OSNOVE ELEKTROTEHNIKE I

ENOSMERNA VEZJA

DEJAN KRIŽAJ

2009

Namerno prazna stran (prirejeno za dvostranski tisk)

VSEBINA

Namerno prazna stran

1. Enosmerna vezja

Vsebina poglavja: Kirchoffova zakona, Ohmov zakon, električni viri (idealni realni, karakteristika vira, karakteristika bremena – matematično in grafično, delovna točka).

V enosmernih vezjih ni časovnih sprememb toka ali napetosti: tok in napetost na vseh elementih vezja sta konstantna. Da je do takega stanja prišlo, je moralo predhodno priti do prehodnega pojava, npr. tedaj, ko smo na vezje priklopili vir električne energije. Med prehodnim pojavom se tok in napetost na elementih vezja časovno spreminja. Te pojave bomo obravnavali šele v zadnjem delu predmeta OE II. Pri enosmernih vezjih bomo obravnavali le vezja sestavljena iz uporov in virov. Analiza takih vezij je nekoliko bolj enostavna kot analiza vezij pri vzbujanju z izmeničnimi signali, kljub temu pa se bo kasneje (OE2) izkazalo, da lahko z določenimi dodatnimi prijemi (uporaba kompleksnega računa) znanja iz analize enosmernih vezij uporabimo tudi za analizo vezij iz drugih pasivnih elementov (kondenzatorjev, tuljav) vzbujanih z izmeničnimi viri.
Analiza vezja pomeni, da znamo določiti napetost in tok na vsakem elementu vezja. Da bomo to sposobni, bomo uporabili spoznanja iz elektrostatike in tokovnega polja. To, da je pri enosmernih vezjih vsota tokov v zaključeno površino enaka nič $\oint_A \vec{J} \cdot d\vec{A} = 0$, da velja zakon o potencialnosti polja, kjer je integral električne poljske jakosti po zaključeni poti enak nič $\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$ in to, da pri enosmernih vezjih obravnavamo le konduktivne toke, kjer velja linearna zveza med gostoto toka in električno poljsko jakostjo $\vec{J} = \gamma\vec{E}$. Iz prve zveze bo sledil prvi Kirchoffov zakon,iz druge drugi Kirchoffov zakon in iz tretje zveze Ohmov zakon. Ti nam zadostujejo za popolno obravnavo (analizo) enosmernih vezij.

KIRCHOFFOVA ZAKONA

1. Kirchoffov zakon.
Pri enosmernih vezij ni kopičenja naboja znotraj zaključene površine, kar matematično zapišemo $\left.\frac{dQ}{dt}\right|_{\substack{\text{zaključena}\\ \text{A}}} = 0$, kar hkrati pomeni, da je $\oint_A \vec{J} \cdot d\vec{A} = 0$. Če razdelimo zaključeno površino na N delov, lahko zapišemo $\oint_A \vec{J} \cdot d\vec{A} = \int_{A_1} \vec{J} \cdot d\vec{A} + \int_{A_2} \vec{J} \cdot d\vec{A} + \cdots + \int_{A_N} \vec{J} \cdot d\vec{A} = 0$, kar pa je hkrati enako $i_1 + i_2 + \cdots + i_N = 0$, kjer je i_1 tok skozi površino A_1 itd. Pri enosmernih vezjih so toki konstantni in jih običajno pišemo z veliko tiskano črko I $(i(t) = I)$.


Vsota vseh tokov: delta reke Nil.

Zaključena površina lahko predstavlja tudi majhno področje, kjer se stikajo vodniki s toki. Temu stiku rečemo spojišče (včasih smo rekli tudi vozlišče). V tem smislu lahko za tokove, ki se združujejo v spojiščih zagotovo trdimo, da je njihova vsota enaka nič, kar predstavlja prvi Kirchoffov zakon:

$$\boxed{\sum_{i=1}^{N} I_i = 0}$$ 1. K.Z.

Z besedami: Vsota tokov v (ali iz) spojišča je enaka nič.

SLIKA: Vsota tokov v zaključeno površino/spojišče je enaka nič.

Dogovoriti se moramo le še kdaj je tok pozitiven. Kot pozitiven tok lahko označimo tistega, ki priteka v ali odteka iz spojišča. Važno je le, da smo pri obravnavi konsistentni.

Primer: V spojišče so povezani štirje vodniki. Po prvem priteka tok 4 A, po drugem odteka tok 2 A in v tretjem priteka tok 1A. Določimo tok v četrtem vodniku.
SLIKA.

2. Kirchoffov zakon.
Kot smo že omenili v elektrostatičnih razmerah in v razmerah, ko je tok konstanten velja, da je delo po zaključeni poti enako nič, iz česar sledi tudi t.i. zakon o potencialnosti polja $\oint_L \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0$. Zaključeno pot lahko razdelimo na M odsekov, in veljalo bo $\oint_L \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_{L_1} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} + \int_{L_2} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} + \cdots + \int_{L_M} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0$ ali tudi $U_1 + U_2 + \cdots + U_M = 0$, kar predstavlja 2. Kirchoffov zakon. Zaključeno pot si lahko poljubno izberemo, pri vezjih jo izberemo tako, da poteka preko virov, bremen in prevodnih vezi (žic), ki jih bomo pri analizi vezij poimenovali veje. Drugi Krichoffov zakon lahko krajše zapišemo v obliki

W. Kandinsky

$$\boxed{\sum_{i=1}^{M} U_i = 0}.$$ 2. K.Z.

Z besedami: vsota padcev napetosti v (zaključeni !) zanki je enaka nič.

SLIKA: Idealni napetostni generator in vzporedno vezani dve bremeni. Po 2. Kirchoffovem zakonu mora veljati, da je vsota vseh padcev napetosti v zanki enaka nič.

Primer: Na akumulator z napetostjo 12 V zaporedno priključimo dve bremeni (dva upora). Kolikšna je napetost na drugem uporu, če na prvem izmerimo padec napetosti 4 V?
SLIKA.

Ohmov zakon

Kot smo že omenili, pri enosmernih vezjih obravnavamo le konduktivne toke, za katere smo ugotovili, da je povprečna hitrost gibanja nabojev sorazmerna električni poljski jakosti $\langle \vec{v} \rangle = \mu \vec{E}$, s tem pa tudi gostota toka: $\vec{J} = \rho \vec{v} = \gamma \vec{E}$. Nato smo material z znano specifično prevodnostjo (γ) uporabili kot prevodnik in ugotovili, da v primeru prevodnika v obliki kvadra dolžine l in preseka A skozi prevodnik, ki je priključen na vir napetosti U, teče tok $I = JA = \gamma EA = \gamma \frac{U}{l} A = \frac{\gamma A}{l} U = GU$.

G imenujemo prevodnost (enota S – Siemens). Lahko pa gornjo enačbo zapišemo tudi v še bolj znani obliki $U = I / G = RI$, kar bi lahko poimenovali Ohmov zakon v integralni obliki.

Če povzamemo: za bremena, ki jih bomo obravnavali pri analizi enosmernih vezjih velja linearna zveza (sorazmerje) med tokom in napetostjo. Večja kot je napetost na bremenu, večji tok teče skozi breme. Matematično to zapišemo kot

$$\boxed{U = RI} \qquad \textbf{Ohmov zakon}$$

kjer R je električna upornost. Enota za upornost je Ω (Ohm).

Poimenovanje **Ohmov zakon** moramo upoštevati z zadržkom. Zvezo med napetostjo in tokom na določenem elementu vedno lahko poiščemo, ni pa vedno linearna. V elektrotehniki pogosto uporabljamo elemente, kot so diode in tranzistorji. Pri teh ravno izkoriščamo njihove nelinearne lastnosti med tokom in napetostjo za usmerjanje, ojačanje, ipd. Ohmov zakon v smislu linearne zveze med tokom in napetostjo je omejen na tiste elemente, kjer je princip prevajanja konduktiven.*

SLIKA: Simbol za upor, grafično prikazana linearna zveza med tokom in napetostjo.

Primer: Iz I-U karakteristike upora določite njegovo vrednost in zapišite karakteristiko v matematični obliki.
SLIKA.

* Omejenost Ohmovega zakona ne sme zmanjšati njegovega zgodovinskega in praktičnega pomena. Kar se tiče zgodovine elektrike se je potrebno zavedati, da so bili sprva pojmi kot so naboj, tok in napetost še popolnoma nejasni in so različni raziskovalci preizkušali različne pojme. Ohm je na tem področju razjasnil razlike med napetostjo in tokom. Poleg tega seveda zvezo med tokom in napetostjo v elektrotehniki zelo pogosto uporabljamo in je za enostavne upore pogosto upravičena linearna zveza.

Označevanje smeri tokov in napetosti. Tako za napetost kot za tok določimo smer. Na viru označimo smer napetosti od sponke plus proti sponki minus, na bremenu pa lahko smer toka ali napetosti določimo poljubno. Ne pa tudi obeh. Smer toka na bremenu določa tudi smer napetosti in obratno ($U = IR$).

SLIKA: Označevanje smeri tokov in napetosti na virih in bremenu.

ELEKTRIČNI VIRI

Ločimo dva vira tipa virov: napetostne vire in tokovne vire. Obravnavali bomo idealni tokovni in napetostni vir ter realni tokovni in napetostni vir. Ugotovili bomo, da sta realna vira ekvivalentna, če imata enaki I-U karakteristiki.

Idealni napetostni vir

Idealni napetostni vir zagotavlja na zunanjih sponkah konstantno napetost neodvisno od obremenitve. Tej napetosti rečemo tudi napetost odprtih sponk oziroma napetost prostega teka. *I-U* karakteristiko idealnega napetostnega vira zapišemo kot $U = U_0$.

SLIKA: Simbol za idealni napetostni vir, napetost odprtih sponk in karakteristika vira.

Problem predstavitve (uporabe) idealnih virov je v tem, da je tok kratkega stika pri napetostnem viru neskončen (ker je notranja upornost idealnega napetostnega vira enaka nič), prav tako je neskončna napetost na odprtih sponkah idealnega tokovnega vira (notranja upornost takega vira je neskončna).
V realnih razmerah je potrebno upoštevati še notranjo upornost tako tokovnega kot napetostnega vira. Za tak vir uporabimo izraz realen vir, kljub temu, da je v realnosti lahko električna karakteristika pravega vira še bolj zapletena.

Realni napetostni vir

Govorili smo že o idealnem napetostnem viru, za katerega smo rekli, da ima napetost na zunanjih sponkah konstantno in neodvisno od priključenega bremena. Takih virov seveda ni, če na slab napetostni vir priključimo »preveliko« breme (v resnici je to breme z majhno notranjo upornostjo), se na zunanjih sponkah vira napetost »sesede«. Vsak vir ima namreč določeno notranjo upornost in ob priključitvi vira na breme steče tok, ki povzroči padec napetosti na bremenu, pa tudi na notranji upornosti vira. Kar tudi pomeni, da na zunanjih sponkah vira nimamo več napetosti odprtih sponk pač pa neko manjšo napetost, ki je zmanjšana za padec napetosti na notranji upornosti vira. Poglejmo si razmere matematično in grafično:

SLIKA: realni napetostni vir.

Realni napetostni vir ponazorimo z zaporedno vezavo idealnega napetostnega vira in upora. Če na priključnih sponkah ni priključeno breme, je seveda tok enak nič in padca napetosti na upornosti vira ni. Napetost na priključnih sponkah je enaka napetosti odprtih sponk: $U = U_{\mathrm{g}} = U_{\mathrm{o}}$. Če pa priključimo breme, se napetost na priključnih sponkah zmanjša za padec napetosti na notranji upornosti generatorja: $U = U_{\mathrm{g}} - IR_{\mathrm{g}}$. To enačbo lahko prikažemo tudi grafično in ji rečemo *karakteristika vira*. Na X osi (abscisi) označimo napetost, na Y osi (ordinati) pa tok. Enačba predstavlja enačbo premice, ki jo najlažje določimo v točkah, kjer premica seka X in Y os, napetostno in tokovno os. Ko je tok enak nič, je $U = U_{\mathrm{o}} = U_{\mathrm{g}}$, to je stanje odprtih sponk, napetosti pa rečemo **napetost odprtih sponk**. Ko pa je napetost enaka nič, je tok enak $I_k = U_{\mathrm{g}} / R_{\mathrm{g}}$. To pa je stanje kratkega stika, toku rečemo **tok kratkega stika ali kratkostični tok**. Med točkama kratkega stika in napetostjo odprtih sponk mora potekati premica, ki ji rečemo **karakteristika realnega vira.**
Samo karakteristika vira še ne zadostuje za določitev napetosti na bremenu. Potrebujemo še *karakteristiko bremena*. Ta je preprosta, saj ko na priključne sponke priključimo breme, je na bremenu napetost U in velja: $U = R_{\mathrm{b}} I$. Če narišemo še to enačbo v diagram, tudi ta predstavlja enačbo premice. Ena točka je v koordinatnem izhodišču, drugo pa določimo tako, da za določeno izbrano vrednost toka (napetosti) izračunamo vrednost napetosti (toka) in vrišemo še drugo točko ter potegnemo premico. Naklon premice predstavlja upornost. Velik naklon predstavlja majhno upornost, majhen naklon pa veliko upornost.
Premici imata presečišče, ki ga imenujemo **delovna točka**. To je namreč točka, ki ponazarja »delovno« stanje vezja. Odčitamo lahko tok in napetost delovne točke. To je tok, ki teče skozi breme, napetost pa je napetost na bremenu. Ta način določanja delovne točke imenujemo *grafičen način.*

Določimo delovno točko še matematično. To naredimo tako, da združimo enačbi bremena in vira. Dobimo $R_{\mathrm{b}} I = U_{\mathrm{g}} - IR_{\mathrm{g}}$. Tok v vezju bo torej $I = \dfrac{U_{\mathrm{g}}}{R_{\mathrm{g}} + R_{\mathrm{b}}}$, napetost na bremenu pa $U = \dfrac{U_{\mathrm{g}}}{R_{\mathrm{g}} + R_{\mathrm{b}}} R_{\mathrm{b}}$. To sta tudi tok in napetost v delovni točki, ki jih odčitamo tudi grafično.

