MAGNETOSTATIKA

1. Amperov zakon magnetne sile (med tokovnima elementoma)

Če el. tok povzroča mag. polje, mora obstajati tudi sila med tokovodnikoma. Sila je privlačna če toka v vodnikih tečeta v isto smer in odbojna če tečeta v nasprotno smer.

- Sila med dvema ravnima vzp. vodnikoma: $F = \frac{\mu_0 I_1 I_2 l}{2\pi r}$

μ_0 = permeabilnost vakuuma ($4\pi*10^{-7}$ Vs/Am;N/A^2;H/m)

- **Tokovni element:** I*dl – produkt toka v vodniku z vektorjem diferencialne dolžine v smeri vodnika

- Sila med dvema tokovnima elementoma: $dF_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I_1 dl_1 \cdot I_2 dl_2 \cdot \sin(\theta)}{r_{12}^2}$ $r_{1,2}$ - vektor od tok. el. 2do1

theta - kot med vektorjem $r_{1,2}$ in smerjo tok.el. 1

- Magnetna sila na tokovni element izražena z gostoto magnetnega pretoka: $d\vec{F} = Id\vec{l} \times \vec{B}$

Sila na tokovni element je pravokotna na tokovni element in magnetno polje. Največja je, ko je polje pravokotno na tokovni element. Ko je polje homogeno je enačba za silo F=I*l*B, ko pa je polje nehomogeno je enačba F=I*l*B*sinφ.

2. Vektor gostote magnetnega pretoka (definicija, Biot-Savartov zakon)

Gostota mag. pretoka je definirana kot sila na tokovni element: B = F/I*l

- **BIOT-SAVARTOV** zakon: Polje, ki ga tokovni element I*dl povzroča v točki T

$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I \cdot dl \cdot \sin(\theta)}{r^2}$

r – razdalja od tokovnega elementa do točke t

theta – kot med vektorjema dl in l

Enačba da le velikost polja, ne pa tudi smeri. Smer polja je pravokotna na ravnino,

ki jo določata vektorja *dl* in *r*.

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I \cdot d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I \cdot d\vec{l} \times \vec{e}_r}{r^2}$$

- Da bi določili polje v točki *T* za celotni tokovodnik, je potrebno integrirati prispevke vseh tokovnih elementov:

$$\vec{B} = \int_L \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I \cdot d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}$$

3. Uporaba Biot-Savartovega zakona (tokovna daljica, premica, krožni ovoj)

- Tokovna daljica

$$\vec{B} = \vec{e}_\varphi \frac{\mu_0 I}{4\pi r}\left(\cos(\theta_1) - \cos(\theta_2)\right)$$

- Tokovna premica

$$\vec{B} = \vec{e}_\varphi \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

- Krožni ovoj (os tokovne zanke)

$$\vec{B} = \vec{e}_z \frac{\mu_0 I a^2}{2\left(a^2 + z^2\right)^{3/2}}$$

Polje pri z=0 $B = \frac{\mu_0 I}{2a}$

- Solenoid (ravna tuljava)

$$\vec{B} = \vec{e}_z \frac{\mu_0 N I}{2l}\left(\cos(\beta_1) + \cos(\beta_2)\right)$$

4. Magnetni pretok (definicija, pretok skozi ploskev ob ravnem tokovodniku)

Magnetni pretok je definiran kot integral vektorja gostote magnetnega pretoka skozi določeno površino. Enota je T*m^2, ali pa Wb (Weber),ali pa tudi V*s.

$$\Phi = \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

[Magnetni pretok je največji, ko je polje pravokotno na površino]

Pretok skozi ploskev ob ravnem vodniku:

$$\Phi = \frac{\mu_0 I}{2\pi} l \cdot \ln \frac{r_2}{r_1}$$

5. Neizvornost magnetnega polja (magnetni Kirchoffov zakon)

Ker je polje vrtinčno, enak del pretoka, ki v določen prostor vstopa tudi izstopa. Integral fluksa po zaključeni površini bo torej enak nič. $\oint_A \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$

Ne obstaja magnetni izvor in ponor v podobnem smislu kot to poznamo pri električnem naboju. **Magnetno polje ni izvorno**. Včasih rečemo tudi, da je solenoidno. Vsak trajni magnet je izvor kot ponor magnetnega polja. Gostoto pretoka smo lahko prikazali z množico vektorjev v

prostoru ali pa z gostotnicami, ki povezujejo točke z enako veliko gostoto pretoka. Prostor med gostotnicami si lahko zamislimo kot cevke z določeno velikostjo pretoka. GOSTOTNE CEVKE.

