAELEKTRENA RAVNINA.

Vprašanja za obnovo:

1. Kaj so to silnice polja?
2. Kaj je to pretok električnega polja?
3. Kako določimo pretok homogenega električnega polja skozi ravno površino?
4. Kako določimo pretok nehomogenega električnega polja skozi poljubno površino?
5. Čemu je enak pretok električnega polja skozi zaključeno površino?
6. Pokažite uporabo Gaussovega zakona na primeru izračuna polja naelektrene krogle, naelektrenega valja in naelektrene ravnine.
7. Kakšen je pomen Gaussovega zakona?

Primera kolokvijev: 1. kolokvij, 08.12.2000, 12. december 2001

8. Delo in potencialna energija

Vsebina: Delo kot integral sile na poti, delo električne sile, delo po zaključeni poti, potencialna energija, potencialna energija sistema nabojev, delo kot razlika potencialnih energij.

V srednješolski fiziki je veljalo, da je delo enako produktu sile in dolžine poti, torej, če vzdolž poti dolžine *l* deluje sila *F*, le ta opravi delo $A = F \cdot l$. Če torej potiskamo voziček v smeri poti dolžine 5 m s silo 100 N opravimo delo 500 N·m ali 500 J. Kaj pa, če voziček potiskamo s silo 100 N v smeri, ki je pod kotom 60^0 na smer poti? V tem primeru moramo upoštevati le tisto komponento sile, ki deluje v smeri poti. Delo je torej $A = F \cdot l \cdot \cos(\alpha)$ =100 N·5m·cos(60^0) = 250 J. Ugotovimo, da je za izračun dela primerna uporaba skalarnega produkta $\boxed{A = \vec{F} \cdot \vec{l}}$.

SLIKA 8.1: PREMIKANJE VOZIČKA S KOSTANTNO SILO A) V SMERI POTI IN B) POD KOTOM 30^0 NA SMER POTI.

Kaj pa drugi del sile, ki tudi nastopa pri premiku? Ta sila je usmerjena pravokotno na smer poti in ima za posledico trenje po ploskvi - ne prispeva pa k delu. V smislu definicije dela, torej kot produktu poti in sile v smeri te poti. V tem smislu je potrebno razlikovati pojem besede delo, kot ga smatramo v vsakdanu. Če primemo in pri miru držimo težko košaro v smislu definicije dela ne opravimo nič dela, čeprav moramo v to naše početje vložiti določen napor (delo). Bolj ustrezno bi naš napor ovrednotili s pojmom energije. Ta energija izhaja iz energije, ki se troši v naših mišicah nekaj pa je gre prav gotovo tudi v toploto - potenje.

In koliko energije potrebujemo za premik na poti 5 m? En del te energije je očitno delo 250 J, ki se odraža v spremembi kinetične energije vozička, drug del energije pa potrebujemo za premagovanje sile trenja. Za točen izračun bi torej morali poznati še energijo, ki se porabi pri trenju vozička s podlago.

DELO PO POLJUBNI POTI IN VELIKOSTI SILE

Kaj pa če sila ni konstantna na poti in poleg tega ne deluje vedno v isti smeri glede na pot? Potem lahko zapišemo delo le za en mali (diferenčni) odsek, da dobimo tisti del sile, ki deluje v smeri poti pa uporabimo skalarni produkt. Diferenčni del sile na poti Δl je torej $\Delta A = \vec{F} \cdot \Delta \vec{l}$. Z limitiranjem dobimo iz diferenc diferencial: $\mathrm{d}A = \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$, celotno **delo** pa je seveda integracija po poti od začetne točke do končne točke:

$$\boxed{A = \int \mathrm{d}A = \int_L \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{l}}. \tag{8.1}$$

SLIKA 8.2: DELO SIL PO POLJUBNI POTI.

DELO ELEKTRIČNE SILE

Kako pa izračunamo delo električnih sil (A_e) na naboje? Na popolnoma enak način. Upoštevamo, da je sila na naboj v električnem polju enaka $\vec{F} = Q\vec{E}$, torej bo delo za premik naboja Q v električnem polju iz točke T_1 v točko T_2 enako

$$\boxed{A_e = A_{12} = \int_{T_1}^{T_2} Q\vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = Q\int_{T_1}^{T_2} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}}. \tag{8.2}$$

Primer: Vzemimo dva pozitivna naboja oddaljena za d = 1 cm z množino naboja Q = 10 nC. Koliko dela opravi naboj (zunanji vir) za premik na polovično razdaljo?

Izračun: naboja postavimo vzdolž X osi, levega v izhodišče k.s., desnega pa za razdaljo d v smeri X osi. Izračunali bomo delo, potrebno za premik desnega naboja v levo. Da bi lahko izračunali delo, moramo desni naboj postaviti na neko poljubno mesto vzdolž X osi, oddaljeno za razdaljo x od levega naboja. Polje na mestu desnega naboja je $\vec{E} = \vec{e}_x \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 x^2}$, $\mathrm{d}\vec{l}$ pa je usmerjen v smeri – X osi*.

SLIKA 8.3: PREMIK DESNEGA NABOJA V SMERI LEVEGA NABOJA.

* Kljub temu, da je *dl* usmerjen v smeri –X osi ni njegova vrednost $-\vec{e}_x \mathrm{d}x$, pač pa $\mathrm{d}\vec{l} = -\vec{e}_x(x-(x+\mathrm{d}x)) = \vec{e}_x$.

$$A_{12}=\int_{T_1}^{T_2} Q\vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=Q\int_{x_1=d}^{x_2=d/2}\vec{e}_x\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 x^2}\cdot(\vec{e}_x\mathrm{d}x)=\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{x}\right)_d^{d/2}=$$

$$=-\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{d/2}-\frac{1}{d}\right)=-\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 d}\cong-9\cdot10^9\,\frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{Am}}\left(10\cdot10^{-9}\,\mathrm{C}\right)^2 10^2\,\mathrm{m}^{-1}=\underline{\underline{-9\cdot10^{-5}\,\mathrm{J}}}$$

Dobljen rezultat je negativen, kar pomeni, da bi bila za premik potrebna neka zunanja sila (A_z), ki bi opravila to delo*. Veljati mora torej:

$$\boxed{A_z+A_e=0}. \qquad (8.3)$$

Primer: Določimo delo za premik desnega naboja v desno za $d/2$. Rezultat je

$$A_{12}=\int_{T_1}^{T_2} Q\vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=\int_{d}^{3d/2}\vec{e}_x\frac{QQ}{4\pi\varepsilon_0 x^2}\cdot(\vec{e}_x\mathrm{d}x)=\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{x}\right)_d^{3d/2}=$$

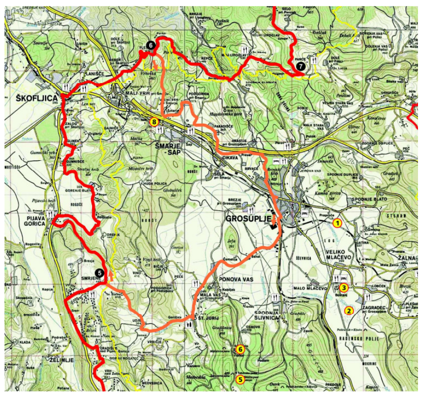
$$=-\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{3d/2}-\frac{1}{d}\right)=-\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 d}\left(\frac{2}{3}-1\right)=9\cdot10^9\cdot\frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{Am}}(10\cdot10^{-9}\,\mathrm{C})^2\cdot\frac{1}{3}10^2\,\mathrm{m}^{-1}=\underline{\underline{3\cdot10^{-5}\,\mathrm{J}}}$$

Rezultat je pozitiven, saj polje opravi delo 30 µJ: delec se premakne v drugo točko pod vplivom električne sile. Zakaj je rezultat mnogo manjši kot v prejšnjem primeru?

SLIKA 8.4: PREMIK DESNEGA NABOJA STRAN OD LEVEGA.

DELO ELEKTRIČNIH SIL NI ODVISNO OD POTI

Kolikšno pa bi bilo delo, če bi ga opravili po drugi poti? Izračunajmo delo za enak premik kot v prejšnjem primeru le po drugi poti. Izberimo to pot tako, da bo šla najprej v smeri kota za 45^0, nato v smeri radija do r = 2,5 cm in nato nazaj za kot 45^0 do končne točke.



Pri kolesarjenju pogosto končamo na istem mestu kot smo začeli. Če bi šlo za delo električnih sil, bi bilo (po definiciji) na koncu delo enako nič. Kako pa je z energijo?

Ugotovimo lahko, da je v smeri kota ($\mathrm{d}\vec{l}=\vec{e}_\varphi r\mathrm{d}\varphi$) polje enako nič, saj je polje v vsaki točki usmerjeno radialno. Torej

* Kar je logično, saj sta oba naboja positivan in se torej odbijata. Delo bi bilo pozitivno, če bi se naboja odštevala.

je produkt integracije $\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}$ v smeri kota enak nič in je rezultat enak kot prej.

Ker je rezultat integracije polja neodvisen od poti lahko vzamemo dve poljubni poti in zapišemo $\int\limits_{L_1}\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\int\limits_{L_2}\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}$.

SLIKA 8.5: DELO OD TOČKE T_1 DO TOČKE T_2 PO POTI L_1 IN POTI L_2 JE ENAKO.

DELO PO ZAKLJUČENI POTI

Ker velja $\int\limits_{L_1}\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\int\limits_{L_2}\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}$, integracija v nasprotni smeri pa spremeni predznak integralu $\int\limits_{-L_2}\vec{E}\cdot d\vec{l}=-\int\limits_{L_2}\vec{E}\cdot d\vec{l}=-\int\limits_{L_1}\vec{E}\cdot d\vec{l}$, lahko pišemo

$$\oint\limits_{L}\vec{E}\cdot d\vec{l}=\int\limits_{L_1+(-L_2)}\vec{E}\cdot d\vec{l}=\int\limits_{L_1}\vec{E}\cdot d\vec{l}+\int\limits_{-L_2}\vec{E}\cdot d\vec{l}=\int\limits_{L_1}\vec{E}\cdot d\vec{l}-\int\limits_{L_1}\vec{E}\cdot d\vec{l}=0.$$

Prišli smo do pomembnega rezultata, da je **krivuljni integral električne poljske jakosti po poljubni zaključeni poti (zanki) enak nič**[*]:

$$\boxed{\oint\limits_{L}\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=0}\qquad(8.4)$$

. ZAKON O POTENCIALNOSTI ELEKTROSTATIČNEGA POLJA

[*] Pri tem je potrebno biti previden, saj smo doslej obravnavali le elektrostatično polje, torej tako, ki se s časom ne spreminja. Zgornji zapis je torej **točen le za elektrostatične polje**. Ko bomo obravnavali dinamično polje bomo ugotovili, da je potrebno zgornji zapis spremeniti – dopolniti.

POTENCIALNA ENERGIJA

SLIKA 8.6: S PREMAGOVANJEM SILE TEŽNOSTI PRIDOBIVAMO (GRAVITACIJSKO) POTENCIALNO ENERGIJO. NA SLIKI JE PRIMER PROFILA PETE ETAPE KOLESARSKE POTI PO OKOLICI GROSUPELJ, KI JE PRIMERNA ZA TISTE, KI ŽELIJO NEPOSREDNO SPOZNAVATI POVEZAVO MED DELOM IN ENERGIJO TER ZAKONITOSTI INTEGRALOV PO ZAKLJUČENI POTI. VIR: HTTP://WWW.GROSUPLJE.SI.

Potencialna energija ali delo pri prenosu naboja v neskončnost (kjer je polje enako nič). Določimo še delo, če bi enega od nabojev iz prejšnjega primera pustili v neskončnost. Opravljeno delo bi bilo:

$$A_{1\infty} = \int_{T_1}^{\infty} Q\vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = Q\int_{r_1}^{\infty} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r\cdot(\vec{e}_r \mathrm{d}r) = \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{r}\right)_{r_1}^{\infty} =$$

$$= -\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\infty}-\frac{1}{r_1}\right) = \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 r_1}$$

SLIKA 8.7: DELO PRI PRENOSU NABOJA OD TOČKE T DO NESKONČNOSTI.

Lahko rečemo, da je imel sistem (naboj) pred prenosom v neskončnost določeno energijo, ki se je nato porabila za prenos. Ta (potencialna) energija je ravno enaka delu, potrebnem za premik naboja v neskončnost. Če uporabimo simbol *W* za zapis električne potencialne energije, velja

$$\boxed{W(T) = A_e(T \to T_\infty)} \qquad (8.5)$$

Delo, potrebno za prenos naboja *Q* od neke točke *T* do neskončnosti je enako električni potencialni energiji tega naboja v točki *T*.

Primer: Določite elektrostatično potencialno energijo sistema dveh nabojev velikosti 10 nC oddaljenih za 1 cm.

Izračun: Izračun smo že opravili, saj je ta energija enaka delu polja za premik enega od nabojev od začetne lege do neskončnosti:

$$W_e = A_{1\infty} = \int_{T_1}^{\infty} Q\vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} == -\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\infty}-\frac{1}{r_1}\right) = \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 r_1} = \underline{\underline{9\,\mu\mathrm{J}}}\,.$$

Komentar: na tem mestu lahko vpeljemo tudi koncept električnega potenciala.

POTENCIALNA ENERGIJA SISTEMA NABOJEV

Kolikšna pa je energija skupine (sistema) nabojev, če imamo več nabojev? Postopamo tako, kot da bi imeli najprej na končnem mestu naboj[*] Q_1, nato na svoje mesto oddaljeno od Q_1 za r_{12} pripeljemo iz neskončnosti naboj Q_2. Za to je potrebno delo $A_{1\infty} = \int_{T_1}^{\infty} Q\vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_{12}}$. Da pripeljemo poleg še naboj Q_3 potrebujemo delo $\frac{Q_1 Q_3}{4\pi\varepsilon_0 r_{13}} + \frac{Q_2 Q_3}{4\pi\varepsilon_0 r_{23}}$, saj moramo sedaj opraviti delo tako zaradi sile med Q_1 in Q_3 kot tudi Q_2 in Q_3. Energija sistema treh nabojev bo torej $\frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_{12}} + \frac{Q_1 Q_3}{4\pi\varepsilon_0 r_{13}} + \frac{Q_2 Q_3}{4\pi\varepsilon_0 r_{23}}$. V nadaljevanju bomo ta rezultat prikazali še nekoliko drugače.

SLIKA 8.8: SISTEM TREH NABOJEV Z OZNAČENIMI NABOJI IN RAZDALJAMI MED NABOJI.

DELO KOT RAZLIKA POTENCIALNIH ENERGIJ SISTEMA

Imamo sistem nabojev porazdeljenih po prostoru in torej določeno električno potencialno energijo. Sedaj premaknemo enega od nabojev iz izhodiščnega mesta T_1 na drugo mesto (T_2) in pri tem opravimo določeno (pozitivno ali negativno) delo. Če je to delo pozitivno, je delo opravilo elektrostatično polje, energija sistema pa je po premiku manjša kot pred premikom. V nasprotnem primeru (delo negativno) mora delo opraviti neka zunanja sila, kar pomeni, da je končna energija sistema večja kot pred premikom. **Delo potrebno za premik naboja od T_1 do T_2 je enako razliki potencialnih energij sistema nabojev pred in po premiku**:

$$\boxed{A(T_1 \to T_2) = W(T_1) - W(T_2)} \qquad \textbf{(8.6)}$$

[*] Za postavitev naboja Q_1 na določeno mesto ne potrebujemo nobenega dela, saj imamo predhodno sistem brez nabojev in torej brez polja. V nadaljevanju pa seveda vsi nadaljnji naboji prispevajo k polju – delu.

SLIKA 8.9: DELO JE ENAKO RAZLIKI POTENCIALNIH ENERGIJ SISTEMA PRED PREMIKOM IN PO PREMIKU.

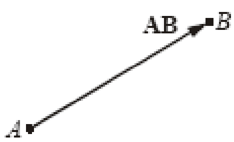
Vprašanja za obnovo:

1. **Zapišite enačbo za izračun dela po poljubni poti in razložite pomen skalarnega produkta.**
2. **Kako izračunamo delo električnih sil?**
3. **Kaj pomeni pozitivno delo in kaj negativno delo električnih sil?**
4. **Koliko je integral polja po zaključni poti?**
5. **Kakšna je povezava med delom električnih sil in električno potencialno energijo?**
6. **Kako izračunamo potencialno energijo sistema nabojev?**

Primer iz kolokvija 6.12.204

5. Koliko dela opravi homogeno električno polje jakosti $\mathbf{E} = (-20, 10, 30)$ kV/m pri premiku točkaste elektrine množine $Q = 1\ \mu\mathrm{C}$ od točke $A(10\ \mathrm{cm}, 10\ \mathrm{cm}, 40\ \mathrm{cm})$ do točke $B(0\ \mathrm{cm}, 30\ \mathrm{cm}, 50\ \mathrm{cm})$?

5. Delo W, ki ga opravi polje pri premiku točkaste elektrine množine $Q = 1\ \mu\mathrm{C}$ od točke A do točke B je sorazmerno napetosti U_{AB} med tema točkama: $W = QU_{AB}$. Ta napetost je enaka krivuljnemu integralu vektorja električne poljske jakosti po neki krivulji med tema točkama. Ker je polje homogeno, je vektor $\vec{E}$ konstanta v tem integralu in ga zato lahko izpostavimo pred integral:



$$U_{AB} = \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \mathbf{E} \cdot \int_A^B d\mathbf{l} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{AB} = (-20, 10, 30)\ \mathrm{kV/m} \cdot (0-10, 30-10, 50-40)\ \mathrm{cm} = \boxed{7000\ \mathrm{V}}$$

$$W = 10^{-6} \cdot 7 \cdot 10^3\ \mathrm{J} = \boxed{7\ \mathrm{mJ}}$$

9. Potencial in napetost

Vsebina poglavja: Električni potencial - definicija, potencial v okolici točkastega naboja, potencial sistema točkastih nabojev, potencial v okolici zvezno porazdeljenih nabojev, ekvipotencialne ploskve, električna napetost, Kirchoffov zakon.

ELEKTRIČNI POTENCIAL

Ugotovili smo že, da je električna potencialna energija naboja *Q* na mestu *T* enaka delu pri prenosu tega naboja od točke *T* v neskončnost oziroma do mesta, kjer je energija enaka nič:

$$W(T) = Q\int_T^{\infty} \vec{E}\cdot d\vec{l} = Q\int_T^{T(V=0)} \vec{E}\cdot d\vec{l}\ . \tag{9.1}$$

Normirano potencialno energijo imenujemo električni potencial

$$\boxed{V(T) = \frac{W(T)}{Q} = \int_T^{T(V=0)} \vec{E}\cdot d\vec{l}} \tag{9.2}$$

Enota za potencial je J/C = V.

Številčno je torej električni potencial enak delu polja električnih sil za premik enote naboja (1 C) od točke *T* do neskončnosti.

Ali obratno: Če poznamo potencial v določeni točki, bo energija potrebna za prenos naboja v polju električnih sil iz neskončnosti do te točke enaka produktu naboja in potenciala: $W(T) = QV(T)$ ali tudi, če se na mestu *T* nahaja naboj *Q* (ali pa ga na to mesto postavimo) in ga sila polja premakne do mesta, kjer je polje enako nič, pridobi energijo $W(T) = QV(T)$.

SLIKA 9.1: POTENCIAL KOT DELO ZA PRENOS NABOJA IZ TOČKE *T* V NESKONČNOST.

POTENCIAL V OKOLICI TOČKASTEGA NABOJA *Q*

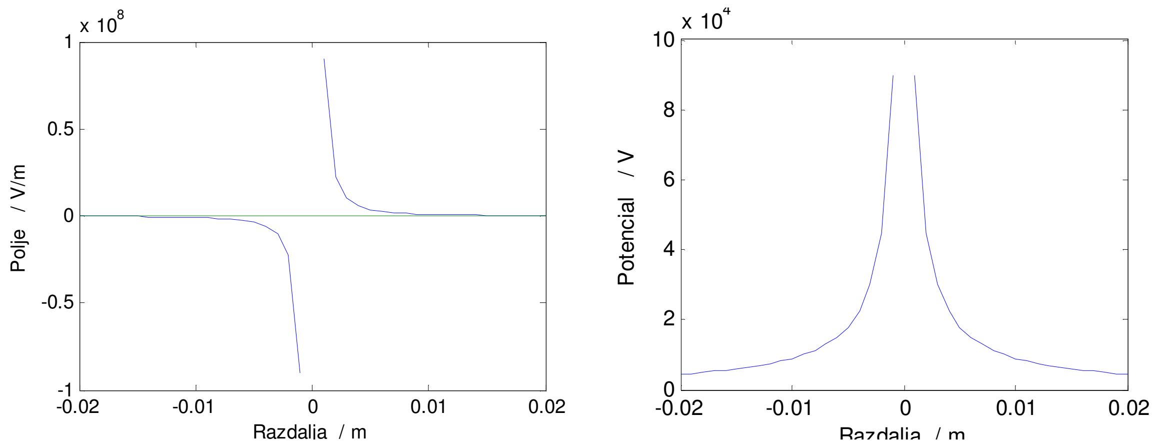
Z upoštevanjem definicije za potencial kot normirane potencialne energije, zapišemo (na določeno oddaljenost r od naboja Q postavimo testni naboj Q_t in določimo delo, pri prenosu tega naboja od r do neskončnosti):

$$V(r) = \frac{W(r)}{Q_t} = \frac{1}{Q_t}\int_r^{\infty} Q_t \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r \cdot \vec{e}_r \mathrm{d}r = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} \tag{9.3}$$

SLIKA 9.2: POTENCIAL V OKOLICI TOČKASTEGA NABOJA.

Ponovimo ta pomemben rezultat: **potencial točkastega naboja se z oddaljenostjo manjša z 1/*r* in je enak**

$$\boxed{V(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}} \tag{9.4}$$



SLIKA: PORAZDELITEV POLJA (LEVO) IN POTENCIALA (DESNO) V OKOLICI TOČKASTEGA NABOJA. POLJE UPADA $1/R^2$, POTENCIAL PA Z 1/R.

```
% IZRIS POLJA IN POTENCIALA TOČKASTEGA NABOJA Z MATLABOM
Q=1e-8;
e0=8.854e-12;
r=-2e-2:1e-3:2e-2;

V=Q./(4*pi*e0.*abs(r));
E=sign(r)*Q./(4*pi*e0.*r.^2); % funkcija sign() poskrbi za pravilen predznak polja
plot(r,V); xlabel('Razdalja  / m'); ylabel('Potencial   / V');
figure;
zero=zeros(length(r),1); % vektor ničel potrebujemo za izris linije ničle polja
plot(r,E,r,zero); xlabel('Razdalja  / m'); ylabel('Polje   / V/m');
```

Primer: Določimo potencial v okolici točkastega naboja Q = 10 nC pri r = 1 cm.

Izračun: Velja $V(r=1\,\mathrm{cm})=\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}=9\cdot10^9\dfrac{\mathrm{V\cdot m}}{\mathrm{A\cdot s}}\dfrac{10\cdot10^{-9}\,\mathrm{C}}{10^{-2}\,\mathrm{m}}=\underline{\underline{9\,\mathrm{kV}}}$.

(To tudi pomeni, da bi bila energija potrebna za premik naboja 1 C iz neskončnosti do razdalje 1 cm od naboja 10 nC enaka 9 kV · 1 As = 9 kJ, energija za prenos naboja 2 nC pa $W=2\,\mathrm{nC}\cdot9\,\mathrm{kV}=18\,\mu\mathrm{J}$.)

Potencial sistema točkastih nabojev

Ugotovili smo, da je potencial v okolici enega točkastega naboja enak $V=\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$, kjer je r razdalja od točke, kjer iščemo potencial, do točke, kjer se nahaja naboj Q. Ker velja superpozicija polja, lahko tudi potencial določimo kot superpozicijo posameznih delnih prispevkov normirane energije. Za sistem točkastih nabojev bo torej potencial v točki T enak

$$V(T)=\frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_1}+\frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_2}+\ldots=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{N}\frac{Q_i}{r_i}, \qquad (9.5)$$

kjer so r_1, r_2 itd razdalje od naboja Q_1, Q_2, itd do točke T, kjer računamo potencial.

SLIKA 9.3: IZRAČUN POTENCIALA SISTEMA TOČKASTIH NABOJEV.

Primer: Določimo potencial v sredini med dvema točkastima nabojema Q = 10 nC oddaljenima za 2 cm.

Izračun: $V=\dfrac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_1}+\dfrac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_2}=2\cdot\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 1\mathrm{cm}}=2\cdot9.10^{-9}\dfrac{\mathrm{V\cdot m}}{\mathrm{A\cdot s}}\cdot10\cdot10^{9}\,\mathrm{C}\cdot100\,\mathrm{m}^{-1}=\underline{\underline{18\,\mathrm{kV}}}$.

* POTENCIAL V OKOLICI SISTEMA ZVEZNO PORAZDELJENIH NABOJEV.

Za porazdelitev točkastih nabojev smo ugotovili, da lahko potencial določimo kot vsoto $V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{N}\frac{Q_i}{r_i}$.

Če je porazdelitev naboja zvezna moramo vzeti en mali del celotnega naboja in z limitiranjem vsote delnih prispevkov dobimo

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\lim_{\Delta Q\to 0}\sum_{i=1}^{N}\frac{\Delta Q_i}{r_i} = \int\limits_{\substack{\text{po vseh}\\ \text{Q-jih}}}\frac{\mathrm{d}Q}{4\pi\varepsilon_0 r} \text{ oziroma } \boxed{\mathrm{d}V = \frac{\mathrm{d}Q}{4\pi\varepsilon_0 r}}.$$

r je razdalja od mesta, kjer se nahaja dQ do točke kjer iščemo potencial. Odvisno od načina porazdelitve naboja (po površini, volumnu, liniji) določimo potencial kot

$$V = \int_V \frac{\rho \mathrm{d}V}{4\pi\varepsilon_0 r} \qquad (9.6)$$

$$V = \int_A \frac{\sigma \mathrm{d}A}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

$$V = \int_L \frac{q \mathrm{d}l}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

SLIKA 9.4: IZRAČUN POTENCIALA PORAZDELJENEGA NABOJA S SEŠTEVANJEM (INTEGRACIJO) DELNIH PRISPEVKOV D*V*. NA SLIKI JE NARISAN DIFERENCIAL NABOJA, TOČKA *T* KJER RAČUNAMO INTEGRAL IN RAZDALJA *R* OD D*Q* DO TOČKE *T*.

Primer: Izračunajmo potencial vzdolž *Z* osi za enakomerno naelektren tanek obroč polmera *a* z nabojem *Q*, ki leži v ravnini z = 0.

Ker je naboj porazdeljen enakomerno po obroču lahko uporabimo enačbo $V = \int_L \frac{q\mathrm{d}l}{4\pi\varepsilon_0 r}$, ki jo zapišemo v obliki $V = \int_0^{2\pi}\frac{qa\mathrm{d}\varphi}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{a^2+z^2}} = \frac{\frac{Q}{2\pi a}a2\pi}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{a^2+z^2}} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{a^2+z^2}}$.

Ugotovimo lahko, da je način računanja potenciala podobno računanju električne poljske jakosti, le da je običajno nekoliko bolj preprosto. Predvsem zato, ker je potencial skalarna veličina, polje pa vektorska. Pogosto zato električno polje določimo posredno, tako, da najprej izračunamo potencial, nato pa iz potenciala še električno poljsko jakost. Kako, bomo spoznali v nadaljevanju.

POTENCIALNO POLJE JE SKALARNO POLJE

Potencial lahko določimo v vsaki točki prostora neodvisno od porazdelitve nabojev, enako, kot je veljalo za električno poljsko jakost. Je pa za razliko od električnega polja, ki je vektorsko polje, potencial skalarna veličina in tvori **skalarno polje**.

EKVIPOTENCIALNE PLOSKVE

Če povežemo točke z enako velikostjo potenciala dobimo ploskev, ki jo imenujemo ekvipotencialna ravnina ali bolje ekvipotencialna ploskev. V primeru osamljenega točkastega naboja so ekvipotencialne ploskve krožnice, oz. v 3D površine krogle. Običajno jih rišemo tako, da je razlika potencialov med vsako naslednjo ploskvijo konstantna.

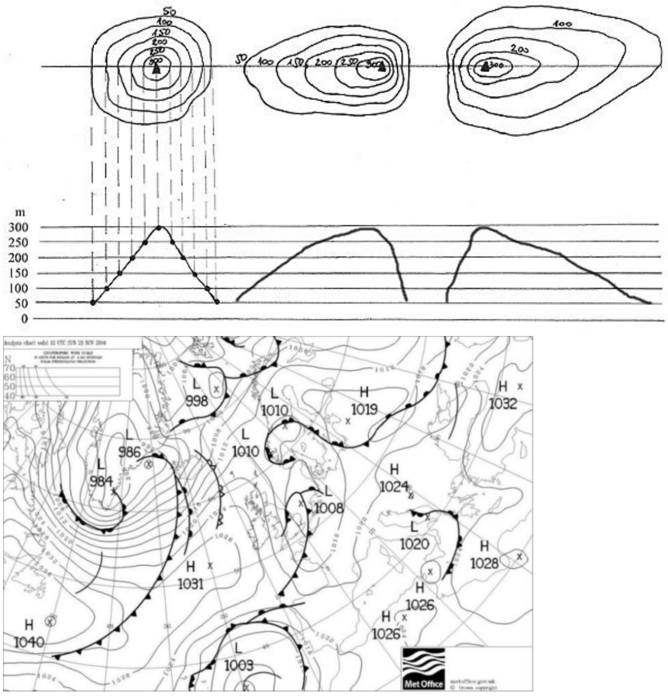
Primer: Določimo ekvipotencialne ploskve v okolici točkastega naboja Q = 10 nC.

Ugotovili smo že, da velja za potencial v okolici točkastega naboja enačba $V(r) = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$. Ugotovili smo tudi, da je ta potencial na razdalji 1 cm enak $V(r = 1\,\mathrm{cm}) = 9\,\mathrm{kV}$. Potencial 9 kV je torej enak v vseh točkah, ki so od točkastega naboja oddaljeni za 1 cm, kar prikažemo z lupino krogle (v 2D z krožnico) polmera 1 cm. Kje pa se nahajajo ekcipotencialne ploskve s potenciali 8 kV, 7 kV itd.? Preprosto: enačba, ki jo je potebno rešiti za ekvipotencialno ploskev s potencialom 8 kV bo

$$8\,\mathrm{kV} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r_{8\mathrm{kV}}} \Rightarrow r_{8\mathrm{kV}} = Q/\left(8\,\mathrm{kV}\cdot 4\pi\varepsilon_0\right) = \frac{9\cdot 10^9\cdot 10\cdot 10^{-9}}{8\cdot 10^3}\,\mathrm{m} = 0{,}01125\ \mathrm{m} = 1{,}125\ \mathrm{cm}.$$

Naslednja ekvipotencialka bo pri $r_{7\mathrm{kV}} = \dfrac{8}{7}\ 1{,}125\ \mathrm{cm} = 1{,}285\ \mathrm{cm}$ itd. V splošnem nas zanimajo ekvipotencialne ploskve, katerih potenciali se razlikujejo za konstantno razliko napetosti, v našem primeru za 1 kV). Za ekvipotencialne ploskve v okolici točkastega naboja lahko ugotovimo, da se vrstijo v geometrijskem zaporedju.

SLIKA 9.5: PRIKAZ EKVIPOTENCIALNIH PLOSKEV ZA TOČKASTI NABOJ.



SLIKA 9.6: GRAFIČNO NA VEČ NAČINOV LAHKO PRIKAZUJEMO EKVIPOTENCIALNE PLOSKVE. NA PODOBEN NAČIN SO DOLOČENE IZOHIPSE, KOT TOČKE Z ENAKO VIŠINSKO RAZLIKO. NA SLIKI LEVO JE RAZVIDEN PROFIL RAZLIČNIH VZPETIN IN USTREZNE IZOHIPSE. VIR: HTTP://WWW.O-4OS.CE.EDUS.SI/GRADIVA/GEO/ZEMLJEVID/VSE.HTM. PODOBNO LAHKO PRI RAZLAGI VREMENA UPORABLJAMO IZOBARE (ČRTE Z ENAKIM PRITISKOM), LAHKO TUDI DRUGE VELIČINE, POMEMBNE ZA RAZLAGO VREMENA: TEMPERATURA, HITROST DVIGANJA VETRA. VIR: HTTP://WWW.PRO-VREME.NET/INDEX.PHP?ID=107.

ELEKTRIČNA NAPETOST

Ugotovili smo že, da lahko delo potrebno za premik naboja med dvema točkama določimo iz razlike potencialne energije sistema nabojev pred in po premiku. Če to delo opravi testni naboj 1 C govorimo o električni napetosti med dvema točkama. **Električna napetost je torej številsko enaka delu polja električnih sil potrebnem za prenos enote naboja iz točke T_1 do točke T_2**:

$$U_{12} = \frac{A_{Q_t}(T_1 \to T_2)}{Q_t} = \frac{W(T_1) - W(T_2)}{Q_t} = \frac{Q_t \int_{T_1}^{T_2} \vec{E} \cdot d\vec{l}}{Q_t} = \int_{T_1}^{T_2} \vec{E} \cdot d\vec{l}. \qquad \textbf{(9.7)}$$

Ugotovimo lahko, da lahko **električno napetost določimo tudi kot razliko potencialov**:

$$U_{12} = V(T_1) - V(T_2) = \int_{T_1}^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{l} - \int_{T_2}^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{T_1}^{T_2} \vec{E} \cdot d\vec{l}. \qquad \text{ELEKTRIČNA NAPETOST (9.8)}$$

DRUGI KIRCHOFFOV ZAKON

Ugotovili smo, da električno napetost med dvema točkama določimo z integracijo električne poljske jakosti po poljubni poti od ene do druge točke. Obenem smo ugotovili, da je ta integral enak nič, če je pot zaključena sama vase. Torej bi lahko pisali:

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{T_1}^{T_1} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{T_1}^{T_2} \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_{T_2}^{T_3} \vec{E} \cdot d\vec{l} + \cdots + \int_{T_{N-1}}^{T_1} \vec{E} \cdot d\vec{l} = U_1 + U_2 + \cdots + U_N = 0$$

Ali z besedami, vsota vseh napetosti po zaključeni poti (zanki) je enaka nič, kar imenujemo 2. Kirchoffov zakon:

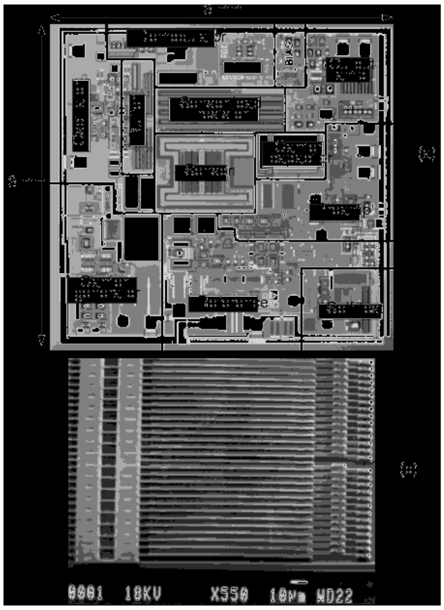
$$\boxed{\sum_{i=1}^{N} U_i = 0} \qquad (9.9)$$

OSNOVNI PRIMERI IZRAČUNA NAPETOSTI, POLJA IN POTENCIALA ZA: PLOŠČATI, VALJNI IN SFERIČNI KONDENZATOR

DVE RAVNI VZPOREDNI NAELEKTRENI PLOŠČI: PLOŠČNI KONDENZATOR

Ravni vzporedni plošči površine A = 5·8 cm^2 sta oddaljeni za d = 10 cm in imata naboj $\pm Q = \pm 20\ \mathrm{nC}$. Določimo polje, potencial in napetost med ploščama, pri čemer predpostavimo homogenost polja med ploščama (polje neskončnih naelektrenih ravnin).

SLIKA 9.7: A) DVE RAVNI NASPROTNO NAELEKTRENI PLOŠČI POSTAVLJENI V KOORDINATNI SISTEM Z NORMALO V SMERI OSI X. B) NAPETOST IN POLJE MED DVEMA RAVNIMA (NASPROTNO) NAELEKTRENIMA PLOŠČAMA.



Mikroelektronska industrija uporablja tehnologijo mikromehanske obdelave (MEMS) za realizacijo mikronskih struktur. Na sliki integracija merilnika pospeškov, z elektroniko. Merilnik pospeškov je v osnovi sestavljen iz niza ploščnih kondenzatorjev. Ene stranice so fiksno vpete, druge pa se lahko premikajo. Z merjenjem spremembe kapacitivnosti lahko določimo hitrost spremembe – pospešek. http://www.aero.org/publications/helvajian/

Plošči postavimo v koordinatni sistem, recimo tako, da je normala na površino v smeri X osi in da ima leva elektroda pozitivni naboj. Ob predpostavki enakomerne porazdelitve naboja, je $\sigma = \frac{Q}{A}$. Dobimo

$$\sigma = \frac{20\ \mathrm{nC}}{40\ \mathrm{cm}^2} = 5\ \mu\mathrm{m/m}^2 .$$

Električno polje med ploščama je superpozicija polj dveh plošč in je enako* $\vec{E}=\vec{e}_x\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\cdot 2=\vec{e}_x\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$.

Napetost med ploščama dobimo z integracijo polja med ploščama:

$$\boxed{U=\int_{T_1}^{T_2}\vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=\int_0^d \vec{e}_x\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\cdot\vec{e}_x \mathrm{d}x=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}d}$$

<u>Izračun</u>: $U=\dfrac{5\cdot 10^{-6}\,\mathrm{A\cdot s/m^2}}{8{,}854\cdot 10^{-12}\,\dfrac{\mathrm{A\cdot s}}{\mathrm{V\cdot m}}}\cdot 0{,}1\mathrm{m}=\underline{\underline{56{,}5\ \mathrm{kV}}}$.

- Iz primera ugotovimo, da je električna poljska jakost med ploščama konstantna in enaka $E=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$. Takemu polju rečemo tudi **homogeno polje**.
- Če v enačbi za napetost med ploščama zamenjamo $\frac{\sigma}{\varepsilon_0}=E$, dobimo $\boxed{U=Ed}$ oziroma $\boxed{E=\frac{U}{d}}$. To sta enačbi, ki ju poznamo že iz srednješolske fizike. Ugotovimo lahko, da sta enačbi ustrezni za izračun polja ali napetosti, vendar le v tem konkretnem primeru, torej, za polje oz. napetost med dvema ravnima enakomerno naelektrenima ploščama. To seveda ne zmanjšuje pomembnosti izraza, pač pa velja le kot opozorilo, da se ga ne bi uporabljalo nekritično. Če polje med dvema točkama ni homogeno, je potrebno napetost med točkama izračunati s pomočjo integrala električne poljske jakosti po poti. To bomo prikazali z naslednjim primerom (koaksialni kabel).

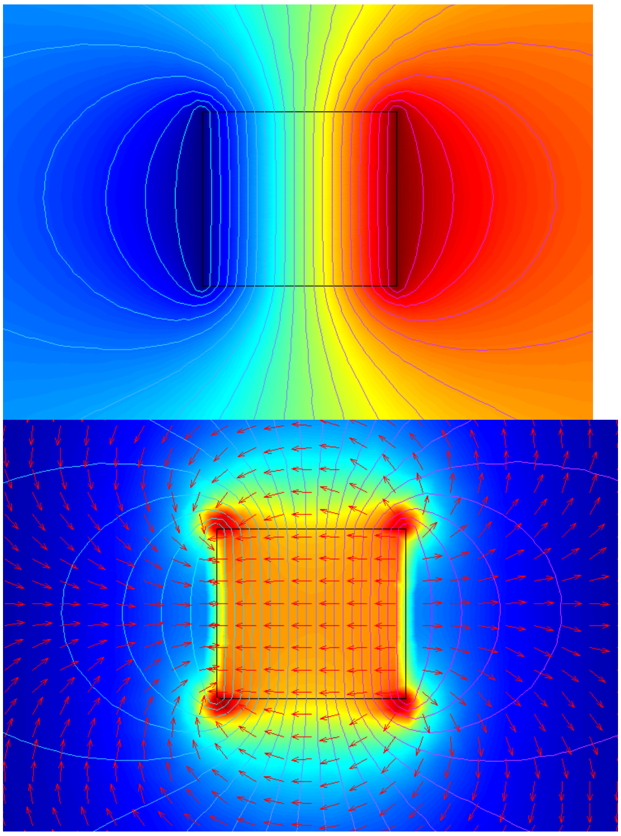
Določimo še potencial med ploščama ploščnega kondenzatorja: če ozemljimo desno elektrodo (elektrodo, ki ima negativni naboj), bo potencial med elektrodama ($V(x=d)=0, V(x=0)=U$):

$$\boxed{V(x)=\int_x^d \vec{e}_x\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\cdot\vec{e}_x dx=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\cdot(d-x)}.$$

Če ozemljimo levo elektrodo, bo potencial med elektrodama:

$$\boxed{V(x)=\int_x^0 \vec{e}_x\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\cdot\vec{e}_x dx=-\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\cdot x}.\ V(x=0)=0, V(x=d)=-U$$

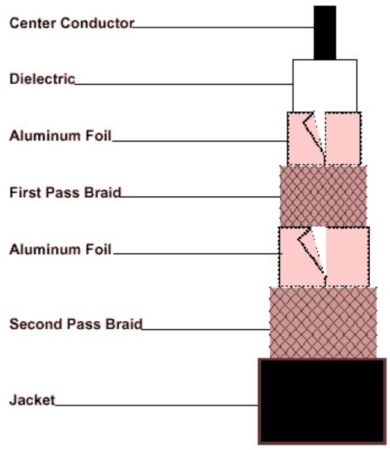
* Tu smo predpostavili polje v okolici dveh naelektrenih ravnin. V resnici sta dve vzporedni plošči omejenih dimenzij, zato velja aproksimalcija le delno, torej predvsem tedaj, ko je površina plošč velika v primerjavi z razdaljo med ploščama.



SLIKA 9.8: LEVO: EKVIPOTENCIALNE PLOSKVE MED IN V OKOLICI DVEH NASPROTNO NAELEKTRENIH RAVNIH PLOŠČ. UGOTOVIMO, DA SO MED PLOŠČAMA EKVIPOTENCIALNE PLOSKVE ENAKOMERNO RAZMAKNJENE, V OKOLICI PA NE (BOLJ GOSTE SO OB ROBOVIH ELEKTROD). DESNO: VEKTORJI ELEKTRIČNE POLJSKE JAKOSTI SKUPAJ Z EKVIPOTENCIALNIMI PLOSKVAMI IN VELIKOSTJO ELEKTRIČNE POLJSKE JAKOSTI (VEČJE POLJE BOLJ RDEČA BARVA). ZA LAŽJE OPAZOVANJE SO VEKTORJI POLJA PRIKAZANI ENAKO VELIKI NEODVISNO OD VELIKOSTI POLJA.

KOAKSIALNI KABEL (VALJNI KONDENZATOR)

Med žilo in oklopom zračnega koaksialnega kabla je napetost 2 kV. Določimo linijsko gostoto naboja na žili in oklopu ter maksimalno električno poljsko jakost, če je polmer žile r_n = 2 mm, r_o = 5 mm, r_z = 7 mm. Oklop in žila sta iz prevodnega materiala.



Koaksialen kabel za visokofrekvenčni prenos signalov. http://www.smarthome.com/851081.ht

SLIKA 9.9

: KOAKSIALNI KABEL S PRIKLJUČITVIJO NAPETOSTI MED OKLOPOM IN ŽILO.

<u>Izračun</u>: Najprej moramo predpostaviti enakomerno porazdelitev naboja na žili in oklopu. Predpostavimo pozitivni naboj na žili (Q) in negativni na oklopu ($-Q$). Električno poljsko jakost med žilo in oklopom določimo s pomočjo Gaussovega zakona. Na neki razdalji r od osi kabla izračunamo pretok el. polja skozi plašč valja (na velikost polja na radiju r vpliva le zaobjeti naboj):in dobimo enačbo, ki je identična enačbi za polje v okolici preme elektrine (naelektrene premice) *:

$$E_r \cdot 2\pi r l = \frac{ql}{\varepsilon_0} \text{ in } E_r = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 r} \text{ oziroma } \boxed{\vec{E} = \vec{e}_r \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 r}}. \qquad (9.10)$$

Ali je površinska gostota naboja enako velika na oklopu in na površini žile? Odgovor je NE. Enako velik je celotni naboj, za gostoto naboja pa velja: $Q(r_n) = \sigma_n 2\pi r_n l = -Q_o = -\sigma_o 2\pi r_o l$, torej bo

$$\sigma_o = -\sigma_n \frac{r_n}{r_o}.$$

V konkretnem primeru bo torej $\sigma_o = -\sigma_n \frac{r_n}{r_o} = -\sigma_n \frac{2\,\text{mm}}{5\,\text{mm}} = -\frac{2}{5}\sigma_n$.

---

* Podobno bi izvajali, če bi izhajali iz enakomerne površinske gostote naboja na površini žile $\sigma(r = r_n) = \sigma_n$:

$E_r \cdot 2\pi r l = \dfrac{\sigma_n A(r_n)}{\varepsilon_0}$ in in $E_r = \dfrac{\sigma_n 2\pi r_n l}{2\pi\varepsilon_0 r l} = \dfrac{\sigma_n r_n}{\varepsilon_0 r}$ oziroma $\vec{E} = \vec{e}_r \dfrac{\sigma_n r_n}{\varepsilon_0 r}$. Enačba je seveda enakovredna prejšnji, saj velja $Q = ql = \sigma_n 2\pi r_n l$, oziroma $q = \sigma_n 2\pi r_n$.

Pogosto nas zanima tudi gostota površinsko porazdeljenega naboja. Iz izpeljanih enačb $E(r_n)=\dfrac{q}{2\pi\varepsilon_0 r_n}=\dfrac{\sigma_n 2\pi r_n}{2\pi\varepsilon_0 r_n}=\dfrac{\sigma_n}{\varepsilon_0}$ oziroma $\sigma_n=\varepsilon_0 E(r_n)$.

Da bi lahko določili *q* ali σ moramo zapisati še izraz za napetost med žilo in oklopom.