Primer: Na 9 V baterijo z notranjo upornostjo 1 Ω priključimo breme z upornostjo 5 Ω. Določite napetost in tok na bremenu grafično in analitično.

Izračun: $I = \frac{U_g}{R_g + R_b} = \frac{9\,\mathrm{V}}{1\,\Omega + 5\,\Omega} = 1{,}5\,\mathrm{A}$, $U = 1{,}5\,\mathrm{A} \cdot 5\,\Omega = 7{,}5\,\mathrm{V}$.

Idealni tokovni vir

Idealni tokovni vir na svojih sponkah zagotavlja tok, ki je neodvisen od priključitve bremena. Matematično zapišemo karakteristiko takega vira kot $I = I_0$. V primeru, da sponke takega vira kratko sklenemo, bo tekel tok kratkega stika, kar predstavlja tudi nazivni tok tega vira.

SLIKA: Simbol za idealni tokovni vir, tok kratkega stika in karakteristika vira.

Realni tokovni vir

Je sestavljen iz idealnega tokovnega vira s tokom I_g in vzporedno vezane upornosti R_g. Če ni priključenega bremena, je na zunanjih sponkah napetost enaka $U = R_g I_g$. Če je na zunanji sponki priključeno breme (upor R_b), se tok skozi breme zmanjša za tok skozi upornost vira: $I = I_g - U / R_g$. Ta enačba predstavlja karakteristiko realnega tokovnega vira, ki jo prav tako lahko grafično prikažemo. Pri kratkem stiku je napetost na bremenu enaka nič, tok pa je kar tok idealnega tokovnega vira in ga imenujemo tudi tok kratkega stika: $I(U = 0) = I_k = I_g$, pri odprtih sponkah pa je tok I enak nič, napetost pa napetost odprtih sponk $U_o = I_g R_g$. Če karakteristiko narišemo kot *U-I* diagram, dobimo zopet premico. V presečišču s karakteristiko bremena pa delovno točko.

SLIKA: Realni tokovni vir.

Ugotovimo lahko, da se ***karakteristika realnega tokovnega vira lahko prilega karakteristiki realnega napetostnega vira. V tem smislu sta to dva ekvivalentna vira.*** Če primerjamo karakteristiki ugotovimo, da bo analogija veljala tedaj, ko bo $U_g = I_g R_g$.

Vprašanje: Kdaj torej govorimo o napetostnem in kdaj o tokovnem viru? Ko imamo vir z zelo veliko notranjo upornostjo nam le ta zagotavlja konstanten tok (dokler je upornost bremena dosti manjša od notranje upornosti vira, če pa je notranja upornost vira zelo majhna, nam to na zunanjih sponkah zagotavlja konstantno napetost.

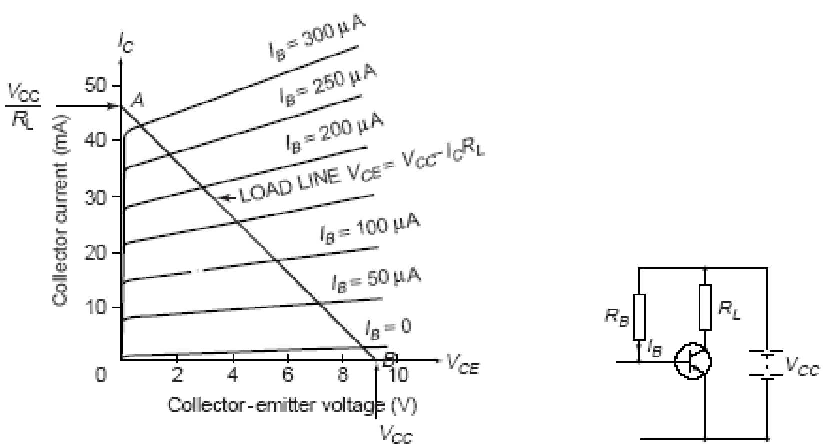
Vzporedna in zaporedna vezava virov. Enako kot upore, lahko zaporedno vežemo tudi napetostne vire in s tem dosežemo višjo skupno napetost na zunanjih sponkah. To je tudi

običajno narejeno pri mnogih elektronskih aparatih, kjer je na primer za delovanje naprave pri 6 V potrebno povezati zaporedno štiri 1,5 V baterije.
Podobno lahko z vzporedno vezavo tokovnih virov dosežemo vir z večjim nazivnim tokom

SLIKA: Zaporedna vezava napetostnih virov in vzporedna vezava tokovnih virov.

Nelinearno breme. Grafični način je posebno primeren tedaj, ko je breme nelinearno. Ko je napetost na sponkah bremena neka nelinearna funkcija toka skozi breme. Na primer $U = kI^2$. Tak primer je na primer dioda, element, ki ima nizko upornost pri pozitivnih in zelo visoko pri negativnih napetostih (ali obratno, odvisno od priključitve). Pri diodi je v prevodni smeri tok eksponentno odvisen od napetosti: $I = I_0 e^{kU}$,v zaporni smeri pa je tok majhen, do določene napetosti, kjer pride do preboja. Ob preboju tok skozi diodo močno naraste in lahko pride do trajne poškodbe ali uničenja elementa. Delovno točko določimo grafično, tako, da določimo točko preseka nelinearne karakteristike bremena in linearne karakteristike realnega vira.

SLIKA: Primer določanja delovne točke pri priključitvi diode na realni napetostni vir.



SLIKA: Primer določanja delovne točke pri tranzistorski vezavi. Nelinearne so karakteristike tranzistorja, ki so prikazane za različne vrednosti baznega toka. (samo informativno)

Vprašanja za obnovo:

1) Razložite 1. in 2. Kirchoffov zakon in od kod izhajata?
2) Razložite Ohmov zakon. Od kod izhaja? Kakšne so omejitve tega zakona?
3) Razložite idealni in realni napetostni vir matematično in grafično (I-U karakteristika). Kaj je to karakteristika vira, karakteristika bremena?
4) Kaj je delovna točka, kako jo določimo?

Primeri kolokvijskih in izpitnih nalog

1. kol. 3.12.2007,nal. 5
1. kol. 5.12. 2006, nal. 5

2. Osnovna električna vezja in merilni inštrumenti

Vsebina poglavja: osnovni elementi vezij (zaporedna in vzporedna vezava uporov, napetostni in tokovni delilnik, mostično vezje, potenciometer), temperaturna odvisnost uporov, nelinearni elementi, ampermeter, voltmeter, ohmmeter, vatmeter.

Z upoštevanjem obeh Kirchoffovih zakonov in zveze med napetostjo in tokom na uporih (Ohmovim zakonom) lahko analiziramo poljubno enosmerno vezje. Potrebno je pač zapisati zadostno število enačb za neznane toke v vejah vezja in rešiti sistem linearnih enačb. V kratkem si bomo podrobneje ogledali metode za reševanje (analizo) vezij, ki nam omogočajo sistematičen pristop k reševanju.

1. Zaporedna vezava uporov

Pogosto upore priključimo (vežemo) zaporedno. Če so priključeni na vir napetosti, se napetost porazdeli na posamezne upore: $U = U_1 + U_2 + ... + U_N = \sum_{i=1}^{N} U_i$. Ker pa je skozi vse upore isti tok, velja $U = IR_1 + IR_2 + ... + IR_N = I\left(R_1 + R_2 + .. + R_N\right) = I\sum_{i=1}^{N} R_i = IR_{\mathrm{nad}}$

Nadomestna upornost zaporedno vezanih uporov je seštevek posameznih upornosti: $R_{\mathrm{nad}} = \sum_{i=1}^{N} R_i$.

SLIKA: Zaporedna vezava uporov.

Primer: Določimo nadomestno upornost zaporedne vezave uporov 30 Ω, 100 Ω in 1 kΩ.
Izračun: R_{nad} = 1130 Ω.

2. Vzporedna vezava uporov

Upore vežemo vzporedno, ko želimo tok razdeliti v več vej. Celotni tok je vsota tokov posameznih vej: $I = I_1 + I_2 + ... + I_N$. Če so upori priključeni na vir, je na vseh uporih enaka napetost. Velja $I = \frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2} + .. + \frac{U}{R_N} = U\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{R_i} = \frac{U}{R_{\mathrm{nad}}}$. Vzporedno vezane upore lahko torej nadomestimo z nadomestnim upornom, za katerega velja $\frac{1}{R_{\mathrm{nad}}} = \sum_{i=1}^{N}\frac{1}{R_i}$. Če to izrazimo s prevodnostmi dobimo $G_{nad} = \sum_{i=1}^{N} G_i$.

Pri vzporedni vezavi uporov tvorimo torej nadomestno upornost s seštevanjem njihovih prevodnosti, pri zaporednih pa upornosti.

SLIKA: Vzporedna vezava uporov.

Primer: Določimo nadomestno upornost vzporedne vezave uporov 30 Ω, 100 Ω in 1 kΩ.
Izračun: G_{nad} = 1/30 S + 1/100 S +1/1000 S = 0,044 S, kar ustreza R_{nad} = 22,556 Ω.
.

3. Napetostni delilnik

Napetostni delilnik realiziramo z zaporedno vezavo dveh ali več uporov priključenih na vir napetosti.

SLIKA: Napetostni delilnik. Zanima nas napetost na uporu R_2.

V skladu z 2. KZ velja $U - U_1 - U_2 = 0$. Z upoštevanjem Ohmovega zakona $U_1 = R_1 I$ in $U_2 = R_2 I$ dobimo $I = \frac{U}{R_1 + R_2}$, od koder je $U_2 = IR_2 = \frac{U}{R_1 + R_2} R_2 = U \frac{R_2}{R_1 + R_2}$. Dobili smo rešitev, ki je v elektrotehniki zelo pogosto uporabljena. Napetost moramo pogosto zmanjšati oziroma »deliti«. Takemu preprostemu načinu rečemo **delilnik napetosti**, enačbo pa si velja vtisniti v spomin. Ponovimo končni rezultat:

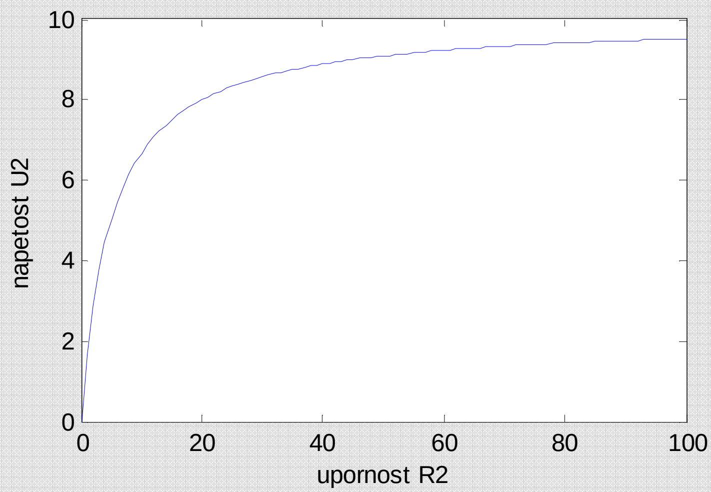
$$\boxed{U_2 = U \frac{R_2}{R_1 + R_2}}.$$

Poleg matematične oblike je zelo pomembno, da si predstavljamo odvisnost napetosti na uporu od vrednosti uporov tudi grafično. Očitno napetost na uporu R_2 ni linearno odvisna od vrednosti upornosti R_2. Kako bi si lahko skicirali potek odvisnoti napetosti na R_2 od upornosti R_2? Tako, da poskušamo poenostaviti enačbo z razmislekom, kakšna bi bila oblika enačbe za zelo majhne R_2 in zelo velike R_2:

- pri R_2, ki so mnogo manjši od R_1 (matematično $R_2 \ll R_1$) bo R_2 zanemarljivo velik v primerjavi z R_1 in bo enačba približno enaka $U_2 \approx U \frac{R_2}{R_1}$. Pri majhnih vrednostih R_2 bo torej napetost na R_2 linearno odvisna od velikosti R_2.
- pri R_2, ki so mnogo večji od R_1 (matematično $R_2 \gg R_1$) bo R_1 zanemarljivo velik v primerjavi z R_2 in bo enačba približno enaka $U_2 \approx U \frac{R_2}{R_2} = U$. Pri velikih vrednostih R_2 bo torej vsa napetost generatorja na uporu R_2.