6. Vrtinčnost magnetnega polja – Amperov zakon

$$\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 I$$

Integral gostote magnetnega pretoka po ZAKLJUČENI POTI (zanki) je sorazmeren toku, ki ga oklepa zanka.
Ta zakon imenujemo tudi zakon vrtinčnosti polja, saj je vrednost takega integrala različna od nič le, če je polje vrtinčno. Predznak zaobjetega toka je odvisen od smeri integracije v zanki in smeri toka v vodniku, ki ga zanka obkroža. Predznak je pozitiven, če predpostavimo, da smer zanke predstavlja smer toka v zanki in je polje te zanke na mestu vodnika s tokom enaka kot smer toka v vodniku.

7. Uporaba zakona o vrtinčnosti (magnetno polje v notranjosti vodnika krožnega preseka)

Poln okrogel vodnik:

Znotraj vodnika: $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R^2} r$

Zunaj vodnika: $\vec{B} = \vec{e}_\varphi \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$

- Solenoid (ravna tuljava):

$$B = \frac{\mu_0 N I}{l}$$

- Toroid:

$$B = \frac{\mu_0 N I}{2\pi r}$$

- Tokovne obloge:

$$B = \frac{\mu_0 K}{2}$$

8. Magnetna sila na gibajoč naelektren delec (sled delca v enovitem polju, uporaba)

$$\vec{F}_m = Q\vec{v}\times\vec{B}$$

Sila na naboje v magnetnem polju ne deluje v smeri magnetnega polja temveč pravokotno na to smer. Poleg tega deluje ta sila le v primeru, če se naboj giblje. Sila je pravokotna na smer vektorja hitrosti in magnetnega polja.

V homogenem polju bo delec rotiral po krožnici. Radij rotacije dobimo z izenačenjem magnetne in centrifugalne sile. $R = \frac{mv}{QB}$

Ker deluje sila na delec pravokotno na vektor hitrosti delca, se delcu **ne** spreminja kinetična energija.

Lorentzova sila (na naboj deluje električno in magnetno polje)

$$\vec{F} = Q\cdot\vec{E} + Q\cdot\vec{v}\times\vec{B}$$

Primeri:

- Gibanje nabojev v zemelj. mag. polju (severni in južni sij)
- Katodna cev (risanje slike po zaslonu)
- Ciklotron (naprava za pospeševanje delca s pomočjo mag. polja)
- Masni spektograf (določitev mase delca in s tem delca)
- Fuzijski rektor

9. Hallov pojav in merjenje gostote magnetnega pretoka

Elektroni v prevodniku potujejo s hitrostjo drifta, ki jo poznamo iz tokovnega polja, kjer je gostota toka $J = \rho\, v_d$; ρ je volumska gostota naboja. Na te naboje v prečnem magnetnem polju deluje sila $F_m = QvB$ in povzroči rotiranje in kopičenje elektronov proti eni strani prevodne ploščice. Na drugi strani hkrati nastane pomanjkanje elektronov oz. kopičenje pozitivnega naboja. Prečno na tok v vodniku se torej vzpostavi električno polje in s tem napetost, ki je sicer običajno majhna, a še vedno merljiva (velikosti µV). Ker mora nastopiti ravnovesje med električno in magnetno silo velja $QE = QvB$, od koder je **HALLOVA NAPETOST:**

$$U_H = Ew = vBw = \frac{J}{\rho}Bw = \frac{I/wd}{\rho}Bw = \frac{IB}{\rho d}$$

Iz Hallove napetosti lahko določimo hitrost drifta nabojev ali gostoto nabojev, najpogosteje pa se Hallova napetost uporablja za merjenje gostote magnetnega pretoka. Pri tem se običajno uporablja kar formula:

$U_H = R_H \cdot \frac{IB}{d}$, kjer se R_H imenuje *Hallov koeficient*.