Napetost med oklopom in žilo določimo z integracijo polja med kontaktoma:

$$U=\int_0^{r_z}\vec{E}\cdot d\vec{l}=\int_0^{r_n}\vec{E}\cdot d\vec{l}+\int_{r_n}^{r_0}\vec{E}\cdot d\vec{l}+\int_{r_0}^{r_z}\vec{E}\cdot d\vec{l}=0+\int_{r_n}^{r_0}\vec{E}\cdot d\vec{l}+0.$$

Zakaj sta prvi in tretji integral enaka nič? Zato, ker integriramo polje, ki pa je znotraj žile in znotraj (prevodnega oklopa) enako nič! To lahko hitro ugotovimo z razmislekom, da se pozitivni in negativni naboji privlačijo in se zato pozitivni naberejo na površini žile, negativni pa na notranji strani oklopa. Z uporabo Gaussovega zakona na plašču valja z radijem, ki je večji od polmera r_0 bi hitro ugotovili, da je polje znotraj oklopa enako nič, saj je zaobjeti naboj vsota enako velikega pozitivnega in negativnega naboja.

$$\boxed{U=\int_{r_n}^{r_0}\vec{E}\cdot\vec{e}_r\mathrm{d}r=\int_{r_n}^{r_0}\vec{e}_r\frac{q}{2\pi\varepsilon_0 r}\cdot\vec{e}_r\mathrm{d}r=\frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_0}{r_n}} \tag{9.11}$$

Napetost bi lahko določili tudi iz razlike potencialov. Če pripišemo potencialu oklopa potencial nič, torej $V(r_o)=0$, bo

$$U=V(r_n)-V(r_0)=V(r_n)=\int_{r_n}^{r_0}\vec{E}\cdot\vec{e}_r\mathrm{d}r=\frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_0}{r_n}.$$

Potencial v poljubni točki bo torej $V(r)=\int_{r}^{r_0}\vec{E}\cdot\vec{e}_r\mathrm{d}r=\dfrac{q}{2\pi\varepsilon_0}\ln\dfrac{r_0}{r}$. Znotraj žile ni polja (kar lahko pokažemo z Gaussovim stavkom), potencial je torej v notranjosti žile enak kot na površini. Podobno lahko pokažemo tudi za oklop.

In še izračun linijske gostote naboja (iz enačbe za napetost):

$$q=U\frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln\frac{r_0}{r_n}}=2\cdot10^3\,\mathrm{V}\cdot\frac{2\pi 8{,}854\cdot10^{-12}\,\frac{\mathrm{A\cdot s}}{\mathrm{V\cdot m}}}{\ln\frac{5\ \mathrm{mm}}{2\ \mathrm{mm}}}=\underline{\underline{0{,}121\ \mu\mathrm{C/m}}}.$$

Električno polje je maksimalno pri najmanjšem radiju, torej pri r_n:

$$\vec{E}_{\max}=\vec{e}_r\frac{q}{2\pi\varepsilon_0 r_n}=\vec{e}_r\frac{U}{r_n\ln\frac{r_0}{r_n}}\qquad E_{\max}=\frac{2\cdot10^3\ \mathrm{V}}{2\cdot10^{-3}\,\mathrm{m}\cdot\ln\frac{5}{2}}=\underline{\underline{1{,}09\,\mathrm{MV/m}}}$$

Ponovimo pomembne rezultate iz tega primera:

napetost med žilo in plaščem koaksialnega kabla je

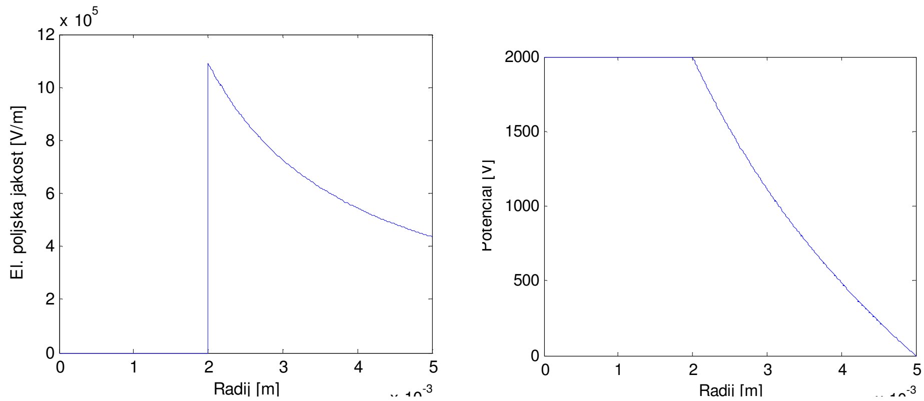
$$U = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_0}{r_n},$$

električno polje pa $\vec{E} = \vec{e}_r \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 r}$ **ali** $\vec{E} = \vec{e}_r \frac{\sigma_n r_n}{\varepsilon_0 r}$

oziroma izraženo z napetostjo $\vec{E} = \vec{e}_r \frac{U}{r \cdot \ln\frac{r_0}{r_n}}$.

Površinska gostota naboja pri r_n je $\sigma_n = \varepsilon_0 E(r_n)$.

Izris poteka potenciala in polja znotraj koaksialnega kabla.

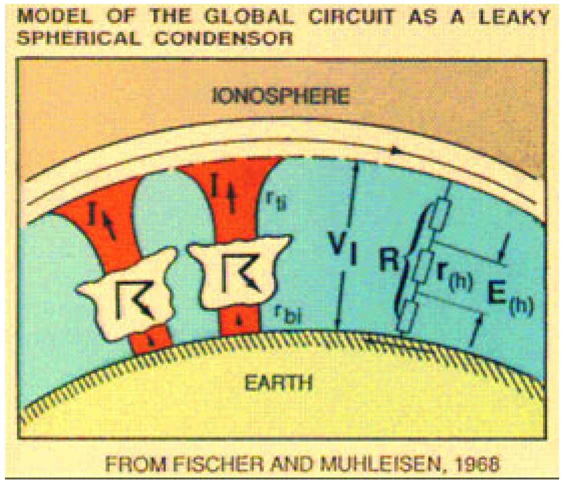


SLIKA 9.10: ELEKTRIČNA POLJSKA JAKOST IN POTENCIAL ZNOTRAJ KOAKSIALNEGA KABLA.

```
% PRIMER IZRISA POLJA IN POTENCIALA KOAKSIALNEGA KABLA S PROGRAMOM MATLAB
e0=8.854e-12;
U=2000; rn=2e-3; ro=5e-3;
q=U*2*pi*e0/(log(ro/rn));
R=0:1e-5:ro;
E=zeros(length(R),1);V=E;
E=q/(2*pi*e0)./R;
V=q/(2*pi*e0)*log(ro./R);
for i=1:1:length(R)
   if R(i)<rn
      V(i)=U;
      E(i)=0;
   end
end
plot(R,V); xlabel(' Radij [m]'); ylabel(' Potencial [V]');
figure; plot(R,E); xlabel(' Radij [m]'); ylabel(' El. poljska jakost [V/m]');
break
```

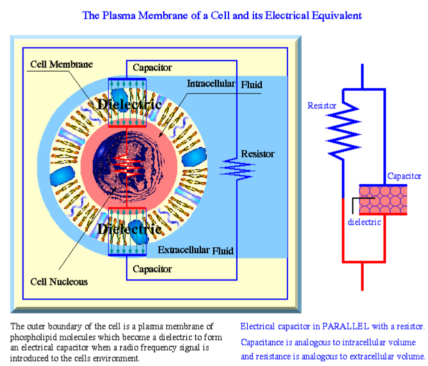
Krogelni (sferični) kondenzator

Obravnavamo dve lupini krogle z enakomerno in nasprotno naelektreno gostoto naboja. Primer krogelnega kondenzatorja je zemlja z zračno atmosfero, ki ločuje površino zemlje od ionosfere. Drug pomemben primer je biološka celica, ki ima slabo prevodno tanko membrano. Primer je tudi krogla Van de Graffovega generatorja z drugo elektrodo v neskončnosti.



Zemlja kot sferični kondenzator. Med zemljo in ionosfero je visoka napetost, kar vpliva na električne pojave

<u>Primer:</u> Na površini zemlje izmerimo električno poljsko jakost 150 V/m, ki je usmerjena v smeri središča zemlje. Določimo napetost med zemljo in ionosfero, ki je od površine zemlje oddaljena približno[*] 40 km. Določimo še površinsko gostoto naboja. Polmer zemlje je r_n = 6370 km, ionosfere pa r_i = 6410 km. Predpostavimo zemljo in ionosfero kot sferični kondenzator.



Slika 9.11: Področje med površino zemlje in ionosfero predstavimo kot velik krogelni kondenzator. Ker je polje na površini usmerjeno v smeri središča zemlje pomeni, da je zemlja naelektrena negativno glede na ionosfero.

Biološko celico lahko obravnavamo v električnem smislu kot sferični kondenzator. Celična membrana je izredno tanka, nekaj nm, in slabo prevodna, medtem, ko je notranjost mnogo bolj prevodna.

Zemljo in ionosfero predstavimo kot sferični kondenzator. Znano je, da je na površini zemlje presežek negativnega naboja, v ionosferi pa pozitivnega. Električno polje kaže v smeri centra zemlje in je (lahko z uporabo Gaussovega zakona) enako (Q je negativen)

[*] Pri izračunu smo predpostavili, da je zemlja oblike krogle. Ionosfera je del atmosfere zemlje, ki je ioniziran zaradi učinkov radiacije sonca in kozmičnih visokoenergijskih delcev. Energija, ki jo sonce oddaja v določenem spektru je tako velika, da lahko razbije molekule in jih ionizira.Več o tem: http://en.wikipedia.org/wiki/Ionosphere.

$\vec{E} = \vec{e}_r \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$. Napetost med ionosfero in zemljo je

$$U = \int_{r_i}^{r_n} \vec{E} \cdot \vec{e}_r dr = \int_{r_i}^{r_n} \vec{e}_r \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \cdot \vec{e}_r dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{r}\right)\Bigg|_{r_i}^{r_n} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_n}\right).$$

$\vec{E}(r = r_n) = \vec{e}_r \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r_n^2} = \vec{e}_r \dfrac{U}{r_n^2}\left(\dfrac{1}{r_i} - \dfrac{1}{r_n}\right)^{-1} = -\vec{e}_r\, 150\,\mathrm{V/m}$. Sledi

$$U = -150\,\mathrm{V/m} \cdot r_n^2 \cdot \left(\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_n}\right) = -150\,\mathrm{V/m} \cdot \left(6370 \cdot 10^3\,\mathrm{m}\right)^2 \left(\frac{1}{6410} - \frac{1}{6370}\right) 10^{-3}\,\mathrm{m}^{-1} \approx 6\ \mathrm{MV}.$$

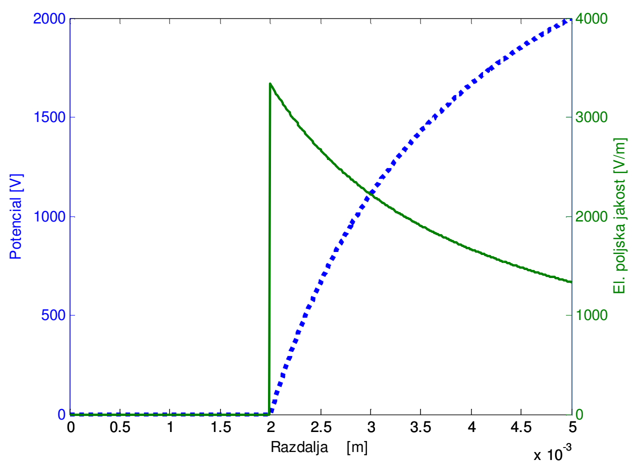
Če predpostavimo potencial zemlje enak nič $V(r_n) = 0$, dobimo za potencial

$$V(r) = \int_{r}^{r_n} \vec{E} \cdot \vec{e}_r dr = \int_{r}^{r_n} \vec{e}_r \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \cdot \vec{e}_r dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{r}\right)\Bigg|_{r}^{r_n} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_n}\right).$$

Gostota naboja na površini zemlje je $Q = E(r_n) \cdot 4\pi\varepsilon_0 r_n^2$,

$$\sigma(r_n) = \frac{Q}{A} = \frac{Q}{4\pi r_n^2} = \frac{E(r_n) \cdot 4\pi\varepsilon_0 r_n^2}{4\pi r_n^2} = E(r_n) \cdot \varepsilon_0.$$

In še rezultat: $\sigma = -150\ \mathrm{V/m} \cdot \varepsilon_0 = -1{,}33\ \mathrm{nC/m^2}$.



SLIKA 9.12: PRIKAZ PORAZDELITVE POTENCIALA IN ABSOLUTNE VREDNOSTI POLJA V SFERIČNEM KONDENZATORJU. (RAZDALJE IN NAPETOSTI SO ZA PRIMERJAVO VZETE IZ PRIMERA CILINDRIČNEGA KONDENZATORJA)

```
% PRIMER IZRISA POLJA IN POTENCIALA KOAKSIALNEGA KABLA S PROGRAMOM MATLAB
e0=8.854e-12;
U=2000; rn=2e-3; rz=5e-3;
Q=U*4*pi*e0/(1/rz-1/rn);
R=0:1e-5:rz;
E=zeros(length(R),1); V=E;
E=abs(Q./(4*pi*e0.*R));
V=Q/(4*pi*e0).*(1./R-1/rn);
for i=1:1:length(R)
  if R(i)<rn
    V(i)=0;
    E(i)=0;
  end
end
[ax ax1 ax2]=plotyy(R,V,R,E,'plot');
axes(ax(1)); ylabel(' Potencial [V]'); xlabel('Razdalja   [m]')
axes(ax(2)); ylabel(' El. poljska jakost [V/m]');
set(ax1,'LineStyle',':')
set(ax1,'Linewidth',3)
set(ax2,'Linewidth',2)
```

Pomembni rezultati za sferični kondenzator:

V splošnem imamo sferični kondenzator z notranjim polmerom r_n in zunanjim polmerom $r_i = r_z$:

Polje v sferičnem kondenzatorju je enako $\boxed{\vec{E} = \vec{e}_r \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}}$, **napetost pa** $\boxed{U = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{r_n} - \dfrac{1}{r_z}\right)}$ **oziroma** $\boxed{U = E(r_n)\cdot r_n^2 \cdot \left(\dfrac{1}{r_n} - \dfrac{1}{r_z}\right)}$. **Površinska gostota naboja pri r = r_n je** $\boxed{\sigma(r_n) = E(r_n)\cdot\varepsilon_0}$.

POVZETEK:

1) Električni potencial je enaka normirani potencialni energiji naboja. Ali tudi: električni potencial v točki T je številsko enak delu pri prenosu enote naboja (1 C) od točke T v neskončnost oziroma do mesta, kjer je potencial enaka nič.

$$\boxed{V(T)=\frac{W(T)}{Q}=\int_{T}^{T(V=0)}\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}}.$$

2) Potencial v okolici točkastega naboja se manjša z 1/r: $\boxed{V(r)=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}}$

3) Potencial sistema točkastih nabojev je enak vsoti prispevkov posameznih potencialov:

$\boxed{V(T)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{N}\frac{Q_i}{r_i}}$. r_i je razdalja od točke, kjer računamo potencial do naboja Q_i.

4) Potencial porazdeljenih nabojev določimo z integracijo $V=\int\limits_{\substack{\text{po vseh}\\ \text{Q-jih}}}\frac{\mathrm{d}Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$. r je razdalja od dQ-ja do točke, kjer računamo potencial.

5) Potencial je tako kot električna poljska jakost definiran povsod v prostoru, zato ga lahko prikažemo kot potencialno polje. Za vizualizacijo pogosto uporabljamo prikaz ekvipotencialnih ploskev, ki so ploskve z enako vrednostjo električnega potenciala. Običajno jih rišemo tako, da je razlika potencialov med vsako naslednjo ploskvijo konstantna.

6) Električna napetost je številsko enaka delu polja električnih sil potrebnem za prenos enote naboja iz točke T_1 do točke T_2. $\boxed{U_{12}=\frac{A_{Q_t}(T_1\to T_2)}{Q_t}=\int_{T_1}^{T_2}\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}}$. Napetost je razlika potencialov $\boxed{U_{12}=V(T_1)-V(T_2)}$.

7) Delo po zaključeni poti je enako nič, kar zapišemo tudi kot $\oint_L \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=0$. Iz tega sledi 2. Kirchoffov zakon, da je vsota vseh padcev napetosti po zaključeni poti (zanki) enaka nič: $\boxed{\sum_{i=1}^{N}U_i=0}$.

10. Prevodnik v električnem polju

Vsebina poglavja: prevodnik v zunanjem električnem polju, površina prevodnika je ekvipotencialna ploskev, elektrostatična indukcija (influenca), polje znotraj votline prevodnika, Faradayeva kletka, prevodnik z nabojem v luknji prevodnika, električno polje na površini prevodnika, sila na površinski naboj.

VIDEO 1: STE SI KDAJ ŽELELI DELATI PRI VISOKI NAPETOSTI. NI PROBLEM. OBLEČETE PREVODNO OBLEKO, SE PREVIDNO SPRAVITE NA DALJNOVOD IN OPRAVITE DELO. VEČ: GOOGLE: HIGH VOLTAGE CABLE INSPECTION

Že v prejšnjem poglavju smo ugotovili, da polja znotraj žile koaksialnega kabla ni, niti ga ni znotraj prevodnega oklopa koaksialnega kabla. Ali je to le posledica simetrične porazdelitve naboja in uporabe Gaussovega zakona, ali je to splošna lastnost prevodnikov? Odgovor dobimo z razmislekom o lastnostih prevodnikov: dober prevodnik ima to lastnost, da je tudi v primeru nevtralnosti (brez presežkov naboja) mnogo elektronov, ki so zelo šibko vezani na jedro, kar pomeni, da jih že najmanjše zunanje polje lahko premakne iz ravnovesne lege.

PREVODNIK V ZUNANJEM ELEKTRIČNEM POLJU

Tisti trenutek, ko prevodnik postavimo v zunanje električno polje $\vec{E}_{\mathrm{zunanje}}$, na vse naboje v prevodniku deluje električna sila, v skladu z zvezo $\vec{F} = Q\vec{E}$. Prosti oziroma šibko vezani elektroni se pomaknejo v nasprotni smeri polja (ker so negativnega predznaka) do roba prevodnika.[*] Koliko pa se jih pomakne? Toliko, kolikor »zahteva« zunanje polje, oziroma toliko, da se vzpostavi novo stacionarno stanje, v katerem je znotraj prevodnika polje enako nič. Kaj pa ostane tam, kjer so prej bili elektroni, pa so se zaradi delovanja zunanjega polja odmaknili? Ostane primanjkljaj elektronov, torej presežek števila protonov nad elektroni, kar deluje kot pozitiven naboj.

[*] V resnici elektron ne prepotuje celotne razdalje od enega roba do drugega roba prevodnika pač pa se elektroni le zamaknejo med samo. Povprečna hitrost elektronov v prevodniku je relativno počasna (reda ....) in ji rečemo tudi hitrost drifta, saj med prenosom trkajo z atomi v prevodniku tako, da njihova pot ni premočrtna pač pa se le v povprečju gibljejo v nasprotni smeri polja. Prerazporeditev, ki smo ji priča, ko vstavimo prevodnik v polje pa je skoraj hipna. Več o prevajanju v prevodnikih bomo govorili v poglavju o tokovnem polju (poglavje 24).

Očitno bodo premaknjeni naboji delovali (delujejo) z lastnim električnim poljem $\vec{E}_{\text{nabojev}}$ tako, da bo električno polje v prevodniku $\vec{E}_{\text{v prevodniku}} = \vec{E}_{\substack{\text{zunanjih}\\ \text{nabojev}}} + \vec{E}_{\substack{\text{nabojev}\\ \text{na površini p.}}} = 0$.

$$\boxed{\vec{E}_{\text{v prevodniku}} = 0}. \tag{10.1}$$

SLIKA 10.1: A) V ZUNANJE POLJE VSTAVIMO PREVODNIK. B) PO (HITREM) PREHODNEM POJAVU PRIDE DO PRERAZPOREDITVE NABOJA (PRESEŽKA ELEKTRONOV NA ENI STRANI IN POMANJKANJA NA DRUGI STRANI) TAKO, DA JE POLJE ZNOTRAJ PREVODNIKA ENAKO NIČ.

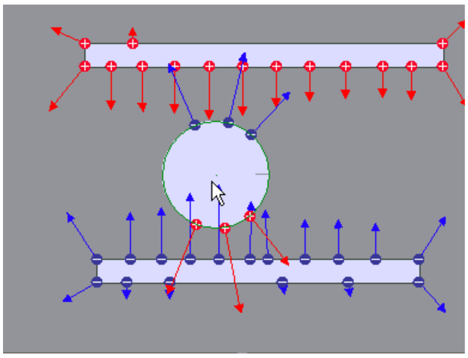
Polje znotraj (pa tudi v okolici) polprevodnika se spremeni ob prerazporeditvi naboja v prevodniku, saj na polje vplivajo tudi prerazporejeni naboji.

Površina prevodnika je ekvipotencialna ploskev

Če je polje znotraj prevodnika enako nič, potem bo tudi napetost med poljubnima dvema točkama znotraj prevodnika enaka nič, saj velja $U_{12} = \int_{T_1}^{T_2} \vec{E} \cdot d\vec{l}$. To pa tudi pomeni, da imajo vse točke v in na površini prevodnika enak potencial. V tem smislu rečemo, da je površina prevodnika ekvipotencialna ploskev.

Elektrostatična indukcija ali influenca

Če deluje polje na nevtralno prevodno telo, pride znotraj tega telesa do prerazporeditve elektronov, ki se premaknejo v smeri polja in pustijo za sabo pomanjkanje elektronov oz. pozitiven naboj. Presežkov pozitivnega naboja je enako veliko kot prerazporejenih elektronov, tako, da je vsota vseh nabojev znotraj telesa še vedno enaka nič. Prerazporeditvi naboja rečemo **elektrostatična indukcija** ali tudi **influenca**.

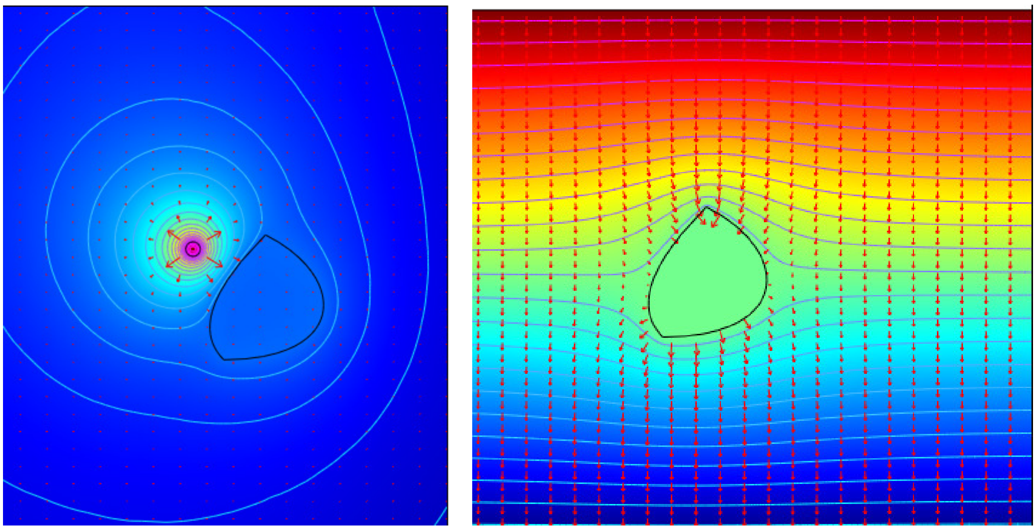


Simulacija elektrostatične indukcije s programom Jacob.

SLIKA 10.2: PROCES PRERAZPOREDITVE NABOJEV ZARADI DELOVANJA ZUNANJEGA POLJA IMENUJEMO ELEKTROSTATIČNA INDUKCIJA.

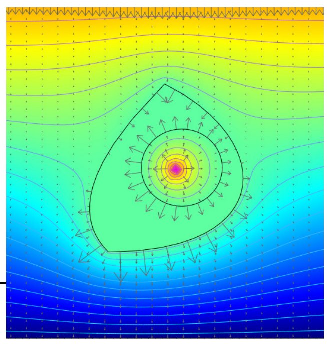
POLJE ZNOTRAJ VOTLINE PREVODNIKA – FARADAYEVA KLETKA

Ali je polje v votlini prevodnika? Če bi to polje obstajalo, potem bi imeli znotraj votline prevodnika ekvipotencialne ploskve in po Gaussovem zakonu bi morali z integracijo polja okoli ekvipotencialne ploskve dobiti množino zaobjetega naboja. Ker pa tega ni, je tudi **polje znotraj votline prevodnika enako nič.** Poleg tega ni polja tudi v notranjosti prevodnika (glej Slika 10.3).



SLIKA 10.3: LEVO PREVODNIK V NEHOMOGENEM ELEKTRIČNEM POLJU, DESNO PREVODNIK V HOMOGENEM ELEKTRIČNEM POLJU. V BARVAH JE PRIKAZANA VELIKOST POTENCIALA, Z LINIJAMI EKVIPOTENCIALNE PLOSKVE IN S PUŠČICAMI ELEKTRIČNO POLJE.

10.4: FARADAYEVA KLETKA JE POPULARNA TUDI PRI PRIKAZOVANJU ELEKTRIČNIH EKSPERIMENTOV. USPEŠNO ŠČITI NOTRANJOST KLETKE PRED ZUNANJIM ELEKTROSTATIČNIM POLJEM PA TUDI DINAMIČNEM (ELEKTROMAGNETNIM), ČE JE LE VALOVNA DOLŽINA ELEKTROMAGNETNEGA POLJA VEČJA ŠIRINE ODPRTIN. NE MORE PA FARADAYEVA KLETKA ŠČITITI PRED MAGNETOSTATIČNIM POLJEM ALI MAGNETNIM POLJEM NIZKIH FREKVENC. VEČ O TEM V DRUGEM SEMESTRU. VEČ: HTTP://TESLADOWNUNDER.COM/



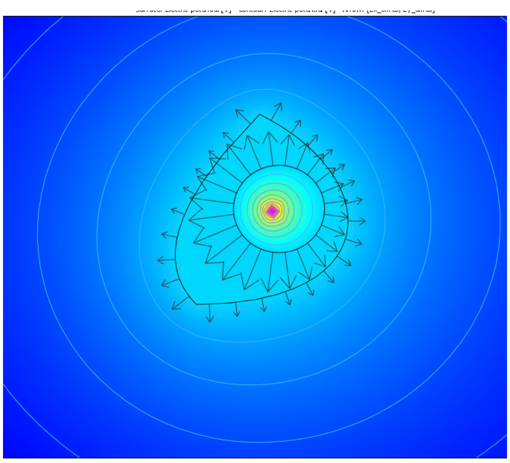
Kaj pa, če je poleg zunanjega polja naboj tudi v votlini prevodnika? Ali je tudi v tem primeru polje v notranjosti prevodnika enako nič?

Odgovor je da, saj če bi se v notranjosti prevodnika nahajal naboj in polje, bi naboje premaknilo v smeri, ki jo diktira zunanje polje, npr. v smeri naboja v votlini prevodnika. Če zapišemo Gaussov stavek po prevodniku v okolici votline, hitro ugotovimo, da mora biti na notranji površini prevodnika (ob votlini) enaka množina naboja kot v votlini. Prav tako mora biti enaka množina naboja tudi na zunanji površini prevodnika, saj je prevodnik nevtralen. Ni pa nujno, da je na zunanji površini le naboj nasprotnega predznaka, saj je potrebno upoštevati še zunanje polje.

SLIKA 10.5: LEVO: PREVODNIK V HOMOGENEM POLJU Z LUKNJO V KATERI SE NAHAJA NABOJ. V BARVAH JE PRIKAZANA VELIKOST POTENCIALA, Z LINIJAMI EKVIPOTENCIALNE PLOSKVE IN S PUŠČICAMI ELEKTRIČNO POLJE. DESNO: PORAZDELITEV NABOJA PO POVRŠINI PREVODNIKA Z LUKNJO V PRIMERU, KO SE V LUKNJI NAHAJA NABOJ.

NABOJ V VOTLINI PREVODNIKA

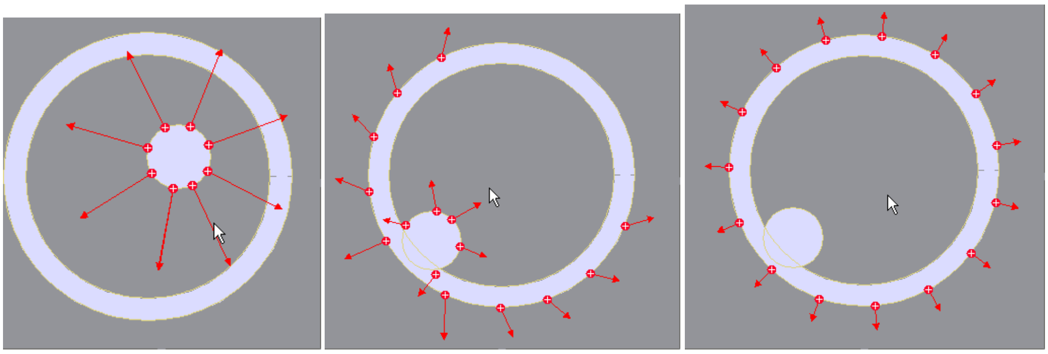
V tem primeru bo tudi prišlo do elektrostatične indukcije. Na notranji površini se bo induciral naboj nasprotnega predznaka kot je v luknji, na zunanji površini se pa v smislu indukcije nakopiči naboj enakega predznaka kot je v luknji. Kaj pa polje v zunanjosti prevodnika? Vpliv polja naboja v luknji in naboja na notranji površini prevodnika se izničita, ostane le polje na zunanji površini prevodnika, ki je enakega predznaka in velikosti kot naboj v luknji. Ta bo povzročil polje v okolici. Če je prevodnik sferične oblike, bo polje v zunanjosti enako polju, ki bi ga povzročal točkasti naboj v središču sfere.



SLIKA 10.6: LEVO: PREVODNIK Z LUKNJO V KATERI SE NAHAJA NABOJ. V BARVAH JE PRIKAZANA VELIKOST POTENCIALA, Z LINIJAMI EKVIPOTENCIALNE PLOSKVE IN S PUŠČICAMI ELEKTRIČNO POLJE. DESNO: PORAZDELITEV NABOJA V PREVODNIKU Z LUKNJO V KATERI SE NAHAJA NABOJ.

PRENOS NABOJA NA ZUNANJE STENE PREVODNIKA

Ugotovili smo že, da se v izvotljenem prevodniku postavljenem v zunanje električno polje vzpostavijo take razmere, da na površini prevodnika pride do prerazporeditve naboja, znotraj prevodnika in tudi v votlini pa je polje enako nič. Če hočemo del prostora električno izolirati od okolice, ga moramo torej prevleči s prevodnikom, ki ga običajno ozemljimo. Omeniti velja, da je taka zaščita popolna za elektrostatično (enosmerno) polje, za časovno spremenljivo pa ne popolnoma, odvisno od frekvence motenj in debeline zaščitne plasti*.



SLIKA 10.7: PROCES PRENOSA NABOJA IZ NOTRANJEGA PREVODNIKA NA ZUNANJEGA OB DOTIKU.

ELEKTRIČNO POLJE NA POVRŠINI PREVODNIKA

Ugotovili smo že, da je površina prevodnika ekvipotencialna ploskev. To tudi pomeni, da na površini ne more obstajati komponenta polja, ki je usmerjena vzdolž površine prevodnika. Taki komponenti rečemo tangencialna komponenta, pravokotno na površino pa je normalna komponenta. Če bi tangencialna komponenta polja obstajala, bi to polje delovalo na šibko vezane elektrone v kovini in jih premaknila v novo ravnovesno lego. Velja torej:

$$\boxed{E_{t,\text{na površini prevodnika}} = 0}. \quad (10.2)$$

Poleg tega smo na treh primerih (ploščati, valjni in krogelni kondenzator) ugotovili, da je polje na površini prevodnika enako σ / ε_0. Ali to velja splošno? DA. Polje na površini polprevodnika je usmerjeno v smeri normale na površino in je enako†

$$\boxed{\vec{E}_{\text{na površini prevodnika}} = \vec{e}_n \frac{\sigma}{\varepsilon_0}}. \quad (10.3)$$

SLIKA 10.8: POLJE NA POVRŠINI PREVODNIKA.

* Znano je, da avto smatramo kot precej varnega pred udarom strele, ker je njegova karoserija iz prevodnika. Podobno velja za letala, kjer pa je kljub temu potrebna pazljiva dodatna zaščita elektronike pred udari strel. Poleg tega so moderna letala lahko zgrajena iz neprevodnih kompozitnih materialov (zaradi večje trdote in manjše teže), ki jim je ravno zaradi nevarnosti strel potrebno vgraditi dodatno prevodno plast.

† Za bolj natančno razlago glej A.R.Sinigoj: Osnove elektromagnetike.

Razlika med poljem naelektrene ravnine in poljem na površini prevodnika

Za polje naelektrene ravnine smo ugotovili, da je enako $\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$ in kaže v smeri pravokotno na ravnino. Tik nad površino prevodnika lahko vpliv nabojev na polje razdelimo na dva dela. En del polja prispevajo naboji na površini, ti prispevajo polja $\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$, vsi ostali naboji pa tudi toliko, zato je polje na površini naelektrenega prevodnika enako $\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$.

SLIKA 10.9: VPLIV NABOJEV NA PREVODNIKU NA SKUPNO ELEKTRIČNO POLJSKO JAKOST V TOČKI NA PREVODNIKU.

* Sila na naboj na površini prevodnika

Če je na površini prevodnika električno polje, mora na naboje na površini (na telo) delovati sila v skladu z izrazom $\vec{F} = Q\vec{\mathrm{E}}$. Upoštevati je potrebno električno polje na naboje σ na površini prevodnika, ki je posledica ostalih nabojev na prevodniku. To polje je enako polovici celotnega polja na površini prevodnika* oz. $\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$. Sila na naboje σ je ploskovna sila (ali pritisk) in je enaka $\vec{f}_e = \vec{e}_n \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}$. Celotno silo na objekt pa bi dobili z integracijo ploskovne sile po celotni površini $\vec{F}_e = \frac{1}{2\varepsilon_0}\int_A \sigma^2 \cdot d\vec{A}$.

Vprašanja za obnovo:

1. Koliko je polje znotraj prevodnika v električnem polju in zakaj?
2. Kako imenujemo proces prerazporeditve naboja?
3. Kako se prerazporedijo naboji v prevodniku, če je v njem luknja, v luknji pa je (ali ni) naboj?
4. Razloži princip delovanja Faradayeve kletke.
5. Kolikšni sta tangencialna in normalna komponenta polja na površini prevodnika?
6. Ali (in kako) se spremeni polje izven prevodnika ob vnosa prevodnika v prostor z električnim poljem?

* Drugače povedano, električna poljska jakost na površini prevodnika velja pravzaprav tik nad površino, medtem, ko je električna poljska jakost na naboje σ na površini prevodnika enaka povprečni jakosti v notranjosti in zunanjosti: Ker je v notranjosti polje enako nič, je polje na mestu nabojev enako $\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$.

11. Zveza med E in V

Vsebina poglavja: povezava med električno poljsko jakostjo in potencialom, smer polja v smeri zmanjševanja potenciala, gradient polja, izračun gradienta v različnih koordinatnih sistemih, ocena velikosti polja glede na porazdelitev potenciala (ekvipotencialnih ravnin).

Izračun električne poljske jakosti iz potenciala in obratno

Če poznamo porazdelitev električnega polja v prostoru, lahko z integracijo polja izračunamo potencial v poljubni točki (definicija potenciala):

$$V(T) = \int_{T}^{T(V=0)} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} \; . \qquad (11.1)$$

Vprašajmo se, ali lahko tudi iz znane porazdelitve potenciala določimo električno polje? Odgovor je seveda pritrdilen, uporabiti pa je potrebno nasprotno operacijo od integracije.[*] Najprej zapišemo diferencial potenciala kot $\mathrm{d}V = -\vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$. Vzdolž ekvipotencialne ploskve je električna poljska jakost enaka nič. Torej mora biti (je) električna poljska jakost pravokotna na ekvipotencialne ploskve:[†]

$$\boxed{\vec{E} = \vec{e}_n E_n = -e_n \frac{\partial V}{\partial n}}, \qquad (11.2)$$

kjer je $\vec{e}_n$ normala na ekvipotencialno ploskev.

SLIKA 11.1: ELEKTRIČNA POLJSKA JAKOST KAŽE V SMERI UPADANJA POTENCIALA IN JE TOREJ PRAVOKOTNA NA EKVIPOTENCIALNE RAVNINE.

Če želimo ugotoviti velikost polja v smeri koordinat, uporabimo parcialno odvajanje po posameznih koordinatah:

---

[*] Iz matematičnega priročnika lahko ugotovimo sledečo zvezo: $\frac{d}{dx}\int_0^x f(t)\cdot dt = f(x)$. Glede na definicijo potenciala bi lahko pisali tudi $V(T) = -\int_{T(V=0)}^{T} \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\int_{T(V=0)}^{T} \left(E_x \cdot dx + E_y \cdot dy + E_z \cdot dz\right)$, od koder sledi $E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}$, itd.

[†] $\frac{\partial}{\partial x}$ ponazarja parcialen odvod po x-ju. Razlika med totalnim odvodom $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ in parcialnim je v tem, da pri parcialnem odvodu odvajamo izraz parcialno, torej le po eni spremenljivki (v konkretnem primeru po x-u), vse ostale spremenljivke pa so v smislu odvajanja konstante.

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}$$
$$E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} \qquad (11.3)$$
$$E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

Če združimo posamezne komponente polja v vektor električne poljske jakosti, ga v kartezičnih koordinatah zapišemo kot[*]

$$\boxed{\vec{E} = \left(E_x, E_y, E_z\right) = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z}\right)}. \qquad (11.4)$$

Za cilindrični koordinatni sistem velja $\vec{E} = \left(E_r, E_\varphi, E_z\right) = -\left(\frac{\partial V}{\partial r}, \frac{\partial V}{r \cdot \partial \varphi}, \frac{\partial V}{\partial z}\right)$. (11.5)

Za sferični koordinatni sistem velja $\vec{E} = \left(E_r, E_\vartheta, E_\varphi\right) = -\left(\frac{\partial V}{\partial r}, \frac{\partial V}{r \cdot \partial \vartheta}, \frac{\partial V}{r \sin(\vartheta) \partial \varphi}\right)$. (11.6)

SLIKA 11.2: VEČJA GOSTOTA EKVIPOTENCIALNIH RAVNIN POMENI VEČJO ELEKTRIČNO POLJE NA TISTEM MESTU, OZIROMA, ZGOŠČENOST EKVIPOTENCIALNIH PLOSKEV JE MERILO ZA VELIKOST POLJA.

Primer: Električni potencial v prostoru je določen z enačbo $V(x,y,z) = 4\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}^2}xy - 3\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}^2}z^2$. Določimo električno poljsko jakost v poljubni točki prostora ter v točki T(1 m, 2 m, 3 m).

---

[*] Enačbo $\vec{E} = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z}\right)$ lahko zapišemo tudi kot $\vec{E} = -\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)V$, kjer zapis v oklepaju imenujemo operator odvajanja, ki ga imenujemo nabla in pišemo s simbolom $\vec{\nabla}$ ali pa z imenom grad (za gradient). Zvezo med potencialom in poljem lahko torej zapišemo kot $\vec{E} = -\vec{\nabla}V = -\mathrm{grad}(V)$. Gre torej za operator, ki skalarnemu polju priredi vektorsko na tak način, da kaže v smeri zmanjšanja potenciala, po velikosti pa je enak (krajevni) hitrosti spreminjanja polja.

Izračun:

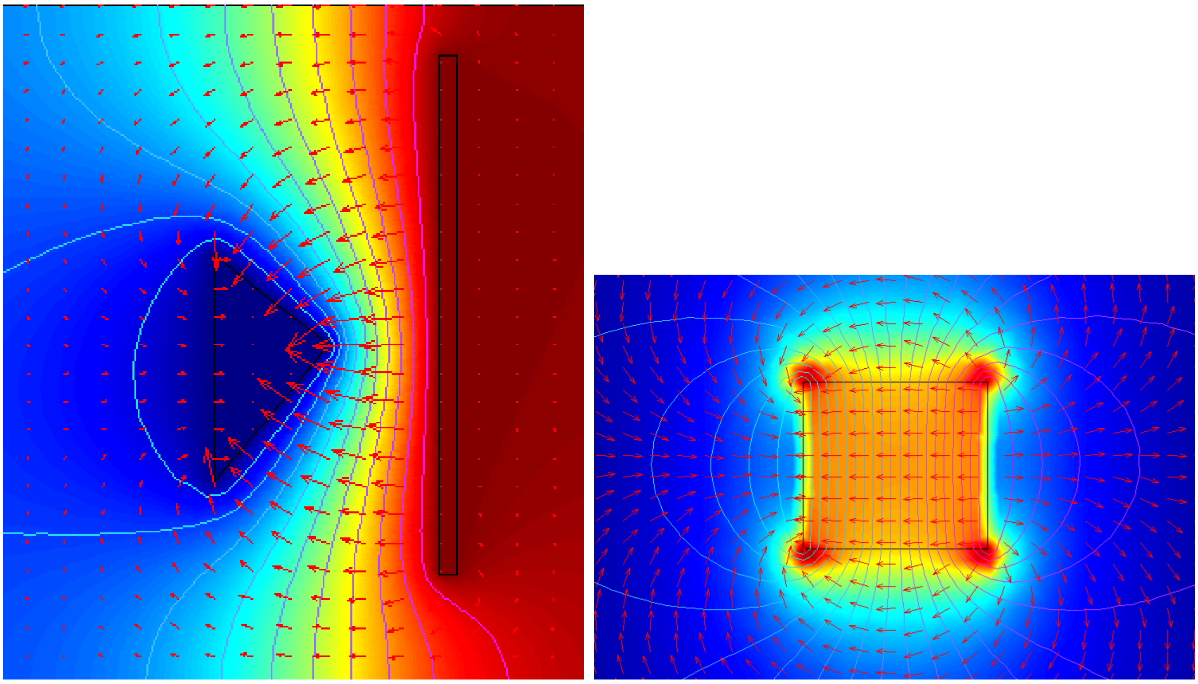
$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = -4\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}^2}y$$

$$E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} = -4\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}^2}x$$

$$E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} = -(-2\cdot 3\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}^2}z) = 6\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}^2}z$$

$$\vec{E}(x,y,z) = \underline{\underline{\left(-4y,-4x,6z\right)\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}^2}}}$$

$$\vec{E}(1\text{ m},2\text{ m},3\text{ m}) = \underline{\underline{\left(-8,-4,18\right)\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}}}.$$



SLIKA 11.3: ELEKTRIČNA POLJSKA JAKOST KAŽE SMER IN HITROST UPADANJA POTENCIALA. PRIMERA POLJA KLINASTE ELEKTRODE OB RAVNI ELEKTRODI IN POLJA MED RAVNIMA PLOŠČAMA. NA LEVI SLIKI SO POLJEG VEKTORJEV POLJA PRIKAZANE ŠE EKVIPOTENCIALNE RAVNINE TER POTENCIAL V BARVNI LESTVICI. NA DESNI SLIKI PA SO ZARADI LAŽJEGA OPAZOVANJA VEKTORJI POLJA NORMIRANI, VELIKOST POLJA PA PRIKAZUJE BARVNA LESTVICA. POLEG TEGA SO

Vprašanja za obnovo:

1. Kako določimo potencial iz znane porazdelitve polja?
2. Kako določimo polje iz znane porazdelitve potenciala?
3. Kako bi iz porazdelitve ekvipotencialnih ploskev razbrali velikost in smer polja?
4. Kako bi skicirali silnice polja in gostotnice iz porazdelitve ekcipotencialnih ploskev?
5. * Kako zapišemo povezavo med poljem in potencialom za različne koordinatne sisteme?

PRIKAZANE EKVIPOTENCIALNE RAVNINE.

12. Gibanje nabojev v električnem polju

Vsebina poglavja: sila na naelektren delec v električnem polju, enačba gibanja, odklon naelektrenega delca v električnem polju, energija delca med gibanjem, ohranitev energije, primerjava med gravitacijsko in električno silo, eksperimenti J.J. Thomsona s katodno cevjo.

Če se naboj nahaja v električnem polju in ima možnost gibanja, se giblje v skladu s silami, ki delujejo na naboj. V splošnem velja enačba gibanja

$m\vec{a} = \sum_i \vec{F}_i$, kjer pod vsoto vseh sil upoštevamo električno, mehanično, kemično silo itd. Mi se bomo predvsem posvetili električni sili na naboje. V tem primeru gibanje naboja določimo z upoštevanjem zveze:

$$\boxed{m\vec{a} = Q\vec{E}} \tag{12.1}$$

Pospešek *a* je vektor, ki ima tri komponente, in je enak časovnemu odvodu hitrosti, ta pa časovnemu odvodu poti, torej velja $m\vec{a} = m\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\right) = Q\vec{E}(\vec{r},t)$ ali na kratko $m\ddot{\vec{r}} = Q\vec{E}$. V splošnem moramo trajektorijo gibanja delcev določiti s pomočjo reševanja sistema treh diferencialnih enačb. Pogosto pa je mogoče določiti pozicijo delca z uporabo osnovnih zvez, kar bomo prikazali kar na primeru.

Primer: V homogeno polje 2000 V/m usmerimo elektron s hitrostjo 10^6 m/s, ki vpade prečno na smer polja. Določimo odklon elektrona iz vpadne smeri po preletu polja za 1 cm.

<u>Izračun</u>: Elektron nadaljuje pot v smeri leta pred vpadom v polje s hitrostjo 10^6 m/s, za 1 cm poti pa potrebuje časa $t = \frac{x}{v_x} = \frac{1\,\mathrm{cm}}{10^6\,\mathrm{m/s}} = 10^{-8}\,\mathrm{s}$. Obenem v prečni smeri nanj deluje električna sila in torej pospešek $a_y = \frac{Q_e \cdot E}{m} = \frac{1{,}6\cdot 10^{-19}\ \mathrm{As}\cdot 2\cdot 10^3\ \mathrm{V/m}}{9{,}1\cdot 10^{-31}\ \mathrm{kg}} = 3{,}52\cdot 10^{14}\ \mathrm{m/s^2}$, odklon v tej smeri pa bo enak

$$y = \frac{a_y \cdot t^2}{2} = \frac{3{,}52\cdot 10^{14}\ \mathrm{m/s^2}\cdot\left(10^{-8}\,\mathrm{s}\right)^2}{2} = \underline{\underline{17{,}58\ \mathrm{mm}}}.$$

SLIKA: ELEKTRON PRILETI V ELEKTRIČNO POLJE IN SE UKLONI.

ENERGIJA DELCA MED GIBANJEM

In kako je z energijo tega delca med gibanjem? Zgornjo enačbo integriramo v smeri poti in dobimo

$$\int_{T_1}^{T_2} m\vec{a}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_{T_1}^{T_2} Q\vec{E}\cdot d\vec{l}$$

Če izvajanje poenostavimo le na gibanje v eni smeri (recimo X), se zgornja zveza poenostavi v

$m\int_{T_1}^{T_2}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}x = m\int_{T_1}^{T_2}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}v = m\int_{T_1}^{T_2} v\mathrm{d}v = Q\int_{T_1}^{T_2}\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}$ iz česar sledi $\boxed{\frac{mv_2^2}{2}-\frac{mv_1^2}{2}=Q\left(V(T_1)-V(T_2)\right)}$. (12.2)

V splošnem pa bo $v^2=(v_x^2+v_y^2+v_z^2)$. Če to zvezo napišemo nekoliko drugače, dobimo

$\frac{mv_1^2}{2}+QV(T_1)=\frac{mv_2^2}{2}+QV(T_2)$ oziroma

$$\boxed{W_{\mathrm{kin}}(T_1)+W_{\mathrm{pot}}(T_1)=W_{\mathrm{kin}}(T_2)+W_{\mathrm{pot}}(T_2)} \qquad (12.3)$$

Enačbo preberemo kot: **Energija se med gibanjem ohranja, se pa pri tem pretvarja iz kinetične v potencialno ali obratno.**

Na naboj, ki se giblje v smeri polja deluje pospešek, torej se mu povečuje/zmanjšuje hitrost in s tem kinetična energija, hkrati pa se mu zmanjšuje/povečuje potencialna energija.