Pomagajmo si izrisati grafično odvisnost napetosti $U_2(R_2)$ z računalnikom. Programov, ki jih lahko v ta namen uporabimo je zelo veliko. Načeloma ni pomembno katerega uporabimo, sta pa se v (elektro)tehniki uveljavila predvsem dva profesionalna programa: Matlab in Matematica. Poglejmo si, kako bi uporabili program Matlab.
V ukazni vrstici programa vpišemo naslednje vrstice:

```
U=10 % izbrana napetost generatorja
R1=5 % izbrana upornost R1
R2=0:1:100 % tvorimo vrednosti uporov R2 od 0 po 1 do 100
U2=U*R2./(R1+R2) % enacba za izracun napetosti na R2 (deljenje z ./ )
plot(R2,U2) % ukaz za izris grafa U2(R2)
xlabel('upornost R2') % zapis osi X
ylabel('napetost U2') % zapis osi Y
```



SLIKA: Sprememba napetosti na bremenu v odvisnosti od upora R_2.

4. Tokovni delilnik

Podobno kot napetostni delilnik, pogosta v elektrotehniki uporabljamo tudi **tokovni delilnik.**

SLIKA: Tokovni delilnik. Zanima nas tok skozi upor R_2.

Imamo dva vzporedno vezana upora s skupnim tokom I. Zanima nas tok skozi upor R_2. Velja: $I = I_1 + I_2$, kjer sta $I_1 = U/R_1$ in $I_2 = U/R_2$. Dobimo $I = U/R_1 + U/R_2 = U\left(1/R_1 + 1/R_2\right) = U\frac{R_1+R_2}{R_1 \cdot R_2}$. Napetost je torej $U = I\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}$, tok skozi upor R_2 pa $I_2 = U/R_2 = I\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}\cdot\frac{1}{R_2} = I\frac{R_1}{R_1+R_2}$. Končni rezultat je podoben (vendar ne enak) kot pri napetostnem delilniku. Zaradi pogoste uporabe si ga tudi velja zapomniti. Zato ga ponovimo: $\boxed{I_2 = I\frac{R_1}{R_1+R_2}}$.

5. Napetostni delilnik s potenciometrom

a) brez upoštevanja bremenske upornosti

Poznamo več različnih tipov potenciometrov. Mi bomo obravnavali le linearne, take, katerih spremembo upornosti lahko zapišemo kot $R_x = \frac{x}{l} R$, kjer je R upornost potenciometra med skrajnima legama, l dolžina prevodne proge, x pa dolžinski del, katerega upornost je R_x (glej sliko). Če potenciometer priključimo na vir napetosti U_g, je napetost na uporu R_x enaka

$U_x = IR_x = \frac{U_g}{R} R_x$. Z upoštevanjem zveze $R_x = \frac{x}{l} R$ pa dobimo

$U_x = \frac{U_g}{R} R_x = \frac{U_g}{R} \frac{x}{l} R = \frac{x}{l} U_g$.

Napetost na uporu R_x se linearno spreminja z lego drsnika.

SLIKA: Priključen potenciometer in graf napetosti na drsniku linearnega potenciometra.

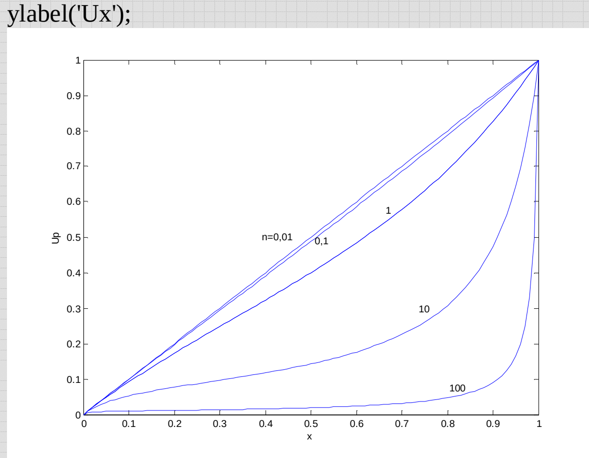
b) z upoštevanjem bremenske upornosti

Če upoštevamo še priključitev bremena na upor R_x, velja

$\frac{U - U_x}{R_{l-x}} = \frac{U_x}{R_x} + \frac{U_x}{R_b}$. Po preureditvi dobimo (preverite še sami) $U_x = U \frac{x}{x(1 - x/l)n + l}$, kjer je $n = R\ / R_b$.

Izrišimo nekaj krivulj vrednosti U_p za različna razmerja $n = R / R_b$. Vzemimo U = 1 in spreminjajmo x od 0 do 1 (l=1) in izrišimo vrednosti Ux za vrednosti n = 0,01, 0,1, 1, 10 in 100. Matlabovi ukazi so

```
x=0:0.01:1;
for n=[0.01,0.1,1,10,100]  % zanka za 5 različnih vrednosti n
Ux=x./(1+x.*(1-x)*n)
plot(x,Ux)
hold on       % ohrani graf
end
xlabel('x');
ylabel('Ux');
```



SLIKA: Različne vrednosti U_x pri razmerjih n = 0,01, 0,1, 1, 10, 100. Večjo linearnost se doseže pri $n \ll 1$, torej tedaj, ko je bremenska upornost dosti večja od upornosti uporovnega delilnika.

6. Mostično vezje

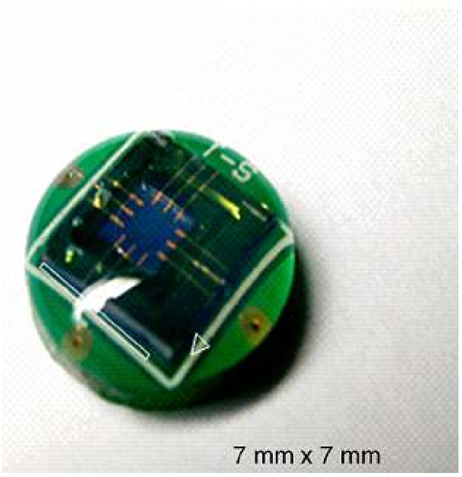
SLIKA: Mostično vezje.

Eno v praksi zelo pogosto uporabljenih vezij je t.i. mostično vezje, ki ga pogosto imenujemo tudi **Wheatstonov** mostič. Zakaj most? Zato, ker premostimo dva napetostna delilnika in merimo napetost med upori. Zgradimo ga iz napetostnega delilnika z uporoma R_1 in R_2 ter delilnika z uporoma R_3 in R_4. Napetost na uporu R_2 je $U_2 = U\dfrac{R_2}{R_1 + R_2}$, na R_4 pa $U_4 = U\dfrac{R_4}{R_3 + R_4}$. Mostično napetost dobimo z uporabo 2 K.Z:

$U_{\text{most}} = U_2 - U_4 = U\dfrac{R_2}{R_1+R_2} - U\dfrac{R_4}{R_3+R_4} = U\left(\dfrac{R_2}{R_1+R_2} - \dfrac{R_4}{R_3+R_4}\right)$. Zanimiva situacija nastopi, ko je mostična napetost enaka nič. Tedaj rečemo, da je mostič *uravnotežen*, pri čemer mora veljati: $\dfrac{R_2}{R_1+R_2} = \dfrac{R_4}{R_3+R_4}$. Sledi $R_2\left(R_3+R_4\right) = R_4\left(R_1+R_2\right)$ oziroma $R_2R_3 = R_4R_1$, kar bolj pogosto zapišemo v obliki $\boxed{\dfrac{R_2}{R_1} = \dfrac{R_4}{R_3}}$.

Mostična vezja se v praksi zelo pogosto uporabljajo. Zelo pogosta uporaba mostiča je pri iskanju (merjenju) neznane upornosti, katero lahko zelo natančno določimo tako, da spreminjamo eno (ali več) vrednosti upora(ov) toliko časa, dokler ni napetost U_{most} enaka nič. Potem je upornost enostavno določljiva iz gornje enačbe, npr: $R_2 = R_1\dfrac{R_4}{R_3}$.

Wheastonovo mostično vezavo ne uporabljamo le v enosmernih razmerah pač tudi pri izmeničnih signalih. Poznamo različne tipe mostičev, npr. Wienov, Owenov, Maxwellov, itd.



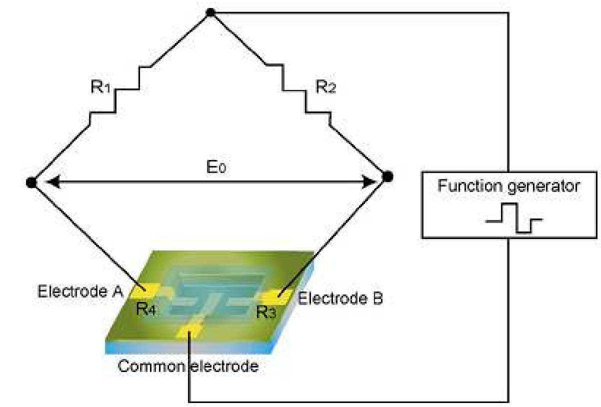
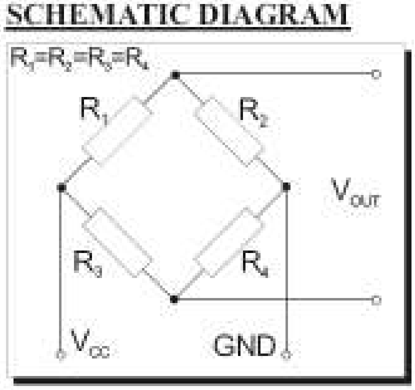
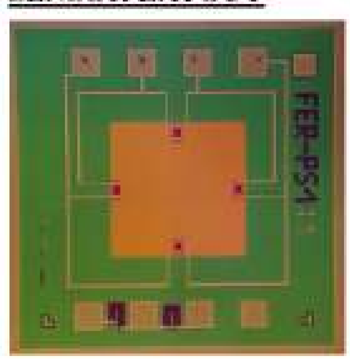


Fig. 10. The AC signal circuit to measure the output voltage of the fabricated tilt sensor.

SCHEMATIC DIAGRAM



SENSOR LAYOUT



SLIKA: Primer uporabe principa Wheatstonovega mostiča: Zgoraj mikromehansko izdelan senzor naklona. Vir: An optimized MEMS-based electrolytic tilt sensor. Jung et al.: Sensors and Actuators A139 (2007) stran 23–30. Spodaj: polprevodniški senzor tlaka. Vir: produkt Laboratorija za mikrosenzorske strukture in elektroniko na Fakulteti za elektrotehniko, Univerza v Ljubljani.

7. Transformacija zvezda – trikot

Pogosto pri analizi vezij zasledimo vezavo uporov v obliki, ki ji rečemo trikot, saj so trije upori nameščeni v obliki trikotnika. Druga oblika vezave pa je taka, da so trije upori vezani v skupno spojišče – taki vezavi pravimo vezava v zvezdo. Pogosto si za lažjo analizo vezij pomagamo s transformacijo vezave trikot v zvezdo in obratno. Če imamo v vezavi zvezda tri spojišča z upori R_1, R_2 in R_3, potem s transformacijo dobimo vezavo trikot z upori R_{12}, R_{23} in R_{32}, katerih vrednosti so

$$R_{12} = \frac{R^2}{R_3} \quad R_{23} = \frac{R^2}{R_1} \quad \text{in } R_{31} = \frac{R^2}{R_2},$$

pri čemer je $R^2 = R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1$.

SLIKA: Transformacija vezja oblike zvezda v obliko trikot.

Zapišimo še obratno pot: če želimo iz vezave trikot preiti v vezavo zvezda, bomo upore določili iz

$R_1 = \dfrac{R_{12}R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}$, podobno pa tudi R_2 in R_3.*

Temperaturne lastnosti uporov

Ko skozi upor »teče« tok, se nosilci naboja (v uporih običajno elektroni) ne gibljejo premočrtno od ene do druge sponke, pač pa »trkajo« z atomi v snovi. Kljub trkanju z atomi prevodnika pa se pod vplivom priključene napetosti (električnega polja) v povprečju gibljejo v eni smeri: elektroni v smeri pozitivne sponke. V tem smislu se gibljejo z neko povprečno hitrostjo (rečemo tudi hitrost drifta), ki pa je odvisna od temperature. Pri višji temperaturi je namreč nihanje atomov večje in s tem tudi število trkov, torej se povprečna hitrost nabojev zmanjša. S tem se tudi zmanjša tok, posredno pa se poveča električna upornost. Meritve pokažejo, da se temperaturna odvisnost upornosti spreminja skoraj linearno s temperaturo, kar lahko zapišemo v obliki

$R(T) = aT + b$,

kjer sta a in b konstanti, ki ju moramo določiti z meritvijo. Običajno nas zanima sprememba upornosti glede na temperaturo okolice (20 ^{0}C), kjer bo $R(T_{20}) = aT_{20} + b$. Če enačbi odštejemo, dobimo

* Poskusite sami izpeljati te enačbe. Pot je ta, da mora biti nadomestna upornost med dvema sponkama enaka v obeh vezavah. Npr veljati mora: $R_1 + R_3 = R_{12} \| (R_{31} + R_{23})$, $R_2 + R_3 = R_{23} \| (R_{12} + R_{13})$ in še ena zveza za $R_1 + R_2$, ki jo zapišite sami. Nato seštejte prvo in tretjo enačbo ter odštejte drugo in dobili boste enačbo za R_1.