Ena najpogostejših uporab Hallovega efekta je merjenje gostote magnetnega pretoka. Pri realizaciji je pomembno zagotoviti čim bolj natančen tokovni vir. Večina tokovnih klešč vsebuje Hallov senzor, najdemo ga v elektronskih kompasih, za merjenje pomikov, rotacije, itd.

10. Magnetna sila na tokovodnik (definicija enote amper)

- Sila med dvema tokovodnikoma

$$F = \frac{\mu_0 I_1 I_2 l}{2\pi r}$$

- [A] amper je enota za el. tok, ki pri prehodu skozi dva neskončno ravna vodnika zanemarljivega prereza na razdalji med vodnikoma 1m v vakuumu povzroči silo $2*10^{-7}$N/m.

*glej še pri 1.

11. Navor na tokovno zanko v mag. polju

Če na tokovodnik v magnetnem polju deluje sila, potem v primeru vpetja z ročico dolžine *r* deluje na vodnik navor $\vec{T} = \vec{r} \times \vec{F}$

Velikost navora je torej $T=r*F*\sin(\theta)$, kjer je kot θ med smerjo ročice in sile. Smer vrtenjaje pravokotna na ravnino, ki jo določata vektorja ročice in sile.

12. Delo magnetne sile za premik ali zasuk tokovne zanke

Kolikšno delo opravimo pri premiku vodnika iz začetne lege, ki jo bomo označili s T_1, v končno lego T_2?

$$A = \int_S \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_S I\left(\vec{dl} \times \vec{B}\right) \cdot d\vec{s} = I \int_{T_1}^{T_2} \left(\vec{ds} \times \vec{dl}\right) \cdot \vec{B}$$

$$(d\vec{s} \times d\vec{l}) \cdot \vec{B} = d\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot d\vec{A} = d\Phi \quad A = I \int_{T_1}^{T_2} d\Phi .$$

Rezultat integracije je celoten fluks, ki gre skozi »plašč«, ki ga opiše vodnik na poti $A=I*\Phi_{plašča}$. Ker pa je magnetno polje brezizvorno ($\int_A B*dA= 0$), mora biti celoten fluks
skozi navidezno telo, ki ga opiše premikajoči vodnik, enak nič. To pomeni, da mora biti fluks skozi plašč enak razliki fluksa skozi površino, ki jo opisuje vodnik v končnem položaju, in fluksu začetnem v položaju. Če želimo pri tem fluks skozi zanko, ki jo opisuje vodnik, računati v isti smeri tako na začetku kot na koncu, velja: $\Phi_{plašča} = \Phi_{končni} - \Phi_{začetni}$. Smer teh fluksov računamo v t.i. pozitivni smeri, ki jo določa tok v gibajoči zanki (smer polja v zanki, ki jo povzroča tok *I*) $A = I\left(\Phi_{končna} - \Phi_{začetna}\right)$

Delo magnetnih sil bo **pozitivno**, ko bo fluks skozi zanko v končni legi večji kot v začetni (Φ_{T1} večji od Φ_{T2}). Če ima tokovna zanka možnost prostega gibanja, se bo postavila tako, da bo fluks skozi zanko največji.

Če je rezultat pozitiven, pomeni, da so delo opravile magnetne sile magnetnega polja, če pa je negativen pa, da je delo za premik zanke v magnetnem polju moral vložiti nek zunanji vir *Amag+Azun*=0 .

13. Magnetni dipol, magnetni dipolski moment (analogije na el.dipol)

Vzemimo pravokotno zanko dolžine l in širine d, ki v sredini vpeta na os. Navor na tako zanko v homogenem polju, ki je za kot θ zamaknjeno od normale na površino zanke, dobimo z upoštevanjem sile na stranico dolžine *l: F = B*I*l* in ročice: r = (d/2)*sin(θ).

Ker delujeta vzajemno dve sili (na obe starnici), je navor $T=2*F*r=I*l*dB*\sin(\theta)$. Običajno namesto *l*d* pišemo površino zanke *A=l*d*, saj se izkaže, da je v homogenem polju navor odvisen le od površine zanke in ne njene oblike.