Primer: Elektron prileti s hitrostjo 10^6 m/s v zaviralno homogeno polje, ki ga vzpostavimo z napetostjo med vzporednima elektrodama oddaljenima za 10 cm. Določimo potrebno napetost med elektrodama, da se bo delec ustavil na polovici razdalje med elektrodama.

Izračun: Na začetku bo imel elektron le kinetično energijo $\frac{mv_1^2}{2}$, potencialna energija pa je enaka nič. Ko se elektron ustavi na sredini med elektrodama, bo njegova kinetična energija enaka nič, potencialna pa bo enaka $Q\frac{U}{2}$. Potrebno napetost torej določimo iz izenačitve energij na začetku in na koncu (ko se elektron ustavi na polovici razdalje med elektrodama je njegova hitrost enaka nič):

$\frac{mv_1^2}{2}=Q\frac{U}{2}$. Sledi:

$$U=\frac{mv_1^2}{Q}=\frac{9{,}1\cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg}\left(10^6\,\mathrm{m/s}\right)^2}{1{,}6\cdot 10^{-19}\,\mathrm{As}}=\underline{\underline{5{,}69\,\mathrm{V}}}.$$

Vprašanje:

Zakaj je v konkretnem primeru razdalja med elektrodama nepomembna?

Kaj se »zgodi z elektronom po ustavitvi«? Odg.: Polje ga bo pospešilo nazaj in izstopil bo iz polja z enako hitrostjo, kot je v polje vstopil.

PRIMERJAVA VELIKOSTI GRAVITACIJSKE IN ELEKTRIČNE SILE

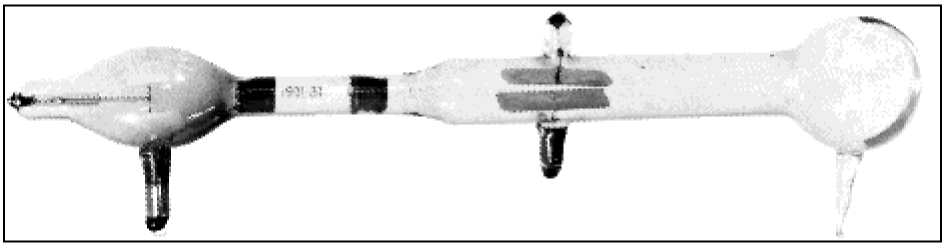
Kako velika je električna sila v primerjavi s silo gravitacije? Vzemimo kar prvi primer in primerjajmo velikost sile polja in sile gravitacije, če je elektron v polju 2 kV/m:

$$\frac{F_e}{F_g} = \frac{Q_e E}{mg} = \frac{1{,}6\cdot 10^{-19}\cdot 2\cdot 10^{3}}{9{,}1\cdot 10^{-31}\cdot 9{,}8} = \underline{\underline{3{,}59\cdot 10^{13}}}\,.$$

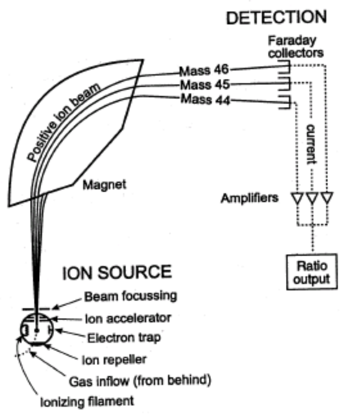
Ugotovimo, da je v tipičnih primerih (že pri majhnem električnem polju) električna sila mnogo večja od gravitacijske.

2. EKSPERIMENT JOSEPHA JOHNA THOMSONA (1856 - 1940)

JJ Thomson je Nobelov nagrajenec za fiziko za leto 1906. Nagrado je dobil za odkritje elektrona, kar mu uspelo z ekperimenti s katodno cevjo. V enem od teh eksperimentov je uspel odkriti, da so elektroni negativno naelektreni, saj se odklanjajo v električnem polju vzpostavljenim med dvema elektrodama, ki sta postavljeni prečno na smer leta elektrona. Za razliko od drugih raziskovalcev, ki so opravljali podobne eksperimente, je njemu leta 1897 to uspelo pokazati zato, ker je uspel zrak v katodni cevi v zadostni meri razredčiti (doseči dovolj nizek tlak), da se niso elektroni, ki jih je »izstreljeval« iz katode (katodni žarki), pred prehodom do fluorescenčnega zaslona zadeli v molekule zraka. V nadaljnjih eksperimentih je s kombinacijo delovanja električnega in magnetnega polja ugotovil razmerje med maso elektrona in njegovim nabojem. Pokazal je tudi, da ima vodik le en elektron. JJ Thomsonu pripisujemo izum masnega sprektrometra, naprave, s pomočjo katere je mogoče razpoznavati kompozicjo snovi iz razmerja med maso in nabojem (masni spekter).



SLIKA 12.1: KATODNA CEV, S POMOČJO KATERE JE JJ TOMSON DOKAZAL OBSTOJ IN NARAVO KATODNIH ŽARKOV (ELEKTRONOV).



SLIKA 12.2: KONCEPT MASNEGA SPEKTROMETRA. VIR: WIKIPEDIA.

Vprašanja za obnovo:

1. Zapišite in razložite enačbo gibanja naboja v električnem polju?
2. Kaj se dogaja z energijo naboja med gibanjem v električnem polju?
3. Zapišite izraze za izračun odklona naboja homogenem električnem polju.

Za raziskovalce:

1. Raziščite zgodovino določanja velikosti osnovnega naboja.
2. Kako deluje katodna cev. Kako izstreljujemo naboje, kako jih odklanjamo, zakaj se na zaslonu pokaže točka (slika).

13. Električni dipol

Vsebina poglavja: polarizacija prevodnika (snovi) v električnem polju, električni dipolni moment, polarne in nepolarne snovi, dipol v homogenem in nehomogenem polju, potencial in polje v okolici dipola, navor na dipol.

Električni dipol je en pomembnejših elementov v teoriji električnega polja. S tem konceptom (elementom) med drugim lahko razložimo vpliv in delovanje električnega polja v snovi, kar je seveda zelo pomembno. Do sedaj smo bili sposobni ugotavljati le polje v vakuumu, kar pa v veliki meri velja tudi za zrak. Poleg tega smo ugotovili, da električnega polja v prevodnikih ni, da je lahko le na površini prevodnika. Tam je polje sorazmerno površinski gostoti naboja.

Električni dipol

Spomnimo se poglavja o prevodnikih v električnem polju. Če nevtralni prevoden delec postavimo v električno polje, pride v prevodniku do prerazporeditve naboja, pri čemer se elektroni premaknejo (zamaknejo) v nasprotni smeri polja. Ti zamiki potekajo toliko časa (pa vendar zelo hitro), da se v notranjosti prevodnika vzpostavi polje, ki je enako nič. Prevodni delec tako dobi enovit potencial. Presežek pozitivnega naboja na enem koncu prevodnika lahko konceptualno združimo v pozitiven točkast naboj, presežek negativnega pa v negativen točkast naboj. Ta naboja sta razmaknjena za neko fiksno razdaljo, ki jo lahko opišemo z vektorjem, ki kaže od negativnega v smeri pozitivnega naboja.

Električni dipol definiramo kot dva nasprotno-predznačena točkasta naboja razmaknjena za razdaljo *d*.

SLIKA 13.1: PREVODNIK V ELEKTRIČNEM POLJU. PRERAZPOREDITEV NABOJA LAHKO PONAZORIMO Z DVEMA TOČKASTIMA NABOJEMA POVEZANIMA S FIKSNO RAZDALJO, KAR PONAZORIMO S KONCEPTOM ELEKTRIČNEGA DIPOLA.

Električni dipolni moment

imenujemo produkt naboja *Q* in vektorja $\vec{d}$, ki je distančni vektor od naboja –*Q* do naboja *Q* in ga zapišemo s simbolom $\vec{p}$:

$$\boxed{\vec{p} = Q\vec{d}} \quad \text{([*]enota je Cm)} \qquad (13.1)$$

<u>Pozor:</u> Velja opozoriti, da je smer vektorja **d** ravno nasprotna smeri polja, ki ga povzročata naboja in je torej definirana od minus naboja v smeri plus naboja.

[*] Pogosto, posebno v elektrokemiji, se uporablja za enoto električnega dipolnega momenta D (Debye). Velja $1\ \mathrm{D} = 3{,}33 \cdot 10^{-33}\mathrm{C} \cdot \mathrm{m}$. To omogoča tudi »lepše« zapise dipolnih momentov. Npr. dipolni moment vode je p(H_2O)=1,85 D, p(HCl)=1,08 D, itd.

Primer: Vzdolž daljše osi ovalnega prevodnika dolžine 5 mm se prerazporedi 10^{10} elektronov. Ponazorimo prevodnik v obliki električnega dipola in ocenimo njegov električni dipolni moment.

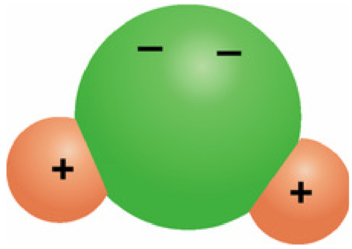
Izračun:

$$p = Qd = 10^{10} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C} \cdot 5 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m} = \underline{\underline{8 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{C} \cdot \mathrm{m}}}\,.$$

Primer: V molekuli NaCl (sol) je razdalja med Na in Cl ionom 0,6 nm. Izračunajmo električni dipolni moment molekule NaCl.

Izračun: $p = Qd = 1,6 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C} \cdot 0,6 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{m} \approx \underline{\underline{10^{-28}\,\mathrm{C} \cdot \mathrm{m}}}$

Polarne in nepolarne molekule. Ni pa nujno potrebno, da dobimo električni dipol le pri vstavitvi prevodnika v električno polje. Določene snovi (molekule) so lahko že same po sebi take, da imajo neenakomerno porazdeljen naboj. Tipičen primer je molekula vode (H_20), ki ima vodikova atoma razmaknjena od središčnega kisikovega za kot 105^0. Zakaj ravno tak kot? Izkaže se, da ta kot omogoča minimalno energijsko stanje molekule. Zaradi nehomogene porazdelitve naboja je električni dipolski moment molekule vode 6,7 10^{-30} Cm. Molekula vode ima torej vgrajen dipolni moment, rečemo tudi, da je **polarna** molekula (ima pozitivni in negativni pol) v nasprotju z nepolarnimi, kjer je naboj molekule porazdeljen tako, da je navzven nevtralna. Lahko pa nepolarna molekula postane bolj ali manj polarna, če jo postavimo v električno polje. Temu efektu rečemo **polarizacija**.



Neenakomerna porazdelitev pozitivnega in negativnega naboja v molekuli vode ustvari permanentni dipolni moment vode.

http://lightandmatter.com/html_b

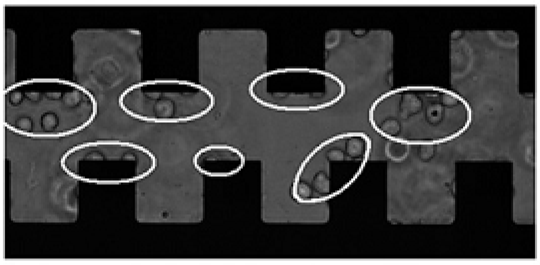
SLIKA 13.2: POLARNA IN NEPOLARNA MOLEKULA: A) BREZ ZUNANJEGA ELEKTRIČNEGA POLJA, B) V ZUNANJEM ELEKTIRČNEM POLJU.

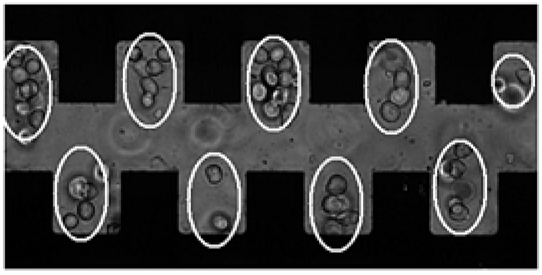
DIPOL V ELEKTRIČNEM POLJU

Kako se obnaša električni dipol v električnem polju? Nanj deluje električna sila, ki je enaka $\vec{F} = \vec{F}_Q + \vec{F}_{-Q} = Q \cdot \vec{E}_Q + (-Q) \cdot \vec{E}_{-Q} = Q \cdot \left(\vec{E}_Q - \vec{E}_{-Q} \right)$.

SLIKA 13.3: DIPOL V HOMOGENEM IN NEHOMOGENEM POLJU.

Če je polje homogeno, je $\vec{E}_Q = \vec{E}_{-Q}$ in skupna sila na dipol je enaka nič. Deluje pa sila na oba naboja dipola v nasprotni smeri, tako, da bo delovala z navorom na dipol v taki smeri, da bi dipol usmerila v smer polja. Če pa je polje nehomogeno, na dipol deluje poleg navora tudi premikalna sila, ki je različna od nič in deluje v smeri večjega polja. Te sile so običajno zelo majhne, kljub temu pa jih je mogoče koristno izrabiti.





SLIKA 13.4: SILE NA DIPOLE USMERIJO DIPOLE V SMER POLJA. PRIMER SEMENK V ENOSMERNEM POLJU VELIKE VREDNOSTI.

* Primer je recimo koncentriranje mikronskih in submikronskih delcev v nehomogenem električnem polju. To se uporablja predvsem za manipulacijo bioloških celic, kjer s pomočjo mikroelektronske tehnologije ustvarimo zelo majhne elektrode, ki imajo ravne in »ostre« robove. Vzpostavitev napetosti med takima dvema elektrodama vzpostavi polje med njima, ki je izrazito nehomogeno in večje v okolici ostre elektrode. Če se med elektrodama znajde delec, se polarizira, nato pa nanj deluje sila v smeri »ostre« elektrode. Še bolj pogosta pa je manipulacija nevtralnih delcev (bioloških celic) z vzpostavitvijo izmeničnega električnega polja. V tem primeru lahko s spreminjanjem frekvence električnega polja vplivamo

Delci v električnem polju v zraku se polarizirajo, na njih deluje sila v smeri večjega polja (v smeri robov elektrodnih struktur, kot kaže zgornja slika). V primeru, da so delci v snovi, je njihov premik odvisen tudi od teh električnih lastnosti. Če se delci v polju močneje polarizirajo kot snov v katero so postavljeni, bo sila na delce delovala v smeri večjega polja. V nasprotnem primeru pa v smeri manjšega polja. Te lastnosti pa je mogoče spreminjati tudi s frekvenco izmeničnega signala, kot je bilo opravljeno v primeru na sliki. Tipični polmer celic je 10 µm.

na polarizabilnost molekul. Pri določeni frekvenci se ustvarja večji ali manjši dipolni moment, odvisno od tega, kako hitro so se sposobni preorientirati naboji v električnem polju. Zagotoviti je potrebno, da so električne lastnosti polarizacije delca različne od lastnosti polarizacije delca. Če je to zagotovljeno, bo delec pri določenih frekvencah vzbu jalnega signala ustvarjal dipolni moment, ki je v smeri polja, pri drugih pa dipolni moment, ki je usmerjen v nasprotno smer kot polje. S frekvenco je torej mogoče vplivati na silo na delce v smeri večjega polja ali pa v smeri manjšega polja.

POTENCIAL V OKOLICI ELEKTRIČNEGA DIPOLA

Potencial v okolici električnega dipola ni težko določiti, saj gre za vsoto dveh potencialov, potenciala od pozitivnega in negativnega naboja.

SLIKA 13.5: ELEKTRIČNI DIPOL V KOORDINATNEM SISTEMU.

$$V(T) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r_1} - \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r_2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2}$$

Če je razdalja med nabojema dosti manjša od razdalje do točke T, lahko smatramo, da je $r_1 r_2 \doteq r^2$ in $r_2 - r_1 \doteq d\cos(\vartheta)$. Enačbo torej lahko zapišemo v obliki

$$\boxed{V(T) = \frac{Qd\cos(\vartheta)}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{p\cos(\vartheta)}{4\pi\varepsilon_0 r^2}}. \qquad (13.2)$$

* Pogosto se zgornjo enačbo zapiše tudi v obliki $V(T) = \frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$

Pomni: Potencial v okolici dipola se manjša s kvadratom razdalje od dipola.

ELEKTRIČNO POLJE DIPOLA

Električno polje bi lahko določili s preprostim seštevanjem (superpozicijo) prispevkov obeh nabojev. Ker pa je polje vektor, bi imeli nekoliko več dela kot pri seštevanju potencialov. Bolj elegantna pot je s pomočjo gradienta polja, saj velja $\vec{E} = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z}\right)$ oziroma v sferičnih koordinatah

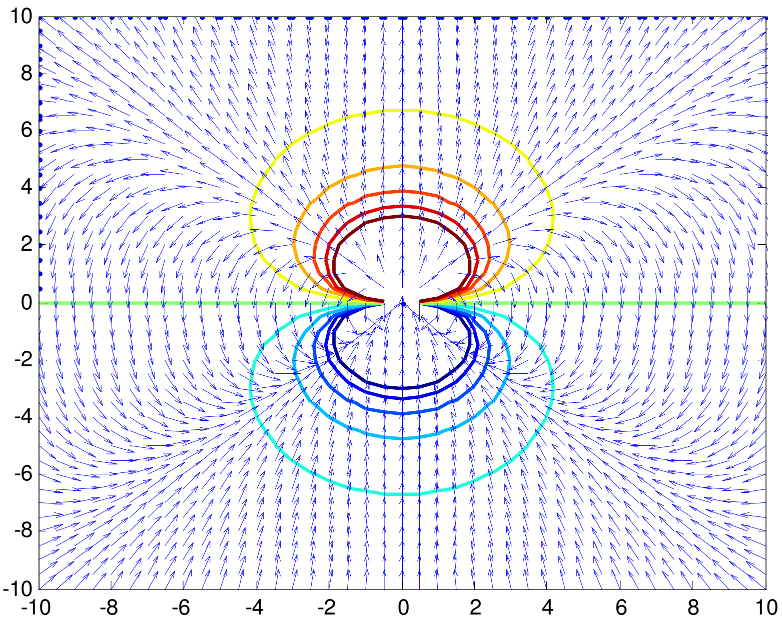
$$\vec{E} = \left(E_r, E_\vartheta, E_\varphi\right) = -\left(\frac{\partial V}{\partial r}, \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \vartheta}, \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial V}{\partial \varphi}\right)$$, torej dobimo

$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{p\cos(\vartheta)}{2\pi\varepsilon_0 r^3}$$

$$E_\vartheta = -\frac{\partial V}{r\partial\vartheta} = \frac{p\sin(\vartheta)}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

$$E_\varphi = 0\,.$$

Ugotovimo lahko, da polje v oddaljenosti od dipola upada s tretjo potenco. (To je precej hitreje od premega in točkastega naboja)



SLIKA 13.6: EKVIPOTENCIALNE PLOSKVE IN NORMIRANI VEKTORJI ELEKTRIČNE POLJSKE JAKOSTI V OKOLICI ELEKTRIČNEGA DIPOLA.

SLIKA 13.7: POTENCIAL IN POLJE V OKOLICI ELEKTRIČNEGA DIPOLA.

NAVOR NA ELEKTRIČNI DIPOL

Ugotovili smo že, da na električni dipol v zunanjem električnem polju deluje sila, ki želi usmeriti (zavrteti) dipol v smer polja. Kako pa bi določili navor na dipol v zunanjem električnem polju? Preprosto, po definiciji za navor[*]

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} \tag{13.3}$$

SLIKA 13.8: ELEKTRIČNI DIPOL V HOMOGENEM POLJU. NANJ DELUJE NAVOR.

Navor na pozitivni in negativni naboj je

$$\vec{M} = \frac{\vec{d}}{2} \times \vec{F}_Q + \frac{-\vec{d}}{2} \times \vec{F}_{-Q} = \frac{\vec{d}}{2} \times Q\vec{E}_Q + \frac{-\vec{d}}{2} \times (-Q\vec{E}_{-Q}) = \frac{Q\vec{d}}{2} \times \left(\vec{E}_Q + \vec{E}_{-Q}\right).$$

Če upoštevamo kratko razdaljo med nabojema, lahko smatramo, da je polje na pozitivni naboj enako polju na negativni naboj (lokalno homogeno polje) in navor na dipol bo enak $\vec{M} = Q\vec{d} \times \vec{E} = \vec{p} \times \vec{E}$.

Ponovimo rezultat: navor na dipol je enak vektorskemu produktu električnega dipolskega momenta in jakosti polja. Rezultat je vektor, ki opisuje smer vrtenja.

$$\boxed{\vec{M} = \vec{p} \times \vec{E}}. \tag{13.4}$$

Absolutna vrednost navora je $|\vec{M}| = |\vec{p}||\vec{E}|\sin\alpha$ ali $M = pE\sin\alpha$, kjer je α kot med vektorjema p in E.

Primer: Potencial se spreminja vzdolž X osi v skladu z enačbo $V = \frac{200}{x}\,\mathrm{V\cdot m}$. Pri *x* = 1 cm se nahaja električni dipol z momentom $\vec{p} = 10^{-6}(1,2,0)\ \mathrm{Cm}$. Določimo navor na dipol.

[*] Opozoriti velja, da je pri vektorskem produktu pomembno, kateri vektor nastopa prvi, saj je rezultat vektorskega produkta vektor, ki kaže smer navora (vrtenja). Pravilno dobimo smer navora tako, da vektor radija (ročice) zavrtimo v smeri sile v smeri najmanjšega kota. Velja torej $\vec{M} = \vec{e}_n r \cdot F \cdot \sin(\vartheta)$, kjer je smer normale smer, ki je pravokotna na površino, ki jo določata vektorja r in F.

SLIKA 13.9: ELEKTRIČNO POLJE IN DIPOL V POLJU.

Izračun: Električno polje ima le komponento v smeri X osi, ki je enaka $E_x = -\dfrac{\partial V}{\partial x} = -\dfrac{200}{x^2}\,\mathrm{V\cdot m}$. Pri x = 1 cm je polje $E_x = -\dfrac{200}{1\,\mathrm{cm}^2}\,\mathrm{V\cdot m} = -2\cdot 10^6\,\dfrac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$, navor pa je

$$\vec{M} = \vec{p}\times\vec{E} = (1,2,0)10^{-6}\mathrm{C/m}\times\left(-2\cdot 10^6\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}},0,0\right) = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{vmatrix} 10^{-6}\,\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m}}\,10^6\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}} = \underline{\underline{(0,0,4)\,\mathrm{N\cdot m}}}.$$

* Način izračunavanja sile na dipol iz spremembe električne energije

Podobno, kot smo poiskali zvezo med potencialom in električno poljsko jakostjo kot

$V(T) = \displaystyle\int_T^{T(V=0)} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} \Rightarrow \vec{E} = -\left(\frac{\partial V}{\partial x},\frac{\partial V}{\partial y},\frac{\partial V}{\partial z}\right)$, lahko najdemo tudi povezavo med energijo in silo, saj velja

$$W(T) = \int_T^{T(W=0)} \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{l} \Rightarrow \vec{F} = -\left(\frac{\partial W}{\partial x},\frac{\partial W}{\partial y},\frac{\partial W}{\partial z}\right). \tag{13.5}$$

Ta način je pogosto uporabljen tudi pri numeričnemu izračunavanju, kjer izračunamo porazdelitev polja, potenciala in energije s pomočjo računalnika. Za izračun sile je potrebno izračun opraviti 2x, vsakič na tak način, da rahlo zamaknemo strukturo (v našem primeru dipol) za neko majhno razdaljo in vsakič izračunamo polje in energijo. Silo pa nato izračunamo kot diferenco

$$\vec{F} \cong -\left(\frac{\Delta W}{\Delta x},\frac{\Delta W}{\Delta y},\frac{\Delta W}{\Delta z}\right). \tag{13.6}$$

* Izračunavanje sile na dipol iz spremembe električne poljske jakosti

Postavimo dipol vzdolž in v smeri X osi. Na naboj –*Q* deluje polje E_x in torej sila $-Q\cdot E_x$. Na naboj +*Q*, ki je od –*Q* oddaljen za razdaljo d*x*, deluje polje $E_x(x+dx)$ oziroma $E_x+\frac{\mathrm{d}E_x}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x$, sila pa bo $Q\left(E_x+\frac{\mathrm{d}E_x}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x\right)$. Če je polje nehomogeno, se bosta polji razlikovali, torej bo na dipol delovala rezultančna sila v smeri osi X, ki bo enaka $Q\left(\frac{\mathrm{d}E_x}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x\right)$, kar lahko pišemo tudi kot $F_x=Q\mathrm{d}x\frac{\mathrm{d}E_x}{\mathrm{d}x}=p\frac{\mathrm{d}E_x}{\mathrm{d}x}$, kjer smo $Q\cdot\mathrm{d}x$ zapisali z dipolnim momentom *p*. Enačba, ki smo jo zapisali velja le, če dipol leži vzdolž X osi in nanj deluje polje v smeri X osi. V splošnem je potrebno upoštevati možnost, da je dipol usmerjen poljubno. Torej bo potrebno silo na dipol v smeri osi X izračunati kot

$F_x=p_x\cdot\frac{dE_x}{dx}+p_y\cdot\frac{dE_x}{dy}+p_z\cdot\frac{dE_x}{dz}$ in na enak način tudi sili v smeri osi Y in Z. V vektorski notaciji to običajno zapišemo v obliki $\vec{F}=\left(\vec{p}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{E}$, kjer je $\vec{\nabla}=\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)$.

Energija rotacije dipola. $W=\int M\cdot d\alpha=\cdots-\vec{p}\cdot\vec{E}$.

Nekaj povezav na spletne strani, kjer uporabljajo koncept električnega dipola:

Splošno: http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/electric/dipolecon.html#c1

Elektrokardiogram: www.upscale.utoronto.ca/IYearLab/EKG.pdf

Sevanje dipola: http://ocw.mit.edu/ans7870/8/8.02T/f04/visualizations/light/01-DipoleRadiation/01-Dipole_320.html

Elektroforeza in dielektroforeza:

http://www.ibmm-microtech.co.uk/microeng/dielectrophoresis/science.php

LCD materiali: http://www.kth.se/fakulteter/TFY/kmf/lcd/lcd~1.htm

14. Okovinjenje ekvipotencialnih ploskev

Vsebina poglavja: polje med okovinjenimi ekvipotencialkami, potencial v okolici dveh premih nabojev, ekvipotencialne ploskve v okolici dveh premih nabojev, dva prevodna valja priključena na napetostni vir, ekscentričnost.

V tem poglavju bomo spoznali pomen okovinjenja ekvipotencialnih ploskev, ki nam omogoči v praksi pomembno analizo električnega polja v okolici prevodnih objektov. En pomembnejših primerov je analiza dveh ravnih naelektrenih vodnikov, kar je seveda primer dveh vodnikov priključenih na napetostni vir.

POLJE MED OKOVINJENIMI EKVIPOTENCIALNIMI PLOSKVAMI

Dosedanje ugotovitve: Ekvipotencialna ploskev povezuje točke z enako vrednostjo potenciala. Površina prevodnika je ekvipotencialna ploskev. Celo več, celoten prevodnik je na istem potencialu. Običajno rišemo ekvipotencialne ploskve tako, da je med sosednjimi enaka potencialna razlika (napetost). Hitreje, kot se krajevno spreminja potencial, večja je električna poljska jakost. Zgoščenost ekvipotencialnih ploskev nam torej nakazuje večjo električno poljsko jakost na tem mestu. Velja seveda tudi obratno: Večje polje ima posledično bolj zgoščene ekvipotencialne ploskve na tem območju.

Vprašanje: ali se razmere (porazdelitev polja in potenciala) med dvema ekvipotencialnima ploskvama spremenijo, če ekvipotencialni ploskvi okovinimo, pri čemer okovinjena ekvipotencialka ohrani vrednost potenciala ekvipotencialke?

Odgovor je NE, porazdelitev polja med okovinjenima ekvipotencialnika ploskvama se ne spremeni, saj je kovina sama kot prevodnik tudi ekvipotencialna ploskev in če ohrani potencial ekvipotencialke, se razmere ne spremenijo. V nadaljevanju bomo to ugotovitev s pridom uporabili pri mnogih problemih določanja električnega polja.

SLIKA 14.1: PORAZDELITEV EKVIPOTENCIALK IN OKOVINJENJE EKVIPOTENCIALKE. RAZMERE MED EKVIPOTENCIALKAMA SE NE SPREMENI.

SISTEM DVEH PREMIH NASPROTNO NAELEKTRENIH NABOJEV

En pomembnejših primerov, ki ima tudi precejšnjo praktično uporabo, sledi iz okovinjenja ekvipotencialnih ploskev sistema dveh premih nasprotno naelektrenih nabojev. Torej sistema dveh vzporednih tankih enakomerno naelektrenih žic.

Potencial v okolici ene same preme elektrine je

$$V(T)=\int_{T}^{T(V=0)}\vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=\int_{T}^{T(V=0)}\vec{e}_r\frac{q}{2\pi\varepsilon_0 r}\cdot\vec{e}_r\mathrm{d}r=\frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\ln(r)\Big|_{T}^{T(V=0)}\ . \qquad (14.1)$$

Ugotovimo lahko, da zaidemo v težave, če vzamemo, da je točka, kjer je potencial enak nič v neskončnosti, saj iz enačbe sledi $\ln(\infty)=\infty$. Torej bi bil potencial v neskončnosti neskončen. Problem je v tem, da imamo pri enem samem premem naboju opravka z enim samim neskončno razsežnim električno nezaključenim sistemom, kar pa v realnosti ni možno. Nekaj, kar v realnosti ni možno, pogosto tudi v teoriji ne da smiselne rezultate. Temu problemu se ognemo tako, da obravnavamo sistem dveh premih nasprotno naelektrenih nabojev, razmaknjenih za razdaljo *s*.

SLIKA 14.2: DVA PREMA NABOJA VZDOLŽ X OSI.

Vzemimo, da sta naboja položena na X osi simetrično na Y os in potekata vzdolž Z osi. Od Y osi sta oddaljena za razdaljo *s*. Glej sliko. Potencial v točki *T*, ki je od naboja q_1 oddaljena za r_1 in od naboja q_2 za razdaljo r_2, je sedaj vsota prispevkov obeh nabojev:

$$V(T)=\frac{q_1}{2\pi\varepsilon_0}\ln(r)\Big|_{r_1}^{T(V=0)}+\frac{q_2}{2\pi\varepsilon_0}\ln(r)\Big|_{r_2}^{T(V=0)}=-\frac{q_1}{2\pi\varepsilon_0}\ln(r_1)-\frac{q_2}{2\pi\varepsilon_0}\ln(r_2)+\frac{(q_1+q_2)}{2\pi\varepsilon_0}\ln(T(V=0))\ ,$$

Če velja $q_1=-q_2=q$ je tretji člen v gornji enačbi enak nič in potencial enak

$$V(T)=-\frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\ln r_1-\frac{-q}{2\pi\varepsilon_0}\ln r_2=\frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_2}{r_1}\ .$$

Potencial v točki *T* v okolici dveh nasprotno naelektrenih premih nabojev bo torej enak

$$\boxed{V(T)=\frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)} \qquad \text{POTENCIAL V OKOLICI DVEH PREMIH NABOJEV} \qquad (14.2)$$

Sedaj lahko ugotovimo, da je potencial enak nič v neskončnosti (kjer je $r_1 = r_2$), pa tudi vzdolž Y osi (pri $x = 0$).

EKCIPOTENCIALNE PLOSKVE POLJA DVEH PREMIH NABOJEV SO KROŽNICE (PLAŠČI VALJEV)

Poskušajmo določiti ekvipotencialne ploskve sistema dveh nasprotno naelektrenih premih nabojev. To pomeni, da iščemo točke, kjer je $\frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)=V_{\text{ep}}$ oziroma $\frac{r_2}{r_1}=e^{\frac{V_{\text{ep}}2\pi\varepsilon_0}{q}}=k$, kjer je V_{ep} potencial ekvipotencialke.

Če upoštevamo, da je $r_2^2=(x-s)^2+y^2$ in $r_1^2=(x+s)^2+y^2$ dobimo

$\frac{(x-s)^2+y^2}{(x+s)^2+y^2}=k^2$ in $(x-s)^2+y^2=k^2\left((x+s)^2+y^2\right)$. Po preureditvi lahko enačbo spravimo v obliko

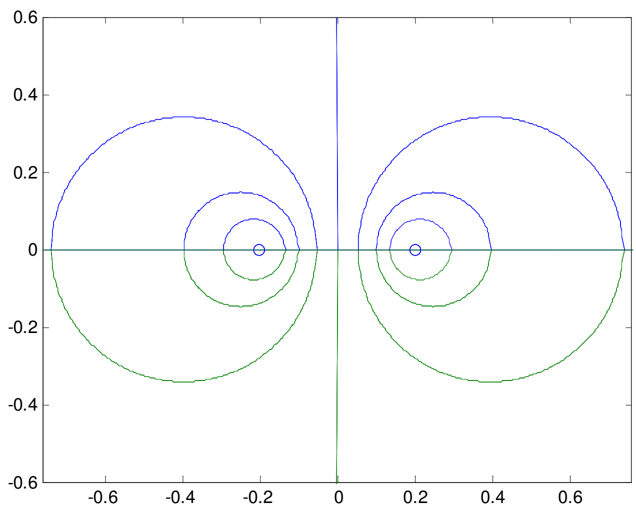
$(x-p)^2+y^2=r^2$. To je **enačba za krog polmera *r*, ki je zamaknjen v X osi za *p***. S primerjavo enačb dobimo

$$p=-\frac{k^2+1}{k^2-1}s \text{ in } r=\frac{2k}{\left|k^2-1\right|}s \text{ ter } s^2=p^2-r^2. \qquad (14.3)$$

Primer: Poiščimo potek ekvipotencialne ploskve s potencialom *V* = 300 V za prema naboja $q=\pm 10\ \text{nC}$/m, ki sta razmaknjena za 0,4 m.

Izračun:

Določimo konstanti $s=0{,}2\ \text{m}$, $k=e^{\frac{V_{\text{ep}}\cdot 2\pi\varepsilon_0}{q}}\simeq 5{,}31$. Sledi *p* =- 0,215 m in *r* = 0,078 m. Torej, središče ekvipotencialke se nahaja 0,215 m stran od središčne točke med nabojema, polmer ekvipotencialke pa je 7,8 cm. Pozitivni naboj je od centra ekvipotencialke oddaljen za 1,5 cm, kar tudi imenujemo ekscentričnost.




```
% ekvipot_2preme.m
q=10e-9; s=0.2;
eps0=8.854e-12;

Veq=[-300,-200,-100,0.001,100,200, 300];
%Veq=[300];
for i=1:length(Veq)
k=exp(Veq(i)*2*pi*eps0/q);
p=-(k^2+1)/(k^2-1)*s;
        r=sqrt(p^2-s^2);

        x=-5*s:0.01*s:5*s;
        lx=length(x);
        y=sqrt(ones(1,lx)*r^2-(x-
        ones(1,lx)*p).^2);
        plot(x,y,x,-y); plot(x,y,x,-y);
        axis([-3*s  3*s  -3*s  3*s]);  axis
        equal;
        plot(-s,0,'o');plot(s,0,'o')
        hold on
        end
```

SLIKA 14.3: EKVIPOTENCIALNE PLOSKVE IZRAČUNANE PRI VREDNOSTIH POTENCIALA V = -300 V, -200V, -100V, 0 V, 100 V, 200 V, 300 V, ZA PREMA NABOJA $q = \pm 10\ \mathrm{nC/m}$.

DVA PREVODNA VALJA ENAKEGA POLMERA PRIKLJUČENA NA VIR NAPETOSTI

Namen vsega tega izvajanja ni bil samo določitev ekvipotencialnih ploskev dveh premih nabojev. Šele z okovinjenjem ekvipotencialk dobimo strukture, ki so tudi v realnosti zanimive. Ugotovili smo, da so ekvipotencialke za sistem dveh premih nabojev krogi oziroma plašči valjev, kar pomeni, da je mogoče **z okovinjenjem ekvipotencialk izračunati polje in potencial v okolici dveh naelektrenih valjev s pomočjo sistema dveh premih nabojev.**

Kaj je potrebno narediti? Običajno poznamo napetost med prevodnima valjema, polmer valjev in razdaljo med valjema. Torej je potrebno iz znane napetosti in geometrije določiti lokacijo dveh nadomestnih premih nabojev in njun naboj. Ko to določimo, lahko zelo preprosto določimo tudi polje in potencial v okolici dveh naelektrenih valjev*.

Če analiziramo dve simetrični okovinjeni ekvipotencialki (površina valja), je napetost med njima enaka dvojni vrednosti potenciala ene od njih (na sredini med valjema je potencial enak nič):

$U = V(T_1) - V(T_2) = 2 \cdot V(T_1) = 2\frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_-}{r_+} = 2\frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{s+d/2-r_0}{s-d/2+r_0}\right)$, kjer je r_- razdalja od $-q$ do točke, r_+ pa razdalja od $+q$ do točke. Z upoštevanjem parametrov na sliki je $U = \frac{q}{\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{s+d/2-r_0}{s-d/2+r_0}\right)$, kjer je r_0 polmer valja, d razdalja med geometrijskima središčema valja, s pa razdalja od središča med nabojema do nabojev $\pm q$. V primeru okovinjenja ekvipotencialnih ploskev torej upoštevamo zamik naboja glede na geometrijsko središče ekvipotencialke. Za ekvipotencialko, ki je površina valja, velja $p = \frac{d}{2}$ in $r = r_0$. To vstavimo v zvezo $s^2 = p^2 - r^2$ in določimo s kot $s = \sqrt{(d/2)^2 - r_0^2}$. Iz te enačbe torej lahko določimo lego naboja, ki predstavlja v primeru dveh prevodnih valjev le navidezni naboj znotraj valja. Zamiku nabojev glede na geometrijsko središče valjev pravimo tudi **ekscentričnost** in je podana kot $e = d/2 - s$. Z upoštevanjem zgornje enačbe je $e = \frac{d - \sqrt{d^2 - 4r_0^2}}{2}$.

Postopek izračunavanja je torej sledeč: Če poznamo legi in napetost med dvema prevodnima valjema, lahko lego nadomestnih premih nabojev določimo s pomočjo zveze

* V resnici tega naboja ni, saj znotraj valja ni polja. Lahko pa analiziramo polje v okolici dveh valjev z določitvijo polja v okolici dveh premih nabojev. Smiselne rešitve so le v prostoru zunaj in na površini dveh valjev. Znotraj prevodnih valjev je pač polje enako nič.

$$\boxed{s=\sqrt{(d/2)^2-r_0^2}}\text{, ali tudi } e=\frac{d-\sqrt{d^2-4r_0^2}}{2}. \tag{14.4}$$

kjer je *s* razdalja od središča med valjema (kjer je potencial enak nič) do lege nabojev. Velikost naboja pa določimo iz enačbe za napetost

$$\boxed{U=\frac{q}{\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{s+d/2-r_0}{s-d/2+r_0}\right)}. \tag{14.5}$$

Primer: Naelektrena valja polmera 4 cm sta razmaknjena za 10 cm. Med valjema je napetost 20 kV. Določimo lego in velikost navideznih nabojev.

Izračun: $d=10\text{ cm}+2\cdot 4\text{ cm}=18\text{ cm}$. $s=\sqrt{(d/2)^2-r_0^2}=\sqrt{\left(\frac{18}{2}\right)^2-4^2}\text{ cm}\cong 8{,}06\text{ cm}$.

$20\text{ kV}=\frac{q}{\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{8{,}06+9-4}{8{,}06-9+4}\right)$, od koder sledi $q=\underline{\underline{3{,}833\ 10^{-7}\ \text{C/m}}}$.

Določimo še polje na sredini med valjema:

$$\vec{E}=\vec{e}_x\frac{q}{2\pi\varepsilon_0 s}\cdot 2=\vec{e}_x\frac{3{,}833\cdot 10^{-7}\text{ C/m}}{\pi\varepsilon_0 8{,}06\cdot 10^{-2}\text{ m}}\simeq\underline{\underline{171\text{ kV/m}}}.$$

In kolikšno bi bilo za primerjavo polje med ravnima ploščama azmaknjenima za 10 cm in priključenima na napetost 20 kV? $E=\frac{U}{d}=\frac{20\text{ kV}}{0{,}1\text{ m}}=200\text{ kV/m}$. Ugotovimo, da je polje na sredini med valjema manjše od polja enako razmaknjenih vzporednih plošč. Je pa zato večje polje na površini valjev. Določite ga sami!

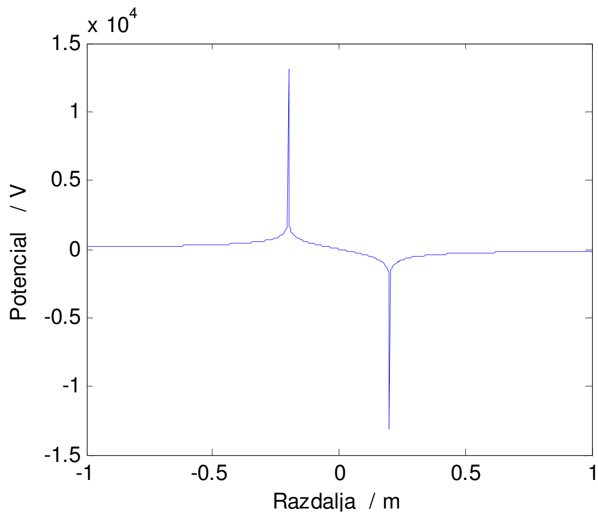
Druge strukture, ki jih lahko analiziramo z okovinjenjem ekvipotencialk dveh premih nasprotno naelektrenih nabojev:

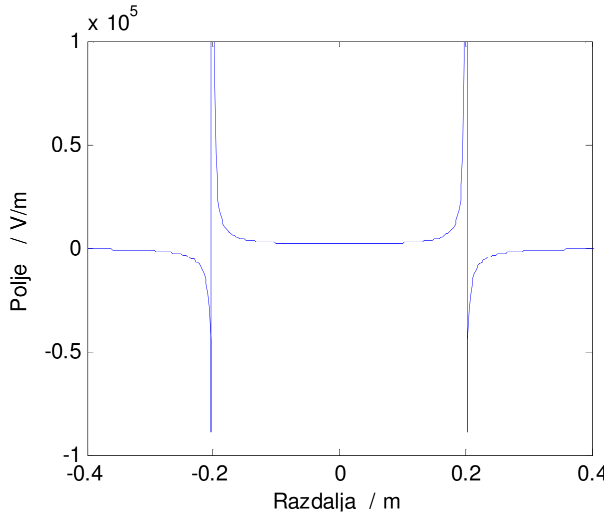
a) dva valja z različnima polmeroma
b) en valj v drugem (koaksialni kabel z ekscentrom)
c) valj nad prevodno ravnino – zemljo

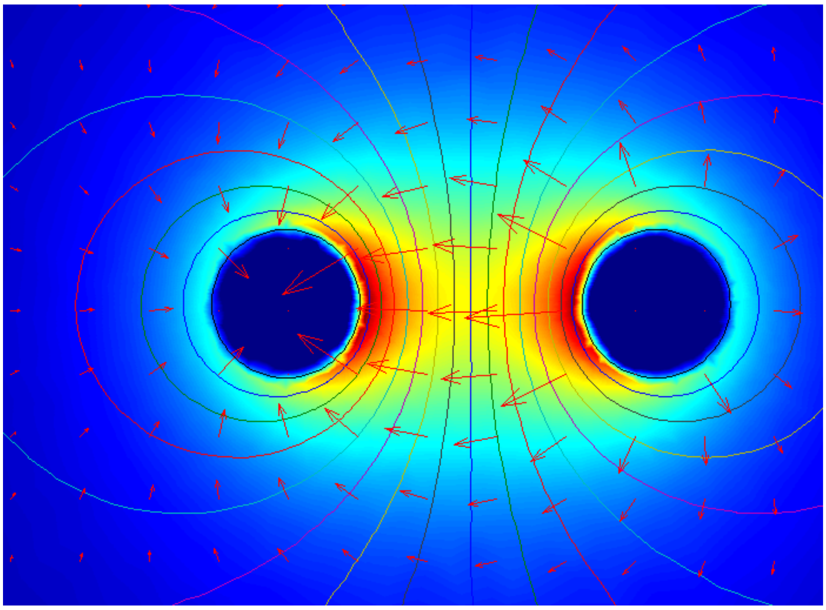
Posebno zanimiv je tretji primer, primer valja nad zemljo. Gre namreč za pomembno strukturo, ki jo pogosto srečamo v našem vsakdanu in je za elektrotehnika še posebno zanimiva – za daljnovodno žico nad zemljo. To bomo obravnavali v posebnem (naslednjem) poglavju.

SLIKA 14.4: PRIMERI MOŽNE ANALIZE STRUKTUR IZHAJAJOČIH IZ OKOVINJENJA EKVIPOTENCIALK NASPROTNO NAELEKTRENIH PREMIH NABOJEV.

Izračun potenciala in polja vzdolž osi X za dva prema nasprotno naelektrena naboja s pomočjo programa Matlab.







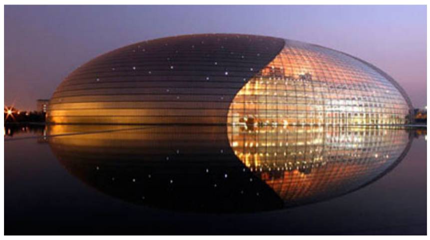
```
% pot_2preme.m
q=10e-9; s=0.2;
eps0=8.854e-12;
x=-5*s:0.01*s:5*s;
r1=x+s; r2=x-s;
V=q/(pi*eps0)*log(r2./r1)
E=q/(2*pi*eps0)*(1./r1-1./r2)
plot(x,V);
xlabel('Razdalja  / m');
ylabel('Potencial  / V');
figure;
plot(x,(E)); axis([-2*s 2*s -1e5 1e5])
xlabel('Razdalja  / m');
ylabel('Polje  / V/m');
```

Vprašanja za obnovo:

1. Ali se spremeni polje, če okovinimo ekvipotencialni ploskvi?
2. Kako določimo potencial v okolici dveh nasprotno naelektrenih premih nabojev?
3. Kakšne oblike so ekvipotencialne ploskve polja dveh nasprotno naelektrenih premih nabojev?
4. Kako uporabimo dva prema naboja pri izračunu polja v okolici dveh naelektrenih valjev?
5. Kaj je to ekscentričnost in kako jo določimo?
6. Kakšne strukture lahko analiziramo z uporabo principa okovinjenja ekvipotencialk?