$R(T)=R(T_{20})\left(1+a\dfrac{T-T_{20}}{R(T_{20})}\right)$. Vpeljemo konstanto α, ki jo imenujemo temperaturni koeficient in pišemo

$$\boxed{R(T)=R(T_{20})\left(1+\alpha\left(T-T_{20}\right)\right)}.$$

SLIKA: Temperaturna odvisnost upornosti.

Tipične vrednosti temperaturnih koeficientov so (v K^{-1}):

Železo	0,006
Aluminij	0,0041
Baker	0,0039
Konstantan	0,00003

Vse zapisane vrednosti koeficientov so pozitivne, torej bo upornost železa, aluminija, bakra in konstantana večja pri višjih temperaturah. Okrajšava za pozitivni temperaturni koeficient je PTK, za negativnega pa NTK (ang. PTC in NTC).

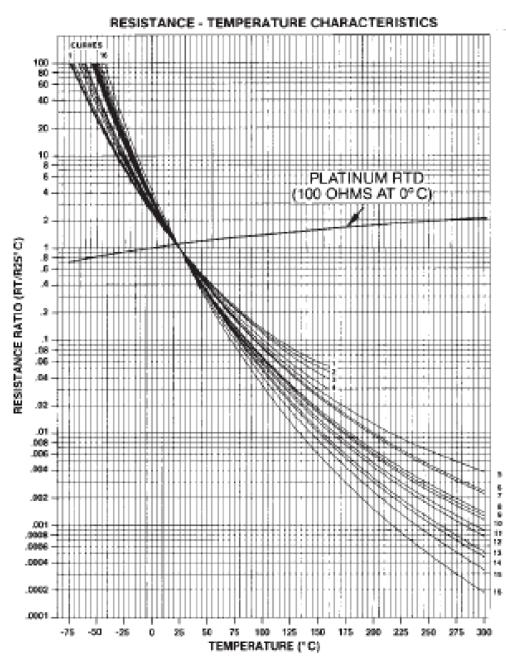
SLIKA: Pozitivni in negativni koeficient upora.

Primer: Kolikšna je upornost bakrene žice pri 80 ^{0}C, če je njena upornost pri upornost pri 20 ^{0}C enaka 10 Ω?

Izračun:

$R(80^0\mathrm{C})=10\,\Omega\left(1+0{,}0039\ \mathrm{K}^{-1}\cdot 60\,\mathrm{K}\right)=12{,}34\,\Omega$.

Obstaja vrsta elementov, katerim se upornost izrazito spreminja s temperaturo. Tem elementom pravimo termistorji (ang. thermistor = thermal resistor). Njihova uporaba v elektrotehniki je zelo pogosta, od merjenja temperature do kompenzacije temperaturnih lastnosti drugih elementov v vezju, regulacija amplitude, napetosti, alarm, ...



SLIKA: Upornost NTC termistorja se manjša z višanjem temperature. Za primerjavo je na sliki prikazana tudi odvisnost upornosti platine od temperature. Vir: katalog firme Murata.

Nelinearni elementi. Linearni element je samo poenostavitev, ki nam olajša analizo vezij. V osnovi so vsi elementi vsaj do določene mere nelinearni. Za upore navadno smatramo, da so linearni, čeprav poznamo tudi vrsto nelinearnih uporov. Najbolj znan nelinearni element je prav gotovo dioda. Dioda je običajno izdelana iz polprevodniškega materiala, ki omogoča prevajanje v eni smeri, v drugi pa ne. To povzroči izrazito nelinearno karakteristiko, ki jo v elektrotehniki s pridom uporabljamo. Bolj zapleteni so tranzistorji, ki so elementi z najmanj tremi kontakti od katerih je en običajno namenjen za kontrolo prevajanja toka med drugima kontaktoma.

Pogosto se uporablja grafičen način za določanje delovne točke tudi pri uporabi nelinearnih elementov. Če si zamislimo, da priključimo nelinearen element na sponki v vezju, lahko posebej narišemo karakteristiko vezja brez priključenega elementa in dodamo karakteristiko nelinearnega elementa. V presečišču je delovna točka. Pogosto rišemo grafično karakteristiko nelinearnega elementa za več parametrov, na primer pri bipolarnem tranzistorju za različne bazne toke, pri MOS tranzistorju za različne vrednosti napetosti vrat itd.

Kirchoffova zakona sta splošno veljavna, tudi za vezja z nelinearnimi elementi. Večji problem je pri izračunavanju, saj je sistem linearnih enačb dosti lažje rešiti od nelinearnega. Pri slednjem se moramo poslužiti numeričnih metod, pa še v tem primeru ni uspeh zagotovljen.

Merilni inštrumenti. Poznamo vrsto merilnih inštrumentov, ki nam omogočajo meritve električnih veličin: voltmeter, ampermeter, ohmeter, vatmeter in drugi. Običajno so bili ti inštrumenti analogni in so bili zasnovani na osnovnih principih lastnosti električnega polja. Večinoma so uporabljali vrtljive tuljavice. Sodobni inštrumenti so večinoma digitalni, izdelani z uporabo elektronskih elementov. Največji problem merilnih inštrumentov je njihova omejena točnost merjenja, ki je pogosto določena s ceno naprave. Omejeno točnost naprav je potrebno upoštevati pri natančnejših meritvah. S problemi merjenja se ukvarja posebno področje elektrotehnike – metrologija.

Voltmeter. Voltmeter je inštrument za merjenje napetosti. Simbol je krog s črko V v sredini kroga. Idealni voltmeter bi bil tak, ki bi ga priključili med merilni sponki in se razmere v vezju ne bi spremenile. V resnici ima vsak voltmeter določeno notranjo upornost, ki je velika, ni pa neskončna. Zamislimo si, da merimo napetost odprtih sponk. S priključitvijo voltmetra bomo spremenili razmere v vezju, saj bo skozi voltmeter stekel določen tok, ki pri odprtih sponkah ne bi.

SLIKA: Voltmeter: priključitev, razlika med idealnim in realnim voltmetrom.

Razširitev merilnega območja voltmetra je mogoča z dodanim preduporom, ki ga vežemo **zaporedno** voltmetru. S tem izvedemo že omenjen napetostni delilnik.

Primer: Vzemimo, da voltmeter meri do 5 V (merilno območje), želimo pa meriti do 100 V, pri čemer je notranja upornost voltmetra 100 kΩ. Določimo predupor tako, da bo voltmeter kazal 5 V tedaj, ko bo na zaporedno vezavo voltmetra in predupora priključena napetost 100 V.

Izračun: $100\,\mathrm{V} = IR_\mathrm{p} + 5\,\mathrm{V}\,;\ I = \dfrac{5\ \mathrm{V}}{100\ \mathrm{k\Omega}} \ \Rightarrow \ R_\mathrm{p} = 1900\,\mathrm{k\Omega} = 1{,}9\,\mathrm{M\Omega}$.

SLIKA: Povečanje (razširitev) merilnega območja voltmetra.

Ampermeter. Ampermeter je inštrument za merjenje toka. Umestimo ga v vejo, v kateri želimo meriti tok. Simbol za ampermeter je krogec s črko A v sredini krogca. Tudi ampermeter ni idealen inštrument. V idealnih razmerah naj bi bila notranja upornost ampermetra čim manjša, torej taka, ki ne bi povzročila dodatnega padca napetosti na inštrumentu. V resnici ima neko malo notranjo upornost.

SLIKA: Ampermeter, priključitev

Prav tako kot voltmetru, lahko tudi ampermetru povečamo merilno območje, vendar sedaj tako, da upor vežemo vzporedno z ampermetrom , ki ga imenujemo tudi soupor ali kar po angleško »šant« (ang. shunt). S tem del toka, ki bi ga sicer meril ampermeter preusmerimo v vzporedno vejo.

Primer: Želimo meriti tok 30 A, pri čemer nam inštrument kaže največ 10 A. Notranja upornost ampermetra v tem merilnem območju je 0,2 Ω. Določimo upornost soupora.
Izračun: Ker ampermeter meri največ 10 A, moramo predvideti, da bi pri toku 30 A v vzporedni veji tekel tok 20 A. Napetost na ampermetru pri 10 A je 2 V, ta napetost mora biti tudi na souporu v vzporedni veji. Veljati mora torej $R_s = \frac{2\,\mathrm{V}}{20\,\mathrm{A}} = 0{,}1\,\Omega$.
Vprašanje: Kako realiziramo tako male vrednosti souporov?

SLIKA: Razširitev merilnega območja ampermetra s souporom.

Vatmeter je inštrument za merjenje moči. Ima dva para sponk. Z enim parom merimo napetost, z drugim pa tok. Simbol je krogec s črko W. Odčitek vatmetra bi bil ob upoštevanju neidealnosti vatmetra različen glede na priključitev sponk. Zakaj?

SLIKA: Priključitev vatmetra.

Ohmmeter. Je naprava za merjenje upornosti. V osnovi je inštrument, ki pri znani vzbujalni napetosti meri tok skozi breme in iz razmerja določi upornost bremena.

Univerzalni inštrument običajno vključuje tako ampermeter, voltmeter kot ohmeter, običajno pa je z njim mogoče meriti tudi kapacitivnosti, določene parametre nelinearnih elementov (tranzistorjev, diod), induktivnosti, pogosto pa tudi omogočajo priklop določenih senzorjev (temperature, svetilnosti), brezkontaktno merjenje toka (s tokovnimi kleščami) in tudi priklop na računalnik za sprotno odčitavanje in kasnejšo analizo podatkov.

Vprašanja za obnovo:

1) Tokovni in napetostni delilnik.
2) Zaporedna in vzporedna vezava uporov.
3) Voltmeter. Razširjanje merilnega območja s preduporom.
4) Ampermeter. Razširjanje merilnega območja s souporom.
5) Temperaturne lastnosti uporov.

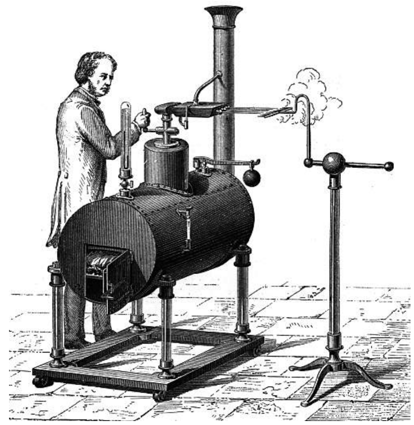
Za doma:
1. Odgovorite na vprašanja za obnovo
2. Rešite TEST2.htm
3. Rešite katero od kolokvijskih ali izpitnih nalog

Za raziskovalce:
1. V tekstu smo uporabili izraze coulomb, amper, volt, vat. Po komu se te enote imenujejo in kakšne zasluge imajo ti ljudje za razvoj elektrotehniške znanosti?
2. Poiščite na internetu strani, ki uporabljajo napetostni ali tokovni delilnik ali mostično vezje v konkretni aplikaciji in opišite osnovni princip delovanja.
3. Preverite svoje znanje na spletu: http://www.physics.uoguelph.ca/tutorials/ohm/Q.ohm.quizzes.html
4. Napišite program, ki bo zrisal karakteristiko vira in karakteristiko bremena. Izrišite več karakteristik bremena na isto sliko. Kako se spreminja delovna točka?
5. Raziščite različne tipe potenciometrov, način izdelave in njihovo uporabo.
6. Poiščite na spletu primere uporabe Wheatstoneovega mostiča. http://www.crocodile-clips.com/absorb/AP5/sample/020202.html
7. Kako je označena točnost določenega inštrumenta? Kaj pomeni razred 1, ...?
8. Poiščite informacije o prvih ampermetrih in voltmetrih. Poskušajte razumeti princip delovanja. Kolikšna je tipična notranja upornost voltmetra in ampermetra?

Primeri kolokvijskih in izpitnih nalog

Izpit, 10. marec 2006 (naloga 5)
Izpit, 20. aprila 2005 (naloga 1)
Izpit, 28. 01. 2005 (naloga 4)

3. Moč



En prvih industrijskih generatorjev elektrike je bil zasnovan na ločevanju naboja s trenjem, ki ga uparjene kaplice »nanašajo« na prevodne ščetke. Izumitelj William George Armstrong, leta 1841.

Vsebina poglavja: definicija moči, delo, moč na bremenu, maksimalna moč, izkoristek.

Moč (simbol *p*, *P*) je definirana kot produkt napetosti in toka. V splošnem velja $p(t)=u(t)i(t)$, pri enosmernih signalih pa sta tok in napetost časovno konstantna, zato pišemo moč v obliki

$$\boxed{P = UI}.$$

V primeru, da se moč troši na linearnem uporu (na katerem velja $U = RI$), z upoštevanjem Ohmovega zakona dobimo*:

$P = RI^2$ ali $P = U^2 / R$.

Enota za moč je vat (W).