Ker je tokovna zanka osnovni element v magnetiki, jo definiramo kot **magnetni moment** *m=I*A*, ki je vektor, s smerjo pravokotno na površino zanke (normala na površino): $\vec{m} = \vec{e}_n \cdot IA$

[e_n=smer normale, določa smer toka in kaže v smeri polja znotraj zanke]

Navor na zanko zapišemo tudi z magnetnim momentom. $\vec{T} = \vec{m} \times \vec{B}$

Navor deluje na tokovno zanko tako, da jo zasuka pravokotno na smer polja oz. tako da bo smer m-ja enaka smeri polja.

Navor na zanko lahko zapišemo tudi z magnetnim momentom:

Navor na tokovno zanko v polju deluje tako, da jo zasuka pravokotno na smer polja, oz. tako, da bo smer magnetnega momenta enaka smeri polja. Tokovna zanka se obrne tako, da je pretok skozi zanko največji.
Tokovna zanka je osnovni element v magnetiki, tako kot je el. dipol osnovni element v elektrostatiki.

14. Snov v magnetnem polju (vektor magnetizacije, amperovi toki)

Kroženje elektronov okoli jedra atoma, pa tudi lastno vrtenje elektrona okoli svoje osi določajo magnetne lastnosti snovi. Vsi atomi imajo določene magnetne lastnosti, vendar velika večina zelo šibke, saj se magnetno polje magnetnih momentov posameznih elektronov zaradi njihovega naključnega gibanja izničuje. Snovi s takimi lastnostmi imenujemo **diamagnetiki.** Obstajajo pa določeni atomi, v katerih se magnetni momenti ne izničujejo in povzročajo izrazito magnetno polje v svoji okolici. Materiale s takimi lastnostmi imenujemo **feromagnetiki.** Ti lahko tvorijo trajne magnete, ki si jih lahko predstavljamo kot skupek velikega števila majhnih enako usmerjenih magnetkov. Te magnetke pa lahko opišemo z njihovimi magnetnimi dipolnimi momenti (tokovnimi zankicami), ki v svoji okolici povzročajo magnetno polje, ki je vsota polj posameznih zankic.
Vektor magnetizacije definiramo kot povprečje magnetnihdipolnih momentov na enoto volumna: $\overline{M} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\sum \overline{m}}{\Delta V}$ $\left[\frac{\mathrm{A \cdot m^2}}{\mathrm{m^3}}\right] = \left[\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}\right]$.

Trajni magnet lahko namesto z upoštevanjem velikega števila magnetnih momentov obravnavamo z vektorjem magnetizacije.
Magnetni naboj - kljub temu, da magnetnega naboja ne poznamo (ga ni), ga lahko
definiramo v smislu analogije z električnim nabojem. Obravnava se ga s površinsko gostoto magnetnega naboja σ_m , ki je lahko pozitiven (N stran magneta) ali negativen (S strani). Celotni magnetni naboj na N strani je tako $Q_m=\sigma_m*A$. Velja $\sigma_m= -M_{pravokotno}$, kjer je $M_{prav.}$ Normalna komponenta vektorja magnetizacije. $\sigma_m =e_n*M$. Magnetni naboj nastopa le na mestih, kjer je vektor magnetizacije pravokoten na površino.
Zveza med magnetizacijo in tokom: Če primerjamo polje trajnega magneta in polje ravne tuljave, ugotovimo, da sta ti dve polji navzven enaki. Polje trajnega magneta lahko prikažemo tudi kot posledico površinskega toka (*Km*), ali pa kot tuljavo z *N* ovoji in tokom *Im*.

$$M = \frac{m}{\Delta v} = \frac{I_m \cdot \Delta A}{\Delta A \cdot \Delta l} = \frac{I_m}{\Delta l} \cdot \frac{N}{N} = \frac{N I_m}{l} = K_m$$