15. Metoda zrcaljenja

Vsebina poglavja: Valj nad zemljo z upoštevanjem ekscentričnosti, daljnovodna vrv nad zemljo (zanemaritev ekscentričnosti), polje in površinska gostota naboja na površini zemlje, analiza sistema vrvi nad zemljo, kapacitivnost med vrvjo in zemljo, točkasti naboj ob ozemljeni krogli.



Metoda zrcaljenja se uporablja tudi v arhitekturi. Na sliki najnovejša stavba

V prejšnjem poglavju smo ugotavljali, da so ekvipotencialne ploskve v okolici dveh nasprotno naelektrenih premih nabojev krožnice oziroma plašči valjev. Ena od krožnic je tudi ravnina med nabojema, v obravnavanem primeru ravnina x = 0 (krožnica z neskončnim radijem). Tam je potencial enak nič. Obenem smo ugotavljali, da lahko poljubne ekvipotencialne ploskve okovinimo in s tem ne spremenimo razmer (polja) med okovinjenimi ploskvami. Če je ena od okovinjenih ekvipotencialnih ploskev ravnina x = 0, lahko v tem primeru prepoznamo možnost analize vodnika nad prevodno ravnino. Običajno smatramo, da je zemlja dober prevodnik. V tem primeru lahko naelektrene valje nad zemljo (npr. daljnovodne vrvi), smatramo kot valje nad prevodno ravnino. Take strukture analiziramo na način, da naboj zrcalimo preko ravnine, kjer pa »dobi« nasproten predznak.

SLIKA 15.1: ZRCALJENJE NABOJEV: TOČKASTI NABOJ, PREMI NABOJ, DIPOL, LINIJSKI NA BOJ, POVRŠINSKI NABOJ.

PREVODNI VALJ NAD ZEMLJO (UPOŠTEVANJE EKSCENTRIČNOSTI)

Primer prevodnega valja nad zemljo obravnavamo z znanjem iz prejšnjega poglavja. V konkretnem primeru okovinimo ekvipotencialko z radijem r_0 in drugo, ki ima neskončen radij (ravnino v osi Y kjer je potencial enak nič). Tudi ta primer lahko analiziramo z dvema nasprotno naelektrenima premima nabojema. En od teh se nahaja »pod zemljo«, zato pravimo, da **analiziramo primer naelektrenega valja nad zemljo s pomočjo metode zrcaljenja. To pomeni, da moramo v primeru analize premega naboja nad zemljo za izračun postaviti še navideznega zrcalno na ravnino zemlje. Zrcalni naboj ima nasproten predznak od tistega nad zemljo.**

SLIKA 15.2: NAELEKTREN VALJ NAD ZEMLJO: OKOVINJENJE EKVIPOTENCIALKE Z RADIJEM R_0 IN RAVNINE *X* = 0. DESNO: SISTEM DVEH NASPROTNO NAELEKTRENIH PREMIH NABOJEV, S POMOČJO KATEREGA ANALIZIRAMO PRIMER VALJA NAD ZEMLJO.

Napetost med valjem in zemljo določimo podobno kot v prejšnjem poglavju, le da je sedaj $V(T_2)=0$ in napetost med valjem in zemljo $U=V(T_1)-V(T_2)=V(T_1)=\frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{s+d/2-r_0}{s-d/2+r_0}\right)$. Razlika med tem izrazom in napetostjo med dvema premima nabojema je le v »polovički«. Lego navideznega naboja določimo enako kot v prejšnjem poglavju: $s=\sqrt{(d/2)^2-r_0^2}$, kjer je *d*/2 razdalja med geometrijskim središčem valja in zemljo, r_0 pa polmer valja.

DALJNOVODNA VRV NAD ZEMLJO (ZANEMARITEV EKSCENTRIČNOSTI)

Primer: 20 m nad zemljo se nahaja daljnovodna vrv polmera 2 cm z nabojem *q* = 300 nC/m. Določimo napetost med vrvjo in zemljo, električno poljsko jakost na površini zemlje tik nad vrvjo ter površinsko gostoto naboja na zemlji.

SLIKA 15.3: IZRAČUN POLJA NA POVRŠINI ZEMLJE.

Izračun: $d/2=20{,}01\,\mathrm{m}$; $s=\sqrt{(d/2)^2-r_0^2}=20{,}0099975\,\mathrm{cm}$. Ugotovimo lahko, da je razmak med geometrijskim središčem vrvi in lego nadomestnega naboja praktično zanemarljiv $e=d/2-s=(20{,}01-20{,}0099975)\mathrm{cm}\cong 2{,}5\cdot 10^{-6}\,\mathrm{cm}$. V tem primeru lahko ekscentrično postavitev navideznega naboja zanemarimo in smatramo, da se navidezni naboj nahaja v geometrijskem središču valja (vrvi). **Za zanemaritev ekscentričnosti mora veljati, da je razdalja od vrvi do zemlje dosti večja od polmera vrvi**: $d \gg r_0$. V praksi lahko vzamemo $d \ge 100 r_0$. V primeru zanemaritve ekscentričnosti se poenostavi tudi izračun napetosti med vrvjo in zemljo, ki je sedaj (${}^{d}\!/\!{}_{2} \simeq s$):

$$\boxed{U = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{d-r_0}{r_0}\right)}. \qquad (15.1)$$

Izračunajmo napetost v konkretnem primeru

$$U = \frac{300\cdot 10^{-9}\,\text{C/m}}{2\pi 8{,}854\cdot 10^{-12}\text{As/Vm}}\cdot \ln\left(\frac{40{,}04\text{ m}}{0{,}02\text{ m}}\right) \cong \underline{\underline{41\,\text{kV}}}.$$

<u>Dodatno:</u> Določimo še polje na površini zemlje. Upoštevati je potrebno oba naboja – originalnega v središču vrvi in zrcalnega z nasprotnim predznakom. Polje na površini zemlje tik pod vrvjo je torej vsota prispevkov obeh nabojev in je enako

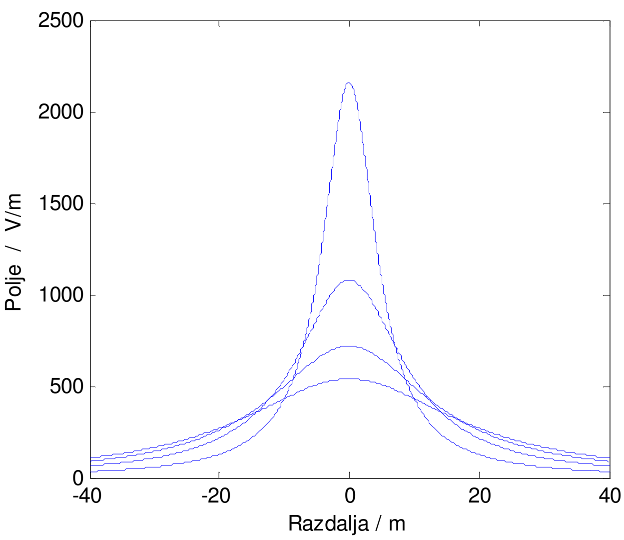
$$\vec{E} = -\vec{e}_y\frac{q}{2\pi\varepsilon_0 h}\cdot 2 = -\vec{e}_y\frac{300\cdot 10^{-9}\,\text{C/m}}{\pi\varepsilon_0 20\text{ m}} \simeq \underline{\underline{-\vec{e}_y 540\text{ V/m}}}.$$

Koliko pa je površinska gostota naboja na tem mestu? Ugotovili smo že, da je na površini prevodnika $\sigma = \varepsilon_0 E_n$, torej bo $\sigma = \underline{\underline{-4{,}77\cdot 10^{-9}\,\text{C/m}}}$.

V poljubni točki na zemlji je polje:

$$\vec{E} = -\vec{e}_y 2\cdot E\cdot\cos(\alpha) = -2\cdot\vec{e}_y\frac{q}{2\pi\varepsilon_0\sqrt{h^2+x^2}}\frac{h}{\sqrt{h^2+x^2}} = -\vec{e}_y\frac{q\cdot h}{\pi\varepsilon_0\left(h^2+x^2\right)}$$

To polje je največje na zemlji direktno pod vrvjo in se z oddaljenostjo manjša. Za vizualizacijo se zopet poslužimo programa Matlab.




```
% zrcaljenje1.m
q=300e-9; h=20;
eps0=8.854e-12;

for h=5:5:20
x=-40:0.01*h:40;
E=q*h./(pi*eps0*(x.^2+h^2));
```

SLIKA 15.4: ELEKTRIČNA POLJSKA JAKOST NA POVRŠINI ZEMLJE ZA RAZDALJE OD ZEMLJE DO VRVI 5, 10, 15 IN 20 M ZA NABOJ NA VRVI 30 NC. BLIŽJE ZEMLJI KOT SE NAHAJA VRV, VEČJE JE POLJE TIK POD VRVJO NA ZEMLJI.

Z integracijo površine pod krivuljo polja bi dobili enak rezultat za vse krivulje. Zakaj? Zato, ker je polje na površini sorazmerno gostoti naboja $\sigma = \varepsilon_0 E_n$, z integracijo gostote naboja po površini pa dobimo celoten naboj, ki je po iznosu enako velik kot naboj na vrvi, le nasprotnega predznaka je. To je naboj, ki se inducira na površini zemlje kot posledica naboja na vrvi.

Izračun linijske gostote naboja za različne razdalje od zemlje do vrvi (*h*) in konstantno napetostjo 40 kV:

h / m	*q* / nC/m
5	358
10	322
15	304
20	293

Izračun napetosti med vrvjo in zemljo za različne razdalje od zemlje do vrvi in konstantno gostoto naboja 300 nC/m:

h / m	*U* / kV
5	33,5
10	37,3
15	39,4
20	41

KAPACITIVNOST MED VRVJO IN ZEMLJO

Pri konstantni napetosti med vrvjo in zemljo se naboj na vrvi spreminja v odvisnosti od višine vrvi. Bližje kot je vrv površini zemlje, večji je njen naboj. In seveda obratno. Pri konstatnem naboju na vrvi ugotavljamo spreminjanje napetosti z višino vrvi. Zakaj je temu tako? Zato, ker bližje, kot je vrv zemlji, bolj se bodo na površini zemlje pod vrvjo zgostili (influirali) naboji nasprotnega predznaka in večja bo električna poljska jakost na zemlji. Posledično bo višja tudi napetost med zemljo in vrvjo.

SLIKA 15.5: KAPACITIVNOST MED VRVJO IN ZEMLJO.

Med nabojem na vrvi in napetostjo med vrvjo in zemljo velja linearna zveza:

$U = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{d-r_0}{r_0}\right)$ oziroma $q = \frac{U2\pi\varepsilon_0}{\ln\left(\frac{d-r_0}{r_0}\right)}$.

Če zapišemo celoten naboj na dolžini *l* vrvi, dobimo $Q = ql = \frac{U2\pi\varepsilon_0 \cdot l}{\ln\left(\frac{d-r_0}{r_0}\right)}$.

Razmerje *Q/U* je konstantno. To konstanto imenujemo kapacitivnost. Kapacitivnost sistema vrvi nad zemljo je torej

$$\boxed{C = \frac{Q}{U} = \frac{2\pi\varepsilon_0 l}{\ln\left(\frac{d-r_0}{r_0}\right)}}. \tag{15.2}$$

V praksi pogosto za daljnovodne vrvi uporabljamo izraz za kapacitivnost na enoto razdalje,

$$\boxed{c = C/l = \frac{q}{U} = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln\left(\frac{d-r_0}{r_0}\right)}}. \tag{15.3}$$

Določimo kapacitivnost daljnovodne vrvi na enoto dolžine v našem primeru:

$$C/l = \frac{300\ \text{nC/m}}{41\ \text{kV}} \cong \underline{\underline{7{,}32\ \text{pF/m}}}.$$

Kapacitivnost smo izračunali iz poznanega naboja in napetosti med vrvjo in zemljo. Ugotovimo lahko, da bi lahko kapacitivnost določili tudi direktno s pomočjo uokvirjene enačbe in da ni odvisna ne od napetosti ne od naboja pač pa le od geometrijskih razmer, torej od razdalje od vrvi do zemlje in njenega polmera. Kapacitivnost je torej geometrijsko pogojena.

Računanje polja in potenciala v okolici daljnovodnih vrvi nad zemljo

Ugotovili smo, da običajno lahko zanemarimo vpliv ekscentričnosti, in da je napetost med vrvjo in zemljo podana z enačbo $U=\dfrac{q}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\dfrac{d-r_0}{r_0}\right)$. Če imamo opravka z več daljnovodnimi vrvmi, je smiselno ugotavljati potencial posamezne vrvi, zato poglejmo, kako je sestavljen potencial ene same vrvi:

$V=U=\dfrac{q}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(d-r_0\right)-\dfrac{q}{2\pi\varepsilon_0}\ln r_0$. Prvi člen predstavlja potencial, ki ga povzroča zrcalni naboj, drugi člen pa je vpliv naboja na vrvi.

Običajno zanemarimo tudi r_0 v primerjavi z d in dobimo

$$\boxed{V=\frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{d}{r_0}\right)=\frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(d\right)-\frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(r_0\right)}. \qquad (15.4)$$

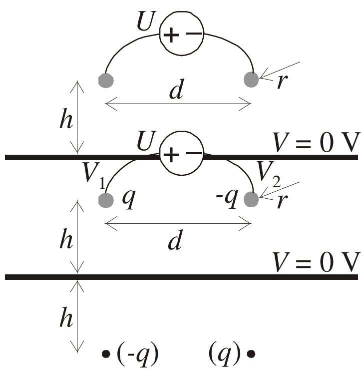
Prvi člen je potencial, ki ga povzroča negativni naboj na mestu pozitivnega od katerega je oddaljen za razdaljo *d*. Drugi člen je potencial lastnega (pozitivnega) naboja. Da ne bi pri izračunu pozabili, da se pozitivni predznak nanaša na razdaljo od negativnega naboja, lahko enačbo zapišemo tudi v obliki:

$$\boxed{V=\frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{1}{r_0}\right)+\frac{-q}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{1}{d}\right)}. \qquad (15.5)$$

Če je vrvi več, je potrebno seveda sešteti (superpozicija) vpliv vseh na vsako vrv posebej. Če bi na primer imeli nad zemljo dve vrvi, je potencial vsake prispevek štirih premih nabojev: lastne in lastne zrcaljene ter sosed nje in sosednje zrcaljene.

Primer (izpitna naloga 4.2.2005):

Vodnika simetričnega dvovoda dolžine 5 m ležita vzporedno nad ozemljeno prevodno ploščo. Med njiju je priključen vir napetosti U = 400 V. Izračunajte naboja na vodnikih. ($h=3$ cm, $d=6$ cm, $r=2$ mm)



Izračun: Glede na priključitev vira sta vzdolžni gostoti nabojev na vodnikih enakih absolutnih vrednosti, vendar nasprotnih predznakov, $(\pm q)$. Polje naboja ozemljene prevodne plošče določata polji zrcalnih nabojev $(\pm q)$. Naboja $Q_{1,2}=\pm ql$ vodnikov (dolžine $l=5$ m) določa napetost vira, ki je enaka razliki potencialov vodnikov: $U=V_1-V_2$. Njiju zapišemo kot vsoto prispevkov dveh parov nabojev:

$$V_1 = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{d}{r} + \frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{2h}{\sqrt{(2h)^2+d^2}} = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{2hd}{r\sqrt{(2h)^2+d^2}}$$

$$V_2 = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r}{d} + \frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{\sqrt{(2h)^2+d^2}}{2h} = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r\sqrt{(2h)^2+d^2}}{2hd} = -V_1$$

$$U = V_1 - V_2 = 2V_1 = \frac{q}{\pi\varepsilon_0}\ln\frac{2hd}{r\sqrt{(2h)^2+d^2}} \quad\Rightarrow\quad Q_{1,2} = \pm ql = \pm\frac{\pi\varepsilon_0 lU}{\ln\left(2hd/r\sqrt{(2h)^2+d^2}\right)} \simeq \underline{\underline{18{,}2\ \text{nC}}}.$$

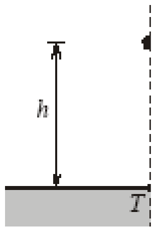
Druge variante možnih izračunov:

a) Dve vrvi sta priključeni na vir napetosti: v tem primeru je na eni vrvi pozitivni, na drugi pa negativni naboj enake absolutne vrednosti.
b) Naboja na vrveh nista priključena na vir napetosti: v tem primeru sta naboja (lahko) različna.
c) Na nevtralnemu vodniku ni naboja: vodnika na katerem ni naboja ne zrcalimo.
d) Vodnik se nahaja v homogenem polju: v tem primeru je poleg ostalih prispevkov potrebno upoštevati še potencial vrvi zaradi homogenega polja (Eh), kjer je h višina vrvi.
e) Zrcalimo tudi točkaste in druge naboje; zrcalni naboji imajo nasprotni predznak.

Domača naloga: kako izračunati polje

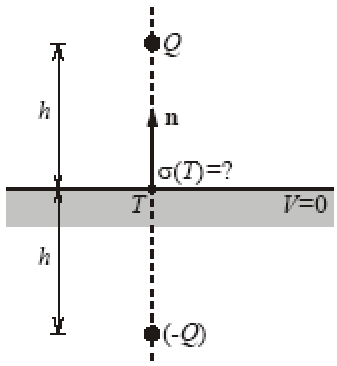
Primer, zrcaljenje točkastih nabojev: kolokvij 17.12.2002

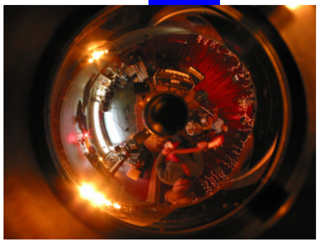
4. Točkasta elektrina množine Q se nahaja na višini h nad zemljo. Kolikšna je ploskovna gostota σ elektrine na površini zemlje v točki T, ki leži navpično pod točkasto elektrino?



4. Ploskovna gostota elektrine na površini zemlje je sorazmerna normalni komponenti električne poljske jakosti tik nad površino: $\sigma(T) = \varepsilon_0 E_n(T_+)$. Pri določanju poljske jakosti upoštevamo še zrcalno elektrino ($-Q$), ki v točki T_+ povzroča enako polje kot originalna elektrina Q:

$$\bar{E}(T_+) = -2\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 h^2}\bar{n}\,; \quad \sigma(T) = \boxed{-\frac{Q}{2\pi h^2}}.$$





* Zrcaljenje točkastega naboja na kovinski krogli.

Vzemimo dva točkasta naboja vzdolž X osi. Potencial v točki *T* je

$$V(T)=\frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_1}+\frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2}.$$

Poiščimo točke (ekvipotencialno ravnino), kjer je potencial enak nič. Tedaj bo

$$V(T_0)=\frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_{10}}+\frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_{20}}=0\Rightarrow\frac{R_{20}}{R_{10}}=-\frac{Q_2}{Q_1}.$$

Tudi pri razmerju dveh premih nabojev smo dobili, da je razmerje radijev konstantno, ekvipotencialne ploskve pa so bile krožnice oziroma plašči valjev. V tem primeru je ekvipotencialna ploskev krogla s polmerom R_{20}, če je $|Q_1|>|Q_2|$.

Če zapišemo potenciala v dveh točkah na krogli, določimo ekscentrično lego naboja Q_2 znotraj krogle iz $\boxed{e=\frac{r_0^2}{d}}$, kjer je r_0 polmer krogle, *d* pa razdalja od središča krogle do naboja Q_1. Poleg dobimo zvezo med Q_1 in Q_2: $\boxed{\frac{Q_1}{Q_2}=-\frac{d}{r_0}}$. (15.6)

SLIKA 15.6: DVA TOČKASTA NABOJA IMATA EKVIPOTENCIALKE OD KATERIH JE ENA KROGLA S POTENCIALOM NIČ. POLJE V OKOLICI NABOJA, KI SE NAHAJA V BLIŽINI OZEMLJENE KROGLE ANALIZIRAMO S POMOČJO ZRCALNEGA NABOJA, KI LEŽI EKSCENTRIČNO OD GEOMETRIJSKEGA SREDIŠČA KROGLE.

Primer: Določimo silo na točkasti naboj Q_1 = 10 nC, ki je oddaljen za 10 cm od prevodne ozemljene krogle polmera 8 cm.

Izračun:

$$e=\frac{r_0^2}{d}=\frac{(8\,\text{cm})^2}{10\,\text{cm}+8\,\text{cm}}\simeq\underline{\underline{3{,}556\,\text{cm}}}.$$

Naboj Q_2 moramo torej postaviti za 3,556 cm od središča krogle v smeri naboja Q_1. Po velikosti pa mora biti

$$Q_2=-Q_1\frac{r_0}{d}=-10\,\text{nC}\cdot\frac{8\,\text{cm}}{10\,\text{cm}}=-8\,\text{nC}.$$

Sila med nabojema (hkrati tudi sila med prevodno naelektreno kroglo in točkastim nabojem) je

$$F=\left|\frac{Q_1Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\right|=\left|\frac{Q_1Q_2}{4\pi\varepsilon_0(d-e)^2}\right|=\left|\frac{10\,\text{nC}\cdot(-8\,\text{nC})}{4\pi\varepsilon_0(18\,\text{cm}-3{,}556\,\text{cm})^2}\right|\cong\underline{\underline{498\,\mu\text{N}}}.$$

16. Kapacitivnost

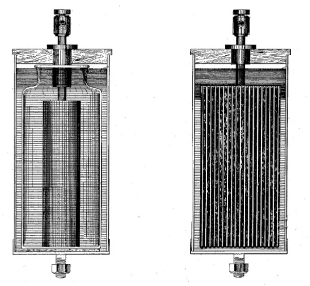
Vsebina poglavja: definicija kapacitivnosti, kondenzator, merjenje in računanje kapacitivnosti, kapacitivnost osnovnih struktur, zaporedna in vzporedna vezava kondenzatorjev, analiza vezij s poljubno vezavo kondenzatorjev.

Kapacitivnost je nedvomno en pomembnejših pojmov, ki jih v elektrotehniki zelo pogosto uporabljamo. Zato si ga velja podrobneje pogledati in razložiti. V prejšnjem poglavju smo že spoznali **sorazmerje med količino naboja med dvema prevodnima telesoma in napetostjo med njima**. **Faktor sorazmernosti imenujemo kapacitivnost.** Ali z drugimi besedami: večanje napetosti med prevodnima telesoma povzroči sorazmerno povečanje naboja. V matematični obliki pa to zapišemo kot

$$Q = C\left(V_A - V_B\right) \text{ oziroma } \boxed{Q = CU}\text{, od koder je } \boxed{C = \frac{Q}{U}} \qquad (16.1)$$

SLIKA 16.1: KAPACITIVNOST MED DVEMA PREVODNIMA TELESOMA.

KONDENZATOR KOT »KONCENTRIRAN« ELEMENT



Kondenzator, ki ga je patentiral Nikola Tesla leta 1896. US567818.

Dve poljubni prevodni telesi lahko prikažemo kot električni sistem, ki ga imenujemo kondenzator. Kljub temu, da iz srednješolske fizike (elektrotehnike) že poznamo simbol za kondenzator, ga omenimo še enkrat. Simbol za kondenzator sta torej dve vzporedni enako dolgi daljici, prečno na vodnika, razmaknjeni za malo razdaljo. Če je med telesoma priključimo napetost *U*, se bo na telesu priključenem na + sponko vira nakopičil naboj +*Q*, na telesu priključenem na negativno sponko pa naboj –*Q*. Velja zveza $\pm Q = CU$. *C* imenujemo kapacitivnost sistema, sistem, ki »shranjuje« naboj pa kondenzator. Enota za kapacitivnost je farad (F), v čast pomembnemu znanstveniku in raziskovalcu Michaelu Faraday-u. Pogosto tudi enoto za dielektričnost vakuuma ε_0 označujemo z enoto F/m.

Zanimivo je to, da na prvi pogled na kapacitivnost med dvema telesoma vpliva napetost in naboj na telesih, v resnici pa ni tako. **Kapacitivnost med dvema prevodnima telesoma v zraku je odvisna le od geometrijskih značilnosti teles (oblike teles in postavitve)**!!

* Merjenje kapacitivnosti

Kako bi določili kapacitivnost med dvema prevodnima telesoma? Eksperimentalno bi to lahko naredili tako, da bi ti dve telesi naelektrili z znanim nabojem in izmerili napetost, ki se pojavi med telesoma. Kapacitivnost bi določili iz razmerja $C = \frac{Q}{U}$.

Preprosti univerzalni merilni inštrumenti določajo kapacitivnost s pomočjo znanega tokovnega vira in merjenjem (časovne spremembe) napetosti. Iz kontinuitetne enačbe $i = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}$ in $Q = CU$ dobimo $i = C\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t}$. Pri elektrenju s konstantnim tokom je sprememba napetosti v določenem času sorazmerna $1/C$. V primeru idealnega kondezatorja narašča napetost linearno. Take meritve so lahko zelo nenatančne v primeru, ko kondenzator ni idealen (kar pogosto drži). Težave povzročajo predvsem uporovne lastnosti kondenzatorjev.

Nekoliko izpopolnjen način upošteva še uporovne lastnosti kondenzatorja. V tem primeru napetost ne narašča linearno, pač pa eksponentno. Iz eksponentnega naraščanja se določi časovna konstanta in upošteva pri izračunu kapacitivnosti. Seveda je potrebno kondenzator pred meritvijo razelektriti. To lahko naredimo tako, da ga izpraznemo preko upora ali pa nanj priključimo izmenični tokovni signal. Več informacij najdete na spletnih straneh[*].

Za natančnejše meritve se uporablja izmeničen vir, pogosto tudi v kombinaciji z mostičnim vezjem. Več o tem v naslednjem semestru.

Računanje kapacitivnosti

V principu smo že doslej sproti opozarjali na kapacitivnost, ko smo izračunavali napetost med naelektrenima telesoma in je bila le-ta sorazmerna naboju: $U = Q\frac{1}{C}$. Matematično torej določimo kapacitivnost med dvema prevodnima telesoma tako, da predpostavimo, da sta telesi naelektreni z nabojema $+Q$ in $-Q$ ter izračunamo napetost med njima. Kapacitivnost pa je enaka kvocientu naboja in izračunane napetosti: $C = \frac{Q}{U}$.

(Pogosto za računanje kapacitivnosti uporabljamo numerične metode, kjer izračunamo polje in potencial v prostoru med objektoma. V takem primeru uporabimo lahko za izračun kapacitivnosti tudi izraz za električno energijo, shranjeno v kondenzatorju. Več v nadaljevanju.)

---

[*] Več o meritvah kapacitivnosti: http://www.mobilehandsetdesignline.com/howto/192300586

http://www.repairfaq.org/REPAIR/F_captest.html#CAPTEST_004

KAPACITIVNOSTI OSNOVNIH STRUKTUR

Uporabili bomo ugotovitve iz poglavja o potencialu in napetosti osnovnih struktur in določili kapacitivnosti. Poiskati moramo le povezavo med *U* in *Q* pri različnih strukturah.

KAPACITIVNOST ZRAČNEGA PLOŠČATEGA KONDENZATORJA

$U = Ed = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} d$ oziroma $U = \frac{QA}{\varepsilon_0} d$, kjer je *A* površina ene plošče, *d* pa razdalja med njima. Kapacitivnost je

$$\boxed{C = \frac{Q}{U} = \varepsilon_0 \frac{A}{d}}. \quad \text{KAPACITIVNOST PLOŠČNEGA ZRAČNEGA KONDENZATORJA} \quad (16.2)$$

Dobili smo enačbo, ki jo poznamo že iz srednješolske fizike (elektrotehnike).

KAPACITIVNOST ZRAČNEGA KOAKSIALNEGA KABLA

$U = \int_{r_n}^{r_0} \vec{E} \cdot \vec{e}_r \mathrm{d}r = \int_{r_n}^{r_0} \vec{e}_r \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 r} \cdot \vec{e}_r \mathrm{d}r = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0} \ln\frac{r_0}{r_n}$, kjer je r_n polmer žile, r_0 pa notranji polmer oklopa. Kapacitivnost je

$$\boxed{C = \frac{Q}{U} = \frac{ql}{U} = \frac{2\pi\varepsilon_0 l}{\ln\frac{r_0}{r_n}}}. \quad \text{KAPACITIVNOST ZRAČNEGA KOAKSIALNEGA KABLA} \quad (16.3)$$

KAPACITIVNOST ZRAČNEGA SFERIČNEGA KONDENZATORJA

Napetost med sferama s polmeroma r_n in r_z je

$U = \int_{r_n}^{r_z} \vec{E} \cdot \vec{e}_r dr = \int_{r_n}^{r_z} \vec{e}_r \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \cdot \vec{e}_r dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{r}\right)\Bigg|_{r_n}^{r_z} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_n} - \frac{1}{r_z}\right)$. Kapacitivnost je torej

$$\boxed{C = \frac{Q}{U} = \frac{4\pi\varepsilon_0}{\left(\frac{1}{r_n} - \frac{1}{r_z}\right)}}. \quad \text{KAPACITIVNOST ZRAČNEGA SFERIČNEGA KONDENZATORJA} \quad (16.4)$$

Iz zgornje enačbe lahko določimo še **kapacitivnost osamljene prevodne krogle**, ki je ($r_z \to \infty$):

$$\boxed{C = \frac{Q}{U} = 4\pi\varepsilon_0 r_n}. \quad \text{KAPACITIVNOST OSAMLJENE PREVODNE KROGLE} \quad (16.5)$$

KAPACITIVNOST MED VALJEM IN ZEMLJO

Z zanemaritvijo ekscentričnosti smo dobili zvezo med napetostjo in linijsko gostoto naboja: $U=\frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{d-r_0}{r_0}\right)$. Kapacitivnost je:

$$\boxed{C=\frac{Q}{U}=\frac{ql}{U}=\frac{2\pi\varepsilon_0 l}{\ln\left(\frac{d-r_0}{r_0}\right)}}.$$ KAPACITIVNOST MED PREVODNIM VALJEM IN ZEMLJO (16.6)

d je razdalja med geometrijskima središčema dveh valjev. Tistega nad zemljo in prezrcaljenega. Če se torej valj nahaja na višini *h* nad zemljo bo $d/2=h+r_0$ in enačbo za izračun kapacitivnosti med prevodnim valjem nad zemljo lahko zapišemo tudi v obliki:

$$\boxed{C=\frac{Q}{U}=\frac{ql}{U}=\frac{2\pi\varepsilon_0 l}{\ln\left(\frac{2h+r_0}{r_0}\right)}}. \tag{16.7}$$

SLIKA 16.2: PREVODNI VALJ NAD ZEMLJO.

KAPACITIVNOST MED DVEMA VALJEMA

Napetost med dvema valjema je 2x večja kot med valjem in zemljo: $U=\frac{q}{\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{d-r_0}{r_0}\right)$, torej bo kapacitivnost med valjema (ob zanemaritvi ekscentričnosti):

$$\boxed{C=\frac{\pi\varepsilon_0 l}{\ln\left(\frac{d-r_0}{r_0}\right)}}.$$ KAPACITIVNOST MED PREVODNIMA VALJEMA (16.8)

SLIKA 16.3: DVA PREVODNA VALJA.

Kondenzatorska vezja

Zaporedna vezava kondenzatorjev

Narišimo sliko zaporedno vezanih več kondenzatorjev. Med skrajnima sponkama je napetost *U*, torej bo na pozitivni sponki naboj +*Q*, na negativni pa –*Q*, zveza med njima pa je $Q = CU$. Tudi na vsakem posameznem zaporedno vezanem kondenzatorju bo enako velik naboj, saj bo med dvema sosednjima kondenzatorjema prišlo le do prerazporeditve naboja. Na plošči kondenzatorja, ki je bliže negativni sponki vira, se bo nakopičil negativen naboj (-*Q*), na drugi plošči kondenzatorja pa hkrati pozitiven naboj. Hkrati bo prišlo do prerazporeditve naboja tudi na ostalih zaporedno vezanih kondenzatorjih. Torej velja: $Q_1 = Q_2 = ...Q_n = Q$. Celotna napetost bo vsota posameznih padcev napetosti: $U = U_1 + U_2 + \cdot\cdot U_n$, kar lahko izrazimo z nabojem in kapacitivnostjo kondenzatorjev $U = \frac{Q}{C} = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} + ... \frac{Q}{C_n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{Q}{C_i}$. Če enačbo delimo z nabojem *Q*, dobimo:

$$\boxed{\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + ... \frac{1}{C_n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{C_i}}$$ KAPACITIVNOST ZAPOREDNO VEZANIH KONDENZATORJEV (16.9)

SLIKA 16.4: ZAPOREDNA VEZAVA KONDENZATORJEV.

Primer: Določite nadomestno kapacitivnost zaporedne vezave treh kondenzatorjev: 1 nF, 2 nF in 5 nF.

<u>Izračun:</u> $\frac{1}{C} = \frac{1}{1\,\text{nF}} + \frac{1}{2\,\text{nF}} + \frac{1}{5\,\text{nF}} = \frac{10+5+2}{10\,\text{nF}} = \frac{17}{10\,\text{nF}}$, $C = \frac{10}{17}\,\text{nF} \cong \underline{\underline{0{,}588\,\text{nF}}}$.

Velja si zapomniti, da je nadomestna kapacitivnost zaporedno vezanih kondenzatorjev vedno manjša od vsake posamezne kapacitivnosti. V konkretnem primeru je najmanjša 1 nF, torej bo skupna gotovo manjša od 1 nF. Kako si to razložimo? Preprosto iz ugotovitve, da je kapacitivnost razmerje med nabojem in napetostjo. Več kot je kondenzatorjev vezanih zaporedno, večji je skupni padec napetosti, obenem pa se naboj ne spreminja. Števec torej ostaja enako velik, imenovalec pa se veča in posledično se manjša kapacitivnost.

Vzporedna vezava kondenzatorjev

Pri vzporedni vezavi kondenzatorjev je na vseh kondenzatorjih enaka napetost, naboj pa je sorazmeren kapacitivnosti vsakega posebej:

$Q = CU = Q_1 + Q_2 + \cdot\cdot\cdot\cdot + Q_n = C_1U + C_2U + \cdot\cdot + C_nU = \left(C_1 + C_2 + \cdot\cdot + C_n\right)U$, torej bo

$$C = C_1 + C_2 + \cdot\cdot + C_n = \sum_{i=1}^{n} C_i.$$ KAPACITIVNOST VZPOREDNO VEZANIH KONDENZATORJEV (16.10)

SLIKA 16.5: VZPOREDNA VEZAVA KONDENZATORJEV.

Primer: Med dvema ravnima vzporednima ploščama površine 100 cm^2 je razdalja 2 cm.

a) Določite kapacitivnost med ploščama.
b) Za koliko se kapacitivnost poveča/zmanjša, če plošči razmaknemo za trikratno razdaljo?
c) Za koliko se kapacitivnost poveča/zmanjša, če površino plošč povečamo za trikrat?
d) Za koliko se skupna kapacitivnost poveča/zmanjša, če ploščama zaporedno priključimo še 2 enako velika kondenzatorja?

Izračun:

a) Kapacitivnost med ploščama je

$$C = \varepsilon_0 \frac{A}{d} = 8{,}854 \cdot 10^{-12}\ \frac{\mathrm{F}}{\mathrm{m}} \cdot \frac{100 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{m}^2}{0{,}02\ \mathrm{m}} = 4{,}427 \cdot 10^{-12}\ \mathrm{F} = \underline{\underline{4{,}427\ \mathrm{pF}}}.$$

b) Če plošči razmaknemo za 3x, se poveča razdalja d za 3x, torej bo posledično kapacitivnost 3x manjša: $C = \varepsilon_0 \frac{A}{3d} \cong \underline{\underline{1{,}48\ \mathrm{pF}}}$.

c) Če povečamo površino plošč za 3x, bo kapacitivnost trikrat večja: $C = \varepsilon_0 \frac{3A}{d} \cong \underline{\underline{13{,}3\ \mathrm{pF}}}$.

d) Če ploščama zaporedno priključimo še dva enaka kondenzatorja, bo skupna kapacitivnost 3x manjša: $\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_1} = \frac{3}{C_1} \Rightarrow C = \frac{C_1}{3} \cong \underline{\underline{1{,}48\ \mathrm{pF}}}$. Ugotovimo, da je zaporedna vezava treh enakih kondenzatorjev ekvivalentna povečanju razdalje med ploščama enega za 3x. Hkrati je vzporedna vezava enakih kondenzatorjev ekvivalentna povečanju površine plošč enega kondenzatorja.

Preprosta kondenzatorska vezja so kar vzporedne in zaporedne vezave kondenzatorjev. V tem primeru moramo ob upoštevanju zveze $Q = CU$ vedeti le to, da je skupna (nadomestna) kapacitivnost vzporedne vezave kondenzatorjev vsota posameznih kapacitivnosti in da moramo pri zaporedni vezavi seštevati inverzne vrednosti.

Primer: Zaporedni vezavi kondenzatorjev C_1 = 1 nF in C_2 = 2 nF priključimo vzporedno še kondenzator C_3 = 2 nF. Določimo naboj na kondenzatorju C_2, če vezje priključimo na napetost 100 V.

SLIKA 16.6: VEZAVA KONDENZATORJEV.

Izračun: Določimo nadomestno skupno kapacitivnost, ki je $C_{12} = \dfrac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \dfrac{1 \cdot 2}{1+2}\ \text{nF} \cong 0{,}67\ \text{nF}$.

$C_{nad} = C_{12} + C_3 \cong 0{,}67\ \text{nF} + 2\ \text{nF} = 2{,}67\ \text{nF}$.

Naboj na Q_3 je $Q_3 = C_3 U_3 = C_3 \cdot 100\ \text{V} = 267\ \text{nC}$.

Koliko naboja pa je na Q_2?

Zaradi zaporedne vezave kondenzatorjev C_1 in C_2, je naboj na kondenzatorju C_2 enak naboju na C_1 in tudi na zaporedni skupni vezavi, torej $Q_2 = C_{12} U \cong 0{,}67\ \text{nF} \cdot 100\ \text{V} = \underline{\underline{67\ \text{nC}}}$.

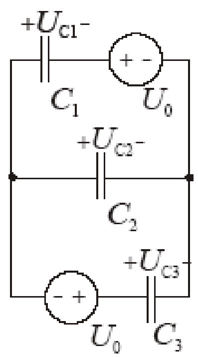
ENAČBE POTREBNE ZA ANALIZO SPLOŠNEGA KONDENZATORSKEGA VEZJA

Kako pa bi analizirali vezje z več kondenzatorjev in virov, ko ni mogoče preprosto vzporedno in zaporedno seštevati kondenzatorje? V tem primeru je potrebno napisati sistem enačb ob upoštevanju osnovnih zakonitosti (potencialnost elektrostatičnega polja in zakon o ohranitvi naboja):

1) Vsota vseh napetosti v zaključeni zanki je enaka nič: $U_{\text{zanke}} = \sum_i U_i$.
2) Vsota nabojev v spojišču je enaka nič: $Q_{\text{spojisca}} = \sum_i Q_i$.

Primer naloge iz kolokvija 11.1.2002 (VSŠ):

2. Določite napetosti na kondenzatorjih!
($C_1 = 6\mu\text{F}$, $C_2 = 6\mu\text{F}$, $C_3 = 6\mu\text{F}$, $U_0 = 12$ V)



Glede na smeri napetosti lahko zapišemo dve enačbi z upoštevanjem Kirchoffovega zakona:

$U_{C1} + U_0 - U_{C2} = 0$ in $U_{C2} - U_{C3} + U_0 = 0$. Poleg tega lahko zapišemo enačbo ohranitve naboja. Naboj se le prerazporeja iz ene elektrode kondenzatorja na druge. Veljati mora $Q_{C1} + Q_{C2} + Q_{C3} = 0$.

To enačbo lahko izrazimo z napetostmi $C_1U_1 + C_2U_2 + C_3U_3 = 0$ in tako dobimo sistem treh enačb za tri neznane napetosti na kondenzatorjih.

V rešitvi kolokvija je uporabljen nekoliko bolj »eleganten« način z vpeljavo spojiščnega potenciala.

2. Desno spojišče vezja ozemljimo, levo spojišče se nahaja na potencialu V.

Zapišimo napetosti:

$$U_{C1} = V - U_0$$
$$U_{C2} = V$$
$$U_{C3} = V + U_0$$

Zapišimo vsoto nabojev v levem vozlišču:

$$Q_1 + Q_2 + Q_3 = 0$$
$$C_1 \cdot (V - U_0) + C_2 \cdot V + C_3 \cdot (V + U_0) = 0$$
$$V = \frac{U_0 (C_1 - C_3)}{C_1 + C_2 + C_3} = 0\,\mathrm{V}$$

in iz nje izrazimo potencial V. Tako dobimo:

$$U_{C1} = V - U_0 = -U_0 = -12\,\mathrm{V}$$
$$U_{C2} = V = 0\,\mathrm{V}$$
$$U_{C3} = V + U_0 = U_0 = 12\,\mathrm{V}$$

Vprašanja za obnovo:

1. Kako je definirana kapacitivnost?
2. Od česa je odvisna kapacitivnost med dvema prevodnima telesoma v zraku?
3. Kako izračunamo (določimo) kapacitivnost med dvema prevodnima telesoma?
4. Ponovite izraze za kapacitivnost osnovnih struktur.
5. Nadomestna kapacitivnost zaporedne, vzporedne in kombinirane vezave.
6. Kako v splošnem analiziramo kondenzatorska vezja?

17. Dielektrik v električnem polju

Vsebina poglavja: relativna dielektričnost, povečanje kapacitivnosti z uporabo dielektrika, vezan in prosti naboj, vektor polarizacije, površinska gostota vezanega naboja, električna susceptibilnost, vektor gostote električnega pretoka, povezave med E, D in P, modificiran Gaussov zakon, mejni pogoji električnega polja med dvema dielektrikoma, mejni pogoji med prevodnikom in dielektrikom.

Podvodni kabel, 420 kV.

Do sedaj smo imeli opravka le s prevodniki v vakuumu oziroma zraku. Kako pa vplivajo različni materiali (snovi) na električne razmere? Na primer, kaj se zgodi, ko med plošči ploščnega kondenzatorja vložimo material, ki je idealen (električni) izolator in ju priključimo na vir napetosti? Takemu materialu pogosto rečemo dielektrik in s tem poudarimo njegove dielektrične (kapacitivne) lastnosti, medtem ko izolatorjem praviloma predpisujemo uporovne lastnosti; dober izolator ima zelo veliko (specifično) upornost.

DIELEKTRIK VSTAVLJEN V ZRAČNI KONDENZATOR

Če izmerimo kapacitivnost pred vložitvijo dielektrika in po vložitvi ugotovimo, da se kapacitivnost po vložitvi poveča:

$$\boxed{\frac{C_{\mathrm{diel}}}{C_{\mathrm{zrak}}}=\varepsilon_r\ge 1}. \qquad (17.1)$$

ε_r **imenujemo relativna dielektrična konstanta in pove, za koliko se kapacitivnost poveča ob vstavitvi dielektrika med plošči zračnega kondenzatorja.**

Kapacitivnost zračnega ploščatega kondenzatorja pred vstavitvijo dielektrika je $C_{\mathrm{zrak}}=\varepsilon_0\frac{A}{d}$, po vstavitvi pa je $C_{\mathrm{diel}}=\varepsilon_r C_{zrak}=\varepsilon_r\varepsilon_0\frac{A}{d}$.

Pomni: Izrazi za kapacitivnosti različnih tipov zračnih kondenzatorjev veljajo tudi v primeru, ko je namesto zraka dielektrik, le konstanto ε_0 nadomestimo z $\varepsilon_r.\varepsilon_0$.

Primer: Vzemimo ploščni kondenzator s površino plošče 100 cm^2. Med plošči stisnemo list papirja debeline 2 mm (ε_r = 2) in 2 mm debelo gumo z ε_r = 6. Kondenzator priključimo na napetost 100 V.

a) Kolikšen je padec napetosti na plasti papirja in kolikšen na steklu?
b) Kolikšno je polje v steklu in v papirju?
c) Kolikšno je polje na meji med steklom in papirjem?

Izračun:

a) $C_1=C_{papir}=\varepsilon_{r1}\varepsilon_0\frac{A}{d_1}=2\cdot 8{,}854\cdot 10^{-12}\,\mathrm{F/m}\cdot\frac{100\cdot 10^{-4}\ \mathrm{m}^2}{2\cdot 10^{-3}\ \mathrm{m}}=8{,}854\cdot 10^{-11}\ \mathrm{F}$

$$C_2 = C_{steklo} = \varepsilon_{r2}\varepsilon_0 \frac{A}{d_2} = 6 \cdot 8{,}854 \cdot 8{,}854 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{F/m} \cdot \frac{100 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{m}^2}{2 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m}} = 3C_1 = 26{,}562 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{F}$$

Nadomestna kapacitivnost je

$C_{12} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \frac{C_1 3C_1}{C_1 + 3C_1} = \frac{3}{4} C_1 = 6{,}6405 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{F/m}$, torej je naboj na skupni vezavi $Q_{12} = C_{12} U = 6{,}6405\ \mathrm{nC}$.

Ta naboj je tudi enak naboju na kondenzatorju C_1, zato je $U_1 = \frac{Q_1}{C_1} = 75\ \mathrm{V}$ in $U_2 = U - U_1 = 25\ \mathrm{V}$.

b) Električna poljska jakost v papirju je: $E_1 = \frac{U_1}{d_1} = \frac{75\ \mathrm{V}}{2\ \mathrm{mm}} = 37{,}5\ \mathrm{kV/m}$, v steklu pa $E_2 = \frac{U_2}{d_2} = \frac{25\ \mathrm{V}}{2\ \mathrm{mm}} = 12{,}5\ \mathrm{kV/m}$.

c) Iz $Q_1 = Q_2$ sledi $C_1 U_1 = C_2 U_2$ oziroma $\varepsilon_{r1}\varepsilon_0 \frac{A}{d_1} \cdot E_1 d_1 = \varepsilon_{r2}\varepsilon_0 \frac{A}{d_2} \cdot E_2 d_2$, od koder je

$\varepsilon_{r1} E_1 = \varepsilon_{r2} E_2$. Polje na meji med dielektrikoma ima skok, je torej nezvezno. Polje v dielektriku z manjšo dielektričnostjo je večje od polja v dielektriku z večjo dielektričnostjo.

KOLIKŠNO JE POVEČANJE KAPACITIVNOSTI OB VSTAVITVI DIELEKTRIKA?

Večina plinov ima vrednosti dielektričnosti okoli 1, med 1 in 1,001 in prebojno trdnost okoli 3 MV/m, medtem, ko imajo običajni izolatorji relativne dielektričnosti med 2 in 10 in prebojne trdnosti od nekaj do nekaj sto MV/m.