Moč je merilo za intenzivnost dela, ki ga opravljajo električne sile. Obstaja torej neposredna zveza med močjo in delom,

$\boxed{A = \int P\mathrm{d}t}$. (in tudi $P = \dfrac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}$)

Če je moč časovno konstantna, velja $A = P\int dt = Pt$, kjer je *t* čas opravljanja dela.

Primer: Ko priključimo breme (npr. avtomobilsko žarnico) na enosmerni vir napetosti 12 V, je skozenj tok 2 A. Določimo moč na bremenu, upornost bremena in energijo, ki se sprosti na bremenu v času 10 minut.

Izračun: Moč je $P = UI = 12\ \mathrm{V} \cdot 2\ \mathrm{A} = 24\,\mathrm{W}$. Upornost je $R = P / I^2 = 24\ \mathrm{W} /(2\ \mathrm{A})^2 = 6\,\Omega$. Energija je $A = W = Pt = 24\ \mathrm{W} \cdot 10 \cdot 60\ \mathrm{s} = 14400\ \mathrm{J} = 14,4\ \mathrm{kJ}$.

Vprašanje: Ali gre vsa ta energija v toploto (segrevanje)? Vsekakor en del, drugi del pa gre v svetlobno energijo. (Žarnice z žarilno nitko nimajo ravno velikega izkoristka, običajno med 10 in 20 % celotne moči).

Moč na bremenu. Oglejmo si, kako se moč spreminja na spremenljivem bremenskem uporu, ki ga priključimo na realni napetostni vir. Veljati mora

$$\boxed{P_\mathrm{b} = R_\mathrm{b} I^2 = R_\mathrm{b}\left(\frac{U_\mathrm{g}}{R_\mathrm{b} + R_\mathrm{g}}\right)^2}.$$

* Te zveze pogosto imenujemo kar Joulov zakon, saj je James P. Joule leta 1841 prvi prišel do ugotovitve, da je sproščena toplota v prevodniku proporcionalna kvadratu toka, ki teče skozi vodnik.

To ni ravno preprosta funkcija, saj R_b nastopa 2x, tako v števcu kot v imenovalcu. Poskusimo iz enačbe razbrati, kako se moč na uporu spreminja s spreminjanjem bremenske upornosti. Ločimo lahko tri različna področja:

1) Ko je bremenski upor enak nič, bo moč enaka nič.
2) Pri majhni upornosti bremena $\left(R_b \ll R_g\right)$ velja približno $P \approx \frac{U_\mathrm{g}^2}{R_\mathrm{g}^2} R_\mathrm{b}$, torej pri majhnih vrednostih upornosti bremena moč na uporu linearno raste.
3) Ko je bremenski upor zelo velik velja $P \approx \frac{U_\mathrm{g}^2}{R_\mathrm{b}}$. Moč na bremenu se bo torej pri velikih upornostih bremena zmanjševala obratno sorazmerno velikosti $\left(\sim \frac{1}{R_\mathrm{b}}\right)$ in se bo z večanjem očitno zmanjševala proti nič.
4) Vmes, med točko 2 in 3 bo imela funkcija (moč) nek maksimum, ki ga lahko določimo z odvajanjem moči po upornosti bremena ($\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}R_\mathrm{b}} = 0$).

SLIKA: Moč na bremenu R_b, ki je priključen na realni napetostni vir. Levo: breme na realnem napetostnem viru, desno: prikaz moči na bremenu v odvisnosti od R_b.

Primer: Določimo moč na bremenu 10 Ω, ki ga priključimo na realni napetostni vir 12 V z notranjo upornostjo 2 Ω.

Izračun: $P = 10\,\Omega \left(\frac{12\,\mathrm{V}}{2\,\Omega + 10\,\Omega}\right)^2 = 10\,\mathrm{W}$.

Vprašanje: Ali lahko to moč dosežemo tudi pri kakšni drugi upornosti?
Odgovor je pritrdilen: če enačbo zapišemo tako, da iščemo neznano upornost bremena pri znani moči, dobimo:

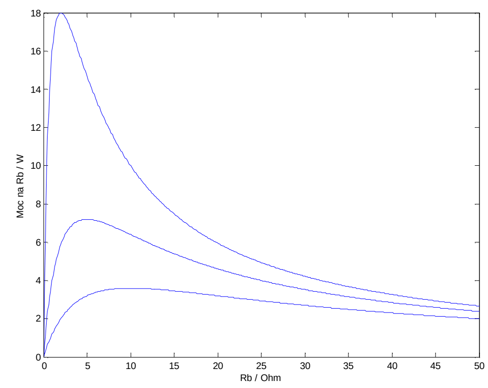
$10\left(2 + R_\mathrm{b}\right)^2 = 12^2 R_\mathrm{b}$, kar je kvadratna enačba, ki je s preureditvijo enaka

$10 R_\mathrm{b}^2 - 104 R_\mathrm{b} + 40 = 0$

(Pri zapisu v matematični obliki smo zaradi preglednosti opustili pisanje enot. Ko določimo rešitev moramo pravilno enoto dopisati!)
Rešitvi kvadratne enačbe sta dve: že znanih 10 Ω, pa tudi 0,4 Ω.

Preprosti ukazi s programom Matlab za izračun in prikaz moči na bremenu:

```
Rb=0:0.1:50 % tvorimo niz vrednosti Rb od 0 do 50 s korakom 0,1
Ug=12
Rg=2
P=Rb*Ug^2./(Rg+Rb).^2   % Izracun moci
plot(Rb,P)              % izris
xlabel('Rb / Ohm')
ylabel('Moc na Rb / W')
% če želimo zrisati za več različnih vrednosti, zapišemo enačbe v dadoteko in jo večkrat poženemo s spremenjeno vrednostjo Rg, pri čemer za risanje na isti graf dodamo ukaz
hold on
```



SLIKA: Prikaz moči za različne vrednosti notranje upornosti generatorja (2 Ω, 5 Ω in 10 Ω).

Maksimalna moč na bremenu.

Vzemimo primer bremena priključenega na realni napetostni vir in se vprašajmo, kdaj je na bremenu največja moč. Grafična določitev je seveda enostavna, matematično pa jo določimo pri pogoju, da mora biti naklon premice na funkcijo moči enak nič (vzporeden z X osjo). Ker naklon premice dobimo z odvajanjem, moramo maksimalno moč iskati pri pogoju $\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}R_\mathrm{b}} = 0$. Ugotovimo, da z odvajanjem dobimo pogoj, da mora biti za maksimalno moč na bremenu upornost bremena enaka notranji upornosti vira*:

$$\boxed{R_\mathrm{b} = R_\mathrm{g}}.$$

Kolikšna bo tedaj moč? Vstavimo pogoj ($R_\mathrm{b} = R_\mathrm{g}$) v enačbo za moč in dobimo:

$$\boxed{P_\mathrm{b,max} = \frac{U_\mathrm{g}^2}{4R_\mathrm{b}}}.$$

Primer: Določimo še maksimalno moč iz prejšnjega primera. To bo tedaj, ko bo $R_\mathrm{b} = R_\mathrm{g} = 2\ \Omega$, moč pa bo tedaj $P_\mathrm{max} = \frac{(12\,\mathrm{V})^2}{4\cdot 2\,\Omega} = 18\,\mathrm{W}$. Rešitev se seveda sklada z odčitkom maksimalne moči, ki jo poiščemo na grafu.

---

* $$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}R_\mathrm{b}} = \left(\frac{U_\mathrm{g}}{\mathrm{R_g} + R_\mathrm{b}}\right)^2 + 2\left(\frac{U_\mathrm{g}^2}{\mathrm{R_g} + R_\mathrm{b}}\right)(-1)\frac{R_\mathrm{b}}{\left(\mathrm{R_g} + R_\mathrm{b}\right)^2} = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}R_\mathrm{b}} = \left(\frac{U_\mathrm{g}}{\mathrm{R_g} + R_\mathrm{b}}\right)^2 \left(1 - \frac{2R_\mathrm{b}}{\mathrm{R_g} + R_\mathrm{b}}\right) = 0 \Rightarrow R_\mathrm{b} = R_\mathrm{g}$$

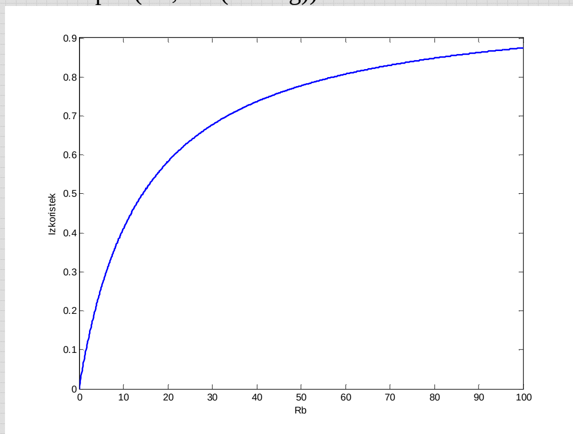
Izkoristek bremena.
V smislu zakona o ohranitvni energije se del energije virov prenese na breme, drugi del pa lahko smatramo kot izgubna energija:
$W_{vhodna} = W_{izhodna} + W_{izgubna}$.

Izkoristek lahko definiramo kot kvocient izhodne in vhodne energije
$$\eta = \frac{W_{izhodna}}{W_{vhodna}}.$$
Ker pa je energija pri enosmernih vezjih sorazmerna moči $W = Pt$, lahko definiramo izkoristek tudi kot kvocient moči na bremenu in moči vira (virov):
$$\eta = \frac{P_b}{P_g}$$
Izkoristek pogosto zapišemo v procentih, torej kot
$$\boxed{\eta = \frac{P_b}{P_g} \cdot 100\%}.$$

SLIKA: Vhodna energija se prenese (transformira) na izhodno in izgubno.

Kako se spreminja izkoristek vezja pri bremenu, priključenem na realni napetostni vir? Izkoristek opisuje enačba
$$\boxed{\eta = \frac{P_b}{P_g} = \frac{I^2 R_b}{I^2 \left(R_b + R_g\right)} = \frac{R_b}{R_b + R_g}}.$$
Pri majhnih bremenskih upornostih gre izkoristek proti nič, pri velikih pa proti vrednosti 1 (100%). (glej sliko)

Primer z Matlabom:
Rg=14.32
Rb=0:0.1:100
plot(Rb,Rb./(Rb+Rg))



SLIKA: Povečevanje izkoristka z večanjem bremenske upornosti.

Kakšna pa je razlika med izkoristkom in maksimalno močjo na bremenu?

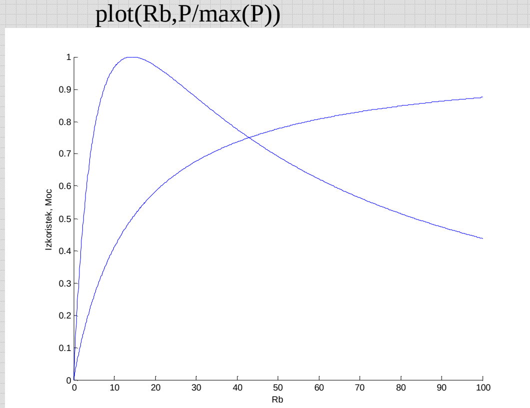
Ugotovimo, da je izkoristek vezja nekaj drugega kot maksimalna moč na bremenu. Največji izkoristek dosežemo pri čim večji upornosti bremena, vendar je tedaj moč na bremenu majhna v primerjavi z maksimalno. Pri maksimalni moči pa je izkoristek vezja ravno 50%.

Kako določimo izkoristek povezanih sistemov?
Če imamo dva zaporedno vezana sistema, lahko izkoristek določimo kot

$$\eta = \frac{P_{izh(2)}}{P_{vh(1)}} = \frac{P_{izh(2)}}{P_{vh(1)}} \cdot \frac{P_{iz(1)}}{P_{vh(2)}} = \eta_1 \eta_2 ,$$

torej kot produkt posameznih izkoristkov.

Dodajmo še spremembo moči z ukazi
hold on
P=Rb./(Rb+Rg).^2
plot(Rb,P/max(P))



SLIKA: Izkoristek vezja in moč na bremenu.

Vprašanja za obnovo:

1) Kako je definirana moč? Zapiši zveze tudi z upoštevanjem Ohmovega zakona.
2) Kakšna je povezava med močjo in delom?
3) Kako se spreminja moč na bremenu, ki je priključen na realni napetostni vir?
4) Ali lahko enako moč dosežemo pri dveh različnih upornostih?
5) Kdaj bo moč na bremenu, ki je priključeno na realni napetostni vir maksimalna? Pri kateri upornosti? Kolikšna bo tedaj moč?
6) Ohmeter, Watmeter, univerzalni inštrument.

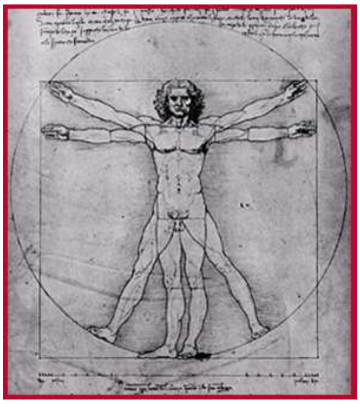
Za raziskovalce:

1. Kako je J.P. Joule prišel do svojih ugotovitev o toploti, ki je proporcionalna kvadratu toka?
2. Naštejte nekaj različnih tipov žarnic. Opiši njihov princip delovanja. Preverite izkoristke različnih tipov žarnic.
3. Napišite računalniški program, ki izriše več različnih krivulj na isti graf. Pri temuporabite zanko znotraj katere npr. povečujete vrednost upornosti generatorja.