15. Dia-, para- in feromagnetizem (modeli odzivanj)

Diamagnetiki:izkazujejo izredno šibke magnetne lastnosti. Magnetni dipolni momenti
kroženja elektronov in njihovega spina se v taki snovi kompenzirajo. Pod vplivom zunanjega magnetnega polja se nekoliko zmanjša mag. polje v notranjosti, ker je vpliv zunanjega polja na spin elektronov nekoliko močnejši kot na orbitalni moment. Te snovi imajo negativno mag. susceptibilnost oziroma relativno permeabilnost, ki je malo manjša od 1. (Cu, Au, Ag, Hg, H2O). Če diamagnetik postavimo v bližino močnega trajnega magneta, bo med
njima odbojna sila (neodvisno od pola magneta). *Magnetizacija kaže v nasprotni smeri kot vzbujanje. Sila je v smeri manjše gostote polja.*

Paramagnetiki so snovi, v katerih ni ravnotežja med magnetnimi dipolnimi momenti zaradi
kroženja elektronov in spina. Vsak atom izkazuje rezultančni mag. dipolni moment, ki pa
se zaradi neurejenosti strukture kompenzirajo. S postavitvijo take snovi v magnetno

polje v določeni meri magnetno polje v notranjosti nekoliko poveča v smeri zunanjega polja. Take snovi so aluminij, platina, mangan, kisik, zrak. Njihova susceptibilnost je v praksi zanemarljiva. *M kaže v smeri vzbujanja. Sila je v smeri večje gostote polja.*

Feromagnetiki. V feromagnetikih ima vsak atom relativno velik magnetni dipolni moment. Predstavniki so železo, nikelj in kobalt. V feromagnetikih se atomi grupirajo v območja, ki
jim pravimo domene. Znotraj domen so momenti orientirani, navzven pa so domene
neurejene in zato tudi mag. polje ni izrazito. Pod vplivom zunanjega polja se mag. momenti v domenah usmerijo v smer zunanjega polja. Proces orientiranja se odvija
po fazah, tako, da se najprej nekoliko povečajo domene, katerih stene tvorijo majhen kot
glede na zunanje polje. Pri taki reorientaciji je polje reverzibilno: če izklopimo zunanje polje,
se domene vrnejo v prvoten položaj. Če se zunanje polje še dodatno poveča, se začnejo
obračati celotne domene. Če v takem momentu izklopimo zunanje polje, se domene ne vrnejo
več v začetno stanje, temveč ostanejo delno orientirane. Če pa zunanje polje še povečujemo,
prihaja do nasičenja, ko so praktično že vsi dipolni momenti domen usmerjeni v smer polja.
Povečevanje polja ni več mogoče. Gostota magnetnega pretoka sicer še naprej narašča s povečevanjem vzbujanja vendar je relativna permeabilnost enaka 1 (feromagnetik se obnaša
kot zrak).

16. Vektor mag. poljske jakosti (vrtinčnost poljske jakosti, permeabilnosti)

Imamo toroid navit na feromagnetno jedro. Pri vzbujanju s tokom *I* ugotovimo povečanje polja v sredini ovojev. Amperov zakon, kot smo ga poznali do sedaj, tu odpove, saj povečanja polja ne predvidi. Zakon je potrebno spremeniti tako, da bo upošteval tudi vplive magnetnih momentov v feromagnetiku.

$$\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 N(I + I_m)$$

Definiramo novo veličino **Magnetna poljska jakost:**

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}$$

Amperov zakon dobi obliko

$$\oint_L \vec{H}\cdot d\vec{l} = NI$$

V splošnem lahko enačbo zapišemo tako, da namesto produkta *NI* uporabimo splošnejši zapis z gostoto (konduktivnega) toka, ki ga zanka oklepa:

$$\oint_L \vec{H}\cdot d\vec{l} = \oint_A \vec{J}_c \cdot d\vec{A}$$

Kjer ni zunanjega tokovnega vira velja:

$$\oint_L \vec{H}\cdot d\vec{l} = 0$$

Magnetna poljska jakost ima očitno enako enoto kot vektor magnetizacije, torej A/m in je neposredno povezana s tokovnim vzbujanjem. Velikost magnetizacije je odvisna od vzbujanja. Običajno velja, da večanje vzbujanja povečuje magnetizacijo, saj se usmerjenost magnetnih dipolov z večanjem vzbujanja vedno bolj orientira v smer vzbujalnega polja. $\vec{M} = \chi_m \vec{H}$

χ_m imenujemo *magnetna susceptibilnost*, ki je mera za dovzetnost materiala za magnetizacijo pri vzpostavitvi magnetnega polja.