Plin	**relativna dielektričnost brez enot**	**prebojna trdnost MV/m**
vodik	1,00027	2
suh zrak	1,00058	3
CO_2	1,00099	2,9
Tekočine in izolatorji	**relativna dielektričnost**	**prebojna trdnost v MV/m**
papir	2,3	20
etanol	3,7	16
voda (destilirana)	81	
olje	2-5	
guma	3	
silicij	11	

FIZIKALNA RAZLAGA SPREMEMBE KAPACITIVNOSTI OB UPORABI DIELEKTRIKA

1) PLOŠČNI KONDENZATOR NAELEKTREN S PROSTIM NABOJEM MED PLOŠČAMA

Vzemimo, da imamo na elektrodah ploščnega kondenzatorja prosti naboj, torej $\pm Q_{\text{prosti}} = \pm\sigma_{\text{prosti}} A$. Med plošči vstavimo dielektrik. Pozitivni in negativni naboji na ploščah delujejo s silo na naboje v dielektriku tako, da se le ti prerazporedijo. To prerazporeditev nabojev lahko ponazorimo z modelom dipola. Dipoli se usmerijo v smer polja (navor $\vec{M} = \vec{p} \times \vec{E}$ je enak nič, ko sta vektorja vzporedna), pri čemer je potrebno upoštevati, da so negativni poli dielektrika bližje pozitivni elektrodi. Polje med ploščama je vsota prispevkov vseh nabojev, tistih na ploščah kondenzatorja in ločenih nabojev (dipolov) v dielektriku med ploščama.

Dipoli so nanizani v verigi, kjer se minus pol enega dipola kompenzira s plus polom naslednjega dipola. Tako lahko smatramo, da se **znotraj dielektrika kompenzirajo naboji dipolov, ostane pa na površini nekompenziran naboj, ki pa je nasprotnega predznaka kot prosti naboj na plošči**. Ti nekompenzirani (**vezani**) naboji povzročajo polje, ki je nasprotno usmerjeno od polja, ki je povzročil polarizacijo. Zato se polje med ploščama ob vstavitvi dielektrika pri konstantnem naboju zmanjša. Posledično se **zmanjša tudi napetost med ploščama** $U = \int \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$. Ker pa je kapacitivnost določena kot $C = \dfrac{Q}{U}$, se ob zmanjšanju napetosti med ploščama in konstantnem prostem naboju na ploščama kapacitivnost poveča.

Ob vložitvi dielektrika med naelektreni plošči pri konstantnem (prostem) naboju bo torej: $\boxed{C\uparrow = \dfrac{Q}{U\downarrow}}$

. (17.2)

SLIKA 17.1: NABOJ NA PLOŠČAH KONDENZATORJA POLARIZIRA SNOV MED PLOŠČAMA, KAR PRIKAŽEMO S KREIRANJEM DIPOLOV.

2) PLOŠČNI KONDENZATOR PRI PRIKLJUČENI FIKSNI NAPETOSTI MED PLOŠČAMA

Kako pa razložimo enako povečanje kapacitivnosti pri vložitvi dielektrika med plošči zračnega kondenzatorja ob **konstantni napetosti**? Tudi v tem primeru si zamislimo, da se na elektrodah zaradi napetosti nakopiči določen naboj. Ko pa vstavimo dielektrik, polje, vzpostavljeno med ploščama povzroči polarizacijo dielektrika. Zopet tako, da so negativni naboji dielektrika v povprečju bližje pozitivnim nabojem na plošči.

Ti polarizirani naboji bi ob ohranjeni količini naboja na ploščama povzročili zmanjšanje polja in zmanjšanje napetosti med ploščama. Ker pa je zunanja napetost vsiljena, priteče ob fiksni napetosti na elektrodi dodaten naboj, ki kompenzira polariziran naboj. Tudi v tem primeru se torej poveča kapacitivnost, saj se poveča količina prostega naboja na ploščah kondenzatorja.

Ob vložitvi dielektrika pri konstantni napetosti bo: $\boxed{C\uparrow = \dfrac{Q\uparrow}{U}}$. (17.3)

SLIKA 17.2: POVEČANJE KAPACITIVNOSTI OB VLOŽITVI DIELEKTRIKA V ZRAČNI KONDENZATOR NA KONSTANTNI NAPETOSTI.

VPELJAVA KONCEPTA VEKTORJA POLARIZACIJE

Električni dipolni moment smo že spoznali. Definiran je kot $\vec{p} = Q\vec{d}$. Ugotovili smo, da na dipol v polju deluje navor $\vec{M} = \vec{p} \times \vec{E}$. V dielektriku, ki ga postavimo v polje se ustvarijo in usmerijo dipoli. Vpeljemo pojem **vektorja polarizacije, ki je določen kot prostorska gostota dipolskih momentov**:

$$\boxed{\vec{P} = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{\sum_i \vec{p}_i}{\Delta v} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}v}}. \tag{17.4}$$

Enota za vektor polarizacije je $\dfrac{\mathrm{C} \cdot \mathrm{m}}{\mathrm{m}^3} = \dfrac{\mathrm{C}}{\mathrm{m}^2}$.

Zakaj vpeljati nov vektor? Zopet imamo problem, da je sicer smiselno vpliv polja na dielektrik ponazoriti z množico dipolov, ker pa je v snovi zelo veliko molekul in torej veliko dipolov, je potrebno njihovo skupno delovanje predstaviti na primeren način. Vektor polarizacije je torej makroskopski model in ponazarja povprečno delovanje velike množice dipolnih momentov v majhnem volumnu. Na podoben način smo se lotili tudi obravnave naboja: s konceptom gostote naboja.

POVRŠINSKA GOSTOTA POLARIZIRANEGA NABOJA

Vzemimo primer enakomerno polariziranega valja površine A. Na površini je vezan (polariziran) naboj velikosti $Q_P = P \cdot A$. Če smer vektorja polarizacije ni v smeri normale na površino je potrebno upoštevati le normalno komponento vektorja polarizacije $Q_P = P_\mathrm{n} \cdot A$. Če pa polariziran naboj ni enakomerno porazdeljen, pa je potrebno pisati $Q_P = \int\limits_A \vec{P} \cdot \mathrm{d}\vec{A}$.

Enako kot o gostoti prostega površinskega naboja lahko »govorimo« tudi o **gostoti polariziranega (vezanega) površinskega naboja**, ki je enaka kar normalni komponenti vektorja polarizacije na površini:

$$\boxed{\sigma_P = P_n} \tag{17.5}$$

SLIKA 17.3: POLARIZIRAN NABOJ V VOLUMNU. NA POVRŠINI JE NORMALNA KOMPONENTA VEKTORJA POLARIZACIJE ENAKA GOSTOTI POVRŠINSKEGA POLARIZIRANEGA (VEZANEGA) NABOJA.

Polariziran (vezan) naboj po zaključeni površini dobimo z integracijo normalne komponente vektorja polaritacije po celotni površini: $Q_{P,\text{zunaj }A} = \oint\limits_A \vec{P} \cdot \mathrm{d}\vec{A}$. Ker ta naboj ni nujno enak nič, ostane ob polarizaciji znotraj zaključene površine površinski polariziran naboj, ki je enak

$$Q_{\mathrm{P,znotraj}} = -\oint\limits_A \vec{P} \cdot \mathrm{d}\vec{A} \ . \tag{17.6}$$

Ta naboj je potrebno razlikovati od naboja, ki se »prosto« giblje po prevodni površini, saj je polariziran naboj vezan v snovi. Lahko se premika, vendar le znotraj določenega omejenega območja.

POVEZAVA MED E IN P. ELEKTRIČNA SUSCEPTIBILNOST

Ko dielektrik postavimo v polje se naboji v snovi prerazporedijo - **polarizirajo**. Ta prerazporeditev je lahko večja ali manjša, odvisno od lastnosti materiala. Prerazporeditev naboja predstavimo z modelom električnih dipolov oziroma njihove gostote z vektorjem polarizacije *P*. Za mnogo snovi velja, da povečanje polja povzroči sorazmerno povečanje polarizacije, kar matematično zapišemo kot:

$$\boxed{\vec{P} = \chi\varepsilon_0\vec{E}}. \tag{17.7}$$

Spomnimo se, kaj je $\varepsilon_0 E$. Na površini prevodnika je produkt $\varepsilon_0 E$ enak površinski gostoti naboja. Konstanto χ (chi) imenujemo **električna susceptibilnost** in »govori« o odzivnosti snovi na električno polje. Je brezdimenzijska konstanta. V vakuumu je torej χ enak nič, saj tam ni snovi oz. polariziranega naboja.

Dielektrik imenujemo **linearen**, če susceptibilnost ni odvisna od velikosti polja (napetosti), **homogen**, če je neodvisen od pozicije in **izotropen***, če je neodvisen od smeri polja.

MODIFICIRAN GAUSSOV ZAKON IN VPELJAVA VEKTORJA GOSTOTE ELEKTRIČNEGA PRETOKA - D.

Tudi pri obravnavi polja v snovi upoštevamo osnovna zakona elektrostatičnega polja, ki smo ju spoznali doslej: zakon potencialnosti elektrostatičnega polja $\oint_L \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0$ in Gaussov zakon $\oint_A \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$. Prvi integral je po zaključeni poti, drugi pa po zaključeni površini. *Q* je naboj, ki je zaobjet z integracijo. Zakon potencialnosti polja se ne spremeni tudi, če gre del poti skozi dielektrik, medtem, ko se drugi spremeni, saj je potrebno upoštevati, da z integracijo polja po zaključeni površini ne zajamemo le prosti naboj pač pa tudi ujetega, polariziranega. Ugotovili smo že, da je količina tega ujetega naboja po zaključeni površini enaka $Q_{P,\text{znotraj}} = -\oint_A \vec{P} \cdot \mathrm{d}\vec{A}$, torej moramo Gaussov zakon zapisati v obliki

$$\oint_A \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = \frac{Q_{\text{prosti, znotraj A}}}{\varepsilon_0} + \frac{Q_{P,\text{ znotraj A}}}{\varepsilon_0}. \tag{17.8}$$

Dopolnjeni Gaussov zakon lahko zapišemo tudi kot

$$\oint_A \varepsilon_0 \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{A} + \oint_A \vec{P} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = Q_{\substack{\text{prosti,} \\ \text{znotraj A}}} \tag{17.9}$$

oziroma

$$\oint_A \left(\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}\right) \cdot \mathrm{d}\vec{A} = Q_{\substack{\text{prosti,} \\ \text{znotraj A}}} \tag{17.10}$$

Zgodovina elektrotehnike je doprinesla še eno veličino (lahko smatramo tudi dvopomensko), ki v osnovi izhaja iz zgornje enačbe. J.C. Maxwell† je namreč vpeljal vektor *D*, ki ga imenujemo **vektor gostote električnega pretoka** in je definiran kot

---

* **Anizotropen material** ima različno dielektričnost (susceptibilnost) v različnih smereh. V tem primeru bo polarizacija v vsaki smeri drugačna. Polarizacija v smeri X osi bo torej enaka

$P_x = \varepsilon_0 \chi_{xx} E_x + \varepsilon_0 \chi_{xy} E_y + \varepsilon_0 \chi_{xz} E_z$. Podobno zapišemo za ostale smeri. V tem primeru susceptibilnost ni več skalarna količina, pač pa jo moramo predstaviti kot tenzor (v obliki matrike).

† James C. Maxwell je pomembna osebnost v zgodovini raziskovanja in odkrivanja zakonitosti električnih pojavov in teorije električnega polja. Dandanes govorimo o sistemu štirih Maxwellovih enačb, ki v celoti opisujejo interakcijo električnega in magnetnega polja. Drži, da jih ni prvi zapisal Maxwell, jih je pa izluščil iz mnogih enačb ter jih ustrezno dopolnil. Doslej smo obravnavali že dva od štirih zakonov: zakon potencialnosti polja in (modificiran) Gaussov zakon. Med drugim je pomembna tudi njegova vpeljava gostote električnega pretoka D. Hkrati je prvi pravilno ugotovil, da je izmenični tok v dielektrikih (kondenzatorju) posledica časovne

$$\boxed{\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}}. \tag{17.11}$$

Enota vektorja D je C/m^2, enako kot gostota naboja na površini prevodnika. V osnovi je vektor *D* na površini enak površinski gostoti naboja, je pa za razliko od površinskega naboja definiran tudi povsod po volumnu.

S pomočjo tega vektorja lahko zapišemo zgornjo enačbo v obliki

$$\boxed{\oint_A \vec{D} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = Q_{\substack{\text{prosti,} \\ \text{znotraj A}}}}, \tag{17.12}$$

ki ga lahko imenujemo **modificiran Gaussov zakon**. Z besedami bi rekli, da je pretok vektorja D skozi zaključeno površino enak zaobjetemu prostemu naboju. Odlika tega zapisa je predvsem ta, da je zapis neodvisen od vplivov snovi na vektor **D**. Ta vektor je izključno odvisen od lege prostih nabojev, to pa so tisti, ki jih običajno vzpostavimo z zunanjim poljem. S tem si bistveno olajšamo upoštevanje vplivov dielektrika.

Zveza med D in E

Združimo enačbi $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ in $\vec{P} = \chi \varepsilon_0 \vec{E}$ in dobimo

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \varepsilon_0 \vec{E} + \chi \varepsilon_0 \vec{E} = (1+\chi)\varepsilon_0 \vec{E} = \varepsilon_r \varepsilon_0 \vec{E}$$

Ponovimo pomembno zvezo med E in D:

$$\boxed{\vec{D} = \varepsilon_r \varepsilon_0 \vec{E} = \varepsilon \vec{E}}, \tag{17.13}$$

kjer ε_r imenujemo **relativna dielektrična konstanta**.

Povezava med električno susceptibilnostjo in relativno dielektrično konstanto je preprosta: $\boxed{\varepsilon_r = 1 + \chi}$. (17.14)

Zveza med D in P

Če smo ugotovili enostavno zvezo med D in E, velja seveda tudi enostavna zveza med D in P, saj velja

$$\vec{P} = \chi \varepsilon_0 \vec{E} = (\varepsilon_r - 1)\varepsilon_0 \vec{E} = \frac{(\varepsilon_r - 1)\varepsilon_0 \vec{D}}{\varepsilon_r \varepsilon_0}, \text{ torej } \vec{P} = \frac{(\varepsilon_r - 1)}{\varepsilon_r}\vec{D}. \tag{17.15}$$

---

spremembe električnega polja in časovne spremembe polariziranega naboja, kar opišemo kot $\vec{J} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \frac{\partial \varepsilon_0 \vec{E}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$. Temu toku rečemo tudi premikalni ali včasih tudi poljski tok.

POVEČANJE KAPACITIVNOSTI ZARADI VSTAVITVE DIELEKTRIKA V KONDENZATOR PRI PRIKLJUČENI NAPETOSTI

Uporabimo osnovno zvezo $C=\dfrac{Q}{U}$ najprej za zrak in potem še za dielektrik z upoštevanjem Gaussovega zakona in definicije napetosti. Ker je napetost konstantna je polje znotraj kondenzatorja nespremenjeno tudi po vstavitvi dielektrika. Je pa res, da je v dielektriku zaradi polja polariziranega naboja določeno polje, ki je zmanjšalo prvotno polje. To polje polariziranih nabojev pa je kompenzirano z dodatnim nabojem, ki pride na elektrode iz vira.

$C_{zrak}=\dfrac{Q}{U}=\dfrac{\varepsilon_0\oint\limits_A \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{A}}{\int\limits_L \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}}$ in $C_{diel}=\dfrac{\oint\limits_A \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{A}}{\int\limits_L \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}}=\dfrac{\varepsilon_{\mathrm{r}}\varepsilon_0\oint\limits_A \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{A}}{\int\limits_L \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}}$. Vidimo, da v splošnem velja $C_{diel}=\varepsilon_{\mathrm{r}}C_{zrak}$, kar smo zapisali že v začetku poglavja, sedaj pa tudi dokazali.

Če bi želeli enako pokazati tudi za primer konstantnega naboja, bi ostal *Q* nespremenjen, *U* pa bi pisali kot $U=\int\limits_L \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=\int\limits_L \vec{D}/\varepsilon_0\cdot \mathrm{d}\vec{l}$ za zrak in $U=\int\limits_L \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=\int\limits_L \vec{D}/(\varepsilon_{\mathrm{r}}\varepsilon_0)\cdot \mathrm{d}\vec{l}$ za dielektrik. In bi zopet prišli do enakega zaključka.

Običajen način izračunavanja polja v dielektrikih za preproste strukture, kjer lahko uporabimo princip simetričen porazdelitve naboja in uporabimo modificiran Gaussov zakon

Med dvema prevodnima telesoma je priključena napetost (npr. ploščni, koaksialni ali sferični kondenzator). Zanima nas polje, naboj na telesu, itd. Najprej predpostavimo nek naboj na telesu *Q* in z uporabo modificiranega Gaussovega zakona z upoštevanjem simetrije naboja določimo *D*, ki ni odvisen od električnih lastnosti snovi. Nato upoštevamo zvezo med *D* in *E* da določimo *E*. *E* je sedaj odvisen od relativne dielektričnosti snovi. *E* še vedno nastopa kot funkcija naboja, ki ga ne poznamo. Z integracijo *E*-ja med elektrodama dobimo napetost, ki je poznana. Iz te napetosti lahko izračunamo naboj oziroma *D* in nato *E* ali karkoli nas zanima. Glej spodnji primer.

Primer: Vzemimo ploščni kondenzator površine plošč 100 cm^2 in ga priključimo na napetost 20 V. Vmes stisnimo 2 mm debel list papirja z relativno dielektrično konstanto 2. Določimo naboj na površini, površinsko gostoto naboja, vektor gostote pretoka, vektor polarizacije, električno poljsko jakost in kapacitivnost.

Izračun: Izračuna se lahko lotimo na več načinov. Običajni postopek je tak, da najprej določimo D, ki ni odvisen od snovi, potem E, nato U, itd.. V ploščnem kondenzatorju velja:

$$\oint\limits_A \vec{D}\cdot d\vec{A}=Q_{prosti,znotraj}\Rightarrow DA=\sigma A\Rightarrow D=\sigma$$

$$E=\frac{D}{\varepsilon}=\frac{\sigma}{\varepsilon_r\varepsilon_0}$$

$U=\int_0^d E\mathrm{d}x=Ed=\dfrac{\sigma}{\varepsilon_r\varepsilon_0}d$, od koder lahko določimo σ ali D: $\sigma=D=177,08\cdot10^{-9}\ \mathrm{C/m^2}$. Sledi $E=\dfrac{\sigma}{\varepsilon_\mathrm{r}\varepsilon_0}=10\ \mathrm{kV/m}$ in $P=\dfrac{(\varepsilon_r-1)}{\varepsilon_r}D=\dfrac{2-1}{2}D=\dfrac{D}{2}=88,54\cdot10^{-9}\ \mathrm{C/m^2}$.

Polje lahko določimo tudi direktno kot $E=\dfrac{U}{d}=\dfrac{20\ \mathrm{V}}{2\ \mathrm{mm}}=10\ \mathrm{kV/m}$.

Sigma, ki smo jo izračunali, je gostota površinskega naboja. *D* je enak sigmi, vendar je *D* definiran povsod v prostoru, sigma pa le na površini. Ker obravnavamo primer ploščnega kondenzatorja je *D* povsod enako velik. Ker je normalna komponenta P-ja na površini enaka površinski gostoti polariziranega naboja, je $\sigma_P=P=88,54\cdot10^{-9}\ \mathrm{C/m^2}$. Prostega naboja na površini plošče je 2x več od polariziranega površinskega naboja, torej, vsaki drugi naboj prosti naboj ima svoj nasprotni – polariziran naboj. Pri dielektrikih z veliko relativno dielektričnostjo bo P kar enak D.

SLIKA 17.4: PLOŠČNI KONDENZATOR Z DIELEKTRIKOM.

Pri konstantni napetosti je polje v dielektriku neodvisno od dielektrika in je enako $E=\dfrac{U}{d}=\dfrac{20\ \mathrm{V}}{2\ \mathrm{mm}}=10\ \mathrm{kV/m}$. Zato pa bo v primerjavi z zrakom potrebna gostota naboja, ki bo vzdrževala to polje v dielektriku večja kot v primeru, če med ploščama ni dielektrika (je le zrak), saj velja $E=\dfrac{\sigma}{\varepsilon_r\varepsilon_0}\Rightarrow\sigma=\varepsilon_r\varepsilon_0E=\varepsilon_r\varepsilon_0\dfrac{U}{d}$. Ko bomo vstavili dielektrik, se bo površinska gostota naboja povečala za 2x: od $88,54\cdot10^{-9}\ \mathrm{C/m^2}$ na $177,08\cdot10^{-9}\ \mathrm{C/m^2}$. Razlika je ravno posledica polarizacije, ki na površini dielektrika vzpostavi površinsko gostoto polariziranega naboja (nasprotnega predznaka kot prosti naboj) velikosti $88,54\cdot10^{-9}\ \mathrm{C/m^2}$.

Če pa imamo konstantno gostoto naboja, se bo polje po vložitvi dielektrika med plošči zmanjšalo za $\varepsilon_r: E=\dfrac{\sigma}{\varepsilon_r\varepsilon_0}$, torej na 5 kV/m. To pomeni, da se bo zmanjšala tudi napetost in sicer na 10 V.

Primer: Nekoliko drugačne pa bodo razmere, če bomo med plošči kondenzatorja vstavili dielektrik, ki bo le delno zapolnil vmesni prostor. Vzemimo, da v zračni kondenzator, ki je priključen na napetost 20 V in ima 2 mm razdalje med ploščama potisnemo 1 mm debel kos papirja.

SLIKA 17.5: PLOŠČNI KONDENZATOR Z DVEMA DIELEKTRIKOMA.

Izračun: *D* bo neodvisen od dielektrikov in bo povsod konstanten. Spremenilo pa se bo polje, ki bo $E = \dfrac{D}{\varepsilon_r \varepsilon_0}$ v dielektriku (papirju) in $E = \dfrac{D}{\varepsilon_0}$ v zraku. Da bi določili vrednosti polja moramo zapisati še napetost, ki bo

$$U = \int_0^d E\mathrm{d}x = \frac{D}{\varepsilon_r \varepsilon_0} d_1 + \frac{D}{\varepsilon_0} d_2 = D\left(\frac{d_1}{\varepsilon_r \varepsilon_0} + \frac{d_2}{\varepsilon_0}\right)$$

$$D = \frac{U}{\left(\dfrac{d_1}{\varepsilon_r \varepsilon_0} + \dfrac{d_2}{\varepsilon_0}\right)} = \frac{20\ \mathrm{V}}{\dfrac{1\ \mathrm{mm}}{\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{2} + 1\right)} = 118{,}053 \cdot 10^{-9}\ \mathrm{C/m^2}.$$

Toliko je tudi površinska gostota naboja. Električno polje je torej $E = \dfrac{D}{\varepsilon_r \varepsilon_0} = 6{,}667\ \mathrm{kV/m}$ v dielektriku (papirju), v zraku pa je 2x večje: $13{,}33\ \mathrm{kV/m}$.

Gostota polariziranega površinskega naboja na meji med papirjem in ploščo in papirjem in zrakom je enaka D/2 .

Reševanje primera s pomočjo kapacitivnosti:

$U = Q\left(\dfrac{d_1}{A\varepsilon_r \varepsilon_0} + \dfrac{d_2}{A\varepsilon_0}\right) = Q\left(\dfrac{1}{C_1} + \dfrac{1}{C_2}\right)$. Iz te zveze lahko določimo naboj na površini, iz znanega naboja napetost na papirju in v zraku: $U_1 = \dfrac{Q}{C_1}$ in $U_2 = \dfrac{Q}{C_2}$. Nato iz znanih napetosti določimo polji: $E_1 = \dfrac{U_1}{d_1}$ in $E_2 = \dfrac{U_2}{d_2}$.

Na meji med dvema dielektrikoma, v našem primeru med papirjem in zrakom je skokovit prehod polja. Ker je D enak v obeh medijih bo veljalo:

$\varepsilon_{r1}\varepsilon_0 E_1 = \varepsilon_{r2}\varepsilon_0 E_2$. To je mejni pogoj za prehod med dvema dielektrikoma, ki velja splošno, vendar le za tisto komponento polja, ki je pravokotna na mejo.

Primer: Vzemimo primer dvoplastnega koaksialnega kabla, ki ga želimo dimenzionirati za delovanje na napetosti 20 kV. Prva, notranja plast je iz gume z relativno dielektričnostjo 3,2, druga pa iz polistirena z ε_r = 2,6. Prebojna trdnost gume je 25 kV/mm, polistirena pa 20 kV/mm. Koaksialni kabel polmera žile 4 mm želimo dimenzionirati tako, da maksimalno polje v dielektrikih ne preseže 25% prebojne trdnosti. Določiti moramo debelino obeh dielektrikov, torej radij do plasti polistirena r_P in zunanji radij r_Z.

Izračun:

Pri vzpostavljeni napetosti 20 kV imamo na žili $+q$ naboj, na oklopu pa $-q$. Da bi določili polje v enem in drugem dielektriku, se poslužimo Gaussovega stavka za vektor D, ki je neodvisen od dielektrikov. Za poljubni radij med notranjim in zunanjim dobimo

$D(r) = \dfrac{q}{2\pi r}$ oziroma $\vec{D} = \vec{e}_r D(r) = \vec{e}_r \dfrac{q}{2\pi r}$. Polje v dielektrikih dobimo iz zveze $\vec{E} = \dfrac{\vec{D}}{\varepsilon} = \dfrac{\vec{D}}{\varepsilon_r \varepsilon_0}$, torej bo polje v plasti gume

$$\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\varepsilon_{rg}\varepsilon_0} = \vec{e}_r \frac{q}{2\pi\varepsilon_{rg}\varepsilon_0 r},$$

v plasti polistirena pa

$$\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\varepsilon_{rp}\varepsilon_0} = \vec{e}_r \frac{q}{2\pi\varepsilon_{rp}\varepsilon_0 r}.$$

Maksimalno polje v gumi ne sme preseči 25% prebojne trdnosti, kar zapišemo kot

$$E_{\max,guma} = 25\% E_{preb,guma} = 0{,}25 \cdot 25 \cdot 10^6 \text{ V/m} = 6{,}25 \cdot 10^6 \text{ V/m},$$

za polistiren pa bo veljalo

$$E_{\max,poli} = 25\% E_{preb,poli} = 0{,}25 \cdot 20 \cdot 10^6 \text{ V/m} = 5 \cdot 10^6 \text{ V/m}.$$

Polje bo maksimalno pri čim manjšem radiju, torej pri

$$E_{\max,guma} = \frac{q}{2\pi\varepsilon_{rg}\varepsilon_0 r_n} = 6{,}25 \cdot 10^6 \text{ V/m}$$

in

$$E_{\max,poli} = \frac{q}{2\pi\varepsilon_{rp}\varepsilon_0 r_p} = 5 \cdot 10^6 \text{ V/m}.$$

Če enačbi delimo, lahko določimo r_p:

$$r_p = \frac{\varepsilon_{rg}}{\varepsilon_{rp}} \cdot r_n \cdot \frac{6,25}{5} = \underline{\underline{0,62\ \text{cm}}}.$$

Lahko tudi določimo linijsko gostoto naboja, ki bo $q = 2\pi\varepsilon_{rg}\varepsilon_0 r_n \cdot 6,25 \cdot 10^6\ \text{V/m} = 6 \cdot 10^{-6}\ \text{C/m}$.

Preostane nam še, da določimo potrebno debelino plasti polistirena, za kar pa potrebujemo še eno enačbo, ki jo dobimo iz enačbe za napetost. Integrirati je potrebno polje od notranjega do zunanjega radija, pri čemer pa se polje spremeni med dvema dielektrikoma. Zato je potrebno ločiti integral v dva, enako, kot da bi zapisali celotno napetost kot vsoto padcev napetosti v gumi in v polistirenu. Tako dobimo

$$U = \int_{r_n}^{r_z} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = U_{gume} + U_{poli} = \int_{r_n}^{r_p} \vec{E}_{gume} \cdot \mathrm{d}\vec{l} + \int_{r_p}^{r_z} \vec{E}_{poli} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$$U = \int_{r_n}^{r_p} \vec{e}_r \frac{q}{2\pi\varepsilon_{rg}\varepsilon_0 r} \cdot \vec{e}_r \mathrm{d}r + \int_{r_p}^{r_z} \vec{e}_r \frac{q}{2\pi\varepsilon_{rp}\varepsilon_0 r} \cdot \vec{e}_r \mathrm{d}r =$$

$$U = \frac{q}{2\pi\varepsilon_{rg}\varepsilon_0} \ln\left(\frac{r_p}{r_n}\right) + \frac{q}{2\pi\varepsilon_{rp}\varepsilon_0} \ln\left(\frac{r_z}{r_p}\right)$$

V gornji enačbi je edina neznanka zunanji polmer, ki jo določimo z vstavitvijo vrednosti in dobimo 0,77 cm.

SLIKA 17.6: DVOPLASTNI KOAKSIALNI KABEL.

MEJNI POGOJI

Posredno smo z obravnavo polja v dveh stikajočih se dielektrikih že spoznali. Ugotovili smo, da na meji med dvema dielektrikoma z različnima dielektričnostima pride do nezveznega prehoda (skoka) električnega polja. V tem poglavju želimo spoznati splošne zakonitosti prehoda polja iz enega medija v drugega. Izpeljemo jih iz Gaussovega zakona in zakona o potencialnosti (konzervativnosti) elektrostatičnega polja.

Mejni pogoj za normalno komponento polja.

Mejni pogoj za normalno (pravokotno) komponento dobimo iz Gaussovega zakona:

$$\oint_A \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{A} = Q_{\mathrm{prosti,znotraj}}$$

Zamislimo si površino med dvema dielektrikoma in kocko, katere stranice stiskamo v smeri meje. Ker moramo računati D skozi zaključeno površino (ven iz površine) bomo pisali:

$\vec{D}_1\cdot \mathrm{d}\vec{A} - \vec{D}_2\cdot \mathrm{d}\vec{A} = \sigma_{prosti}\cdot \mathrm{d}A$ ali tudi

$\boxed{\vec{e}_{\mathrm{n}}\cdot\left(\vec{D}_1-\vec{D}_2\right)=\sigma_{\mathrm{prosti}}}$ ali tudi $D_{1\mathrm{n}} - D_{2\mathrm{n}} = \sigma_{\mathrm{prosti}}$. (17.16)

Enotski vektor kaže iz dielektrika z indeksom 2 v dielektrik z indeksom 1. Če je površinska gostoto prostega naboja na meji dveh dielektrikov enaka nič, velja

$\boxed{D_{1\mathrm{n}} = D_{2\mathrm{n}}}$ ali tudi $\varepsilon_1 E_{1\mathrm{n}} = \varepsilon_2 E_{2\mathrm{n}}$. (17.17)

Če poznamo normalno komponento polja na meji na eni strani dielektrika, z lahkoto izračunamo normalno komponento na meji v drugem dielektriku.

SLIKA 17.7: PREHOD NORMALNE KOMPONENTE POLJA.

MEJNI POGOJ ZA TANGENCIALNO KOMPONENTO POLJA

Potrebujemo še mejni pogoj za komponente polja, ki so vzporedne (tangencialne) z mejo. Tu uporabimo zakon potencialnosti polja:

$\oint_L \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0$. Vzemimo pravokotnik na meji dveh dielektrikov in ga stiskajmo v smeri meje. Integral polja bo imel tako le komponenti v smeri meje – tangencialni komponenti. Veljalo bo torej: $E_{1\mathrm{t}}\cdot l - E_{2\mathrm{t}}\cdot l = 0 \Rightarrow E_{1\mathrm{t}} = E_{2\mathrm{t}}$.

$$\boxed{E_{1\mathrm{t}} = E_{2\mathrm{t}}}. \tag{17.18}$$

SLIKA 17.8: PREHOD TANGENCIALNE KOMPONENTE POLJA.

Združimo obe enačbi v »lomni zakon«. Če na meji dveh dielektrikov ni površinskega (prostega) naboja, velja:

$$E_{1\mathrm{t}} = E_{2\mathrm{t}}$$

$$\varepsilon_1 E_{1\mathrm{n}} = \varepsilon_2 E_{2\mathrm{n}}$$

Če enačbi delimo med sabo, dobimo:

$$\frac{1}{\varepsilon_1}\frac{E_{1\mathrm{t}}}{E_{1\mathrm{n}}} = \frac{1}{\varepsilon_2}\frac{E_{2\mathrm{t}}}{E_{2\mathrm{n}}}$$

$$\frac{1}{\varepsilon_1}\tan(\alpha_1) = \frac{1}{\varepsilon_2}\tan(\alpha_2) \text{ ali } \boxed{\frac{\tan(\alpha_1)}{\tan(\alpha_2)} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}}$$

α je vpadni kot med normalo na površino in smerjo polja.

Primer: Homogeno polje 100 V/m je usmerjeno pod kotom 45° iz zraka v olje z $\varepsilon_\mathrm{r} = 2$. Izračunajte električno poljsko jakost v olju in skicirajte vektorja polja na meji zrak-olje.

<u>Izračun:</u> Ohranja se tangencialna komponenta, ki bo tudi v olju enaka $E_{1t} = E_{2t} = 100\ \mathrm{V/m}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$. Normalna komponenta polja v olju pa se zmanjša za ½, saj velja

$E_{2\mathrm{n}} = \dfrac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} E_{1\mathrm{n}} = \dfrac{1}{2} E_{1\mathrm{n}} = \dfrac{1}{2} 100\ \mathrm{V/m} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Absolutna vrednost polja v olju pa je $E_2 = \sqrt{E_{1\mathrm{n}}^2 + E_{2\mathrm{t}}^2} \cong \underline{\underline{79\ \mathrm{V/m}}}$. Polje v olju se zmanjša, saj se zmanjša normalna komponenta polja, tangencialna pa ostane enaka.

SLIKA 17.9: LOM POLJA NA MEJI ZRAK-OLJE.

POLJE NA MEJI DIELEKTRIKA IN KOVINE

Poseben primer je meja dielektrik - prevodnik. Vzemimo, da označimo dielektrik z indeksom 1, prevodnik pa z 2. Predhodno smo že ugotovili, da je elektrostatično polje znotraj prevodnika enako nič: $E_2 = 0$. Ker velja $E_{1\mathrm{t}} = E_{2\mathrm{t}}$, bo tangencialna komponenta polja v izolatorju na meji z dielektrikom enaka nič. To pa obenem pomeni, da bo imelo polje v izolatorju na meji s prevodnikom le normalno komponento, ki bo enaka $D_{1\mathrm{n}} - 0 = \sigma_{prosti}$ oziroma,

$$E_1 = E_{1\mathrm{n}} = \frac{\sigma}{\varepsilon_1}. \tag{17.19}$$

Prišli smo do že znane ugotovitve, da je polje na površini prevodnika pravokotno na površino in sorazmerno površinski gostoti naboja.

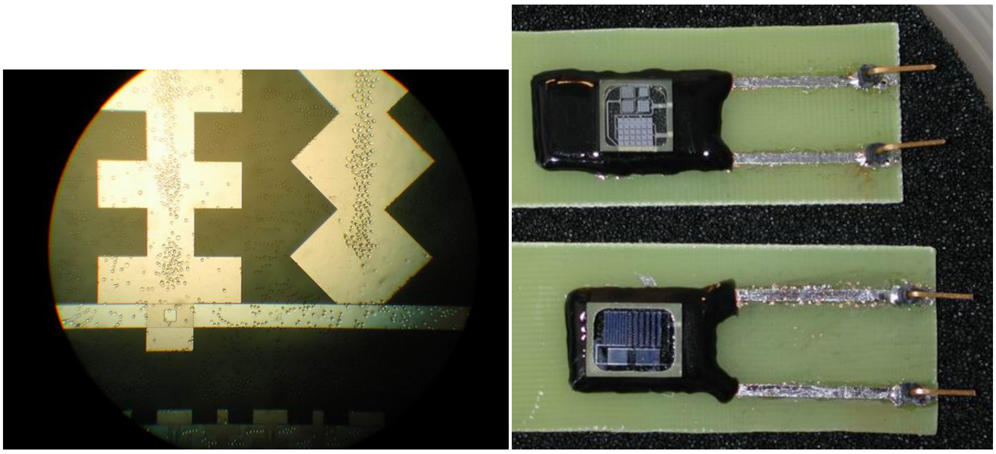
Zapišimo še enkrat tudi ploskovno silo na prevodnik: $f = \sigma \dfrac{\sigma}{2\varepsilon}$.

SLIKA 17.10: POLJE NA MEJI IZOLATOR – KOVINA.

* SILA MED DIELEKTRIKI

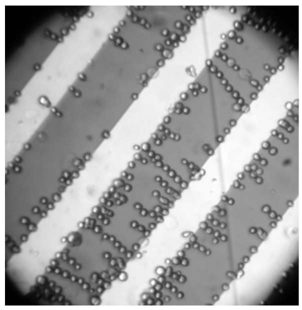
Zanimiv je tudi primer, ko želimo izračunati silo med dvema dielektrikoma. Primer je sila na nevtralne dielektrične delce v nehomogenem polju. Zaradi različne dielektričnost delca in medija deluje na delec sila, ki jo lahko določimo z integracijo ploskovne sile na delec. Brez izpeljave zapišimo rezultat, ki bo $f = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{2}\left(E_t^2 + \frac{D_n^2}{\varepsilon_1 \varepsilon_2}\right)$. Smer te ploskovne sile je v smeri prostora z manjšo dielektričnostjo.

Tako je mogoče dielektrične delce usmerjati z vzpostavitvijo električnega polja med dvema ali več elektrodami. Delci se naberejo tam, kjer je polje največje – na ostrih robovih elektrod ali pa na mestih, kjer je električno polje najmanjše. Dodatno kontrolo nad gibanjem delcev nam ponuja vzbujanje z izmeničnim signalom. Dielektrične lastnosti snovi (relativna dielektričnost) se s frekvenco signala spreminja, kar omogoča manipulacijo delcev z električnim poljem. V Laboratoriju za bioelektromagnetiko smo skupaj z Laboratorijem za mikrosenzorske strukture in Laboratorijem za biokibernetiko načrtali in izdelali strukture za manipulacijo bioloških celic s pomočjo dielektroforeze. Če je elektroforeza pojav, v katerem izkoriščamo silo na naelektrene delce, je dielektroforeza pojav, kjer izkoriščamo silo na dielektrične (električno nevtralne) delce.



SLIKA 17.11: MANIPULACIJA BIOLOŠKIH CELIC Z ELEKTRIČNIM POLJEM. CELICE SE KONCENTRIRAJO NA MESTU NAJMANJŠEGA POLJA, KI JE V SREDINI IN NA POVRŠINI ELEKTROD. RAZDALJA MED ELEKTRODAMA JE 50 μM. NA DESNI STA PRIKAZANA MODULA Z IZDELANIMI MIKROSTRUKTURAMI. MIKROSTRUKTURE SO IZDELANE S POLPREVODNIŠKO TEHNOLOGIJO NA PYREX STEKLU Z DVOSLOJNO METALIZACIJO.

Delovanje dielektroforeze smo ugotavljali tudi pri eksperimentu s semenkami v enosmernem polju. Semenke so iz dielektrika in se usmerijo v smer polja, ker pa so v dovolj gostem mediju, se težje prosto gibljejo. Potrebovali bi še večjo silo, da bi premagali silo viskoznosti. Smo pa opazili značilnost veriženja, ki jo opazimo tudi pri celicah na mikrostrukturah. Poleg tega so pazljivi lahko opazili, da se giblje tudi olje v katerem so bile semenke. Tudi na molekule olja (dielektrik) deluje sila, ki jih premakne v smeri elektrod.

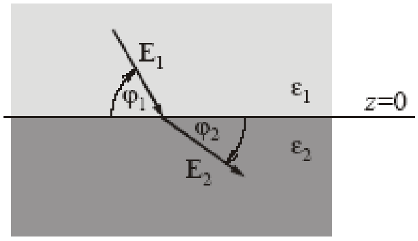


SLIKA: Veriženje celic pri pojavu dielektroforeze.

PRIMERI:

Primer kolokvijske naloge z dne 11.12.2001:

Ravnina $z = 0$ je meja med dvema dielektrikoma, z relativnima dielektričnostima $\varepsilon_{r1} = 5$ za prostor $z > 0$ in $\varepsilon_{r2} = 12$ za prostor $z < 0$. V prvem prostoru je električna poljska jakost $E_1 = 10^5$ V/m in je usmerjena pod kotom $\varphi_1 = 60°$ glede na ravnino $z = 0$. Določite velikost električne poljske jakosti v drugem prostoru in kot φ_2, ki ga oklepa z ravnino $z = 0$.



$$E_1 = 10^5\,\mathrm{V/m} \qquad E_{1t} = E_1 \cos\varphi_1 = 50\,\mathrm{kV/m}$$
$$\varphi_1 = 60^\circ \qquad E_{1n} = E_1 \sin\varphi_1 = 86{,}6\,\mathrm{kV/m}$$
$$\varepsilon_{r1} = 5 \qquad E_{2t} = E_2 \cos\varphi_2$$
$$\varepsilon_{r2} = 12 \qquad E_{2n} = E_2 \sin\varphi_2$$

$$E_{2t} = E_{1t} = 50\,\mathrm{kV/m}$$

$$D_{2n} = D_{1n} \rightarrow E_{2n} = E_{1n}\frac{\varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r2}} = 36{,}1\,\mathrm{kV/m}$$

$$\underline{E_2 = \sqrt{E_{2t}^2 + E_{2n}^2} = 61{,}7\,\mathrm{kV/m}}$$

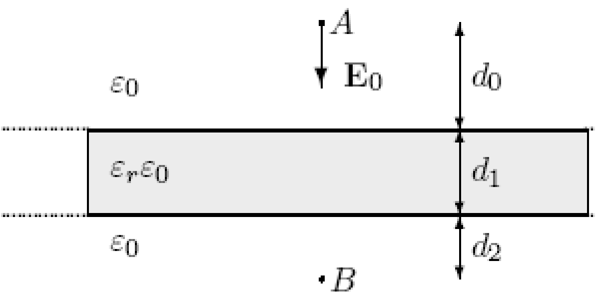
$$\underline{\tan\varphi_2 = \frac{E_{2n}}{E_{2t}} \rightarrow \varphi_2 = 35{,}8^\circ}$$

Nalogo bi lahko rešili tudi z uporabo lomnega zakona $\frac{\tan(\alpha_1)}{\tan(\alpha_2)} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$, pri čemer pa bi morali paziti, da je kot alfa definiran glede na normalo in ne na mejo, torej je $\alpha_1 = 90^0 - 60^0 = 30^0$ in

$\tan(\alpha_2) = \tan(\alpha_1)\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = \tan(30^0)\frac{12}{5} = 1{,}386$, od koder je $\alpha_2 \cong 54{,}2^0$ in $\varphi_2 = 35{,}8^0$.

Primer kolokvijske naloge 17.12.2003 (UNI):

Napetost med točkama A in B je 300 V. Določite navpično komponento električne poljske jakosti v praznem prostoru, če je relativna dielektričnost vmesne plasti $\varepsilon_r = 8$!
Podatki: $d_0 = d_2 = 2$ cm, $d_1 = 16$ cm.



Ker je polje v vsakem od prostorov homogeno, lahko napetost med točkama A in B zapišemo kot vsoto treh prispevkov $U_{AB} = E_{0y}d_0 + E_{1y}d_1 + E_{2y}d_2$. Mejni pogoj na mejah med plastmi predpisuje $\varepsilon_r E_{1y} = E_{0y} = E_{2y}$. Sledi

$$E_{0y} = \frac{U_{AB}}{d_0 + \frac{d_1}{\varepsilon_r} + d_2} = \underline{\underline{5\ \mathrm{kV/m}}}.$$

Vprašanja za obnovo:

1. Kako je definirana relativna dielektričnost in kaj pomeni?
2. Kolikšne so tipične vrednosti relativne dielektričnosti?
3. Kakšna je fizikalna razlaga spremembe kapacitivnosti ob uporabi dielektrika pri a) konstantnem naboju med ploščama kondenzatorja in b) pri konstantni napetosti med ploščama?
4. Kako je definiran vektor polarizacije?
5. Čemu je enak vektor polarizacije na površini dielektrika?
6. Kakšna je povezava med električno poljsko jakostjo in vektorjem polarizacije?
7. Kako je definiran vektor gostote električnega pretoka? Zakaj je njegova vpeljava koristna (potrebna)?
8. Kakšna je zveza med gostoto električnega pretoka in jakostjo polja?
9. Dobro prouči primere nalog.
10. Mejni pogoj za normalno komponento polja.
11. Mejni pogoj za tangencialni komponenti polja.
12. Lomni zakon.
13. Polje na meji dielektrika in kovine.

18. Energija

Vsebina poglavja: Ponovitev dela in potencialne energije, energija naboja pri preletu polja, potencialna energija sistema nabojev, električna energija v polju kondenzatorja, energija sistema porazdeljenih nabojev, gostota energije, energija pri gibalnih procesih – sila.

Ponovitev: delo električnih sil, potencialna energija, napetost in potencial

V tem poglavju bomo ponovili določena spoznanja iz poglavja 12 (Delo in energija) in jih nadgradili s celostnim pogledom na pojem energije v elektrostatiki. V poglavju 12 smo spoznali, da je delo električnih sil potrebno za premik naboja Q iz točke T_1 v točko T_2 $A_\mathrm{e} = A_{12} = \int_{T_1}^{T_2} \vec{F}_\mathrm{e} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = Q\int_{T_1}^{T_2} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$.

Električna napetost je enaka delu, ki jo enota pozitivnega naboja (1 C) opravi pri premiku iz točke T_1 v točko T_2

$$U = \frac{A_\mathrm{e}}{Q} = \int_{T_1}^{T_2} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} \ . \tag{18.1}$$

Hkrati smo ugotovili, da je potencialna energija naboja enaka delu, ki ga opravi zunanja sila pri prenosu iz oddaljenosti (kjer je njegov potencial enak nič) do mesta, kjer se nahaja. Enakovredno lahko rečemo, da je ta energija enaka delu električnih sil za premik z mesta, kjer se nahaja do neskončnosti (kjer je potencial enak nič): $\boxed{W(T) = A_e(T \to T_\infty)}$. Ta definicija pa je hkrati definicija potenciala, le da je definirana s potencialno energijo enote naboja:

$$V(T) = \frac{A_\mathrm{e}(T \to \infty)}{Q} = \int_{T}^{T(V=0)} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} \ . \tag{18.2}$$

Energija posameznega naboja pri preletu električnega polja.

Če se v električnem polju giblje le en naboj, se njegova potencialna energija poveča ali zmanjša za $\varDelta W = Q\varDelta V = QU$. Tak primer je na primer gibanje elektrona v električnem polju. Če preleti elektron v smeri polja napetost 20 kV, se bo njegova kinetična energija povečala na račun zmanjšanja potencialne za $\varDelta W = QU = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{As} \cdot 20\ \mathrm{kV} = 3{,}2 \cdot 10^{-14}\ \mathrm{J}$. Pogosto namesto enote Joule pri zapisu energije osnovnih delcev uporabljamo enoto elektron-volt, kjer je 1 eV = 1,6 10^{-19} J. V tem smislu je kinetična energija delca po preletu polja 20 kV enaka 20 10^3 eV ali 20 keV.