Primeri kolokvijskih in izpitnih nalog:

kolokvij, 26.11.2003 (naloga 1)
kolokvij, 5. december 2006 (nalogi 4, 5)
kolokvij, 2. 12. 2004 (naloga 2)
Izpit, 29. 01. 2002 (naloga 4)
Izpit, 10. marec 2006 (naloga 4)
Izpit, 20. aprila 2005 (naloga 2)
Izpit, 28. 01. 2005 (naloga 5)
izpit, 26. januar 2007 (naloga 5)
Izpit, 4. 6. 2007 (naloga 4)

4. Analiza vezij



Leonardo da Vinci, 1942:
analiza čoveškega torza
Galerria del Academia,
Beneteke

Vsebina poglavja: metoda Kirchoffovih zakonov, metoda zančnih tokov, metoda spojiščnih potencialov.

Spoznali smo že oba Kirchoffova zakona in zvezo med tokom in napetostjo na uporu. Zaradi pomembnosti velja ponoviti:

1. KZ: $\boxed{\sum_{i=1}^{N} I_i = 0}$ v spojišču

2. KZ: $\boxed{\sum_{i=1}^{M} U_i = 0}$ v zanki

Ohmov zakon: $\boxed{U = RI}$ (povezuje U in I)

S pomočjo teh zvez lahko analiziramo (določimo tok in napetost na poljubnem elementu vezja) poljubno vezje. Le zapisati moramo ustrezno število enačb in rešiti sistem enačb. Spoznali pa bomo tudi metode, ki nam omogočajo analizo vezij z manjšim številom enačb.

Najbolj tipične metode reševanja (analize) vezij so:

1) Metoda Kirchoffovih zakonov
2) Metoda zančnih tokov
3) Metoda spojiščnih potencialov

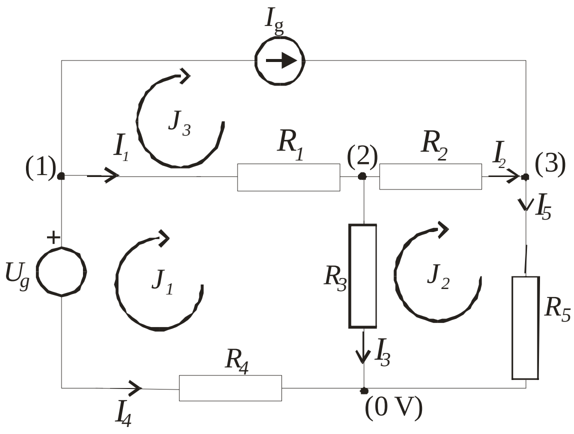
1. Metoda Kirchoffovih zakonov (metoda vejnih tokov)

Je najosnovnejša metoda, ki se (kot že ime pove) poslužuje uporabe Kirchoffovih zakonov. Način reševanja bomo prikazali na konkretnem primeru.
Najprej moramo označiti smeri tokov v vsaki veji. Ta označitev je lahko poljubna, potrebno pa se je zavedati (kot smo že omenili!), da smer toka (skozi upor) določa tudi smer napetosti. Za lažjo analizo bomo označili tudi spojišča vezja ter tri zanke. Toka v veji s tokovnim virom nismo posebej označili, saj ta tok lahko enačimo kar s tokom tokovnega generatorja.

Zapišemo lahko štiri enačbe z uporabo 1 KZ:
spojišče (0): $-I_4 - I_3 - I_5 = 0$
spojišče (1): $I_g + I_1 + I_4 = 0$
spojišče (2): $-I_1 + I_2 + I_3 = 0$
spojišče (3): $-I_2 - I_g + I_5 = 0$

In dve enačbi po 2 KZ:
zanka (J_1): $-U_g + I_1R_1 + I_3R_3 - I_4R_4 = 0$
zanka (J_2): $-I_3R_3 + I_2R_2 + I_5R_5 = 0$
Za zanko J_3 ne zapišemo enačbe saj ni potrebna. Zančni tok J_3 je znan in kar enak (vsiljenem) toku tokovnega generatorja.

Poglejmo število neznank in število enačb, ki smo jih zapisali. Število neznank je enako številu neznanih vejskih tokov, torej 5. Število enačb, ki smo jih zapisali pa je 6. Ena od enačb je torej odveč, je redundančna. Izkaže se, da je odveč ena od enačb po 1 KZ. Izločimo lahko torej poljubno spojiščno enačbo*.



SLIKA: Primer vezja: U_g = 10 V, I_g = 2 A, R_1 = 20 Ω, R_2 = 5 Ω, R_3 = 10 Ω, R_4 = 1 Ω, R_5 = 40 Ω.

Teorija grafov (na kratko)

Reševanje takega sistema enačb zahteva sistematičen pristop. Pomagamo si lahko s teorijo grafov, kjer najprej narišemo **graf vezja**, nato **drevo vezja** in vrišemo **dopolnilne veje (kite)**. Graf vezja narišemo kot vezje, v katerem ostanejo le veje vezja. Drevo vezja sestavimo iz vej vezja, s katerimi moramo doseči vsa spojišča vezja, pri tem pa ne smemo zaključiti nobene zanke. Veje, ki jih nismo uporabili za tvorjenje drevesa, so dopolnilne veje in jih dorišemo s črtkanimi črtami†.

SLIKA: Graf vezja, drevo vezja in dopolnilne veje – kite.

Število enačb, ki jih moramo zapisati po 1 KZ je torej enako N – 1, kjer je N število spojišč, število enačb po 2 KZ pa je enako številu dopolnilnih vej. V našem primeru bomo potrebovali 4-1 = 3 spojiščne enačbe in 2 zančni enačbi.

* Seštejte spojiščne enačbe (1), (2) in (3) ter množite z -1. Dobili boste spojiščno enačbo (0).

† Vezje, ki ga obravnavamo je nekoliko specifično , ker v eni veji vsebuje idealni tokovni vir. V smislu analize vezij (teorije grafov) take veje ne moremo smatrati kot dopolnilne veje. Za te je značilno, da vsebujejo elemente s končno notranjo upornostjo.

Zapis in reševanje sistema enačb

Sistem enačb rešimo tako, da ga zapišemo v matrični obliki. Upoštevali bomo spojiščne enačbe od (1) do (3)). Npr prvo spojiščno enačbo (1) zapišemo v obliki

$1\cdot I_1 + 0\cdot I_2 + 0\cdot I_3 + 1\cdot I_4 + 0\cdot I_5 = -I_g$,
drugo v obliki
$-1\cdot I_1 + 1\cdot I_2 + 1\cdot I_3 + 0\cdot I_4 + 0\cdot I_5 = 0$
itd. Koeficiente prepišemo v matriko in dobimo

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ R_1 & 0 & R_3 & -R_4 & 0 \\ 0 & R_2 & -R_3 & 0 & R_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -I_g \\ 0 \\ I_g \\ U_g \\ 0 \end{bmatrix}$$

Potrebno je le še vstaviti vrednosti in rešiti sistem enačb zapisan v matrični obliki $A\cdot x = b$ (včasih zapišemo tudi kot $\underline{\underline{A}}\underline{x} = \underline{b}$), kjer je A matrika velikosti 5x5, x vektor neznank (tokovi I_1 do I_5) in b vektor sestavljen iz vrednosti na desni strani matričnega zapisa. Sistem enačb pogosto rešimo z uporabo računalniških programov.

Sistem enačb rešimo s programom Matlab. Tvoriti moramo matriko A in vektor b ter rešiti sistem enačb tipa Ax=b. Rešitev dobimo z Matlabovim ukazom x=A\b.

```
>> A=[1,0,0,1,0;-1,1,1,0,0;0,-1,0,0,1;20,0,10,-1,0;0,5,-10,0,40]
A =
    1    0    0    1    0
   -1    1    1    0    0
    0   -1    0    0    1
   20    0   10   -1    0
    0    5  -10    0   40
>>b = [  -2 ;   0    ;2    ;10    ;0];
>> x=A\b
x =   -0.2243   -1.4953    1.2710   -1.7757    0.5047
```

S pomočjo Matlaba izračunani vejski toki so $I_1 = -0,2243$ A , $I_2 = -1,42953$ A itd.

2. Metoda zančnih tokov

Metoda zančnih tokov temelji na uporabi 2 KZ, kjer namesto vejskih tokov uporabimo zančne toke. Slednje tvorimo iz vejskih tako, da je ta v veji, ki ni skupna drugi (sosednji) zanki kar enak vejskemu toku, sicer pa je enak vsoti ali razliki vejskih tokov, odvisno od označitve smeri zančnih tokov. Potrebno število enačb je enako številu dopolnilnih vej.

Za analizirano vezje veljajo sledeče zveze med zančnimi in vejskimi toki:

$J_1 = -I_4$

$J_2 = I_5$

$J_3 = I_g$

in

$I_3 = J_1 - J_2$

$I_2 = J_2 - J_3$

Če vejske toke izražene z zančnimi vstavimo v napetostni enačbi po 2 K.Z., dobimo sistem zančnih enačb. Običajno je lažje napisati enačbe tako, da sproti upoštevamo padce napetosti v zanki:

zanka (J_1): $-U_g + (J_1 - J_3)R_1 + (J_1 - J_2)R_3 - J_1 R_4 = 0$

zanka (J_2): $(J_2 - J_1)R_3 + (J_2 - J_3)R_2 + J_2 R_5 = 0$

zanka (J_3): $J_3 = I_g$

Dobimo sistem treh enačb za tri neznane toke. V osnovi le sistem dveh, saj je tretja že določena: $J_3 = I_g = 2\,\text{A}$.

Obstaja še drug pristop k tvorjenju sistema enačb, ki seveda privede do ekvivalentnega zapisa enačb. Pri tem pristopu najprej upoštevamo tok zanke in vse padce napetosti v zanki, ki jih ta tok povzroča. Nato ustrezno prištejemo ali odštejemo še prispevke ostalih zančnih tokov.

Primer:

$J_1(R_1 + R_3 + R_4) - J_3 R_1 - J_2 R_3 - U_g = 0$

$J_2(R_2 + R_3 + R_5) - J_1 R_3 - J_3 R_2 = 0$

Reševanje sistema dveh enačb

Vstavimo vrednosti v zgornjo enačbo in zapišemo enačbi v matematični obliki (brez enot):

$J_1 31 - 2 \cdot 20 - J_2 10 - 10 = 0$

$J_2 55 - J_1 10 - 2 \cdot 5 = 0$

Enačbi z dvema neznankama lahko preprosto rešimo tako, da iz ene enačbe izrazimo eno od spremenljivk in jo vstavimo v drugo enačbo. Npr iz 1. enačbe izrazimo J_2 in dobimo J_2 = 0,1($J_1$31-50). To vstavimo v drugo enačbo in dobimo 0,1($J_1$31-50)55-$J_1$10 = 10 in iz nje izračunamo $J_1 = 1{,}7757\,\text{A}$ in z vstavitvijo te vrednosti v eno od enačb še $J_2 = 0{,}5047\,\text{A}$ .Ugotovimo lahko, da je dobljeni tok J_1 skladen z rešitvijo, ki smo jo dobili po sistemu reševanja Kirchoffovih enačb: $J_1 = -I_4$.

Matlab: Reševanje s pomočjo programa Matlab je silno preprosto. Tvorimo matriko A in vektor b ter rešitev kot x=A\b'. Druga možnost je x=inv(A)*b'. Tokrat smo nekoliko drugače zapisali vektor b (kot vrstični vektor) kot v prejšnjem primeru. Zato ga je potrebno spremeniti (transponirati) z dodatkom '.

```
A=[31, -10; -10,55]
b=[50,10]
x=A\b
>> x =      1.7757    0.5047
```

3. Metoda spojiščnih potencialov

Metoda temelji na uporabi 1. KZ, po katerem zapišemo vsoto tokov v spojišče, ki mora biti enaka nič. Toke izrazimo s potenciali spojišč, razen, če je tok v veji znan, npr. tokovni generator. Označimo vsa spojišča in jim pripišemo neznane potenciale. Potencial enega spojišča lahko prosto izberemo. Ponavadi mu priredimo vrednost 0 V (ga ozemljimo). Če se v veji nahaja upor, izrazimo tok v veji s padcem napetosti na uporu ($I = U/R$), napetost na uporu pa z razliko potencialov spojišč. V primeru, da se v veji nahaja tudi napetostni generator, je potrebno vrednost napetosti generatorja ustrezno upoštevati (odšteti ali prišteti razliki potencialov).

Število potrebnih enačb je enako N–1, kjer je N število spojišč. V primeru ki ga obravnavamo je to 4–1=3.