Za določen material torej iz poznanega vzbujanja (H-ja) in izmerjenega polja (B-ja) določimo relativno permeabilnost.

$$\mu_r = \frac{B}{\mu_0 H}$$

Za feromagnetne materiale se izkaže, da ni linearna in je torej funkcija vzbujanja $\mu_r = \mu_r(H)$. Pa ne le to, izkaže se, da se relativna permeabilnost po izključitvi vzbujanja spreminja drugače, kot pri vključitvi. Tej lastnosti rečemo **histereza.**

17. Feromagnetiki (magnetilne krivulje, histerezna zanka, anomalije magnetilnih snovi)

Krivulja magnetenja (kako se magnetizacija spreminja z večanjem gostote mag. pretoka) Zunanje vzbujanje opišemo z jakostjo mag. polja H, rezultat magnetenja pa opazujemo z naraščanjem gostote mag. pretoka B. (B(H) krivulja). Pri feromagnetikih ni linearna. Na začetku je naklon manjši, potem največji in pri velikih vzbujanjih zopet manjši (nasičenje). Začetni krivulji magnetenja rečemo ***deviška krivulja***, ker se ob izklopu zunanjega vzbujanja gostota pretoka ne vrne na nič, pač pa na neko vrednost, ki je različna od nič.

Statična permeabilnost, ni definirana z naklonom krivulje pač pa z razmerjem med B in H. Zadnji odsek predstavlja nasičenje, kjer relativna permeabilnost postane enaka 1. Pri feromagnetikih so vrednosti rel. permeabilnosti od nekaj tisoč do nekaj sto tisoč. Vrednost statične relativne permeabilnosti je odvisna od točke računanja in bo zaradi nelinarne magnetilne krivulje nelinearna. Poenostavimo jo tako, da lineariziramo magnetilno krivuljo. Tako postane statična rel. permeabilnost konstantna.

Pri vzbujanju z majhnimi izmeničnimi signali je bolj primerno upoštevati le del krivulje magnetenja pri čemer je bolj smiselno upoštevati naklon na krivuljo v določeni delovni točki. Tako dobimo *dinamično relativno permeabilnost*, ki je definirana kot: $\mu_{rd} = \frac{dB}{\mu_0 \cdot dH}$

Če imamo opravka z izmeničnim signalom, ki je superponiran na enosmernega, je običajno bolj primerno uporabiti t.i. inkrementalno relativno permeabilnost, ki ni definirana z odvodom krivulje pač pa z diferencami v lokalni histerezni zanki $\mu_{ri} = \frac{\Delta B}{\mu_0 \cdot \Delta H}$. $\mu_{ri} < \mu_{rd}$

Histerezna zanka: Do določenega Bja je proces magnetenja še reverzibilen, ko pa je ta vrednost presežena, se pri zmanjševanju vzbujanja B počasneje zmanjšuje kot pri povečevanju. Dobimo histrezno zanko. Ko je vzbujanje izklopljeno, ostane v materialu
določeno polje, ki ga imenujemo **remanenčno** in označimo z Br. Če smer vzbujanja obrnemo,
se zmanjšuje polje in pri določeni vrednosti vzbujanja pade na nič. Tej točki vzbujanja rečemo
koercitivna jakost polja in jo označimo s Hc. Pri že povečanem vzbujanju pridemo do nasičenja v negativni smeri. Vzbujanje zopet zmanjšujemo do nič in nato do nasičenja, kjer se
začetna in končna krivulja stakneta.
Če želimo material uporabiti kot trajni magnet, je primerno uporabiti material, ki ima veliko
vrednost remanenčne gostote polja. Poleg tega je pomembno tudi, da ga ni lahko razmagnetiti,
torej mora imeti veliko tudi koercitivno jakost polja. Najboljši materiali za trajni magnet
imajo veliko vrednost produkta *H*c in *B*r. Takim materialom rečemo tudi
***trdomagnetni*.**
Mehkomagnetni materiali imajo ozko histerezno zanko in veliko permeabilnost. Tipičen
mehkomagnetni material je čisto železo.