SLIKA 18.1: ENERGIJA NABOJA PRI PRELETU POLJA.

POTENCIAL V OKOLICI OSAMLJENEGA NABOJA IN ENERGIJA SISTEMA DVEH NABOJEV

Potencial na razdalji *r* od osamljenega točkastega naboja *Q* je $V(r)=\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$. Da bi na razdaljo *r* od naboja *Q* pripeljali naboj Q_2 bi torej potrebovali energijo $W=Q_2V=Q_2\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$. Ali tudi: v sistemu dveh nabojev *Q* in Q_2 je shranjena potencialna energija $W=\dfrac{Q_2Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$.

SLIKA 18.2: DELO ELEKTRIČNIH SIL IN POTENCIALNA ENERGIJA.

POTENCIALNA ENERGIJA SISTEMA TOČKASTIH NABOJEV

Vzemimo, da imamo prostor brez nabojev in torej brez električnega polja. Če želimo v ta prostor prenesti naboj, moramo opraviti delo. V električnem smislu za prenos prvega naboja (Q_1) ni potrebno vložiti nič dela, saj ni nobene električne sile na ta delec. Ko pa želimo v njegovo bližino prenesti naboj Q_2, moramo za to opraviti delo, ki bo $A_{1\infty}=\int_{T_1}^{\infty} Q_2\vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=\dfrac{Q_1Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_{12}}$,

kjer je r_{12} razdalja med nabojema Q_1 in Q_2.

SLIKA 18.3: ELEKTRENJE PROSTORA Z VNAŠANJEM NABOJEV.

Ko prenašamo tretji naboj, mora ta premagovati dvoje sil, tako na naboj Q_1, kot na naboj Q_2. Torej potrebujemo opraviti delo $\dfrac{Q_1Q_3}{4\pi\varepsilon_0 r_{13}}+\dfrac{Q_2Q_3}{4\pi\varepsilon_0 r_{23}}$, kjer sta r_{12} in r_{23} razdalji med nabojema Q_1 in Q_3 ter Q_2 in Q_3. In tako dalje. To delo se shrani v obliki potencialne energije v pozicijah delcev. Potencialna energija sistema treh nabojev je torej

$$W = \frac{Q_1Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_{12}} + \frac{Q_1Q_3}{4\pi\varepsilon_0 r_{13}} + \frac{Q_2Q_3}{4\pi\varepsilon_0 r_{23}}\,.$$

Zapišimo to vsoto nekoliko drugače:

$$W = \frac{1}{2}Q_1\left(\frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_{12}} + \frac{Q_3}{4\pi\varepsilon_0 r_{13}}\right) + \frac{1}{2}Q_2\left(\frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_{12}} + \frac{Q_3}{4\pi\varepsilon_0 r_{13}}\right) + \frac{1}{2}Q_3\left(\frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_{13}} + \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_{23}}\right).$$

Ugotovimo, da so vrednosti v oklepajih enake potencialom V_1, V_2 in V_3, kjer je V_1 potencial na mestu naboja Q_1, ki ga povzročata naboja Q_2 in Q_3. Enačbo torej lahko zapišemo v obliki:

$$W = \frac{1}{2}Q_1V_1 + \frac{1}{2}Q_2V_2 + \frac{1}{2}Q_3V_3\,.$$

Očitno bi lahko za sistem n nabojev zapisali potencialno energijo v obliki:

$$W = \frac{1}{2}Q_1V_1 + \frac{1}{2}Q_2V_2 + \frac{1}{2}Q_3V_3 + \cdots + \frac{1}{2}Q_nV_n\,,$$

oziroma na kratko

$$\boxed{W = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} Q_iV_i}, \qquad (18.3)$$

kjer je V_i je potencial na mestu naboja Q_i in ga zapišemo kot vsoto:

$$\boxed{V_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{\substack{j=1\\ i\neq j}}^{n} \frac{Q_j}{r_{ij}}}, \qquad (18.4)$$

kjer so r_{ij} razdalje med nabojem Q_i in Q_j.

Primer: Določimo energijo sistema treh enako velikih nabojev Q = 20 nC, ki se nahajajo v ogliščih enakostraničnega trikotnika stranice a = 10 cm.

SLIKA 18.4: SISTEM TREH NABOJEV V OGLIŠČIH ENAKOSTRANIČNEGA TRIKOTNIKA.

Izračun: Ker so naboji enako veliki in simetrično razporejeni, je tudi potencial na vseh mestih nabojev enako velik. Na mestu naboja Q_1 je enak: $V_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{\substack{j=1\\ i\neq j}}^{3}\frac{Q_j}{r_{ij}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q_2}{a}+\frac{Q_3}{a}\right) = 2\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a}$. Energija sistema bo torej

$$W = \frac{1}{2}Q_1V_1 + \frac{1}{2}Q_2V_2 + \frac{1}{2}Q_3V_3 = 3\cdot\frac{1}{2}Q_1V_1 = 3\frac{1}{2}Q2\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a} = \frac{3Q^2}{4\pi\varepsilon_0 a}$$, in številčno

$$W = \frac{3Q^2}{4\pi\varepsilon_0 a} = 9\cdot 10^9\,\frac{\mathrm{V\cdot m}}{\mathrm{A\cdot s}}\cdot\frac{3\cdot\left(20\cdot 10^{-9}\,\mathrm{C}\right)^2}{0{,}1\,\mathrm{m}} = \underline{\underline{108\ \mu\mathrm{J}}}\,.$$

Primer: Koliko dela moramo vložiti za premik naboja iz enega oglišča v sredino med druga dva naboja?

Izračun: Vzemimo zgornji naboj (označen kot Q_3) in ga premaknimo med Q_1 in Q_2. Delo bi lahko določili iz osnovne formule za izračun dela, torej kot $A_e = Q_2\int_{T_1}^{T_2}\vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$, kjer je E polje na mestu naboja Q_2. Izračunati bi morali polje na mestu naboja (kar v konkretnem primeru ne bi bilo ravno zahtevno) in ga integrirati po poti. Še bolj enostavno pa je določiti delo iz razlike potencialnih energij sistema pred in po premiku:

$$\boxed{A(T_1 \to T_2) = W(T_1) - W(T_2) = W_{začetna} - W_{končna}}.$$

Energijo v začetni legi smo že določili, preostane še izračun v končni legi $W(T_2)$.

$$W(T_2) = W_{končna} = \frac{1}{2}Q_1V_1 + \frac{1}{2}Q_2V_2 + \frac{1}{2}Q_3V_3 = 2\frac{1}{2}Q_1V_1 + \frac{1}{2}Q_3V_3 =$$
$$= Q_1\left(\frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 a} + \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 a/2}\right) + \frac{1}{2}Q_3\left(\frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 a/2} + \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 a/2}\right) = \frac{3Q^2}{4\pi\varepsilon_0 a} + \frac{2Q^2}{4\pi\varepsilon_0 a} = \frac{5Q^2}{4\pi\varepsilon_0 a}.$$

Energija sistema se bo po premiku očitno povečala, torej bo delo negativno. To pomeni, da ga bodo morale opraviti zunanje sile. To delo bo enako

$$A = \frac{3Q^2}{4\pi\varepsilon_0 a} - \frac{5Q^2}{4\pi\varepsilon_0 a} = -\frac{2Q^2}{4\pi\varepsilon_0 a} = \underline{\underline{-72\ \mu\mathrm{J}}}\,.$$

ENERGIJA V POLJU KONDENZATORJA

Tako kot smo potrebovali določeno energijo, da smo v prostor pripeljali naboje, je potrebna določena energija, da naelektrimo kondenzator. V najpreprostejši obliki si lahko kondenzator predstavljamo kar kot dve prevodni telesi. Med njiju priključimo vir napetosti in povečujmo napetost. Z večanjem napetosti med telesoma, se povečuje tudi naboj na telesoma. Pač skladno z enačbo $Q = CU$. Vzemimo sedaj (diferencialno) majhen naboj dQ in ga premaknimo iz enega telesa na drugega, pri čemer je napetost med telesoma U. Sprememba energije bo enaka $\mathrm{d}W = \mathrm{d}Q\cdot U$. Napetost lahko izrazimo tudi z nabojem in kapacitivnostjo, tako da je diferencial energije enak $\mathrm{d}W = \frac{Q}{C} \cdot \mathrm{d}Q$.

Celotno energijo, ki smo jo pridobili z elektrenjem kondenzatorja dobimo z integracijo naboja od začetnega (0), do končnega $Q_{\text{končni}}$:

$$\boxed{W = \int_0^{Q_{končni}} \frac{Q}{C} \cdot \mathrm{d}Q = \frac{Q_{končni}^2}{2C}}. \tag{18.5}$$

SLIKA 18.5: ELEKTRENJE KONDENZATORJA IN GRAF POVEČEVANJA NABOJA NA KONDENZATORJU Z VEČANJEM NAPETOSTI MED ELEKTRODAMA.

To je energija v naelektrenem kondenzatorju, ki jo lahko izkoristimo v različne namene. Ni pa nujno, da je to tudi celotna energija, ki jo lahko koristno uporabimo. Del energije se ob razelektritvi lahko porabi tudi znotraj kondenzatorja (baterije) - na njeni notranji upornosti.

Enačbo lahko s pomočjo zveze $Q = CU$ zapišemo tudi v obliki

$$\boxed{W = \frac{Q^2}{2C} = \frac{CU^2}{2} = \frac{QU}{2}} \tag{18.6}$$

Primer: Določimo energijo v zračnem ploščnem kondenzatorju kapacitivnosti 20 nF, ki je priključen na enosmerni vir napetosti 60 V. Za koliko procentov se spremeni energija shranjena v kondenzatorju, če razdaljo med ploščama razpolovimo?

Izračun: Električna energija shranjena v kondenzatorju je $W = \frac{CU^2}{2} = \frac{20\ \mathrm{nF} \cdot (60\ \mathrm{V})^2}{2} = \underline{\underline{36\ \mu\mathrm{J}}}$. Iz enačbe za kapacitivnost ploščnega kondenzatorja $C = \varepsilon_0 \frac{A}{d}$ ugotovimo, da zmanjšanje razdalje med ploščama za polovico predstavlja zvečanje kapacitivnosti za 2x, kar pomeni, da se bo energija povečala za 2x, na 72 mJ, torej za 100%.

Dodatno: Za koliko procentov se bo spremenila energija v kondenzatorju, če pred zmanjšanjem razdalje med ploščama kondenzatorja za polovico odklopimo kondenzator od vira napajanja?

Izračun: Sedaj se ohranja naboj, ki ga je pred odklopom $Q = CU = 20\ \mathrm{nF} \cdot 60\ \mathrm{V} = 1{,}2\ \mu\mathrm{C}$, enako pa tudi po preklopu, saj se naboj ohranja. Torej bo ob 2x večji kapacitivnost ob premiku energija enaka $W = \dfrac{Q^2}{2C} = \dfrac{(1{,}2\ \mu\mathrm{C})^2}{2 \cdot 2 \cdot 20\ \mathrm{nF}} = \underline{\underline{18\ \mu\mathrm{J}}}$. Energija v kondenzatorju se bo očitno zmanjšala za 2x. Zakaj? .....

Med pozitivno in negativno naelektreno ploščo deluje sila, ki plošči privlači. Če ne bi delovale druge sile (težnosti, lepenja), bi se plošči združili, naboji bi se razelektrili in energija bi se pretvorila v drugo obliko (recimo toplotno). Torej se energija sistema manjša z zmanjševanjem razdalje med elektrodama.

Dodatno: V zračni kondenzator vstavimo dielektrik z relativno dielektrično konstanto 10. Za koliko se poveča energija v kondenzatorju pri ohranitvi priključene napetosti 60 V ali pri konstantnem naboju 1,2 μF.

Izračun: V skladu z izrazom $C = \varepsilon_r \varepsilon_0 \dfrac{A}{d}$ se kapacitivnost kondenzatorja poveča za 10x. V skladu s tem se energija v kondenzatorju pri priključeni napetosti poveča za 10x, v primeru konstantnega naboja pa se zmanjša za 10x.

Vprašanje: Kako razložimo povečanje oz. zmanjšanje energije pri vstavitvi dielektrika?

SLIKA 18.6: ENERGIJA V KONDENZATORJU Z DIELEKTRIKOM IN BREZ DIELEKTRIKA.

Dodatno: Koliko je energija v kondenzatorju, če pri priključeni napetosti vstavimo vanj dielektrični listič debeline, ki je enaka polovici razdalje med elektrodama in ima relativno dielektričnost 6?

Izračun: Spremeni se kapacitivnost $C = \varepsilon_0 \dfrac{A}{d}$ in sicer tako, da imamo sedaj zaporedno vezavo dveh kapacitivnosti $C_{zraka} = \varepsilon_0 \dfrac{A}{d/2}$ in $C_{diel} = \varepsilon_r \varepsilon_0 \dfrac{A}{d/2}$, torej je $C_{diel} = 6.C_{zraka}$ in nadomestna kapacitivnost $C_{nad} = \dfrac{C_{diel} \cdot C_{zraka}}{C_{diel} + C_{zraka}} = \dfrac{6C_{zraka} \cdot C_{zraka}}{6C_{zraka} + C_{zraka}} = \dfrac{6}{7} C_{zraka} = \dfrac{6}{7} 2 \cdot C = \dfrac{12}{7} C$. Kapacitivnost kondenzatorja je po vložitvi dielektrika približno 2x večja (za 12/7) od začetne kapacitivnosti. Ker je priključena napetost fiksna, bo energija po vložitvi lističa večja od prvotne za 12/7 in bo enaka

$W=\dfrac{\frac{12}{7}C\cdot U^2}{2}=\underline{\underline{61,71\ \mathrm{mJ}}}$. Pred vložitvijo dielektričnega lističa pa je bila energija v kondenzatorju 36 μJ. Zakaj se je energija povečala? Ko vstavimo dielektrik med plošči kondenzatorja, se na površini kondenzatorja poveča naboj (ki pride iz vira), ki kompenzira zmanjšanje polja v dielektriku zaradi polarizacije dielektrika.

Dodatno: Kaj pa, če pred vstavitvijo dielektrika odklopimo vir? ..... V tem primeru se bo na ploščama kondenzatorja ohranil naboj (ne bo se povečal), kapacitivnost pa se bo povečala kot smo že izračunali – za 12/7. Energija pa se bo posledično zmanjšala, kar sledi iz $W=\dfrac{Q^2}{2\cdot\frac{12}{7}C}$, torej za 7/12.

Določitev kopacitivnosti iz energije v kondenzatorju

Pogosto se gornji izraz uporabi tudi za določitev kapacitivnosti. Če torej znamo energijo ob znani napetosti med elektrodama v kondenzatorju določiti na nek drug način, potem lahko izračunamo kapacitivnost iz $\boxed{C=\dfrac{2W}{U^2}}$. (18.7)

Energija elektrostatičnega sistema porazdeljenih nabojev

Poslužimo se izraza iz prejšnjega odstavka, pri čemer zamenjamo napetost *U* za potencial *V*, ki je potencial na mestu diferencialno majhnega naboja d*Q*:

$$\mathrm{d}W=\mathrm{d}Q\cdot V\ .$$

Z integracijo po vseh nabojih in upoštevanju potenciala na mestu teh nabojev je energija elektrostatičnega sistema enaka

$$W=\int\limits_{\text{po vseh Q-jih}} V\mathrm{d}Q\,,$$

kjer lahko pišemo tudi $\mathrm{d}Q=\rho\cdot\mathrm{d}V$ in

$$\boxed{W=\int\limits_{\mathrm{V}} V_{\mathrm{el}}\rho\mathrm{d}V}. \qquad (18.8)$$

Nerodnost te enačbe je, da uporabljamo enak simbol za volumen in potencial. Da bi to razmejili, smo v zadnji enačbi zapisali potencial kot V_{el}.

Gostota energije in energija polja

Do sedaj smo izračunavali električno energijo iz kapacitivnosti, naboja in napetosti. Ker je vez med napetostjo in nabojem električna poljska jakost, mora obstajati tudi povezava med energijo in jakostjo polja. Vzemimo primer naelektrene krogle z nabojem *Q*, ki je na potencialu *V*. Električna energija, potrebna, da smo zbrali skupaj ta naboj, je enaka $W = \frac{1}{2}QV$.

SLIKA 18.7: ENERGIJA V POLJU NAELEKTRENE KROGLE.

V tem smislu bi za postavitev dela naboja pri določenem potencialu potrebovali energijo $\mathrm{d}W = \frac{1}{2}V\mathrm{d}Q$. d*Q* lahko izrazimo z uporabo Gaussovega zakona $E \cdot \mathrm{d}A = \mathrm{d}Q / \varepsilon_0$. Diferencial energije pa zapišemo v obliki

$\mathrm{d}W = \frac{1}{2}V(\varepsilon_0 E\mathrm{d}A)$. Poleg tega zapišemo diferencial potenciala kot $\mathrm{d}V = E\mathrm{d}l$, od koder lahko za diferencial energije zapišemo $\mathrm{d}W = \frac{1}{2}E \cdot \mathrm{d}l(\varepsilon_0 E\mathrm{d}A)$ in ker je diferencial volumna enak $\mathrm{d}V = \mathrm{d}A \cdot \mathrm{d}l$ je $\mathrm{d}W = \frac{1}{2}E\varepsilon_0 E\mathrm{d}V = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2\mathrm{d}V$. Z integracijo po volumnu pa dobimo celotno energijo sistema:

$$\boxed{W = \int_V \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 \mathrm{d}V} \tag{18.9}$$

Izraz v integralu lahko prepoznam kot **gostoto energije** in ga tako tudi poimenujemo ter uporabimo simbol *w*:

$$\boxed{w = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2} \tag{18.10}$$

Enota je energija na volumen, torej J/m^3.

Enačba za energijo, ki smo jo zapisali, velja za polje v vakuumu oz. zraku. Če imamo polje v dielektriku, bi do izraza za energijo prišli na podoben način, le z uporabo Gaussovega zakona za dielektrike. V tem smislu bi dobili za energijo

$$W = \int_{Vol} \frac{1}{2}\varepsilon_r\varepsilon_0 E^2 \cdot \mathrm{d}V \text{ ,}$$

za diferencial energije pa

$$w = \frac{1}{2}\varepsilon_r\varepsilon_0 E^2 \text{ .}$$

Bolj splošen izraz, ki pa ga ne bomo izpeljevali je $\boxed{w = \frac{1}{2}\vec{D}\cdot\vec{E}}$ oziroma za diferencial gostote energije.

$$\boxed{\mathrm{d}w = \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{D}}. \tag{18.11}$$

Primer: Določimo izraz za energijo ploščnega kondenzatorja površine plošč *A* in razdalje med ploščama *d* z uporabo enačbe $W = \int_V \frac{1}{2}\varepsilon_r\varepsilon_0 E^2 \mathrm{d}V$.

Izračun: $E = \dfrac{U}{d}$,

$$W = \int_{Vol} \tfrac{1}{2}\varepsilon_r\varepsilon_0 E^2 \cdot dV = \tfrac{1}{2}\varepsilon_r\varepsilon_0 E^2 \int_V \mathrm{d}V = \tfrac{1}{2}\varepsilon_r\varepsilon_0\left(\frac{U}{d}\right)^2 V =$$
$$= \tfrac{1}{2}\varepsilon_r\varepsilon_0\left(\frac{U}{d}\right)^2 \cdot A\cdot d = \tfrac{1}{2}\varepsilon_r\varepsilon_0\frac{U^2}{d}\cdot A = \tfrac{1}{2}\varepsilon_r\varepsilon_0\frac{A}{d}\cdot U^2 = \tfrac{1}{2}C\cdot U^2.$$

Dobimo seveda enak izraz kot smo ga že izpeljali za energijio v polju kondenzatorja. Razlika je le v tem, da znamo sedaj ugotavljati tudi energijo shranjeno v električnem polju, izraženo z gostoto električne energije, ta pa je sorazmerna kvadratu električne poljske jakosti.

GIBALNI PROCESI – SILA NA NAELEKTRENA TELESA

1) PRIMER GIBALNIH PROCESOV NAELEKTRENIH TELES BREZ PRIKLJUČENEGA VIRA NAPETOSTI.

Vzemimo sistem dveh naelektrenih teles z naboji +*Q* in -*Q*. Energija shranjena v električnem polju je enaka $W_e = \dfrac{QU}{2}$. Če dopustimo, da se eno od teles premakne v smeri drugega za neko majhno razdaljo d*l*, pri tem opravi delo $\mathrm{d}A = \vec{F}_e \cdot \mathrm{d}\vec{l}$. To delo se je opravilo na račun zmajšanja električne energije sistema, saj mora veljati, da je vsota opravljenega dela in zmajšane električne energije enaka nič: $\mathrm{d}W_e + \mathrm{d}A = 0$. Če izrazimo delo le v smeri X, bo veljalo: $F_{e,x}\cdot \mathrm{d}x = -\mathrm{d}W_e$ in torej

$F_{e,x} = -\dfrac{\mathrm{d}W_e}{\mathrm{d}x}$. Če se razmere spreminjajo tudi v drugih smereh, je bolj korektno uporabiti parcialni odvod:

$$\boxed{F_{e,x} = -\frac{\partial W_e}{\partial x}}. \tag{18.12}$$

Enako lahko določimo tudi silo v drugih smereh. V splošnem je torej sila enaka

$$\boxed{\vec{F}_e = \left(-\frac{\partial W_e}{\partial x}, -\frac{\partial W_e}{\partial y}, -\frac{\partial W_e}{\partial z}\right)}. \tag{18.13}$$

SLIKA 18.8: SILA NA NAELEKTRENO TELO.

2) PRIMER GIBALNIH PROCESOV PRI PRIKLJUČENI NAPETOSTI

V tem primeru je potrebno v energijsko bilanco vključiti tudi energijo, ki pride ali se vrne v vir. Torej bo spremembe energije polja in dela premika enaka spremembi energije vira:

$$\mathrm{d}W_e + \vec{F}_e \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mathrm{d}A_g \,,$$

kjer smo z dA_g označili spremembo energije vira.

Če se bosta telesi ob priključeni napetosti približali za majhno razdaljo, se bo povečala kapacitivnost sistema dveh teles, zato se bo tudi povečal naboj med telesoma za dQ. Ta naboj bo prišel iz vira na račun opravljenega dela $\mathrm{d}A_e = \mathrm{d}QU$. Zaradi povečanja naboja med telesoma se bo povečala tudi energija v polju kondenzatorja: $\mathrm{d}W_e = \frac{U}{2}(Q+\mathrm{d}Q) - \frac{U}{2}\mathrm{d}Q = \frac{U}{2}\mathrm{d}Q$.

Velja torej:

$$\frac{U}{2}\mathrm{d}Q + \vec{F}_e \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mathrm{d}QU \,,$$

torej je

$\vec{F}_e \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \frac{\mathrm{d}QU}{2} = \mathrm{d}W_e$ od koder sledi

$$\boxed{\vec{F}_e = \left(\frac{\partial W_e}{\partial x}, \frac{\partial W_e}{\partial y}, \frac{\partial W_e}{\partial z}\right)}. \qquad (18.14)$$

Ugotovimo lahko, da se bo ob premiku nabojev v polju pri konstantni napetosti polovico dela generatorja porabilo za premik, druga polovica pa za gradnjo električnega polja. Lahko pa je tudi obratno, da vir deluje kot porabnik, torej, da dobi energijo iz gibalnega procesa, na primer, če bi se enako naelektrena naboja približevala.

Silo med telesi je najlažje izračunati ravno iz povezave med energijo in kapacitivnostjo....

Primeri iz kolokvijskih in izpitnih nalog:

Primer: **Izpit (UNI) 3.12.2001**

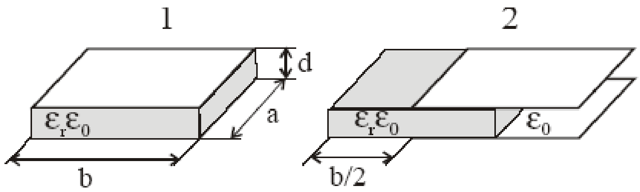
3. Med nadzemni vodnik polmera $\rho_0 = 2\,\mathrm{cm}$ in dolžine $l = 10\,\mathrm{km}$, ki je obešen na višini $h = 10\,\mathrm{m}$, ter zemljo priključimo napetost $U = 150\,\mathrm{kV}$. Kolikšna je električna energija, ki je akumulirana v električnem polju?

3.

$$W_e = \frac{qlU}{2} \quad ; \quad U = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\ln 2h/\rho_0 \quad \Rightarrow \quad q = \frac{2\pi\varepsilon_0 U}{\ln 2h/\rho_0} \quad ; \quad W_e = \frac{\pi\varepsilon_0 l U^2}{\ln 2h/\rho_0} \doteq \boxed{906\,\mathrm{J}}$$

Primer: **Kolokvij 21.1.2002.**

2. Ploščati kondenzator je priključen na napetostni vir U. Za kolikšen % se spremeni elektrostatična energija shranjena v polju ploščatega kondenzatorja, če dielektrik z relativno dielektričnostjo $\varepsilon_r = 2$ izvlečemo za b/2 (glej skico)?



2.

$$1: \; W_1 = \int_{V_1} w\,dV = \int_{V_1} \frac{1}{2}\varepsilon E^2 dV = \frac{1}{2}\varepsilon_r\varepsilon_0\left(\frac{U}{d}\right)^2 \int_0^b dx \int_0^a dy \int_0^d dz = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0 U^2 ab}{d}\varepsilon_r$$

$$2: \; W_2 = \int_{V_2} w\,dV = \int_{V_2} \frac{1}{2}\varepsilon E^2 dV = \frac{1}{2}\varepsilon_r\varepsilon_0\left(\frac{U}{d}\right)^2 \int_0^{b/2} dx \int_0^a dy \int_0^d dz + \frac{1}{2}\varepsilon_0\left(\frac{U}{d}\right)^2 \int_{b/2}^b dx \int_0^a dy \int_0^d dz = \frac{1}{4}\frac{\varepsilon_0 U^2 ab}{d}(\varepsilon_r + 1)$$

Odgovor: energija se zmanjša za 25%.

Vprašanja za obnovo:

1. Kolikšna je potencialna energija naboja pri preletu električnega polja?
2. Kako izračunamo potencialno energijo sistema točkastih nabojev?
3. Kakšna je povezava med potencialno energijo in delom električnih sil?
4. Kako določimo električno energijo v kondenzatorju?
5. Kako določimo elektrostatično energijo sistema porazdeljenih nabojev?
6. Kako je določena gostota energije?
7. Izračun energije iz gostote energije.
8. Kako določimo silo med naelektrenima telesoma brez in z priključeno napetostjo?

Primeri kolokvijskih in izpitnih nalog:
izpit, 8. marec 2005
izpit, 4. februar 2005
izpit, 16. januar 2007
Izpit, 4. 6. 2007
2. kolokvij, 17. 01. 2002
Izpit, 02. 09. 2005
Izpit, 20. aprila 2005
izpit, 6. junij 2001

19. Kondenzator

Vsebina poglavja: kondenzator kot naprava za shranjevanje naboja, kot naprava za shranjevanje električne energije, pomembne lastnosti kondenzatorjev, aplikacije kondenzatorjev.

Superkondenzator (ali ultrakondenzator) podjetja Maxwell ima kapacitivnost 3000 F omogoča napetosti 75 V

Kondenzator kot naprava za shranjevanje naboja

Kondenzator je naprava za shranjevanje naboja. Večja kot je napetost med ploščama (elektrodama), večja količina naboja se nakopiči na elektrodah. Konstanto sorazmernosti imenujemo kapacitivnost: $Q = CU$. Večja kot je kapacitivnost, več naboja lahko shranimo.

V začetnih raziskavah električnih pojavov pojma kondenzatorja niso poznali. Naboje so ločevali z ročno gnanimi elektrostatičnimi napravami, ki so z inventivnimi načini ločevale naboje in jih običajno kopičile na dveh ločenih prevodnih kroglah. Tipični primer je Whimshurstov elektrostatični generator. Če so bile krogle blizu, na primer ne več kot nekaj centimetrov, je ob primernih pogojih kopičenja naboja med kroglama preskočila iskra. Torej je morala biti ob krogli dosežena preboja trdnost zraka. Vzemimo kar skrajni primer osamljene naelektrene krogle polmera 2 cm. Preboja trdnost bo dosežena pri elektirčni poljski jakosti 3 MV/m, od koder izračunamo naboj pri preboju $E_{\text{preb}} = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r_0^2}$ od koder sledi *Q* = 133,5 nC. Napetost bo tedaj $V(E_{\text{preb}}) = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r_0} = E_{\text{preb}} r_0 = 3\cdot 10^6\,\text{V/m}\cdot 0{,}02\text{ m} = 60\text{ kV}$. Seveda druge elektrode ne moremo imeti v neskončnosti, lahko pa je večjega polmera in dovolj daleč. Vsekakor večje napetosti od 60 KV ne moremo doseči. Določimo lahko tudi kapacitivnost v primeru, da je druga elektroda v neskončnosti $C = 4\pi\varepsilon_0 r_n \approx 2{,}2\text{ pF}$. To je precej mala kapacitivnost. Torej med elektrodama v obliki kovinskih krogel ne moremo shraniti večje količine naboja. Ta količina je omejena s prebojno trdnostjo. Lahko pa povečamo polmer krogle, kot smo to videli pri izgradnji Van de Graffovih generatorev, kjer sta imeli krogli 7 MV generatorja polmera 4,6 m.

Spodaj je del tabele iz Electrical Engineering Reference Book, kjer pa so podane prebojne napetosti med dvema sferama enakega polmera. Ugotovimo, da so prebojne napetosti seveda manjše, kot smo jo izračunali teoretično.

Table 7.5 Sphere-gap breakdown voltages (kilovolts at peak)*; BS 358:1960

Gap (mm)	*Sphere diameter*			
	0.02	*0.0625*	*0.125*	*0.25*
0.5	2.8	—	—	—
1	4.7	—	—	—
1.5	6.4	—	—	—
2	8.0	—	—	—
4	14.4	14.2	—	—
5	17.4	17.2	16.8	—
6	20.4	20.2	19.9	—
8	25.8	26.2	26.0	—
10	30.7	31.9	31.7	31.7
15	(40)	45.5	45.5	45.5
20	—	58.5	59.0	59.0
30	—	79.5	85.0	86.0
40	—	(95)	108	112
50	—	(107)	129	137
100	—	—	(195)	244
150	—	—	—	(314)

SLIKA 19.1: INSERT TABELE IZ ELECTRICAL ENGINEERING REFERENCE BOOK

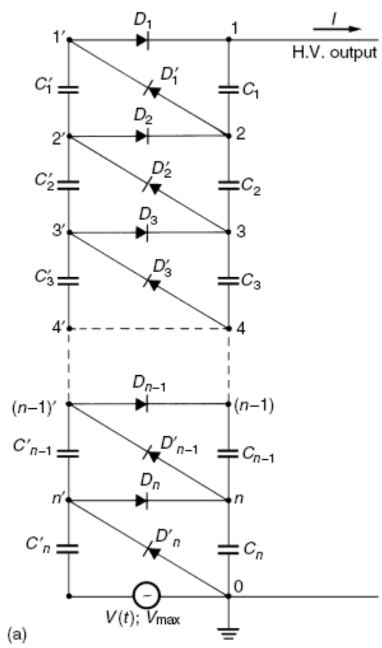
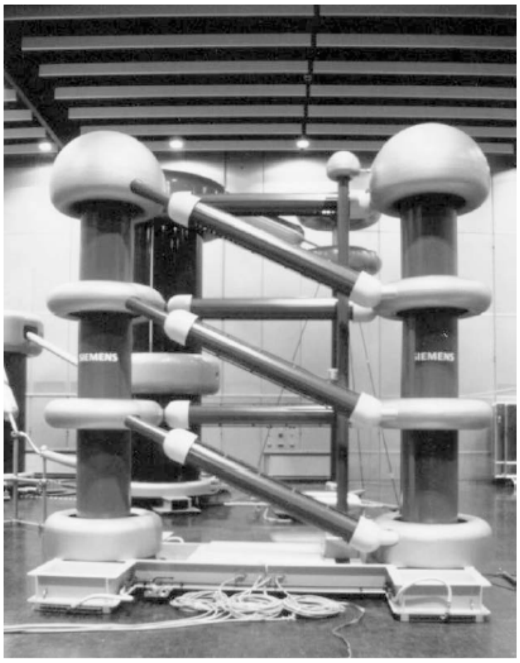


Figure 2.3 *(a) Cascade circuit according to Cockroft–Walton or Greinacher. (b) Waveform of potentials at the nodes, no load*



SLIKA 19.2: KASKADNO VEZJE ZA ZVIŠANJE NAPETOSTI, TIPIČNA UPORABA DO 200 KV. COCKROFT-WALTONOV CD GENERATOR NA ETH (ŠVICA) 900KV/10MA.

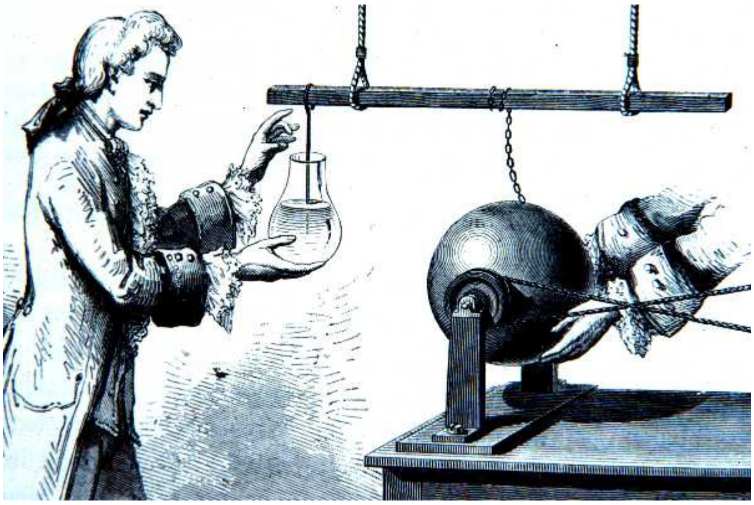
Prve večje vrednosti kapacitivnosti so dosegli z uporabo steklenice, tako imenovane **Leidenske steklenice**, po kraju Leiden na Nizozemskem leta 1745. Zaslužen za inovacijo »steklenice« je profesor Pieter van Musschenbroek (1692 – 1791). Hkrati je do podobnih ugotovitev prišell tudi Ewald Georg von Kleist v Nemčiji. Notranjost in zunanjost steklenice je bila delno prekrita s prevodnikom, steklenica pa je delovala kot dielektrik. Vzemimo hipotetičen primer steklenice premera 8 cm s 3 mm debelo steno. Znotraj steklenice naj bo voda nalita do

Pieter van Musschenbroek

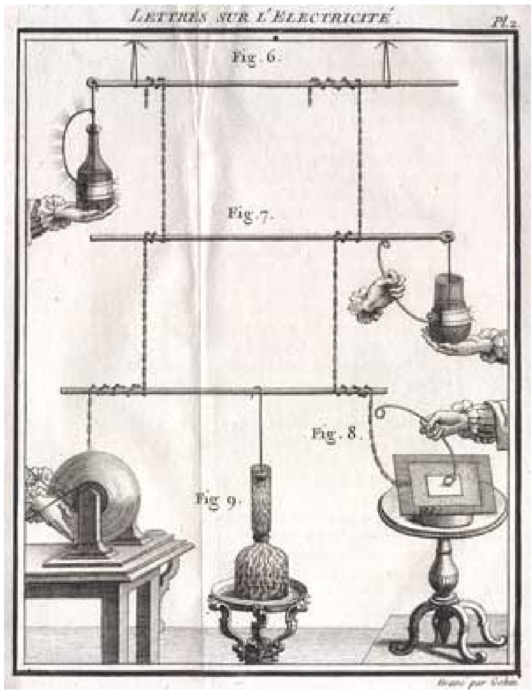
višine 15 cm, zunaj pa je prekrita s prevodnikom (aluminijasto folijo). Relativna dielektričnost stekla naj bo 10. Kapacitivnost steklenice je

$$C \approx \varepsilon_r \varepsilon_0 \frac{A}{d} = 10 \cdot \varepsilon_0 \cdot \frac{2\pi 0{,}08\ \mathrm{m} \cdot 0{,}15\ \mathrm{m}}{3 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m}} = 742\ \mathrm{pF}.$$

V primerjavi s kapacitivnostjo kovisnke krogle je to že kar solidna kapacitivnost. To veliko odkritje je prineslo tudi nekaj več previdnosti pri uporabi. Razelektritev naboja iz steklenice z dotikom namreč ni več tako »nedolžna«. Je pa doprinesla k razvoju znanosti, saj je bilo šele z Leidensko steklenico mogoče nakopičiti in shranjevati večjo količino naboja. Naslednja prav tako pomembna in znamenita inovacija je bila Voltina baterija. Volta je med drugim tudi predlagal uporabo imena kondenzator.V tedanjem času sta bili to vsekakor zelo pomembni invaciji, primerljivi z današnjimi dosežki nagrajenimi z Novelovimi nagradami.



SLIKA 19.3: PRIMER EKSPERIMENTOV V ZGODOVINI: NA DESNI PREPROST ELEKTROSTATIČNI GENERATOR (ROČNO GNANA STEKLENA KROGLA, NABOJ SE LOČUJE Z ROKO, KI NA ENI STRANI TRSA OB KROGLO, NA DRUGI STRANI PA DRŽI PREVODNO VERIGO.



SLIKA 19.4: PRVE SLIKE UPORABE LEIDENSKE STEKLENICE.

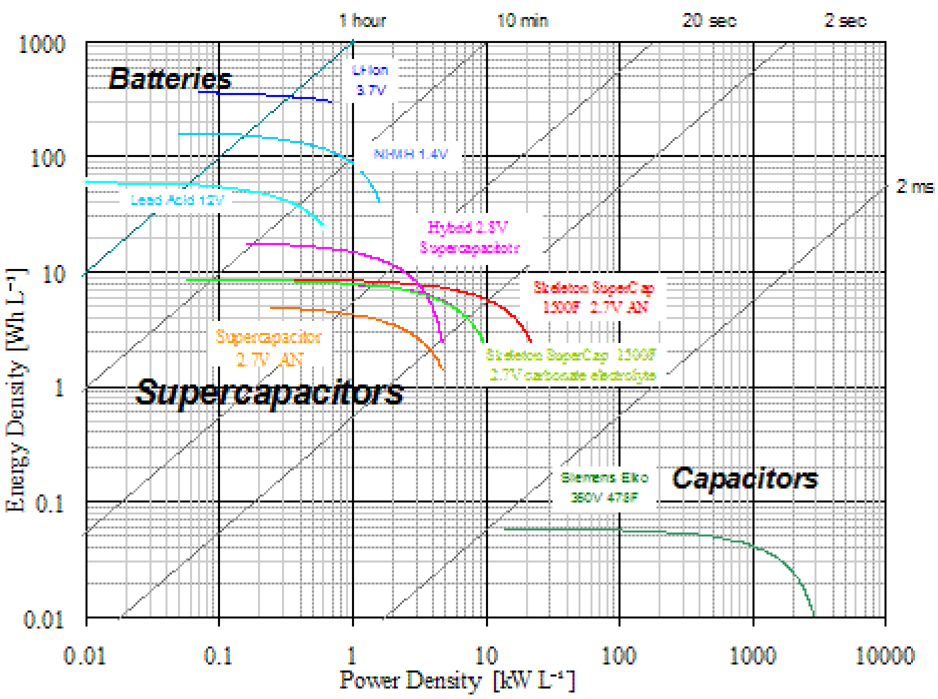
SLIKA 19.5: PRIMER LEIDENSKIH SZEKLENIC. DESNO ELEKTROSKOP.

KONDENZATOR KOT NAPRAVA ZA SHRANJEVANJE ELEKTRIČNE ENERGIJE

Še bolj pomembna kot količina shranjenega naboja je količina shranjene električne energije. Za električno energijo v kondenzatorju je pomemben produkt naboja in napetost med elektrodama $W = \frac{1}{2}QU$.

Vzemimo primer osamljene kovinske krogle polmera 2 cm, ki je maksimalno naelektrena, toliko, da električno polje na površini doseže brebojno trdnost. Izračunali smo naboj 133,5 nC in napetost 60 kV. Shranjena energija bo enaka $W = \frac{QU}{2} = \frac{133{,}5\ \mathrm{nC} \cdot 60\ \mathrm{kV}}{2} = 4\ \mathrm{mJ}$. Vzemimo za primerjavo kondenzator povprečno velike kapacitivnosti 1 μF in nanj priključimo napetost 100V. Energija shranjena v kondenzatorju je $W = \frac{CU^2}{2} = \frac{1\ \mu\mathrm{F} \cdot (100\ \mathrm{V})^2}{2} = 5\ \mathrm{mJ}$. Torej je v kondenzatorju velikem za palec ali tudi dosti manj shranjeno enako veliko energije, kot med osamljeno naelektreno kroglo polmera 2 cm pri prebojni napetosti.

Poleg uspešnosti shranjevanja energije je pomembno tudi to, kako hitro lahko to energijo kondenzator sprazni. Na primer, elektrolitske baterije zelo uspešno shranjujejo veliko količino energije, je pa ne morejo hitro izkoristiti. Na drugi strani so elektrolitski kondenzatorji, ki so majhnih dimenzij, so nekoliko manj učinkoviti v smislu gostote shranjene energije, se pa lahko njihov shranjen naboj zelo hitro razelektri. Vez med baterijami in elektrolitskimi kondenzatorji so t.i. superkondenzatorji ali ultrakondenzatorji, ki ne omogočajo visokih napetosti, imajo pa izredno visoke kapacitivnosti (več sto faradov) in so trenutno posebno primerni za vmesno shranjevanje energije.

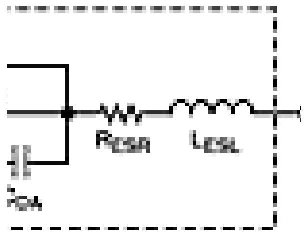


SLIKA 19.6: PRIMERJAVA MED RAZLIČNIMI TIPI KONDENZATORJEV, BATERIJAMI IN SUPERKONDENZATORJEM. ELEKTROLITSKI KONDENZATORJI OMOGOČAJO RAZELEKTRITEV VELIKIH TOKOV VENDAR V ZELO KRATKEM ČASU. BATERIJE OMOGOČAJO SHRANJEVANJE VELIKE KOLIČINE ENERGIJE VENDAR JO NE MOREJO ZELO HITRO IZKORISTITI.

SUPERKONDENZATORJI SO VEZ MED NAVADNIMI KONDENZATORJI IN BATERIJAMI. OMOGOČAJO RELATIVNO VELIKE TOKE RAZELEKTRITVE V PRECEJ DALJŠEM ČASU KOT NAVADNI KONDENZATORJI. VIR: SKELETON SUPERCAPS.

POMEMBNE LASTNOSTI KONDENZATORJEV

Kondenzatorji imajo v idealnem smislu le kapacitivne lastnosti in so idealni izolatorji. V resnici pa idealnih lastnosti ni mogoče doseči. Neidealne električne lastnosti prikažemo z nadomestno shemo realnega kondenzatorja, ki je v osnovi vzporedna vezava kondenzatorja z uporom R_P in zaporedno z induktivnostjo L_S in upornostjo R_S.



MESTNA SHEMA REALNEGA PO ANALOG DEVICES)

Pri različnih aplikacijah je pomembna različna lastnost. Na primer, izgubna (vzporedna R_P) upornost je pomembna v aplikacijah pri izmeničnih tokih in aplikacijah, kjer je pomembno natančno shranjevanje naboja, kot na primer za integratorje ali »sample-hold« vezja ali ko jih uporabljamo pri visokih frekvencah. Elektrolitski (tantalove ali aluminijasti) kondenzatorji dosegajo visoke kapacitivnosti vendar zaradi slabe izolacije tudi velike izgubne toke, na primer 5 – 20 nA na μF. V omenjene namene je bolje uporabiti »plastične« kondenzatorje: polipropilenske ali polistirenske.

Zaporedna (ang. equivalent series resistance) upornost R_S je pomembna pri aplikacijah z velikimi tokovi, saj se na kondenzatorjih z veliko serijsko upornostjo porablja velika (izgubna) moč. Kondenzatorji z majhno R_S so iz filmov ali iz sljude (ang. mica).

Serijska induktivnost je tudi lahko problematična pri visokih frekvencah. Elektrolitski, papirni in plastični kondenzatorji niso primerni za visokofrekvenčne aplikacije, saj so večinoma sestavljeni iz dveh kovinskih plasti ločenih s plastjo dielektrika in zviti v svitke. Za visokofrekvenčne aplikacije so primerni keramični kondenzatorji.

Pomemben podatek je faktor disipacije (polnilni faktor), ki predstavlja razmerje energije, ki jo kondenzator potroši z energijo, ki jo shrani.

Dielektrična absorpcija nam pove histerezne lastnosti kondenzatorja. Torej, kako je ponovljivo elektrenje kondenzatorja brez efekta spomina.

TIPI KONDENZATORJEV

Dandanes so tudi kondenzatorji precej drugačni. poznamo jih veliko različnih tipov, iz različnih materialov, dimenzij, oblik z zelo različnimi električnimi (in mehanskimi) lastnostmi. Pa si jih oglejmo nekaj:

1) Elektrolitski kondenzatorji so izdelani iz dveh tankih aluminijastih elektrod. Prva ima dodano tanko oksidno membrano (izolator, dielektrik), druga elektroda pa je v kontaktu s papirjem omočenim z elektrolitom . Tanka oksidna plast povzroči veliko kapacitivnost kondenzatorja ($C \sim \varepsilon \frac{A}{d}$), visoko prebojno trdnost, pa tudi polarizacijo. To pomeni, da ga lahko obremenimo le tako, da je ena od sponk vedno bolj pozitivna od druge. V nasprotnem primeru postane neuporaben oziroma nevaren, saj lahko eksplodira. Ti kondenzatorji so ceneni in se pogosto uporabljajo, recimo kot filtri. Ker se kondenzator lahko pokvari, če je obremenjen z višjo napetostjo kot je nazivna, je v praksi modro uporabiti kondenzator z dvakrat višjo nazivno napetostjo, kot je potrebna. Prednosti elektrolitskih kondenzatorjev so predvsem velika kapacitivnost (cenenost), ki je posledica uporabe tanke izolacijske plasti dielektrika in visoka napetost določena s prebojno trdnostjo dielektrika. Pomankljivost pa je neidealna karakteristika zaradi polprevodniških lastnosti kombinacije prevodnika in oksida, relativno velika upornost, slabša visokofrekvenčna karakteristika in manjša življenska doba (v primerjavi z drugimi tipi kondenzatorjev).