Reševanje konkretnega primera: V smislu sistematičnega pristopa bomo predpostavili, da vsi toki izhajajo iz spojišča (čeprav smo jih originalno označili drugače).
Spojišče (1): Tok v tej veji določimo iz padca napetosti na uporu R_4. Napetost na tem uporu pa je razlika potencialov spojišč (1) in (0). Ker smo spojišče (0) ozemljili, potencial spojišča (1) pa je V_1, je tudi napetost med spojiščema enaka V_1. Napetost na uporu R_4 je manjša od V_1 za padec napetosti na napetostnem viru, torej je enaka $V_1 - U_g$, tok skozi upor R_4 pa je $\frac{V_1 - U_g}{R_4}$. Na podoben način določimo ostale toke. Za spojišče (1) dobimo

$$\frac{V_1 - U_g}{R_4} + \frac{V_1 - V_2}{R_2} + I_g = 0,$$

za spojišče (2)

$$\frac{V_2 - V_1}{R_1} + \frac{V_2}{R_3} + \frac{V_2 - V_3}{R_2} = 0$$

in za spojišče (3)

$$-I_g + \frac{V_3 - V_2}{R_2} + \frac{V_3}{R_5} = 0.$$

Dobimo sistem treh enačb za tri neznane potenciale. Vstavimo vrednosti in rešimo sistem enačb:

$$\frac{V_1 - 10}{1} + \frac{V_1 - V_2}{20} + 2 = 0$$

$$\frac{V_2 - V_1}{20} + \frac{V_2}{10} + \frac{V_2 - V_3}{5} = 0$$

$$-2 + \frac{V_3 - V_2}{5} + \frac{V_3}{40} = 0$$

oziroma

$$V_1\left(1 + \frac{1}{20}\right) - V_2\frac{1}{20} = -2$$

$$-V_1\frac{1}{10} + V_2\left(\frac{1}{20} + \frac{1}{10} + \frac{1}{5}\right) - V_3\frac{1}{5} = 0$$

$$-V_2\frac{1}{5} + V_3\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{40}\right) = 2$$

```
% Uporaba Matlaba
>> A=[1+1/20,-1/20,0;-1/20,1/10+1/20+1/5,-1/5;0,-1/5,1/5+1/40]
A =
   1.0500   -0.0500        0
  -0.0500    0.3500   -0.2000
        0   -0.2000    0.2250
>> b=[-2+10;0;2]
b =
    8
    0
    2
>>V= A\b
ans = 8.2243   12.7103   20.1869
```

Potenciali spojišč izračunani s pomočjo Matlaba so: V_1 = 8,2243 V, V_2 = 12,71 V in V_3 = 20,1869 V.

Vejske toke določimo iz že zapisanih zvez, pri čemer pa je sedaj potrebno upoštevati predhodno izbrano smer tokov. Tako je na primer tok I_1 enak $\frac{V_1 - V_2}{R_2} = (8,224 - 12,71)\ \mathrm{V} / 20\ \Omega = -0,2243\,\mathrm{A}$.

(Opozorilo: Zaradi preglednosti pisanja enačb namenoma pri vstavljanju številskih vrednosti v enačbe nismo pisali tudi enot. Enačbe smo torej spremenili v matematično obliko. Ko določimo rešitev, pripišemo ustrezne enote).

Reševanje sistema enačb s pomočjo Kramerjevega pravila

En od načinov reševanja sistema enačb je z uporabo t.i. Kramerjevega pravila*. Pri tem moramo izračunati determinante matrik. Rešitev za potencial V_1 je na primer $V_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)}$, kjer je determinanta matrike A

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1,05 & -0,05 & 0 \\ 0,05 & 0,35 & -0,2 \\ 0 & -0,2 & 0,225 \end{vmatrix} = 1,05(0,35.0,225 - (-0,2)(-0,2)) - (-0,05)(0,05.(-0,225) - (-0,2).0 +$$

$$+0.(0,05.(-0,2) - (0,35).0))$$

$$\det(A) = 0,0401\,.$$

Determinanto $\det(A_1)$ pa dobimo tako, da prvi stolpec matrike A nadomestimo z vektorjem b):

$$\det(A_1) = \begin{vmatrix} 8 & -0,05 & 0 \\ 0 & 0,35 & -0,2 \\ 2 & -0,2 & 0,225 \end{vmatrix} = 0,330$$

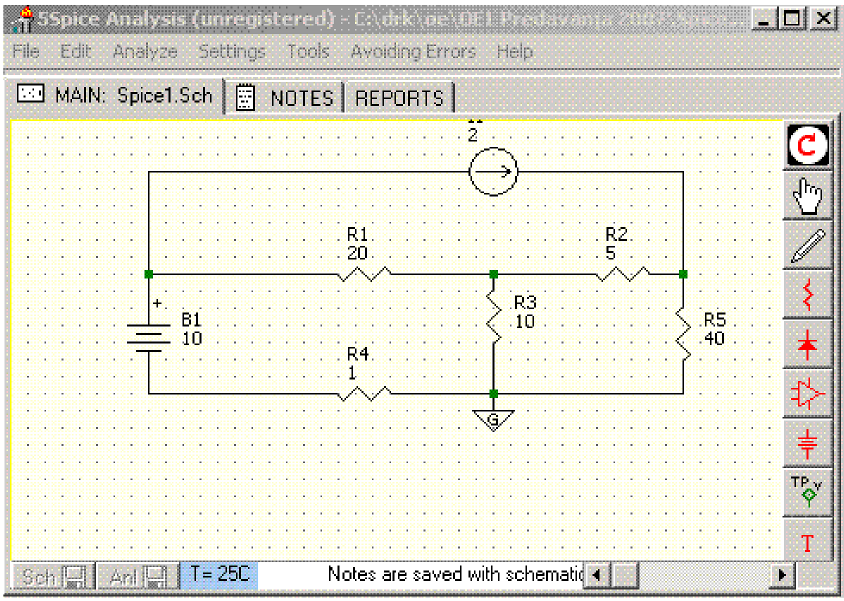
Dobimo: $V_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)} = 8,22\,\mathrm{V}$.

* Gabriel Cramer (1704 - 1752): http://en.wikipedia.org/wiki/Cramer's_rule

* Analiza vezij s programskim orodjem

Pri bolj kompleksnih vezjih, še posebno, ko analiziramo vezja z dodanimi nelinearnimi elementi, se lahko poslužimo analize vezij s programskimi paketi. En najbolj znanih je zasnovan na Spice simulacijah*. Na spletu je mogoče dobiti vrsto programov, ki temeljijo na Spice simulaciji. Poglejmo si primer uporabe programa 5Spice, ki omogoča tudi uporabo grafičnega vmesnika. Ta je še posebno primeren za popolne začetnike, saj ni potrebno poznati sintakse zapisov, pač pa le nekaj osnovnih pravil. Eno od teh je npr, da je potrebno eno od spojišč ozemljiti.
Vsa računalniška orodja, ki temeljijo na Spice simulacijah, temeljijo na enakem načinu zapisovanja (sintakse) povezav med elementi.

```
Spice sintaksa obravnavanega vezja:
Ug 1 10 DC 10.0V ; Vg povezuje spojišči 1 in 10, kjer smo spojišče 10 dodali med Ug in R4
Ig 1 3  2          ; Ig je med spojiščema 1 in 3, nejgova vrednost je 2
R1 1 2 20
R2 2 3 5
R3 2 0 10
R4 10 0 1
R5 3 0 40
.DC Ug 10 20 2       ; naredi sken Ug-ja od 10 do 20 V po 2 V in omogoci .PRINT ukaz
.PRINT DC I(R1) I(R2) ; izpiše toke na uporih R1 in R2
.END
```



SLIKA: Primer simulacije vezja s programom 5Spice, www.5spice.com. (pomembno pri delu s programom je to, da mora biti eno od spojišč vedno ozemljeno)

* SPICE je sicer delo univerzitetnega laboratorija (Electronics Research Laboratory, University of California, Berkeley, ZDA), ga pa pod tem imenom poznamo tudi v profesionalnih orodjih (npr. HSPICE in PSPICE) . Več: http://en.wikipedia.org/wiki/SPICE

Za doma:

1. Odgovorite na vprašanja za obnovo
2. Rešite TEST4.htm
3. Rešite kakšno od kolokvijskih ali izpitnih nalog

Vprašanja za obnovo:

1) Zapišite in razložite Kirchoffova zakona. (glej tekst)
2) Kolikšno število enačb moramo zapisati za analizo vezja po metodi Kirchoffovih zakonov?
3) Kaj je to graf vezja, drevo in dopolnilne veje? Prikaži na primeru.
4) Kako zapišemo enačbe z uporabo metode zančnih tokov? Kolikšno je število potrebnih enačb za analizo vezja?
5) Kaj je to determinanta in poddeterminanta sistema, kako zapišemo sistem enačb v matrični obliki?
6) Na čem temelji metoda spojiščnih potencialov? Kako jo uporabimo? Kolikšno je potrebno število enačb po tej metodi?

Primeri kolokvijskih in izpitnih nalog

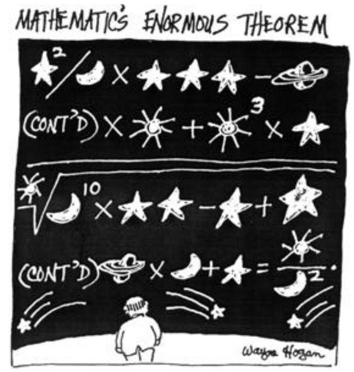
izpit, 10. septembra 2002 (naloga 5)
izpit, 23. januar 2003 (naloga 5)
kolokvij, 26.11.2003 (naloga 3)
izpit, 29. 01. 2002 (nalogi 3, 5)
1 kolokvij, 2. 12. 2004 (naloga 1)

Za raziskovalce:

Poiščite način izračunavanja determinant s programom Matlab ali FreeMat in rešite sistem za potencial V_2.

Iz spleta si naložite program 5spice in se z njim malo poigrajte (ga uporabite za analizo vezij).

5. Stavki (Teoremi)



Vsebina: Stavek superpozicije, stavek Thévenina in Nortona, maksimalna moč na bremenu (drugič), stavek Tellegena.

1. Stavek superpozicije

Ta stavek določa, da lahko poljubno vezje sestavljeno iz linearnih elementov z več viri poenostavimo tako, da analiziramo vezje s posamičnim vklopom posameznih virov v vezje. Toke, ki jih izračunamo na tako poenostavljenem vezju na koncu seštejemo (superponiramo). V našem konkretnem primeru bi lahko določili toke v vejah vezja za dve poenostavljeni vezji. V prvem bi bil vklopljen le napetostni vir, v drugem pa le tokovni vir. *Izklopljen napetostni vir nadomestimo s kratkim stikom, tokovni vir pa odklopimo - odprte sponke.*

SLIKA: Vezje nadomestimo z dvema enostavnejšima vezjema. V prvem vezju obdržimo le napetostni vir, tokovnega pa izklopimo (odprte sponke), v drugem vezju pa obdržimo tokovni vir in odklopimo napetostnega (nadomestimo s kratkim stikom).

Primer: Določimo tok I_4 s pomočjo metode superpozicije.

1. vezje: Ko izklopimo tokovni vir lahko vse upornosti združimo v eno (nadomestno) tako, da zaporedno seštejemo upora R_2 in R_5 ter nato obema vzporedno še R_3 ter nato vsem še zaporedno R_1 in R_4. Dobimo nadomestno upornost $R_{nad}=(R_2+R_5)||R_3+R_1+R_4=29{,}18\ \Omega$. Tok $I_{4(1)}$ = -10 V/29,18 Ω = –0,3427 A. (Bodite pozorni na to, da je predznak toka negativen.)

2. vezje: Ko izklopimo napetostni vir, nam ostane vezje, pri katerem ne moremo preprosto seštevati upore. Zopet moramo uporabiti eno od metod za reševanje vezij. Vzemimo kar metodo zančnih tokov, ki se je za analizo konkretnega vezja izkazala kot zelo. Razlika v že nastavljenih enačbah bo le ta, da sedaj nimamo napetostnega vira:

$$J_1 31 - 2\cdot 20 - J_2 10 = 0$$

$$J_2 55 - J_1 10 - 2\cdot 5 = 0$$

Izračun nam da vrednosti J_1 = 1,4330 A in J_2 = 0,4424 A. $I_{4(2)}$ je enak $-J_1$ in bo torej enak $I_{4(2)}$ = –1,4330 A . Na koncu seštejemo obe vrednosti in dobimo $I_4 = I_{4(1)} + I_{4(2)}$ = –0,3427 A – 1,4330 A = –1,7757 A.

Ugotovimo lahko, da je rešitev enaka, kot smo jo dobili z uporabo metode Kirchoffovih zakonov.

2. Stavek Thévenina

To sta pomembna stavka v elektrotehniki in se pogosto uporabljata. Théveninov stavek »pravi«, da je mogoče poljubni del linearnega vezja med poljubnima sponkama nadomestiti z realnim napetostnim virom, torej z idealnim napetostnim virom (ki ga imenujemo Théveninov) in notranjo (Théveninovo) upornostjo.

SLIKA: Shematski prikaz Théveninovega nadomestnega vira.