18. Mejna pogoja vektorjev mag. polja ob stiku medijev

Imamo dve snovi s permeabilnostima μ_1 in $\mu_2$in poljema B_1 in B_2. Mejne pogoje lahko določimo iz dveh splošno veljavnih zakonov:

brezizvornost mag. polja $\oint_A \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$

vrtinčnost mag. polja $\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$

Zamislimo si mali volumen, ki sega v obe snovi. Ko stiskamo volumen proti mejam obeh snovi, ugotovimo, da se mora fluks skozi mejno površino ohranjati $B_{n2} = B_{n1}$.
Normalni komponenti gostote magnetnega pretoka morata ostati nespremenjeni.

Zamislimo si pravokotno zankico, ki vsebuje polje obeh snovi. Upoštevamo Amperov zakon, ko zanko stiskamo v smeri meje. Magnetne napetosti na stranicah s stiskanja zanke (v limiti) izzvenijo, vzdolžne pa se izenačijo, oziroma $Ht_2*l-Ht_1*l=0$, kar tudi pomeni, da se ohranjata tangencialni komponenti jakosti polja:

$$H_{t2} = H_{t1} \cdot \frac{B_{t2}}{\mu_2} = \frac{B_{t1}}{\mu_1}$$

19. Skalarni mag. potencial, magnetna napetost (omejitve)

Magnetni potencial lahko definiramo z eno omejitvijo. Za el. potencial je v elektrostatiki veljalo, da je integral el. poljske jakosti po zaključeni poti enak nič, v magnetostatiki pa je integral jakosti magnetnega polja po zaključeni poti enak mag. napetosti, oziroma toku, ki ga zanka oklene. Mag. potencial je smiselno definirati tedaj, ko ga ne računamo po zaključeni poti.

$$V_m(T_1) - V_m(T_2) = \int_{T_1}^{T_2} \overline{H} \cdot d\overline{l}$$

Če si v točki T_2 izberemo magnetni potencial enak nič, lahko *magnetni potencial* v točki T_1 zapišemo kot.

$$V_m(T_1) = \int_{T_1}^{T_2 (V_m=0)} \overline{H} \cdot d\overline{l}$$

Bolj natančno rečemo magnetnemu potencialu, ki ga opisuje enačba *skalarni magnetni potencial.*

Magnetna napetost: Tok pomnožen s številom ovojev pogosto imenujemo magnetna napetost: $\Theta = NI$

$$\Theta = \oint_L \overline{H} \cdot d\overline{l}$$

Magnetna napetost je v bistvu vzbujalni tok pomnožen s številom ovojev. Njegova enota je torej A, pogosto rečemo tudi Amperski ovoji.

20. Magnetna vezja (magnetni viri in trajni magnet, magnetni upori)

Za analizo magnetnih struktur uporabljamo Amperov zakon, ki ga moramo poenostaviti. (zapišemo ga kot vsoto padcev napetosti) $\sum_{i=1}^{N} H_i \cdot l_i = \Theta$

Desna stran enačbe predstavlja tokovno vzbujanje (lahko je več takih vzbujanj), leva stran enačbe pa so padci magnetne napetosti na posameznih odsekih po zaključeni mag. poti. Pri tem poenostavimo, da je po preseku jedra polje homogeno in da računamo razdalje (l_i) po sredini jedra. Potrebujemo še povezavo med gostotami pretoka v sosednjih odsekih poti. To zvezo dobimo iz zakona o brezizvornosti mag. polja: $\sum_{i=1}^{N} \Phi_i = 0$

Magnetna upornost:

$$\sum_{i=1}^{N} \Phi_i \cdot \frac{l_i}{\mu_i A_i} = \Theta \qquad R_m = \frac{l}{\mu A}$$

Enota ni Ohm, ampak $\left[\frac{1}{\Omega s}\right]$

μ permeabilnost, lahko bi rekli tudi specifična magnetna prevodnost. Večja kot je permeabilnost, bolj je material »magnetno prevoden« $\sum_{i=1}^{N} \Phi_i \cdot R_{m_i} = \Theta$

Tako lahko obravnavamo poljubno vezje, vendar moramo upoštevati, da mora biti relativna permeabilnost konstantna.