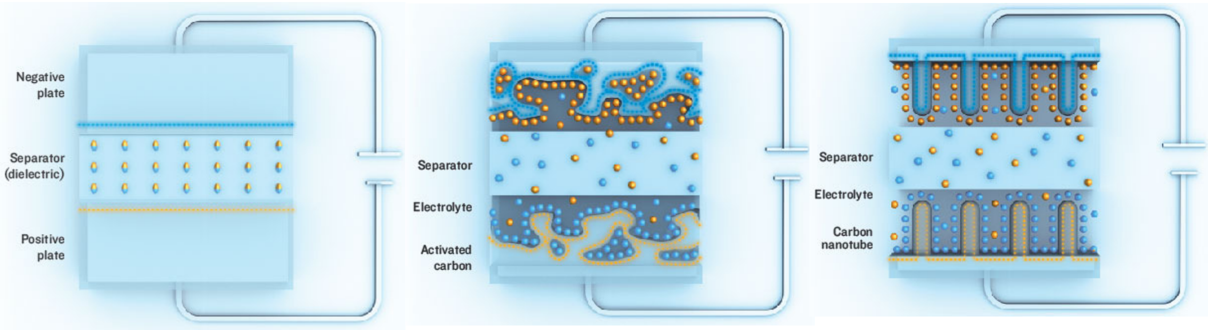
2) Posebni tip elektrolitskega kondenzatorja je tantalov elektrolitski kondenzator. Namesto aluminijaste elektrode ima tantalovo, oziroma iz tantalovega pentoksida. Ima boljše električne lastnosti kot »navadni« elektrolitski kondenzatorji, predvsem glede temperaturnih in frekvenčnih karakteristik. So pa nekoliko dražji kot »navadni«.

3) Poliesterski film: ti kondenzatorji uporabljajo kot dielektrik plast poliesterskega filma. So poceni, temperaturno stabilni in se pogosto uporabljajo.
4) Polipropilenski kondenzator: uporabimo, ko so zahteve po tolerancah večje. Do frekvence 100 kHz imajo zelo majhne tolerance (1%).
5) Polistirenski kondenzator: so izdelani kot koluti in niso primerni za visoke frekvence. So uporabni za aplikacije do nekaj sto kilohercov.

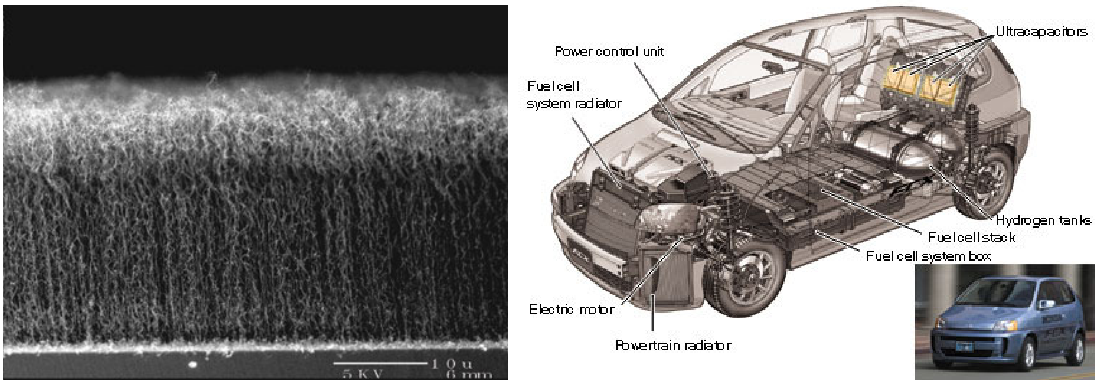
6) Metalizirani poliesterski: imajo boljše lastnosti od navadnih poliesterskih. So dimenzijsko majhni.

7) Epoksi:
8) Keramični: izgledajo kot mali diski in niso izdelani v zavitkih, zato imajo dobre frekvenčne karakteristike in jih uporabljamo za visokofrekvenčne aplikacije. Na primer za filtriranje visokofrekvenčnih motenj.
9) Nastavljivi kondenzatorji (trimerji): vsebujejo lahko keramični ali plastični dielektrik.

10) Nastavljivi zračni kondenzatorji: uporabljajo zrak kot dielektrik. Običajno jih najdemo v radijih.
11) Superkondenzatorji: imajo izrazito veliko kapacitivnost, na primer 0,47 F, kljub temu pa so majhnih dimenzij. Te lastnosti je mogoče doseči z uporabo električnega dvojnega sloja. Zapolnjujejo vrzel med baterijami, ki sicer shranjujejo velike količine naboja, ne morejo pa se hipno izprazniti in »klasičnimi« kondenzatorji, ki omogočajo hitre naelektritve in razelektritve vendar relativno majhno kapacitivnost (gostoto energije). Ultrakondenzatorji trenutno omogočajo gostote energij velikosti 30 Wh/kg, se pa ta vrednost z izboljšavo tehnologije stalno povečuje. Poleg tega v primerjavi s klasičnimi baterijami ultrakondenzatorji omogočajo zelo veliko ciklov praznenja in polnenja in ne izgubijo svojih lastnosti niti po daljšem času izpraznitve. Za primerjavo dosežejo klasične svinčeve baterije energijsko gostoto 30 Wh/kg, litij-ionska baterija pa 120 Wh/kg. Hkrati pa je kalorična vrednost bencina 12000 Wh/kg.



SLIKA 19.8: RAZLIKA MED KLASIČNIM TIPOM »PLOŠČNEGA« KONDENZATORJA IN ULTRAKONDENZATORJI JE V VELIKI POVRŠINI ELEKTROD, KI JIH PRI ULTRAKONDENZATORJIH USPEMO DOSEČI S TEHNOLOGIJO POROZNEGA OGLJIKA, V NOVEJŠEM ČASU PA Z UPORABO OGLJIKOVIH NANOCEVK. VIR: [HTTP://WWW.SPECTRUM.IEEE.ORG/PRINT/5636](http://www.spectrum.ieee.org/print/5636)



SLIKA 19.9: PREREZ ELEKTRODE ULTRA-KONDENZATORJA, IZDELANEGA IZ OGLJIKOVIH NANOCEVK. NA TA NAČIN SE IZJEMNO POVEČA POVRŠINA KONDENZATORJA IN S TEM KAPACITIVNOST. VIR: [HTTP://WWW.SPECTRUM.IEEE.ORG/PRINT/5636](http://www.spectrum.ieee.org/print/5636). NA DESNI, MOŽNOSTI UPORABE ULTRAKONDENZATORJEV V AVTU: HONDA FCX.

CAPACITOR COMPARISON CHART

TYPE	TYPICAL DIELECTRIC ABSORPTION	ADVANTAGES	DISADVANTAGES
NPO ceramic	<0.1%	Small case size Inexpensive Good stability Wide range of values Many vendors Low inductance	DA generally low, but may not be specified Limited to small values (10 nF)
Polystyrene	0.001% to 0.02%	Inexpensive Low DA available Wide range of values Good stability	Damaged by temperature > +85° C Large case size High inductance
Polypropylene	0.001% to 0.02%	Inexpensive Low DA available Wide range of values	Damaged by temperature > +105° C Large case size High inductance
Teflon	0.003% to 0.02%	Low DA available Good stability Operational above +125° C Wide range of values	Relatively expensive Large size High inductance
MOS	0.01%	Good DA Small Operational above +125° C	Limited availability Available only in small capacitance values

		Low inductance	
Polycarbonate	0.1%	Good stability Low cost Wide temperature range	Large size DA limits to 8-bit applications High inductance
Polyester	0.3% to 0.5%	Moderate stability Low cost Wide temperature range Low inductance (stacked film)	Large size DA limits to 8-bit applications High inductance
Monolithic ceramic (High K)	>0.2%	Low inductance Wide range of values	Poor stability Poor DA High voltage coefficient
Mica	>0.003%	Low loss at HF Low inductance Very stable Available in 1% values or better	Quite large Low values (<10 nF) Expensive
Aluminum electrolytic	High	Large values High currents High voltages Small size	High leakage Usually polarized Poor stability Poor accuracy Inductive
Tantalum electrolytic	High	Small size Large values Medium inductance	Quite high leakage Usually polarized Expensive Poor stability Poor accuracy

SLIKA 19.10: PRIMERJALNA TABELA LASTNOSTI KODENZATORJEV. PO: ANALOG DEVICES: ASK THE APPLICATIONS ENGINEER – 21 (IZ SPLETA)

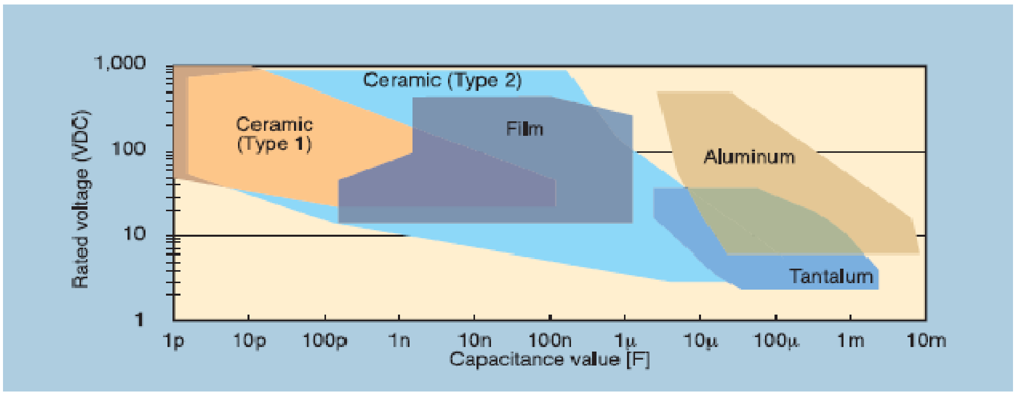


Fig. 1: Relation between capacitance value and rated voltage in each capacitor

SLIKA 19.11: RAZLIČNI TIPI KONDENZATORJEV GLEDE NA ZAHTEVANO NAZIVNO NAPETOST. VIR: WWW.MURATA.COM.

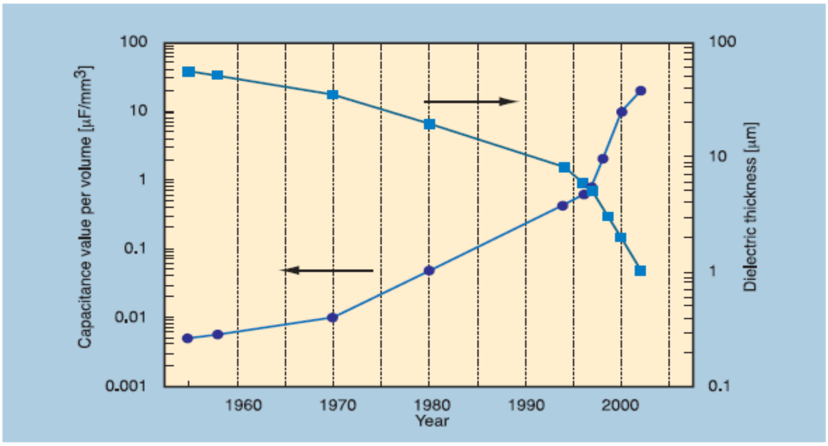


Fig. 2: Transition of capacitance value per volume and dielectric thickness

SLIKA 19.12: PRIMER NAPREDOVANJA TEHNIKE IZDELAVE KONDENZATORJEV. HKRATI S TANJŠANJEM DEBELINE DIELEKTRIKA SE VEČA KAPACITIVNOST NA ENOTO VOLUMNA.

Nekaj aplikacij kondenzatorjev.

- **začasno nadomeščanje b**aterijskega napajanja v vezjih
- za usmerjanje v močnostnih aplikacijah
- charge-pump kasakada (zvišanje napetosti)
- glajenje signalov
- izločanje AC komponente
- izločanje DC komponente
- kompenzacija moči
- florescenčna osvetlitev
- filtracija signalov
- za doseganje resonančne frekvence

Uporaba kondenzatorskega principa:

- senzor razdalje (majhne razdalje)
- senzor pospeška (ADXL)
- senzor nivoja tekočine
- kondenzatorski mikrofon
- senzorji dotika
- visokonapetosti kondenzatorji za shranjenje energije in hitro praznenje (pulzni laserji, elektromagnetno izstreljevanje, radar, pospeševalniki, detonatorji,

Podnapis pod fotografijo: Filtrska kompenzacija s KLV-kondenzatorji, Acroni, Jesenice

SLIKA 19.13: KOMPENZACIJSKI KONDENZATORJI V ACRONI JESENICE. VIR: HTTP://WWW.ISKRA.SI/UPLOAD/ISKRA%20KONDENZATORJI.PDF

Nekaj povezav:

WWW: HTTP://WWW.UOGUELPH.CA/~ANTOON/GADGETS/CAPS/CAPS.HTML

HTTP://WWW.HOBBY-ELEC.ORG/E_CAPA.HTM

HTTP://EN.WIKIPEDIA.ORG/WIKI/ELECTROLYTIC_CAPACITOR

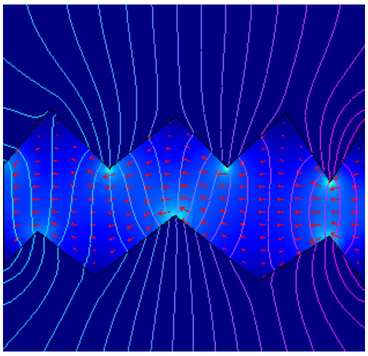
HTTP://EN.WIKIPEDIA.ORG/WIKI/SUPERCAPACITOR

HTTP://WWW.ELNA-AMERICA.COM/TECH_AL_PRINCIPLES.PHP

HTTP://WWW.MAXWELL.COM/ULTRACAPACITORS/TECHNICAL-SUPPORT/WHITE_PAPERS.ASP

http://repositories.cdlib.org/cgi/viewcontent.cgi?article=1050&context=itsdavis

20. Časovno konstantno tokovno polje



Vsebina poglavja: Kontinuitetna enačba, gostota toka, časovno konstantno tokovno polje, tok v snovi, konventivni tok, konduktivni tok, mobilnost, Ohmov zakon v diferencialni obliki, specifična prevodnost in specifična upornost, temperaturne lastnosti, joulov zakon, mejni pogoji tokovnega polja, dualnost tokovnega in elektrostatičnega polja.

KONTINUITETNA ENAČBA

S pojmom toka smo se srečali že v prvem poglavju, kjer smo ugotovili, da je električni tok posledica gibanja nabojev, kar lahko izrazimo tudi kot časovno spremembo količine naboja v zaključenem sistemu (kontinuitetna enačba). Po definiciji smo ga določili kot odtekanje pozitivnega naboja:

$$i(t) = -\frac{\mathrm{d}Q_+}{\mathrm{d}t}. \tag{20.1}$$

SLIKA 20.1: PRIKAZ DEFINICIJE TOKA KOT ČASOVNO ODTEKANJE POZITIVNEGA NABOJA.

GOSTOTA TOKA

Spomnimo se zveze med električnim pretokom in gostoto električnega pretoka. Gostoto pretoka smo označili z vektorjem D, pretok pa kot integral D-ja preko določene površine: $\int\limits_A \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{A}$. Na enak način izrazimo gostoto toka s črko *J*, tok pa je integral gostote toka po površini *A*

$$\boxed{I = \int\limits_A \vec{J}\cdot \mathrm{d}\vec{A}}. \tag{20.2}$$

Znotraj integrala je skalarni produkt dveh vektorjev, kar pomeni, da k toku prispeva le tista komponenta gostote toka, ki je pravokotna na površino, oziroma tista, ki je v smeri normale na površino: $\vec{J}\cdot \mathrm{d}\vec{A} = \vec{J}\cdot \vec{e}_n \mathrm{d}A = J_n \cdot \mathrm{d}A$.

V primeru, da se gostota toka po preseku ne spreminja in je pravokotna na ravnino preseka, lahko integral poenostavimo v $I = J\int\limits_A dA = JA$.

Če želimo gostoto toka določiti iz toka, pa uporabimo obratno operacijo od integracije:

$\mathrm{d}I = \vec{J} \cdot \mathrm{d}\vec{A}$, torej bo gostota toka enaka odvodu toka po površini*:

$$\boxed{J = \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}A}}. \qquad (20.3)$$

Električni tok je skalarna veličina (ima le vrednost, ne pa tudi smeri), gostota toka pa je vektorska veličina (ima tako velikost kot smer).

SLIKA: TOK IN GOSTOTA TOKA: PRIMERJAVA.

Primer: Skozi žico premera 2 mm teče tok 50 A. Kolikšna je gostota toka v žici?

Izračun: Ploščina preseka je $A = \pi r^2 = \pi(1\ \mathrm{mm})^2 = \pi\ \mathrm{mm}^2$, gostota toka pa je $J = \frac{I}{A} = \frac{50\ \mathrm{A}}{\pi\ \mathrm{mm}^2} \approx \underline{\underline{16\ \mathrm{A/mm}^2}}$.

Primer: Med oklopom in žilo koaksialnega kabla z notranjim polmerom 1 mm in zunanjim polmerom 3 mm je tok 1 mA. Določimo gostoto toka pri notranjem in zunanjem polmeru na dolžini 10 m.

Izračun: Zapišemo tok skozi zamišljen presek na polmeru *r*: $I = JA = J2\pi rl$, od koder je gostota toka pri polmeru *r*: $J = \frac{I}{2\pi rl}$.

Sledi:

$$J(r_n) = \frac{1\ \mathrm{mA}}{2\pi \cdot 1\ \mathrm{mm} \cdot 10\mathrm{m}} \approx \underline{\underline{16\ \mathrm{mA/m}^2}}$$

$$J(r_z) = \frac{1\ \mathrm{mA}}{2\pi \cdot 3\ \mathrm{mm} \cdot 10\mathrm{m}} \approx \underline{\underline{5{,}3\ \mathrm{mA/m}^2}}$$

Tokovno polje med žilo in oklopom je nehomogeno. Pri žili je gostota toka večja, kot pri oklopu.

* Ali pa: $\mathrm{d}I = \vec{J} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = \vec{J} \cdot \vec{e}_n \mathrm{d}A = J_n \cdot \mathrm{d}A$ torej $\vec{J} = \vec{e}_n \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}A}$.

KONTINUITETNA ENAČBA – DRUGIČ

Povedali smo že, da tok ugotavljamo kot časovno spremembo. Če zapišemo integral gostote toka preko zaključene površine, mora biti ta integral v skladu s kontinuitetno enačbo ravno enak časovni spremembi naboja znotraj te zaključene površine. Kontinuitetna enačba torej »govori« o kontinuiteti naboja znotraj zaključene površine. Kopičenje ali zmanjševaje naboja v zaključeni površini je posledica električnega toka ali tudi obratno: tok skozi zaključeno površino je posledica kopičenja ali odtekanja naboja skozi to površino. Matematično to zapišemo v obliki[*]:

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}=-\oint \vec{J}\cdot \mathrm{d}\vec{A}}. \qquad \text{KONTINUITETNA ENAČBA} \qquad (20.4)$$

ČASOVNO KONSTANTNO TOKOVNO POLJE

Govorimo o časovnem konstantnem tokovnem polju, kjer v volumnu objetem z zaključeno površino *A* velja $\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}=0$ in s tem

$$\boxed{\oint_A \vec{J}\cdot \mathrm{d}\vec{A}=0}. \qquad (20.5)$$

Zgornja enačba ne govori o tem, da ni toka v in izven zaključene površine temveč le o tem, da enaka količina toka, ki vstopa v prostor z zaključeno površino, ta prostor tudi zapušča. Recimo, da zaključeno površino razdelimo na tri dele. V prva dva dela toka vstopata (I_1 in I_2), skozi tretjega pa zapušča tok I_3. Velja $\oint_A \vec{J}\cdot \mathrm{d}\vec{A}=I_1+I_2-I_3=0$. Prepoznamo 1. Kirchoffov zakon, da je vsota vseh tokov, ki vstopajo (ali izstopajo) v spojišče enaka nič: $\sum_{i=1}^{N} I_i=0$. Tok smo označili z veliko tiskano črko, ker obravnavamo le stacionarne pojave, torej take, kjer se tok s časom ne spreminja.

SLIKA 20.2: ZAKLJUČENA POVRŠINA S TREMI TOKI OD KATERIH DVA VSTOPATA, EN PA IZSTOPA IZ POVRŠINE. VSOTA TOKOV V SPOJIŠČE JE ENAKA NIČ.

[*] ** Pogosto to enačbo izrazimo še nekoliko drugače, pri čemer naboj izrazimo z gostoto naboja $Q=\int_V \rho \mathrm{d}V$: $\int_V \frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}V=-\oint_A \vec{J}\cdot \mathrm{d}\vec{A}$. Znana pa je tudi oblika te enačbe v diferencialni obliki, kjer je potrebno uporabiti operator divergence: $div\vec{J}=-\frac{\partial \rho}{\partial t}$ ali tudi $\vec{\nabla}\cdot\vec{J}=-\frac{\partial \rho}{\partial t}$ (ker velja $\int_A \vec{J}\cdot \mathrm{d}\vec{A}=\int_V div\vec{J}\cdot \mathrm{d}V$).

Enak pogoj kot za časovno konstantno tokovno polje smo uporabili tudi za elektrostatično polje ($\mathrm{d}Q/\mathrm{d}t=0$). Torej bodo za časovno konstantno tokovno polje veljale tudi ugotovitve iz elektrostatičnega polja:

zakon potencialnosti polja: $\oint_L \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=0$ (20.6)

in

Gaussov zakon: $\oint_A \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{A}=Q_{\substack{prosti,\\ znotraj\ A}}$. (20.7)

Podobno, kot pri zakonu o ohranitvi naboja prepoznamo 1. Kirchoffov zakon, lahko v zakonu o potencialnosti polja $\oint_L \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=0$ prepoznamo 2. Kirchoffov zakon, saj, če razdelimo zaključeno pot na več delnih poti $\oint_L \vec{E}\cdot d\vec{l}=\int_{L_1} \vec{E}\cdot d\vec{l}+\int_{L_2} \vec{E}\cdot d\vec{l}+\cdots+\int_{L_N} \vec{E}\cdot d\vec{l}=0$, jih lahko nadomestimo z napetostjo med koncema delnih poti: $\oint_L \vec{E}\cdot d\vec{l}=U_1+U_2+\cdots+U_N=0$ ali tudi $\sum_i U_i=0$.

Kljub temu pa ima časovno konstanto polje določeno »komponento«, ki jo elektrostatično nima. Pri elektrostatičnem polju predpostavimo razmere, ko toka ni; niti enosmernega. Kljub temu da vemo, da je tok potreben za proces elektrenja. V teh razmerah je polje znotraj prevodnikov vedno enako nič. Drugače pa je pri tokovnem polju, ki sicer ima določene »komponente« elektrostatičnega polja, recimo ohranjeno veljavnost Gaussovega zakona in zakona o potencialnosti polja, pa pri razmerah tokovnega polja dovolimo časovno konstanten tok.

Ustreznost enačb elektrostatičnega polja, časovno konstantnega tokovnega polja in dinamičnega polja prikazuje naslednja tabela:

	Elektrostatično polje	**Tokovno polje**	**Dinamično polje**
Gaussov zakon	$\oint_A \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{A}=Q_{\substack{prosti,\\ znotraj\ A}}$	Enako	enako
Potencialnost polja	$\oint_L \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=0$	Enako	$\oint_L \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}\neq 0$
Kontinuitetna enačba	$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}=0$ (znotraj zaključene površine) Oziroma $\rho(t)=konst$ Ali tudi $\oint_A \vec{J}\cdot \mathrm{d}\vec{A}=0$	$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}=0$ (znotraj zaključene površine) Oziroma $\rho(t)=konst$ Ali tudi $\oint_A \vec{J}\cdot \mathrm{d}\vec{A}=0$	$-\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}=i(t)$ $\rho=\rho(t)$
Tok	$i(t)=0$	$i(t)=konst$	$i(t)=f(t)$

TOK V SNOVI

Povežimo gostoto toka z lastnostmi snovi. Vemo, da nekatere snovi prevajajo tok bolje, druge pa slabše. Najbolj preprosta delitev bi bila lahko na prevodnike, ki odlično prevajajo tok in izolatorje, ki v idealnih razmerah toka ne prevajajo. Vemo pa, da imamo tudi »vmesne« materiale, ki bolj ali manj prevajajo tok.

Poiščimo zvezo med tokom in hitrostjo gibanja nabojev:

Vzemimo tok nabojev skozi presek žice *A* s homogeno gostoto toka. Tok v smeri naraščanja množine pozitivnega naboja je v skladu s kontinuitetno enačbo $i = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}$. Tok izrazimo z gostoto toka, naboj pa z gostoto naboja: $i = JA = \frac{\mathrm{d}(\rho V)}{\mathrm{d}t}$. Vzemimo tok nabojev v smeri X osi, kjer na delu volumna s konstantno volumsko gostoto naboja zapišemo: $J_x A = \rho \frac{dx}{dt} A = \rho v A$. Sledi, da je gostota toka enaka gostoti (prostega) naboja in hitrosti potovanja tega naboja: $J = \rho v$. Bolj splošna oblika enačbe upošteva gostoto toka kot vektorsko veličino in je *

$$\boxed{\vec{J} = \rho \vec{v}} \qquad (20.8)$$

Naboji se v različnih pogojih gibljejo na različne načine. V grobem razdelimo načine gibanja na konvektivni in konduktivni način.

KONVEKTIVNI TOK

Gibanje nabojev je zelo odvisno od medija v katerem se gibljejo. Če se naboji gibljejo v vakuumu ali razredčenemu plinu (zraku), je njihovo gibanje pospešeno, saj je sila na naboje enaka $m\vec{a} = Q\vec{E}$. V prostoru, kjer ni »večjih ovir«, se naboji gibljejo pospešeno $\vec{a} = \frac{Q\vec{E}}{m}$. Hitrost nabojev v homogenem električnem polju linearno narašča: $\vec{v} = \int \vec{a}\mathrm{d}t = at$. Če je pospešek konstanten (homogeno polje), bo naboj v lasu t opravil pot $s = \frac{at^2}{2}$. Takemu načinu gibanja rečemo **konvektivno prevajanje in toku konventivni tok**.

20.3: KONVENKTIVNI TOK V KATODNI CEVI.

---

* ρ (ro) v enačbi predstavlja volumsko gostoto (gibajočega se) naboja. V nadaljevanju bomo enak simbol uporabili tudi za označitev specifične električne upornosti. Ne smemo zamešati njun različni pomen v enačbah.

Konduktivni tok

Če se naboji gibljejo v gostejši snovi, se ne gibljejo neovirano, pač pa trkajo z atomi snovi. Zato se njihova hitrost bistveno upočasni, kar se odraža v toplotnih izgubah prevodnika. Za mnogo snovi velja, da je povprečna hitrost gibanja nabojev sorazmerna električni poljski jakosti, kar zapišemo z izrazom[*]

$$\boxed{\vec{v} = \mu \vec{E}}. \tag{20.9}$$

SLIKA: KONDUKTIVNI TOK V PREVODNIKU.

Konstanto μ (mi) imenujemo **mobilnost** in je snovna lastnost (tako kot električna susceptibilnost oz. relativna dielektrična konstanta). Izpeljimo enoto za mobilnost: $\left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right] = [\mu]\left[\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}\right] \Rightarrow [\mu] = \left[\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{Vs}}\right]$.

Ohmov zakon v diferencialni obliki

Z upoštevanjem zveze med povprečno hitrostjo gibanja nabojev in električno poljsko jakostjo, lahko gostoto toka zapišemo kot

---

[*] Kako pridemo do te zveze? Vzemimo, da opazujemo let elektrona v električnem polju. Nanj deluje pospešek $\vec{a} = \frac{Q_e \vec{E}}{m_e}$, torej se v času t njegova hitrost od začetne v_z poveča za $\vec{v} = \vec{v}_z + \frac{Q_e \vec{E}}{m_e} t$. Ker je trkov elektrona z atomi zelo veliko, moramo za pravilno obravnavo upoštevati povprečno hitrost, kar zapišemo z izrazom <>:

$\langle \vec{v} \rangle = \langle \vec{v}_z \rangle + \left\langle \frac{Q_e \vec{E}}{m_e} t \right\rangle$. Po trku z atomom se elektron odbije v naključno smer, zato je začetna hitrost v povprečju enaka nič, celotna povprečna hitrost pa je enaka $\langle \vec{v} \rangle = \frac{Q_e \vec{E}}{m_e} \langle t \rangle$. $\langle t \rangle$ je povprečni čas med trki in ga označimo s τ. Za kovine je ta velikosti 10^{-14} s, za pline pa 10^{-9} s. Povprečni hitrosti pogosto s tujko (angleško) rečemo hitrost drifta, po slovensko bi morda prevedli v hitrost odnašanja. Pišemo torej lahko $v_d = \frac{Q_e \vec{E}}{m_e} \tau$, od koder razpoznamo zapisano linearno zvezo med povprečno hitrostjo in električno poljsko jakostjo $\vec{v} = \mu \vec{E}$, kjer je mobilnost enaka $\mu = \frac{Q_e}{m_e} \tau$.

$$\vec{J} = \rho\vec{v} = \rho\mu\vec{E}$$ oziroma

$$\boxed{\vec{J} = \gamma\vec{E}}, \qquad \text{OHMOV ZAKON V DIFERENCIALNI OBLIKI} \qquad (20.10)$$

kjer konstanto γ(gama) imenujemo **specifična električna prevodnost** in je enaka* $\gamma = \rho\mu$.

Dobili smo pomemben izraz, da je gostota toka v prevodnikih sorazmerna električni poljski jakosti. Tak tip toka imenujemo **konduktivni** (prevodni), ker z njim ustrezno opišemo prevajanje toka v prevodnikih. Konstanto sorazmernosti imenujemo specifična električna prevodnost (gama), celoten izraz pa kar **Ohmov zakon v diferencialni obliki**. Poglejmo zakaj:

Vzemimo pravokoten kos prevodnika dolžine *l* in preseka *A* z znano specifično prevodnostjo. Med konca prevodnika priključimo napetost. Znotraj prevodnika je homogeno električno polje, iz zveze za napetost $U = \int_0^l \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$ pa dobimo:

$$U = \int_0^l \vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_0^l E\cdot dx = \int_0^l \frac{J}{\gamma}\mathrm{d}x = \int_0^l \frac{I}{\gamma A}\mathrm{d}x = \frac{I}{\gamma A}\int_0^l \mathrm{d}x = \frac{I}{\gamma A}l\,.$$

ali pa takole:

$$I = \int_A \vec{J}\cdot \mathrm{d}\vec{A} = \int_A \frac{\vec{E}}{\gamma}\cdot \mathrm{d}\vec{A} = \frac{1}{\gamma}\int_A \frac{U}{l}\mathrm{d}A = U\frac{A}{\gamma l}$$

SLIKA 20.4: PRAVOKOTEN KOS PREVODNIKA PRIKLJUČEN NA VIR NAPETOSTI.

---

* Izraz $\gamma = \rho\mu$ lahko zapišemo tudi drugače, če gostoto nabojev izrazimo s koncentracijo mobilnih elektronov *n*: $\rho = nQ_e$. Sledi $\gamma = \dfrac{nQ_e^2\tau}{m}$. Ta izraz sicer ne da točnih vrednosti za specifično prevodnost, saj je vendarle nekoliko poenostavljen, kljub temu pa je iz njega razvidno, da imajo snovi z večjo koncentracijo prostih elektronov večjo specifično prevodnost. Poleg tega večja masa pomeni manjšo prevodnost, kar je predvsem pomembno pri prevajanju ionov. Poleg tega se povprečni čas trkov manjša z višanjem temperature, saj tedaj atomi bolj vibrirajo in so trki v povprečju pogostejši.

Če dobljen izraz zapišemo nekoliko drugače, prepoznamo Ohmov zakon v znani (integralni) obliki:

$$U = \frac{I}{\gamma A} l = I \frac{l}{\gamma A} = IR ,$$

kjer je

$$\boxed{R = \frac{l}{\gamma A}} \tag{20.11}$$

električna upornost. Enota je Ω (Ohm).

Določimo še enoto za specifično prevodnost. Če je enota za upornost Ohm, potem ugotovimo, da lahko specifično prevodnost izrazimo kot $\frac{1}{\Omega\,\mathrm{m}}$, pogosto tudi kot $\frac{\mathrm{S}}{\mathrm{m}}$ (Siemens na meter).

Iz enačbe za upornost je razvidno, da je upornost med dvema elektrodama odvisna tako od električnih kot geometrijskih lastnosti. Enako smo ugotavljali tudi za kapacitivnost.

Inverzno vrednost od specifične prevodnosti imenujemo **specifična upornost** (enota je Ω.m):

$$\boxed{\rho = \frac{1}{\gamma}}, \boxed{R = \frac{\rho l}{A}}. \tag{20.12}$$

Običajno je podana ena ali druga vrednost, v določenih primerih (predvsem v elektrolitih) pa mobilnost nabojev. Tu je potrebno ločiti način prevajanja v tekočinah in prevodnikih. V tekočinah prevajajo tako elektroni kot ioni (pozitivni in negativni), medtem, ko v prevodnikih prevajajo samo elektroni. Obstajajo tudi posebne snovi, ki jim rečemo polprevodniki, pri katerih lahko električne lastnosti spreminjamo z dodajanjem primesi. Kos kristala silicija je izolator, zelo slab prevodnik, ki pa lahko postane dober prevodnik, če mu dodamo primesi. To dodajanje poteka pri zelo visokih temperaturah, nad 1000°. Način prevajanja je odvisen od tipa dodanih primesi. Če je dodana snov fosfor (pri čemer se med kristalno rešetko silicija le vsake toliko vrine kakšen atom fosforja), imenujemo tak tip polprevodnika n-tip, saj vsebuje določeno število šibko vezanih elektronov, ki se lahko (dokaj) prosto gibljejo ob priključeni napetosti. Če dodamo siliciju atome bora se v kristalno rešetko silicija vrinejo atomi bora, ki ustvarijo pomanjkanje elektronov, kar imenujemo vrzel. Izkaže se, da tudi takšno pomanjkanje elektronov lahko deluje kot prevodnik. V polprevodniku prevajajo tako elektroni kot vrzeli.

Primer: Specifična prevodnost bakra je 5,7 10^{7} S/m. Določimo upornost ravne palice pravokotnega preseka stranic 1x2 mm^2 in dolžine 5 m.

Izračun: Uporabimo enačbo $R = \frac{l}{\gamma A}$ in določimo upornost

$$R = \frac{5\ \mathrm{m}}{5{,}7 \cdot 10^{7}\ \mathrm{S/m} \cdot 2 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{m}^2} \approx \underline{\underline{44\ \mathrm{m}\Omega}}.$$

Primer: Določimo napetost koraka pri udaru strele s tokom 20 kA, če je čovek oddaljen za r_1 = 15 m stran od udara. Specifična prevodnost zemlje je 10^{-4} S/m, razdalja koraka je s = 0,8 m.

SLIKA 20.5: PRIKAZ UDARA STRELE IN ČLOVEKA R_1 = 15 M STRAN OD STRELE.

Izračun: Predpostavimo homogeno porazdelitev gostote toka, ki je na radiju r od mesta udara strele v tla enaka $J(r) = \dfrac{I}{A(r)} = \dfrac{I}{\dfrac{4\pi r^2}{2}} = \dfrac{I}{2\pi r^2}$. Ker je gostota toka vektorska veličina, jo kot vektor zapišemo kot $\vec{J} = \vec{e}_r \dfrac{I}{2\pi r^2}$. Iz Ohmovega zakona sledi polje $\vec{E} = \dfrac{\vec{J}}{\gamma} = \vec{e}_r \dfrac{I}{2\pi \gamma r^2}$.

Napetost koraka je $U_{12} = \int_{r_1}^{r_2} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{r_1}^{r_2} \vec{e}_r \dfrac{I}{2\pi\gamma r^2} \cdot \vec{e}_r \mathrm{d}r = \dfrac{I}{2\pi\gamma} \int_{r_1}^{r_2} \dfrac{\mathrm{d}r}{r^2} = \dfrac{I}{2\pi\gamma}\left(\dfrac{1}{r_1} - \dfrac{1}{r_1 + s}\right)$.

$$U_{12} = \frac{I}{2\pi\gamma} \frac{s}{r_1(r_1+s)} \approx \underline{\underline{107\ \mathrm{kV}}}.$$

Iz primera smo ugotovili, da lahko nastopi pri udar strele ob razkoraku do precej velike napetosti med stopaloma. Ta je lahko v določenih primerih tudi nevarna za človeka (in živali). Po preprosti enačbi za izračun še dovoljene napetosti koraka* $U_{koraka,\max} = \dfrac{200 + \rho(\Omega \cdot \mathrm{m})}{\sqrt{\text{čas trajanja}}}$, ki da približno 10 kV pri izbrani specifični prevodnosti, ugotovimo, da smo pri 15 m znotraj nevarne cone. Ocenimo lahko varno razdaljo, pri čemer bomo predpostavili $r_1 \gg s$ (sicer bi morali rešiti kvadratno enačbo):

$U_{koraka,\max} \approx \dfrac{I}{2\pi\gamma} \dfrac{s}{r_{1,\min}^2} \quad \Rightarrow \quad r_{1,\min} \approx \sqrt{\dfrac{I}{2\pi\gamma} \dfrac{s}{U_{koraka,\max}}}$. Za $U_{\text{koraka,max}}$ = 10 kV dobimo kritično razdaljo približno 50 m. Pri toku 1 kA je ta razdalja 16 m, pri 200 kA pa kar 160 m.

Pri manjših specifičnih upornostih tal je maksimalna (kritična) napetost koraka manjša, kljub temu pa je varnostna razdalja večja[2].

Dodatno: Izračunajmo ozemljitveno upornost, če je ozemljilo v obliki prevodne polkrogle v zemlji s specifično prevodnostjo 10^{-4} S/m. Polkrogla ima polmer 0,5 m.

---

* Z.Cheng: »Calculation of step voltage near lightning current«, IEEE 2004.

SLIKA 20.6: OZEMLJITVENA »KROGLA« POLMERA R = 0,5 M.

Izračun: Predpostavili smo določen tok I v kroglo, ki povzroči med točkama T_1 in T_2 napetost $U_{12} = \frac{I}{2\pi\gamma}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$. Napetost med površino krogle in neskončno okolico $\left(r_1 = r_0,\, r_2 \to \infty\right)$ bo torej $U_{0\infty} = \frac{I}{2\pi\gamma r_0}$, torej bo upornost ozemljila enaka $R = \frac{U_{0\infty}}{I} = \frac{1}{2\pi\gamma r_0}$. Za izbrane vrednosti je upornost ozemljila enaka 3,2 kΩ. To je kar velika vrednost za ozemljitveno upornost, ki naj bo čim manjša; v praksi se smatra kakovostna ozemljitev z upornostjo manjšo od 5 Ω. Pri izbrani specifični prevodnosti zemlje bi bil potrebni polmer krogle za 5 Ω ozemljilo kar 320 m. Kar seveda ni smiselno ozemljilo. V praksi se okoli objekta položi ozemljitvena žica ali mreža, če pa je specifična prevodnost tal večja, zadostuje tudi posebno oblikovan ozemljitveni klin. V posebnih primerih se specifično prevodnost tal lahko poveča z določenimi substancami, ki se jih vlije v področje ozemljitve in strnjene predstavljajo lokalno povečano specifično prevodnost tal. Specifične prevodnosti tal se gibljejo od vrednosti nekaj deset mS/m (močvirna tla) do 0,1 mS/m (skalna tla).

ŠE: Merjenje specifične prevodnosti tal, merjenje ozemljitvene upornosti.

TEMPERATURNA ODVISNOST SPECIFIČNE UPORNOSTI

V nekaterih primerih je zaželeno, da se uporovne lastnosti s temperaturo čimbolj spreminjajo. Če jih na primer izkoriščamo za določanje temperature. V drugih pa je nezaželena, saj spreminja pogoje delovanja vezja, itd. Pogosto zadostuje, da uporabimo linearen zvezo, torej, da predpostavimo linearno spreminjanje specifične upornosti s temperaturo:

$$\boxed{\rho(T) = \rho(T_0)\left(1 + \alpha\left(T - T_0\right)\right)}. \tag{20.13}$$

α imenujemo temperaturni koeficient, ki je običajno podan pri sobni temperaturi T_0 = 20^0. Za večino prevodnikov je temperaturni koeficient pozitiven, kar pomeni, da se specifična upornost snovi veča s temperaturo, kar pomeni, da se z višanjem temperature veča tudi upornost prevodnega kosa materiala. To lahko zapišemo kot (zgornjo enačbo množimo z l/A)

$$\boxed{R(T) = R(T_0)\left(1 + \alpha\left(T - T_0\right)\right)} \tag{20.14}$$

SNOVNE LASTNOSTI NEKATERIH PREVODNIKOV:

SNOV	γ(S/m)	$\rho(\Omega\mathrm{m})$	$\alpha(K^{-1})$
baker	$5{,}7\ 10^{7}$		0,0039
zlato	$4{,}1\ 10^{7}$		0,0034
aluminij	$3{,}5\ 10^{7}$		0,0041
silicij	$3{,}9\ 10^{-4}$		
voda	$2\ 10^{-4}$		
zemlja	10^{-5}-10^{-2}		
steklo	10^{-12}		
guma	10^{-17}		

JOULOV ZAKON

Je povezan s segrevanjem v snovi zaradi trkanja elektronov z atomi v snovi. Diferencial dela, ki ga opravi diferencial elektrine d*Q* v polju *E,* se pretvori v toplotno energijo

$$\mathrm{d}W_t = \mathrm{d}A_e = \mathrm{d}Q\int_0^l \vec{E}_e \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mathrm{d}Q \cdot U\,. \tag{20.15}$$

Moč je definirana kot (časovna) hitrost spreminjanja energije: $P = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}$, ki je v našem primeru

$$\boxed{P = \frac{\mathrm{d}W_t}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}U = IU}\,. \tag{20.16}$$

Dobimo že znano enačbo za moč pri enosmernih signalih:

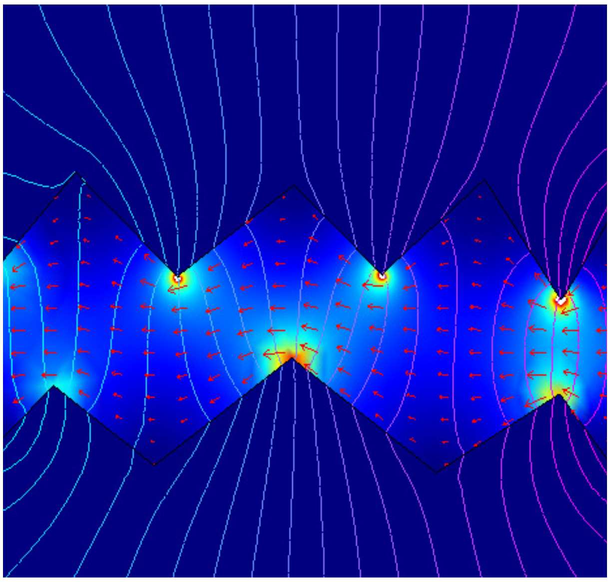
$$\boxed{P = IU = I^2R = U^2G}\,. \tag{20.17}$$

Definiramo lahko tudi **gostoto moči**, kot moč na enoto volumna. V majhnem volumnu je (diferencial) moči enak $\mathrm{d}P = p \cdot \mathrm{d}V$, kjer *p* imenujemo gostota moči, d*V* pa je diferencial volumna. Hkrati lahko diferencial moči zapišemo kot

$$\mathrm{d}P = \mathrm{d}I \cdot \mathrm{d}U = (J \cdot \mathrm{d}A)(E \cdot \mathrm{d}l) = (J \cdot E)\mathrm{d}V\,.$$

Gostoto moči lahko torej izrazimo kot produkt gostote toka in električne poljske jakosti, bolj natančna izpeljava pa pokaže, da je potrebno vzeti vektorski produkt obeh veličin:

$$\boxed{p = \vec{J} \cdot \vec{E}}\,. \tag{20.18}$$



Prikaz gostote moči (bolj »vroča« barva – večja moč) v lomljenemu vodniku. Vektorji kažejo gostoto toka, ki je večja ob ožinah in ostrih robovih.

Enota za gostoto moči je W/m^3. Z upoštevanjem Ohmovega zakona v diferencialni obliki $\vec{J} = \gamma\vec{E}$ lahko gostoto toka zapišemo tudi kot

$$\boxed{p = \gamma E^2} \tag{20.19}$$

ali kot $p = \frac{J^2}{\gamma}$ -Celotno (izgubno) moč v prevodniku določimo kot integral gostote moči v volumnu:

$$\boxed{P = \int_V p\mathrm{d}V = \int_V \vec{J} \cdot \vec{E}\mathrm{d}V}\,. \tag{20.20}$$

Ta zapis imenujemo tudi **Joulov zakon v integralni obliki.**

MEJNI POGOJI V TOKOVNEM POLJU

Podobno kot pri elektrostatičnem polju izhajamo iz dveh osnovnih zakonov. Iz $\oint_A \vec{J}\cdot \mathrm{d}\vec{A}=0$ sledi (podobno kot iz $\oint_A \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{A}=0$), da se **ohranja normalna komponenta gostote toka**:

$$\boxed{J_{n2}=J_{n1}}. \tag{20.21}$$

Če upoštevamo Ohmov zakon v diferencialni obliki $(J=\gamma E)$, velja v primeru, da na meji ni prostih nabojev

$$\boxed{\gamma_2 E_{n2}=\gamma_1 E_{n1}} \tag{20.22}$$

SLIKA 20.7: LOM GOSTOTE TOKA NA MEJI DVEH MEDIJEV Z RAZLIČNIMA PREVODNOSTIMA.

Iz zakona o potencialnosti polja pa sledi, da se ohranja še tangencialna komponenta električne poljske jakosti:

$$E_{t2}=E_{t1} \text{ oziroma } \boxed{\frac{J_{t2}}{\gamma_2}=\frac{J_{t1}}{\gamma_1}} \tag{20.23}$$

Z deljenjem z mejnim pogojem za tangencialno komponento polja velja

$$\boxed{\frac{\tan(\alpha_1)}{\tan(\alpha_2)}=\frac{\gamma_1}{\gamma_2}}, \tag{20.24}$$

kjer sta kota definirana med normalo in smerjo polja. Iz enačbe ugotovimo, da je v primeru velikih razlik med specifičnimi prevodnostmi dveh materialov (recimo na meji prevodnik/izolator) tok v prevodniku neodvisno od kota gostote toka v izolatorju praktično vzporedna z mejo.

Primer: Vektor gostote toka je usmerjen pod kotom 1° iz izolatorja z $\gamma_i=10^{-10}$ S/m na prevodnik s specifično prevodnostjo $\gamma_p=10^{7}$ S/m . Določite kot odklona vektorja gostotetoka v prevodniku.

Izračun: $\frac{\tan(\alpha_p)}{\tan(1^0)} = \frac{10^7 \text{ S/m}}{10^{-10} \text{ S/m}} \Rightarrow \alpha_p \cong 90^0$. Tokovna gostota v prevodniku je praktično vzporedna s prevodnikom.

SLIKA 20.8: GOSTOTA TOKA PADA NA MEJO PREVODNIKA POD KOTOM 1^{O} NA NORMALO.