Določitev Théveninove nadomestno napetosti in upornosti

Napetost Thévenina določimo (izračunamo ali izmerimo) kot napetost odprtih sponk na mestu vezja, ki ga želimo nadomestiti. Théveninovo upornost določimo kot notranjo upornost vezja, merjena (računana) s sponk nadomestitve, pri čemer napetostne vire v vezju kratko sklenemo (kratek stik), tokovne pa razklenemo (odprte sponke).

Matematično:

$U_{\mathrm{Th}} = U_{\mathrm{o}}$ **napetost odprtih sponk med sponkama nadomestitve**

$R_{\mathrm{Th}} = R_{\mathrm{notranja}}$ **pri kratko sklenjenih napetostnih virih in razklenjenih tokovnih virih, računano (merjeno) med sponkama nadomestitve.**

Primer: Kot primer odklopimo iz vezja iz prejšnjega poglavja upor R_3 in preostalo vezje med sponkama nadomestimo s Théveninovim nadomestnim vezjem.

Če iz vezja odklopimo upor R_3 in zapišemo zančno enačbo dobimo

$$-U_{\mathrm{g}} + J\left(R_1 + R_2 + R_4 + R_5\right) - I_{\mathrm{g}}\left(R_1 + R_2\right) = 0$$

Po ustavitvi vrednosti določimo zančni tok J = 0,91 V. Théveninova napetost je enaka napetosti odprtih sponk med sponkama nadomestitve in je torej enaka vsoti padcev napetosti na uporih R_2 in R_5: $U_{\mathrm{Th}} = (J - 2\ \mathrm{A})5\ \Omega + J\,40\ \Omega = \underline{\underline{30{,}91\ \mathrm{V}}}$.

Upornost Thévenina je $R_{\mathrm{Th}} = (R_1 + R_4)\Big\|(R_2 + R_5) = \underline{\underline{14{,}32\ \Omega}}$.

Sedaj lahko tvorimo nadomestno vezje in dodamo upor R_3 ter izračunamo tok skozi upor: $I_3 = \dfrac{U_{\mathrm{Th}}}{R_3 + R_{\mathrm{Th}}} = 1{,}270\ \mathrm{A}$.

Drugi način določanja Théveninove nadomestne upornosti je s pomočjo toka kratkega stika med sponkama nadomestitve. Ta način pride v poštev predvsem tedaj, ko ne moremo preprosto seštevati vzporedne in zaporedne vezave uporov. S pomočjo računalnika najlaže uporabimo kar matriko za izračun tokov po metodi Kirchoffovih zakonov pri čemer bo upornost R_3 = 0 Ω. Dobimo I_{K} = 2,1587 A in $R_{\mathrm{Th}} = \dfrac{U_{\mathrm{Th}}}{I_{\mathrm{K}}} = \dfrac{30{,}91\mathrm{V}}{14{,}32\,\mathrm{A}} \doteq \underline{\underline{14{,}32\ \Omega}}$.

Omenimo še tretjo možnost. **Upornost vezja med sponkama pri izklopljenih virih lahko dobimo tudi tako, da na sponki priključimo poljubno izbrano napetost in izračunamo tok v vezje. Iz kvocienta med napetostjo in tokom sledi upornost.** V našem konkretnem primeru je ta način v osnovi enak prvemu načinu, saj izračunamo upornost Thévenina kot $R_{\mathrm{Th}}=\frac{U_{\mathrm{sponk}}}{I_{\mathrm{sponk}}}=\frac{I_{\mathrm{sponk}}\cdot(R_1+R_4)\|(R_2+R_5)}{I_{\mathrm{sponk}}}=(R_1+R_4)\|(R_2+R_5)=\underline{\underline{14,32\ \Omega}}$.

Bi pa prišel ta način v poštev, če upornosti v vezju ne bi mogli kar preprosto seštevati.

3. Stavek Nortona

Velja podobna definicija kot za Théveninovo nadomestno vezje, le da v tem primeru poljubni del linearnega vezja nadomestimo z Nortonovim nadomestnim vezjem, ki je sestavljeno iz idealnega tokovnega (Nortonovega) vira in vzporedne (Nortonove) notranje upornosti.

Ker lahko vedno realni napetostni vir nadomestimo z realnim tokovnim, ta zveza velja tudi med Théveninovim in Nortonovim teoremom. V osnovi določimo tok Nortonovega vira kot tok kratkega stika, upornost Nortona pa na enak način kot upornost Thévenina. Velja torej:

$I_{\mathrm{N}}=I_{\mathrm{K}}$ in tudi $I_N=U_{\mathrm{Th}}/R_{\mathrm{Th}}$ ter $R_{\mathrm{N}}=R_{\mathrm{Th}}$.

Maksimalna moč na bremenu – drugič.

Théveninov stavek je posebno primeren za izračun **maksimalne moč na uporu (bremenu)**. Pri analizi maksimalne moči bremena priključenega na realni napetostni vir smo ugotovili, da bo moč na bremenskem uporu največja tedaj, ko bosta bremenska in generatorska upornost enaki. Da dosežemo maksimalno moč, mora biti upornost bremena torej enaka upornosti Thévenina:

$\boxed{R_{\mathrm{b}(P\max)}=R_{\mathrm{Th}}}$,

maksimalna moč pa bo tedaj

$\boxed{P_{\max}=\frac{U_{\mathrm{Th}}^2}{4R_{\mathrm{b}}}}$.

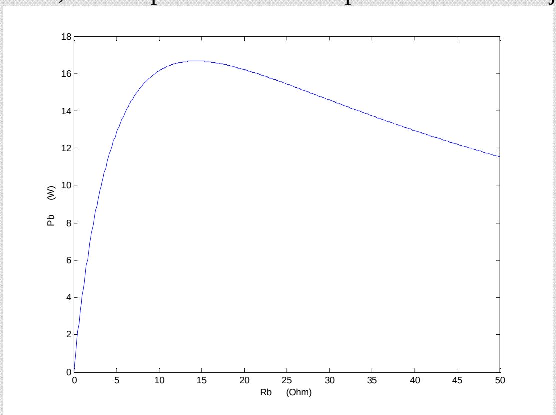
Primer: V našem vezju smo analizirali razmere moči na bremenskem uporu R_3. Tedaj bo torej $R_{\mathrm{b}(P\max)}=14,32\ \Omega$, maksimalna moč pa $P_{\max}=\frac{U_{\mathrm{Th}}^2}{4R_{\mathrm{b}}}=\frac{(30,91\mathrm{V})^2}{4\cdot 14,32\Omega}=\underline{\underline{16,68\ \mathrm{W}}}$.

Pogosto rečemo tudi, da je v tem primeru breme **prilagojeno** na vir. To je torej tedaj, ko je na breme prenešena maksimalna moč iz vira.

Izrišimo moč na bremenu s pomočjo računalnika, pri čemer si bomo zopet pomagali s programom Matlab. Vzemimo izračunani vrednosti U_{Th} = 30,91 in R_{Th} = 14,32 Ω in spreminjajmo R_b od 0 Ω do 50 Ω in izračunajmo moč na bremenu. Z Matlabovimi ukazi:

```
Rb=0:0.1:50       % tvorimo niz vrednosti Rb od 0 do 50 s korakom 0,1
Uth=30.91
Rth=14.32
P=Rb*Uth^2./(Rth+Rb).^2    % Izracun moci
plot(Rb,P)              % izris
xlabel('Rb     (Ohm)')
ylabel('Pb     (W)')
```

Ugotovimo lahko, da izris ustreza našim pričakovanjem, da bo torej maksimalna moč na bremenu tedaj, ko bo upornost bremena enaka upornosti Thévenina. Ugotovimo tudi, da vrednost največje moči ustreza izračunani. Kako to ugotovimo z uporabo Matlaba? Z ukazom *max(P)* izvemo največjo vrednost niza P, v katerem so shranjene vrednosti moči. Dobimo 16,68. Kaj pa vrednost upornosti pri maksimalni moči? Najprej ugotovimo indeks, pri katerem nastopa v nizu maksimalna moč z uporabo ukaza *i=find(P==max(P)),* nato pa z *Rb(i)* dobimo vrednost 14,3. Dobljena vrednost se razlikuje od točne za 0,02, kar je za pričakovati, saj smo numerično izračunavali moči le za vrednosti upornosti, ki se razlikujejo za 0,1 Ω. Namen tega pojasnjevanja je v tem, da bi vzpodbudil bralca k uporabi in raziskovanju izjemnih zmožnosti programa Matlab.



SLIKA: Moč na bremenu pri spreminjanju bremenske upornosti.

Da se prepričamo v pravilnost izračunov, lahko uberemo še eno pot. Izhajajmo direktno iz izračunavanja tokov v vezju s pomočjo metode Kirchoffovih zakonov ter določimo moč na uporu R_3 pri različnih vrednostih te (bremenske) upornosti. Preprosto, s pomočjo enačbe $P_3 = I_3^2 R_3$. S pomočjo računalnika lahko zelo hitro določimo maksimalno moč, tudi če formule ne poznamo. Iz že znane matrike:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ R_1 & 0 & R_3 & -R_4 & 0 \\ 0 & R_2 & -R_3 & 0 & R_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -I_g \\ 0 \\ I_g \\ U_g \\ 0 \end{bmatrix}$$

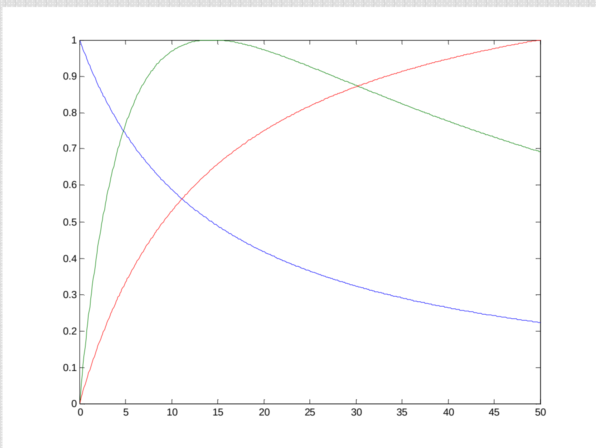
spreminjajmo R_3 od 0 Ω do 50 Ω in izračunavajmo tokove ter moč na uporu R_3 in rezultate izrišimo. Dobimo (Matlab):

```
b=[-2;0;2;10;0] % vektor znanih vrednosti / desna stran enacbe
II=[]  % prazen vektor, potreben za shranjevanje izračunanih vrednosti moči
for R3=0:0.1:50   % zanka povecuje upornosti od 0 po 0.1 do 50 Ω
   A=[1,0,0,1,0;-1,1,1,0,0;0,-1,0,0,1;20,0,R3,-1,0;0,5,-R3,0,40]

   I=A\b     % izracun tokov za dolocen R3

   II=[II,I(3)]  % shranjevanje vrednosti toka I3 v vektor, ki se zaporedno polni
End           % konec zanke

R3=0:0.1:50   % vektor upornosti
P=II.^2.*R3     % izracun moci
plot(R3,P)   % izris
```



SLIKA: Slika prikazuje normirane krivulje toka, napetosti in moči na uporu R_3 v že znanem vezju. Sami ugotovite, katera krivulja prikazuje določeno veličino. To boste ugotovili zelo hitro, če si zamislite Théveninovo nadomestno vezje (Normiranje izvedemo tako, da poiščemo največjo vrednost v nizu (določene veličine) in delimo vse vrednosti s to vrednostjo.) Ukazi v Matlabu: U=R3.*II; plot(R3,II/max(II),R3,P/max(P),R3,U/max(U))

4. Stavek Tellegena

Stavek Tellegena pravi preprosto to, da je **moč bremen enaka moči virov**. Pri tem lahko vir deluje v generatorskem načinu (pozitivna moč) ali v bremenskem načinu (negativna moč). To zapišemo kot

$$\boxed{\sum_i P_\mathrm{g}(i) = \sum_j P_\mathrm{b}(j)}.$$

V našem konkretnem primeru je moč generatorjev enaka

$$P_\mathrm{g} = U_\mathrm{g}(-I_4) + I_\mathrm{g}(V_3 - V_1) = \underline{\underline{41{,}6822\ \mathrm{W}}}$$

moč na bremenih pa

$$P_\mathrm{b} = I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2 + I_3^2 R_3 + I_4^2 R_4 + I_5^2 R_5 = \underline{\underline{41{,}6822\ \mathrm{W}}}.$$

Vprašanja za obnovo:

1) Razloži stavek superpozicije.
2) Razloži Théveninov in Nortonov stavek.
3) Kako določimo Théveninovo napetost in upornost?
4) Kako določimo Nortonov tok generatorija in upornost?
5) Ali obstaja povezava med Nortonovim in Théveninovim nadomestnim vezjem?
6) Kako določimo maksimalno moč na bremenu s pomočjo Thévenina?
7) Kdaj velja, da je breme prilagojeno na vir?
8) Razloži stavek Tellegena.

Za doma:

1. Odgovorite na vprašanja za obnovo
2. Rešite TEST5.htm
3. Rešite katero od kolokvijskih ali izpitnih nalog

1. kolokvij, 5. december 2006, naloga 1
1. kolokvij, 26.11.2003, naloga 2
1 kolokvij, 2. 12. 2004, naloga 3
1. kolokvij, 13.12.2001, naloga 2
Izpit 11. 12. 2002, nalogi 4 in 5