Ker pa velja tudi Gaussov zakon v splošni obliki $\oint_A \vec{D} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = \sigma$, iz njega sledi pogoj za prehod normalne komponente gostote pretoka:

$$D_{n1} - D_{n2} = \sigma \tag{20.25}$$

Pri tem smo upoštevali, da je smer polja iz medija z indeksom 2 v medij z indeksom 1. V tej smeri kaže tudi normala na površino.

Ker sta normalni komponenti gostote toka enaki kar zapišemo kot $J_{n1} = J_{n2} = J_n$ in velja Ohmov zakon v diferencialni obliki $(J = \gamma E)$, sledi $\varepsilon_1 E_{n1} - \varepsilon_2 E_{n2} = \sigma$ in torej

$$\boxed{\left(\frac{\varepsilon_1}{\gamma_1} - \frac{\varepsilon_2}{\gamma_2}\right) J_n = \sigma}. \tag{20.26}$$

Iz enačbe ugotovimo, da bo razen v posebnih pogojih (ko velja $\frac{\varepsilon_1}{\gamma_1} = \frac{\varepsilon_2}{\gamma_2}$), na meji dveh dielektrikov prišlo zaradi razlike med električnimi lastnostmi materialov do presežne ploskovne gostote naboja.

Primer: Vzemimo žico sestavljeno iz kosa bakra, aluminija in bakra. Velja $\gamma_{Cu} = 5{,}6.10^7 \text{ S/m}$ in $\gamma_{Al} = 3{,}5 \cdot 10^7 \text{ S/m}$. Določimo površinsko gostoto naboja na meji, če teče skozi prevodnike tok z gostoto toka 1 A/mm^2.

Izračun: Vzemimo, da teče tok iz leve proti desni. Na meji Cu/Al bo veljalo $\sigma = \varepsilon_0 \left(\frac{1}{\gamma_{Al}} - \frac{1}{\gamma_{Cu}}\right) J_n = 9{,}5 \cdot 10^{-14} \text{ C/m}^2$ .Ker je specifična prevodnost aluminija manjša od specifične prevodnosti bakra (dielektričnosti pa sta enaki 1), bo na meji Cu/Al v smeri toka presežek pozitivnega naboja, na meji Al/CU pa negativnega naboja.

Nadalje lahko ugotovimo, da bo polje na površini enako $E_n = \sigma / \varepsilon_0 = \left(\frac{1}{\gamma_{Al}} - \frac{1}{\gamma_{Cu}} \right) J_n$.

Dodatno: Če si zamislimo, da je namesto aluminija vmes plast izolatorja z zelo majhno prevodnostjo $(\gamma_i << \gamma_{Cu})$, potem bo iz enačbe za površinski naboj $\sigma \cong \frac{\varepsilon_i}{\gamma_i} J_n = \frac{\varepsilon_i}{\gamma_i} \gamma_i E_n = \varepsilon_i E_n$, kar je znan izraz iz elektrostatike.

SLIKA 20.9: ŽICA IZ CU/AL/CU.

Povzetek:

- Zaradi velikih razlik v specifičnih prevodnosti med izolatorjem in prevodnikom, je pri nedirektnem vpadu gostote toka na prevodnik v prevodniku dominantna tangencialna komponenta gostote polja, v izolatorju pa normalna komponenta električnega polja.
- Na meji dveh snovi z različnimi električnimi lastnostmi pride ob prehodu toka iz enega v drug material do kopičenja pozitivnega ali negativnega naboja. Na meji izolator/prevodnik je ta naboj kar enak εE, kar je znan rezultat elektrostatike.

DUALNOST TOKOVNEGA IN ELEKTROSTATIČNEGA POLJA

Vzemimo dve prevodni telesi priključeni na enosmerno napetost U, med telesi je medij katerega električne lastnosti določata specifične prevodnost in relativna dielektričnost. Prevodni telesi lahko smatramo za ekvipotencialki, električno polje pa se porazdeli v skladu z zakonitostmi elektrostatičnega polja. Obstaja neposredna zveza med gostoto toka in električno poljsko jakostjo: $J = \gamma E$, pa tudi gostoto pretoka $J = \gamma E = \gamma \frac{D}{\varepsilon}$, torej so gostotne cevke za obe polji enaki. V tem smislu govorimo o dualnosti obeh polj. Če izračunamo porazdelitev električnega polja, poznamo tudi porazdelitev tokovnega polja. Torej mora obstajati tudi neka neposredna zveza med kapacitivnostjo in upornostjo med dvema telesoma:

$$RC = \frac{U}{I} \frac{Q}{U} = \frac{\int_A \vec{D} \cdot d\vec{A}}{\int_A \vec{J} \cdot d\vec{A}} = \frac{\varepsilon \int_A \vec{E} \cdot d\vec{A}}{\gamma \int_A \vec{E} \cdot d\vec{A}} = \frac{\varepsilon}{\gamma} = \rho \cdot \varepsilon \tag{20.27}$$

Ponovimo rezultat: $\boxed{RC = \rho\varepsilon}$. (20.28)

Praktična uporaba tega izraza je velika. Vzemimo, da znamo izračunati kapacitivnost med dvema prevodnima telesoma. Potem lahko iz kapacitivnosti zelo hitro dobimo izraz za upornost. V principu je izraz za prevodnost kar enak izrazu za kapacitivnost, le dielektričnost moramo zamenjati s specifično prevodnostjo: $G = C\dfrac{\gamma}{\varepsilon}$.

Primer: Med dve prevodni palici okroglega preseka polmera r_0 = 2 mm, razmaknjeni za 2 cm priključimo napetost 10 V in ju potopimo za l = 3 cm v prevodni medij. Izmerimo tok 0,2 mA. Določimo upornost med elektrodama in specifično prevodnost medija.

Izračun: V poglavju o okovinjenju ekcipotencialk smo imeli primer dveh nasprotno naelektrenih valjev, kjer smo z upoštevanjem ekscentričnosti določili napetost med valjema kot $U = \dfrac{q}{\pi\varepsilon_0}\ln\left(\dfrac{s+d/2-r_0}{s-d/2+r_0}\right)$, brez upoštevanja ekscentričnosti pa $U = \dfrac{q}{\pi\varepsilon_0}\ln\left(\dfrac{d-r_0}{r_0}\right)$. Od tod je kapacitivnost $C = \dfrac{Q}{U} = \dfrac{ql}{U} = \dfrac{\pi\varepsilon_0 l}{\ln\left(\dfrac{d-r_0}{r_0}\right)}$. Iz pogoja dualnosti določimo prevodnost med palicama kot $G = \dfrac{\pi\gamma l}{\ln\left(\dfrac{d-r_0}{r_0}\right)}$. Specifična prevodnost dobimo kot

$$G = \frac{0{,}2\ \mathrm{mA}}{10\ \mathrm{V}} = 20\ \mu\mathrm{S} = \gamma\frac{\pi\cdot 0{,}03\ \mathrm{m}}{\ln\left(\dfrac{22\ \mathrm{mm}}{2\ \mathrm{mm}}\right)} = \gamma\cdot 39{,}3\cdot 10^{-3}\ \mathrm{m}$$, od koder sledi $\underline{\underline{\gamma \cong 509\ \mathrm{S/m}}}$.

Realni kondenzator

Do sedaj smo ločeno obravnavali kondenzator in upor, čeprav je v realnosti tako upor kot kondenzator element, ki ima med dvema prevodnima kontaktoma snov, katere električne lastnosti so podane z relativno dielektrično konstanto in specifično prevodnostjo. Za obravnavo realnega kondenzatorja moramo vzeti primer časovno spreminjajočega se toka, saj v enosmernih razmerah kondenzator v idealnih razmerah ne prevaja toka, v realnih pa ima določeno upornost in tok prevaja. Realni kondenzator priključimo torej na vir izmenične napetosti u_g in določimo tok skozi realni kondenzator.

SLIKA 20.10: REALNI KONDENZATOR PRIKLJUČEN NA VIR NAPETOSTI U_G.

Zaokrožimo enega od kontaktov in uporabimo zakon o ohranitvi naboja

$$\oint_A J \cdot d\vec{A} = -\frac{dQ}{dt} \,. \qquad (20.29)$$

Levi člen je enak razliki izstopnega (v kondenzator) in vstopnega toka (iz vira) $\oint_A \overline{J} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = Gu_g - i_g$,

desni pa poljskemu toku v kondenzatorju, ki je posledica časovne spremembe naboja na površini kontaktov

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(Cu_g)}{\mathrm{d}t} \,.$$

Velja torej

$$Gu_g - i_g = -C\frac{\mathrm{d}u_g}{\mathrm{d}t} \,.$$

Dobimo diferencialno enačbo (linearno, prvega reda), katere rešitev je zveza med napetostjo in tokom na kondenzatorju. Ugotovimo, da lahko tok skozi kondenzator (enak toku i_g) ločimo na dva toka, enega zaradi ohmske upornosti, drugega pa zaradi kapacitivnih lastnosti:

$$i(t) = i_g = Gu_g + C\frac{\mathrm{d}u_g}{\mathrm{d}t} \,. \qquad (20.30)$$

Ta ločitev je seveda lahko samo modelna. Znotraj kondenzatorja je to hkratni in neločljivi pojav.

Pri obravnavi kondenzatorja smo že omenili vzporedno, pa tudi serijsko upornost, ki je pomemben podatek za kakovost kondenzatorja.

SLIKA 20.11: NADOMESTNA SHEMA REALNEGA KONDENZATORJA.

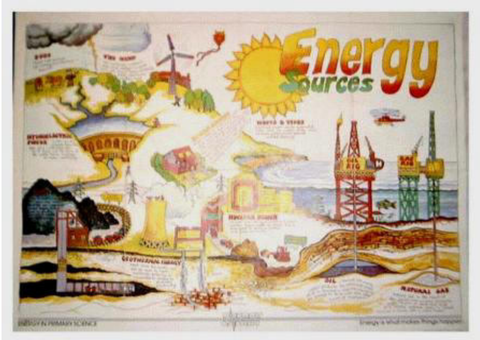
Primer nelinearnih uporov. (ŠE)

Vprašanja za obnovo:

1. Povezava med gostoto toka in tokom. »V obe smeri.«
2. Zapis kontinuitetne enačbe z gostoto toka.
3. Lastnosti časovno konstantnega tokovnega polja.
4. Od česa je odvisen tok v snovi?
5. Kakšna je razlika med konduktivnim in konvektivnim tokom?
6. Ohmov zakon v diferencialni obliki.
7. Kako iz Ohmovega zakona v diferencialni obliki pridemo do Ohmovega zakona v integralni obliki $U = IR$?
8. Razložite pojme mobilnost, specifična električna prevodnost, specifična električna upornost.
9. Električna upornost in prevodnost.
10. Temperaturna odvisnost specifične upornosti in prevodnosti.
11. Zapis Joulovega zakona v diferencialni in integrali obliki.
12. Mejni pogoji za normalno in tangencialno komponento toka.
13. Določitev površinske gostote naboja med dvema prevodnikoma iz Gaussovega zakona.
14. Dualnost tokovnega in elektrostatičnega polja.

21. Viri napetosti

Vsebina poglavja: elektromotorna sila, generatorska napetost, električni tokokrog, baterije, sončna celica.



GENERATORSKA SILA

Do sedaj smo se ukvarjali le z učinki električnega polja, ne pa tudi z načinom, kako sploh ustrezno matematično opisati ločevanje naboja in generiranje napetosti. Vzemimo na primer naelektren kondenzator, ki ima ločene pozitivne ion negativne naboje. Smer elektrostatičnega polja je od + nabojev proti – nabojem, tako v notranjosti, kot v zunanjosti kondenzatorja.

SLIKA 21.1: NAELEKTREN KONDENZATOR Z LOČENIMI NABOJI IN ELEKTROSTATIČNIM POLJEM V NOTRANJOSTI IN ZUNANJOSTI.

Če bi upoštevali le elektrostatično polje (E_{es}) za katero velja, da je delo električnih sil po zaključeni poti enako nič $\oint_L \vec{E}_{es} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0$, ugotovimo, da to polje ne more biti generatorsko, da to polje ni sposobno ločevanja nabojev, pač pa le združevanja. Torej mora biti neka druga sila, ki omogoča ločevanje nabojev nasprotnega predznaka. Tej sili rečemo **generatorska ali razdvajalna sila**. V angleškem jeziku se pogosto uporablja izraz **electromotive force**, poslovenjeno bi ji rekli elektromotorna ali elektrogeneratorska sila. Označimo jo z $\vec{F}_g$, pripadajoče električno polje pa $\vec{E}_g = \dfrac{\vec{F}_g}{Q}$. Vzemimo, da znotraj kondenzatorja deluje generatorska sila, ki je sposobna razdvajanja nabojev. Hkrati, ko deluje generatorska sila in razdvaja naboje, se vzpostavlja tudi elektrostatična sila, ki pa je usmerjena v nasprotno smer. Na elektrodah se ustvarja akumulacija naboja, ki je v ravnovesju taka, da je $\vec{E}_g + \vec{E}_{es} = 0$.

SLIKA 21.2: V KONDENZATORJU (BATERIJI) DELUJE GENERATORSKA SILA, KI RAZDVAJA NABOJE IN JIH »NALAGA« NA ELEKTRODI.

GENERATORSKA NAPETOST

Poglejmo, koliko integral $\oint_L \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$, če je $\vec{E}$ sumarna električna poljska jakost, ki vključuje tako generatorsko kot elektrostatično silo. L_1 naj bo pot znotraj, L_2 pa zunaj kondenzatorja pri čemer naj bo L_2 usmerjena v nasprotno smer. Za elektrostatično polje velja $\oint_L \vec{E}_{es}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_{L_1-L_2} \vec{E}_{es}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0 \Rightarrow \int_{L_1} \vec{E}_{es}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_{L_2} \vec{E}_{es}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$.

Ker pa električno polje v kondenzatorju ni le elektrostatične narave, velja

$$\oint_L \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_{L_1} \left(\vec{E}_{es} + \vec{E}_g\right)\cdot \mathrm{d}\vec{l} + \int_{-L_2} \vec{E}_{es}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_{L_1-L_2} \vec{E}_{es}\cdot \mathrm{d}\vec{l} + \int_{L_1} \vec{E}_g\cdot \mathrm{d}\vec{l} = -U_g\,,$$

torej velja tudi $\int_{L_1} \vec{E}_{es}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_{L_2} \vec{E}_{es}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = U_g$.

Ali drugače: Znotraj kondenzatorja je elektrostatično polje (v stacionarnem stanju) enako veliko a nasprotno usmerjeno generatorskemu in je torej $\int_{L_1} \left(\vec{E}_{es} + \vec{E}_g\right)\cdot d\vec{l} = 0$, preostane del

$$\int_{L_2} \vec{E}_{es}\cdot d\vec{l} = U_g\,. \tag{21.1}$$

Generatorska napetost je usmerjena od + naboja proti – naboju, enako kot elektrostatično polje in nasprotno smeri generatorskega polja.

<u>Povzetek:</u> Integral $\oint_L \vec{E}\cdot d\vec{l}$, ki ne vsebuje le elektrostatične električne poljske jakosti, pač pa tudi sile drugega izvora, ni nujno enak nič, pač pa neki napetosti, ki ji rečemo generatorska napetost

$$\oint_L \vec{E}\cdot d\vec{l} = -U_g\,. \tag{21.2}$$

V naslednjem semestru (OE2) bomo ugotovili, da je ta integral različen od nič tudi v primeru časovno spreminjajočega se magnetnega polja skozi zanko.

TOKOKROG

Zaključimo generator v tokokrog s ploščnim kondenzatorjem s presekom *A*, razmakom med ploščama *l* in specifično prevodnostjo γ. Ponovno pogledamo, kako lahko razdelamo integral $\oint_L \vec{E}_{es}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0$.

Integral razdelimo na pot znotraj vira in preko kondenzatorja s prevodnim materialom. Ker je sedaj zaradi toka v tokokrogu $\vec{E}_{es} + \vec{E}_g \neq 0$, bo znotraj generatorja

$\int_{L_1} \vec{E}_{es} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = U_g - \int_{L_1} \vec{E}_g \cdot \mathrm{d}\vec{l} = U_g - \int_{L_1} \frac{\vec{J}_g}{\gamma_g} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$. Enako velja za integral znotraj prevodnika $\int_{L_2} \vec{E}_{es} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_{L_2} \frac{\vec{J}_{es}}{\gamma_R} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$.

Če predpostavimo homogeno polje v preseku *A* tako za generatorski medij, kot za breme, dobimo:

$$\oint_L \vec{E}_{es} \cdot d\vec{l} = U_g - \int_{L_1} \frac{I/A}{\gamma_g} \cdot dl - \int_{L_2} \frac{I/A}{\gamma_R} \cdot \mathrm{d}l = U_g - I\frac{l}{\gamma_g A} - I\frac{l}{\gamma_R A} = 0 .$$

Prvi člen je generatorska napetost, drugi člen predstavlja padec napetosti na notranji upornosti vira, tretji pa padec napetosti na bremenskem prevodniku (uporu):

$$\boxed{U_g - IR_g - IR_R = 0}. \tag{21.3}$$

Ugotovimo, da je ločevanje med generatorsko upornostjo in napetostjo mogoče le modelno, v realnosti pa sta ta dva elementa vezij integrirana v eni strukturi.

SLIKA 21.3: TOKOKROG IZ GENERATORSKEGA IN BREMENSKEGA DELA.

* Baterije.

Tak princip generacije naboja si lahko predstavljamo v bateriji (akumulatorju), kjer ločevanje naboja nastopa zaradi elektro-kemijskih reakcij.

Zn/Cu baterija

Vzemimo primer dveh elektrod, ene iz cinka (Zn) in druge iz bakra (Cu). Če med elektrodi vlijemo tekočino, ki ji rečemo elektrolit, med elektrodama zaradi elektrokemijske reakcije nastane t.i. galvanski člen. Če je elektrolit žveplena kislina H_2S0_4, le ta v vodi disociira (tvorijo se ioni) na ione H^+ in $S0_4^{2-}$. H^+ ioni se nabirajo na bakrovi elektrodi, kjer tvorijo presežek pozitivnega naboja. Ioni $S0_4^{2-}$ se nabirajo na cinkovi elektrodi, tam tvorijo cinkov sulfat in presežek negativnega naboja. Na Cu elektrodi se tvori presežek pozitivnega naboja. Vzpostavi se napetost, ki jo lahko izkoristimo kot generatorski vir napetosti. Ob priključitvi bremena (upora) na baterijo, v priključnih žicah steče tok (elektronov), ki zmanjšuje količino generiranega naboja. Elektrokemijska reakcija nadomešča porabo naboja dokler je v elektrolitu dovolj ionov ali dokler se cinkova elektroda ne iztroši.[*]

SLIKA 21.4: A) BATERIJA IZ BAKRENE IN CINKOVE ELEKTRODE V ELEKTROLITU IZ RAZREDČENE ŽVEPLENE KISLINE. B) TOK OB KRATKEM STIKU ELEKTROD.

Kemijsko bi lahko reakcijo zapisali

$Zn + CuSO_4 = ZnSO_4 + Cu$.

Vodikovi ioni imajo pomanjkanje elektrona, ki priteče iz tokokroga na bakrovo elektrodo (priključnih žic) kot električni tok. Vodikov ion pridobi iz bakrene elektrode elektron in se izloči iz elektrolita. temu procesu rečemo redukcija. Na cinkovi elektrodi se vrši oksidacija (izločanje presežnih prostih elektronov) pri čemer nastaja cinkov sulfat, ki se useda na dnu posode.

[*] Priznati je potrebno, da se napetost med dvema različnima kovinama pojavi že brez delovanja elektrolita, torej pri neposrednem stiku dveh kovin. Ta napetost je posledica različnih izstopnih del različnih kovin in je med drugim temperaturno odvisna. Zato stik dveh različnih kovinskih materialov izkoristimo kot senzor temperature. Tak spoj pa ne more delovati kot generator toka, razen v primeru, da na tak spoj delujemo z zunanjo silo. Na primer, da spoj segrevamo ali ohlajamo.

Faraday je z eksperimenti ugotovil, da je količina snovi, ki se nabere na elektrodah (v našem primeru baker) sorazmerna toku, ki steče skozi priklopne žice. Količina elektrike, ki je potrebna za en ekvivalent kemične akcije (ki ustreza kemični reakciji potrebni za izločitev 1g vodika iz kisline) je enaka enemu Faradayju, kar ustreza naboju

96494 amperskih sekund. Za zgornjo reakcijo v kateri sta udeležena ena enota cinka in ena enota bakra ustreza generacija naboja 2 F ali 193 988 C.

Poskuse s podobno baterijo je prvi delal Alessandro Volta v Italiji, ki se po njem imenuje Voltova celica ali Voltin člen. Kovinske elektrode imajo negativen potencial glede na raztopino. Da bi jih lahko primerjali med seboj, jih primerjamo s potencialom t.i. referenčne elektrode, ki je iz platine z dodatki vodika. Tako primerjane elektrodne napetosti so za različne materiale sledeče:

zlato	1,5 V
platina	1,2 V
srebro	0,8 V
oglje	0,74 V
baker	0,34 V
železo	-0,44 V
cink	-0,76 V
aluminij	-1,67 V

Če torej sestavimo t.i. galvanski člen iz elektrode iz bakra in cinka, bo med njima napetost 0,34 V – (0,76 V) = 1,2 V.

SVINČEVA BATERIJA – AKUMULATOR

Druga znana baterija je svinčeva baterija, v kateri imamo dve elektrodi, ena iz svinca, druga pa iz svinčevega dioksida. Kot elektrolit nastopa razredčena žveplena kislina. Elektroda iz svinčevega dioksida ima za dobra 2 V višjo napetost od svinčeve. Z vezavo šestih takih celic zagotovimo baterijo z 12 - 14 V izhodno napetostjo (avtomobilski akumulator). Rekacija, ki poteka je sledeča:

na negativni elektrodi: $Pb + SO_4^{2-} = PbSO_4 + 2e$

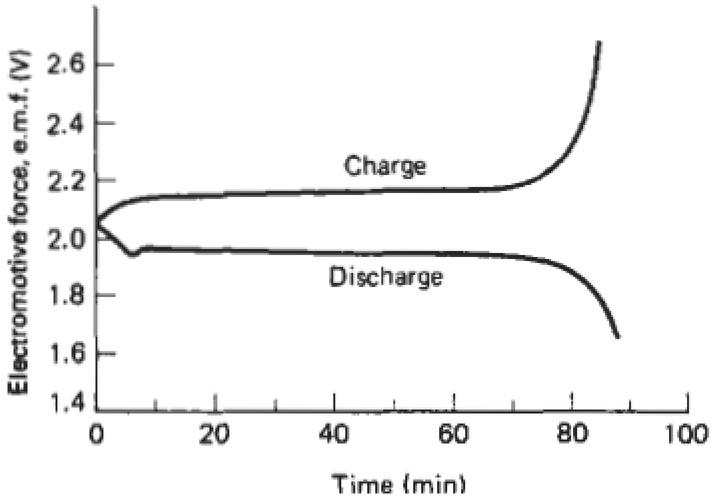
na pozitivni elektrodi: $PbO_2 + Pb + 2H_2SO_4 + 2e = 2PbSO_4 + 2H_2O$

Na obeh elektrodah nastaja svinčev sulfat, kar pomeni, da je ob popolni razelektritvi napetost med elektrodama enaka nič. Kot vemo, je mogoče te tipe baterij ponovno naelektriti, pri čemer s tokom ustvarimo generacijo svinca na eni in svinčevega dioksida na drugi elektrodi. Proces je torej reverzibilen.

$2PbSO_4 + 2H_2O = PbO_2 + 2H_2SO_4 + Pb$

SLIKA 21.5: BATERIJA IZ SVINČEVE ELEKTRODE IN IZ ELEKTRODE IZ SVINČEVEGA DIOKSIDA.

Zanimivo je to, da se med razelektritvijo manjša, med naelektritvijo pa veča koncentracija kisline, medtem ko ostane napetost celice več ali manj konstanta. V tem smislu nam merjenje napetosti na akumulatorju ne predstavlja posebno natančnega merila »polnosti«.



SLIKA 21.6: KARAKTERISTIKA NAELEKTRITVE IN RAZELEKTRITVE BATERIJE (NAPETOST – ČAS). VIR: T.R. CROMPTON: BATTERY REFERENCE BOOK, NEWNES, 2000.

Svinčene baterije so verjetno še vedno najbolj razširjene. Predvsem se uporabljajo v avtomobilski industriji. Njihova prednost pred ostalimi je nizka cena, visoka napetost na celico in »dobra« življenska doba (mnogokratno polnenje). Slabosti pa velika teža, slabe nizko-temperaturne lastnosti in ne sme biti v stanju razelektritve za daljše obdobje.

V prodaji so tudi t.i. zaprti tip akumulatorjev (suhi), katerih prednost je, da jim ni potrebno dolivati elektrolita / destilirane vode. Pri standardnih svinčenih baterijah namreč lahko posebno pri koncu elektritve ali pri prekomerni naelektritvi pride do elektrolize žveplene kisline pri čemer se kreirata kisik in vodik, kar v končni konsekvenci lahko škodno vpliva na karakteristiko baterije. Novi tipi baterij omogočajo, da generiran kisik in vodik tvorita vodo. Pri razelektritvi ima svinčeva »celica« določeno notranjo upornost; standardni tip D ima pri napetosti celice 2 V notranjo upornost 10 mΩ.

NIKELJ – KADMIJEVE BATERIJE (NI-CD)

so mehansko trdne in imajo dolgo življensko dobo. Imajo tudi dobro nizkotemperaturno karakteristiko in so hermetično zaprte. Imajo pa višjo ceno kot svinčene ali nikel-cinkove baterije. V grobem jih po izdelavi delimo na dva tipa: celice z debelimi ploščami v katerih je aktiven material stisnjen v perforiran metalni trak v obliki žepkov ali tubusov, in na celice s sintranimi ploščami v katerih je aktivni material deponiran v porozne reže metala. Posebno slednje imajo majhno notranjo upornost in sposobnost velike obremenitve. Uporabljajo se na primer v biomedicfinskih napravah, igračkah, itd. Vsebujejo toksične substance.

Nikelj – metal – hidridne baterije

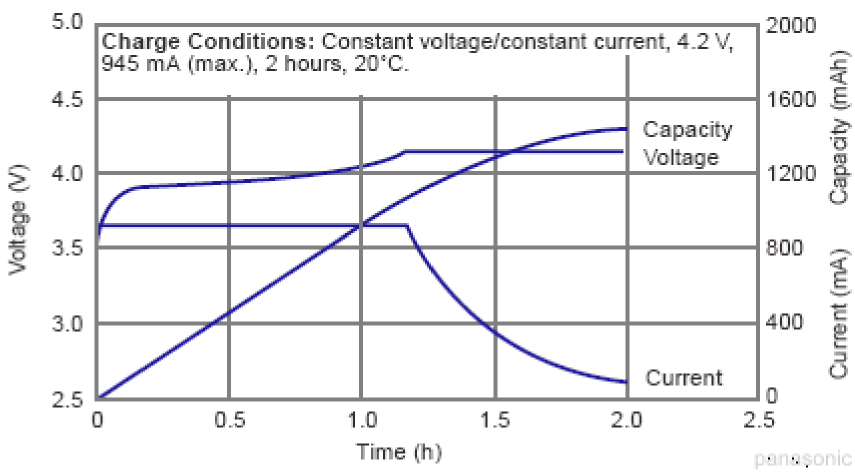
Omogočajo večjo gostoto energije (energija na kilogram teže) vendar manjše število ponovnih polnenj kot nikel-kadmijeve baterije. Uporaba: mobilne naprave.

Litij – ionske baterije

So trenutno najpogosteje uporabne baterije v prenosnikih, mobilnih in drugih aparatih, kjer je potrebna velika gostota in obnovljivost energije .

Litij je najlažji kovinski element, ima zelo velik elektrokemijski potencial in torej omogoča zelo velike gostote energije.

Veliko razvoja je bilo potrebnega, da so se odpravile težave temperaturne nestabilnosti litijeve elektrode pri ponovnih polnjenjih, ko je prihajalo do eksplozij baterij. Da bi se izognili težavam, so litij nadomestili z litij-ionsko elektrodo, ki ima sicer nekoliko manjšo gostoto energije, je bolj varna. Prve tovrstne baterije so začeli proizvajati in tržiti pri Sony-ju leta 1991. Obstaja več različnih tipov litij-ionskih baterij, ki se predvsem razlikujejo materialu iz katerega sta anoda in katoda. Anoda je najpogosteje iz grafita, katoda pa iz kobalta ali magnezija. Elektrolit je iz litijeve soli ($LiPF_6$, $LiBF_4$, or $LiClO_4$). Napetost ene celice je višja kot pri drugih celicah, običajno med 4,1 V in 4,2 V. Precej pomembno je, da se te napetosti ne preseže. Hitrost polnenja je približno 3h za 1 C naboja.



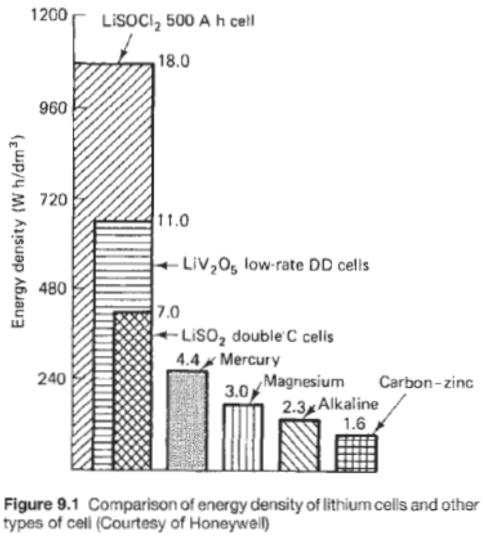
SLIKA 21.7: POLNILNI TOK IN NAPETOST ZA LITIJ-IONSKO BATERIJO. VIR: HTTP://WWW.ELECTRONICS-LAB.COM/ARTICLES/LI_ION_RECONSTRUCT/

Običajno litij-ionske baterije potrebujejo določeno zaščitno vezje, ki baterijo izklopi, če je napetost celice večja od 4,3 V ali če temperatura celice preseže 90 °C. Tipična življenjska doba Li-ionskih baterij je 300 do 500 polnjenj/praznjenj. Neugodno je, da ob koncu življenjske dobe običajno baterija še vedno kaže visoko napetost, bistveno pa se zmanjša njena kapacitivnost. Poveča se tudi notranja upornost baterije

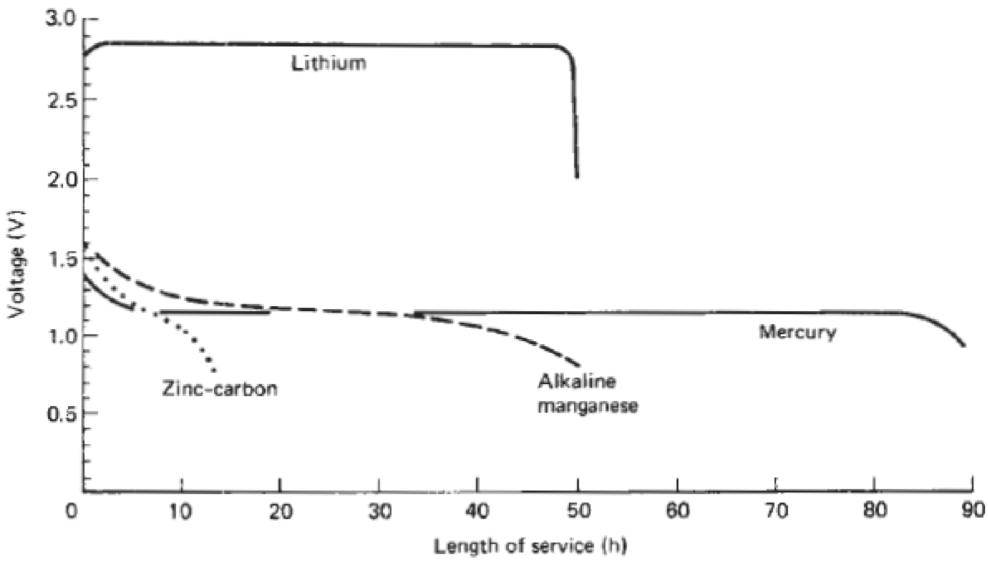
Namesto »klasičnega« elektrolita iz litijevih soli, se v zadnjem času uporablja tudi bolj kompaktne snovi – polimere. Te tipe baterij imenujemo litij-ionske polimerske baterije. Prednost teh baterij je cenejša izdelava, manjši volumen in manjša teža, saj jih lahko oblikujemo v obliki folij (slika desno), pa tudi večja gostota energije (130-200 W/kg in 300 Wh/L).

	Nickel-cadmium	**Nickel-metal-hydride**	**Lead-acid** sealed	**Lithium-ion** cobalt	**Lithium-ion** manganese	**Lithium-ion** phosphate
Gravimetric Energy Density (Wh/kg)	45-80	60-120	30-50	150 - 190	100 - 135	90 - 120
Internal Resistance in mΩ	100 to 200[1] 6V pack	200 to 300[1] 6V pack	<100[1] 12V pack	150 - 300[1] pack 100 -130 per cell	25 – 75[2] per cell	25 – 50[2] per cell
Cycle Life (to 80% of initial capacity)	1500[2]	300 to 500[3,4]	200 to 300[3]	300 - 500[3]	Better than 300 – 500[4]	>1000 lab conditions
Fast Charge Time	1h typical	2 to 4h	8 to 16h	1.5 - 3h	1h or less	1h or less
Overcharge Tolerance	moderate	low	high	Low. Cannot tolerate trickle charge.		
Self-discharge / Month (room temperature)	20%[5]	30%[5]	5%	<10%[6]		
Cell Voltage Nominal Average	1.25V[7]	1.25V[7]	2V	3.6V 3.7V[8]	Nominal 3.6V Average 3.8V[8]	3.3V
Load Current peak best result	20C 1C	5C 0.5C or lower	5C[9] 0.2C	<3C 1C or lower	>30C 10C or lower	>30C 10C or lower
Operating Temperature[10] (discharge only)	-40 to 60°C	-20 to 60°C	-20 to 60°C	-20 to 60°C		
Maintenance Requirement	30 to 60 days	60 to 90 days	3 to 6 months[11]	not required		
Safety	Thermally stable, fuse recommended	Thermally stable, fuse recommended	Thermally stable	Protection circuit mandatory; stable to 150°C	Protection circuit recommended; stable to 250°C	Protection circuit recommended; stable to 250°C
Commercial use since	1950	1990	1970	1991	1996	2006
Toxicity	Highly toxic, harmful to environment	Relatively low toxicity, should be recycled	Toxic lead and acids, harmful to environment	Low toxicity, can be disposed in small quantities		

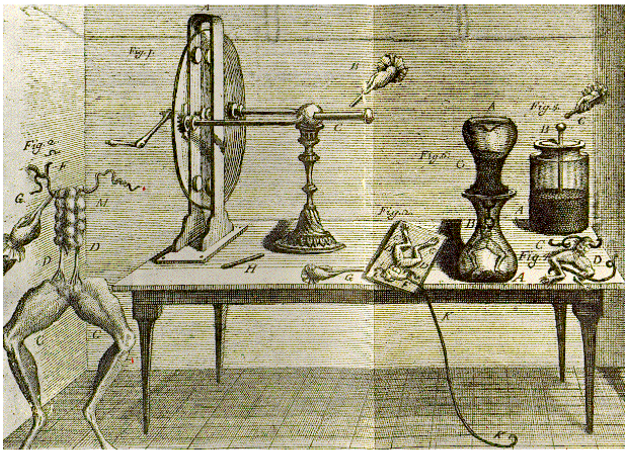
SLIKA 21.8: PRIMERJAVA BATERIJ PO GOSTOTI ENERGIJE, NOTRANJI UPORNOSTI, ČASU POLNENJA, ITD. VIR: WWW.CADEX.COM



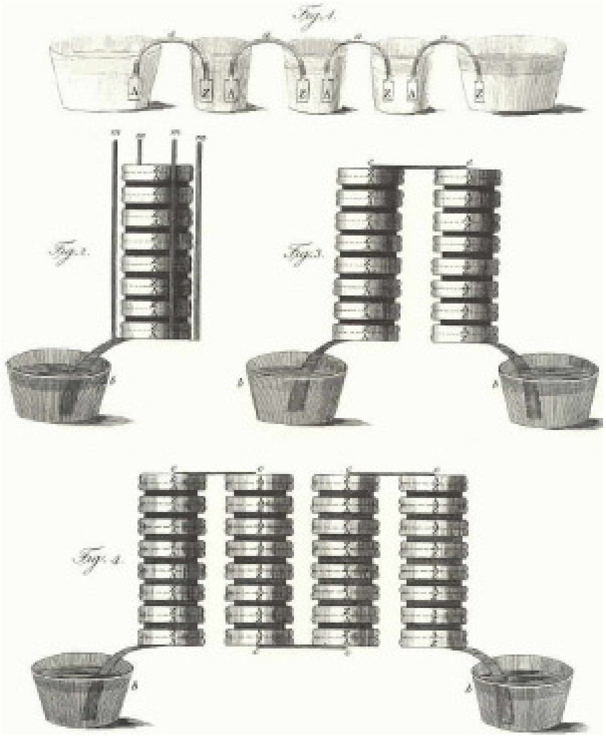
SLIKA 21.9: PRIMERJAVA PREDNOSTI LITIJEVIH BATERIJ PRED OSTALIMI GLEDE NA GOSTOTO ENERGIJE. VIR: T.R. CROMPTON: BATTERY REFERENCE BOOK, NEWNES, 2000.



SLIKA 21.10: NAPETOSTNE KARAKTERISTIKE *V*(T) RAZČNIH TIPOV BATERIJ. VIR: T.R. CROMPTON: BATTERY REFERENCE BOOK, NEWNES, 2000.



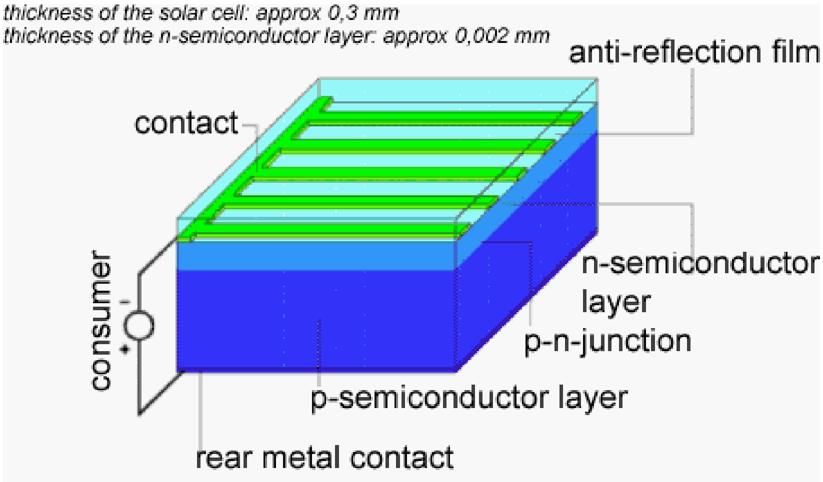
Galvani in Volta. Zanimiva je zgodba nastanka Voltinovega izuma, ki je povezana s poskusi Luigija Galvanjija, Voltinega sonarodnjaka, ki je presenečeno ugotavljal, da mrtvi žabji kraki reagirajo na dotik s kovino, kar je razlagal z živalsko elektriko (slika desno). Volta je tej teoriji nasprotoval in dokazal, da je to posledica zunanje generirane napetosti, kar je tudi dokazal z uporabo elektrike shranjene v Leidenski flaši ali pa z bimetalom, torej s stikom dveh različnih kovinskih materialov. Dandanes vemo, da smo tudi ljudje sestavljeni iz celic, ki za svoje delovanje uporabljajo elektrokemijske principe in da je prenašanje signalov živčnih celic električne narave. Torej je imel delno Galvani prav, obstaja živalska elektrika, le da je bila njegova interpretacija napačna. V njegovem primeru je bil rezultat trzljaja električni sunek, ki je bil zunanje (ekstrinsično) in ne notranje kreiran. Voltini eksperimenti in dognanja so mu prinesli pomembna priznanja (nagrada Royal Society leta 1791, Copleyeva nagrada leta 1974) in veliko slavo. Raziskave je nadaljeval v smeri povečanja napetosti, ki je bila zelo šibka (manj kot 1 V) in jo je bilo težko zaznati s tedaj najpopolnejšimi elektrometri. Uspelo mu je z zaporedno povezavo šalčk z elektrolitom in bimetalnimi elektrodami. Povezal je diske iz cinka in srebra ter vmes dodal šibko kislino ali slano vodo in dobil Voltino kaskado, pri kateri se je napetost na skrajnih koncih povečevala v sorazmerju s številom uporabljenih členov. Zgodovinsko je morda zanimivo, da je njegovo delo močno podprl Napolenon, ki mu je podelil naziv vitez (Conte) in dal penzijo. Hkrati je Napoleon, ki se je zavedal pomena novih odkritij razpisal nagrado 60000 frankov za vsakogar, ki bi dosegel podobne dosežke kot Franklin in Volta. Leta 1881 na prvem internacionalnem električnem (elektrotehničnem) kongresu v Parizu, so v čast Volti po njemu poimenovali enoto za napetost.



Obstaja mnogo načinov generiranja električne napetosti. Poleg baterij je najbolj pomemben princip uporabe generacija izmenične napetosti z elektrodinamskim načinom, ki pa ga bomo bolj natančno spoznali pri predmetu OE2.

* SONČNA CELICA

Osnovni princip delovanja sončne celice je generacija parov elektron - vrzel pod vplivom visoko energijskih sončnih žarkov. Vrzel predstavlja pomanjkanje elektronov v dopiranem polprevodniškem materialu oziroma nezaključene vezi med atomi polprevodnika in dopanta. Vrzel se obnaša ekvivalentno pozitivnemu naboju in lahko potuje po polprevodniku, če nanj deluje električna sila. Njeno potovanje pa je počasnejše, kot potovanje prostih elektronov (rečemo, da je mobilnost vrzeli manjša od mobilnosti vrzeli). Poleg tega je v polprevodnikih potrebno upoštevati tok, ki je posledica krajevne razlike v koncentracijah nabojev, tako elektronov kot vrzeli. Ravno ta tok povzroči, da pri stiku dveh polprevodnikov različnega tipa pride do prerazporeditve naboja in s tem do vgrajenega električnega polja.



SLIKA 21.11: SONČNA CELICA SESTAVLJENA IZ POLPREVODNIŠKEGA PN SPOJA. NA POVRŠINI JE ANTIREFLEKSNI SLOJ, KI POVEČUJE ABSORPCIJO SVETLOBNE ENERGIJE. VIR: INTERNET.

Čisti, nedopiran, polprevodniški material (recimo Si ali Ge) je izolator. Njegova specifična prevodnost je zelo majhna. Če pa ga dopiramo z določenimi atomi, recimo fosforja ali bora, se ti atomi vgradijo v kristalno strukturo silicija. Dopiranje se vrši na zelo visoki temperaturi (čez 1000^{o} C). Z dopiranjem vnesemo v kristalno strukturo silicija atome (primesi), ki s sosednjimi atomi silicija tvorijo nezaključene vezi, kar v končni obliki pomeni, da je v primeru vgrajenega atoma fosforja na mestu fosforja višek elektrona, ki je zelo šibko vezan na atom in je praktično prosto gibljiv. Na ta način lahko s kontrolo množine (koncentracije) dopiranih atomov uravnavamo prevodnost polprevodniškega materiala. Tak tip polprevodnika imenujemo n (negative) tip. Kljub določeni koncentraciji prostih (šibko vezanih) elektronov v snovi, pa je ta material še vedno električno nevtralen. Če podobno dopiramo silicij z atomi bora, tvori atom bora z okoliškimi vezmi silicija nezaključeno vez, kar predstavlja pomanjkanje elektrona oziroma vrzel. Tak tip polprevodnika imenujemo p (positive) tip. Tudi tak tip polprevodnika je prevoden, le da je mobilnost vrzeli manjša kot mobilnost elektronov. Zanimiv pa je stik dveh polprevodnikov različnega tipa. Ob stiku se tvori t.i. pn spoj. Tu pride zaradi izenačenja potenciala na meji do prerazporeditve nabojev, kar pomeni, da postane del prevodnika na meji brez nosilcev naboja in s tem ne več nevtralen. Ostane vezan naboj, ki ustvari vgrajeno električno polje. To polje kaže od n-tipa proti p-tipu polprevodnika. To vgrajeno polje se veča z večanjem t.i. zaporne napetosti, torej tedaj, ko je na zunanji sponki n-tipa bolj pozitiven potencial kot na zunanji sponki p-tipu polprevodnika. V tem primeru skozi prevodnik teče le majhen, zaporni tok. V nasprotnem primeru pa zunanja napetost povzroči zmanjšanje vgrajenega polja in poveča prevodno progo. Ko zunanji vir vgrajeno polje (pri pn diodi iz Si pri cca. 0,7 V) izniči postane pn spoj prevoden in tok hitro (eksponentno) naraste. pn dioda je tipičen nelinearen element.

Kot smo že omenili je za delovanje sončne celice pomembna generacija parov elektron-vrzel. Če ta generacija nastopi v osiromašenem področju (kjer je vgrajeno polje), to polje potegne elektrone v nasprotni smeri polja, vrzeli (pozitivni naboj) pa v smeri polja. Ti naboji predstavljajo zmanjšanje vgrajenega polja vendar obenem presežek negativnih nabojev v n-tipu in presežek vrzeli v p-tipu polprevodnika. Povzročijo neravnotežje, ki ga lahko zmanjšamo, če tako diodo kratko sklenemo ali pa, če nanjo priključimo določeno breme. Skozi breme steče tok, ki povzroči ponovno vzpostavitev ravnotežja. Če je fotogeneracija konstantna, je konstanten tudi tok, ki teče skozi priključeno breme. Dobili smo generator toka. Več toka bomo seveda dobili če bo večja generacija parov elektron-vrzel, kar lahko omogočimo tako z izboljšanjem materialov kot z večjo površino celice, ki je izpostavljena soncu. Osnovni princip je ta, da je potrebno povečati osiromašeno področje, kjer je vgrajeno polje in omogočiti, da v to področje »zaide« čim več fotonov sončne svetlobe. Ena od idej je, da se med p in n tipom polprevodnika obdrži nedopiran (intrinsični) tip silicija, v katerem je osiromašeno področje zelo veliko. Težava, ki jo je potrebno upoštevati je ta, da se sončna svetloba v polprevodnikih tipa Si ali Ge zelo hitro absorbira, torej že v površinskem sloju. Kar pomeni, da je potrebno osiromašeno področje zagotoviti zelo blizu površine. Itd...

Običajno je tako, da je najvažnejše razmerje med ceno celice in sposobnostjo generacije električnega toka in ne med izkoristkom celice. Ceneje kot iz čistega silicija je izdelovanje sončnih celic iz amorfnega silicija ali polisilicija. V Sloveniji izdeluje panele s sončnimi celicami podjetje Biosol.

INDEKS

Namerno prazna stran