21. Analiza mag. vezij

Za analizo magnetnih vezij lahko uporabimo vse metode za analizo el.vezij

- zančna metoda
- metoda superpozicija
- metoda spojiščnih potencialov
- Theveninov in Nortonov teorem

DINAMIČNO ELEKTROMAGNETNO POLJE

1. Faradayev zakon indukcije (inducirano el.polje, Lenzovo pravilo, gibalna in transformatorska inducirana napetost, magnetni sklep)

Časovno spreminjajoči fluks v tuljavi povzroči inducirano napetost. Faraday je prvi ugotovil, da tedaj dobimo napetost na sponkah tuljave, ki je enaka časovni spremembi
fluksa skozi tuljavo pomnoženem s
številom ovojev tuljave: $N\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$
Napetost, ki se ob spremembi časovni fluksa skozi tuljavo pojavi na priključnih sponkah imenujemo **inducirana napetost**. Je takega predznaka, da bi po sklenjeni zanki (kratko sklenjeni tuljavi) pognala tok, katerega fluks bi nasprotoval prvotnemu fluksu skozi zanko. Temu »pravilu« rečemo tudi **Lentzovo pravilo**, ki ga matematično upoštevamo s
predznakom minus: $u_i = -N\frac{d\Phi}{dt}$
Pogosto produkt števila ovojev in fluksa skozi ovoje označimo z novo veličino, ki jo imenujemo **magnetni sklep**: $\Psi = N\Phi$

$$u_i = -\frac{d\Psi}{dt}$$

Ugotovili smo tudi, da gre pri inducirani napetosti za notranjo, generatorsko napetost, ki je
porazdeljena po zanki. V osnovi bi lahko govorili tudi o induciranju el. poljske jakosti, ki v
zanki požene inducirani tok. Pri integraciji inducirane el. Poljske jakosti po zanki pri izmeničnih signalih ne bomo dobili rezultata nič pač pa bo rezultat enak inducirani napetosti:

$$\oint_L \vec{E}_i \cdot d\vec{l} = u_i$$

2. Maxwellova enačba: $\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt}\int_A \vec{B} \cdot d\vec{A}$

Transformatorska inducirana napetost: ta inducirana napetost v zanki pojavi kot posledica časovne spremembe fluksa v zanki.

Gibalna ali rezalna inducirana napetost: ta pa nastopi kot posledica gibanja prevodnika v časovno konstantnem ali spremenljivem magnetnem polju.

Gibalna (rezalna) inducirana napetost. Imamo prevodno palico, ki se premika v prečnem polju gostote *B*. V prevodniku je zelo
veliko prostih nosilcev naboja (elektronov) na katere deluje magnetna sila $F_m = Qv \times B$. V polju bo na naboje delovala magnetna sila, oziroma (inducirana) električna poljska jakost
$E_{m,ind}$

$$\vec{E}_{\mathrm{m,ind}} = \frac{\vec{F}}{Q} = \vec{v} \times \vec{B} \qquad u_i = \int_0^L \left(\vec{v} \times \vec{B}\right) \cdot d\vec{l}$$

Tej napetosti rečemo tudi rezalna napetost, saj nastane tedaj, ko prevodnik reže magnetno polje.

Skupna transformatorska in gibalna inducirana napetost.

Če upoštevamo tako inducirano napetost, ki je posledica časovne spremembe gostote pretoka v mirujoči zanki in inducirano napetost, ki je posledica gibanja v časovno konstantnem polju:

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\int_A \frac{\partial}{\partial t}\vec{B} \cdot d\vec{A} + \oint_L \vec{v} \times \vec{B}$$

2. Lastna in medsebojna induktivnost (dvovod, tuljave na jedrih, sklopni faktor)

Fluks je linearno odvisen od toka skozi določeno strukturo. **Induktivnost** definiramo kot fluks skozi določeno strukturo, pomnožen s številom ovojev, skozi katere gre fluks in deljen s tokom
tuljave: $L = \frac{\Psi}{I} = \frac{N\Phi}{I}$ [Vs/A] = [H]

Iz znane induktivnosti lahko določimo fluks fluks v tuljavi pri določenem toku v tuljavi. Predstavlja zvezo med tokom in napetostjo na tuljavi. To je **Lastna induktivnost,** saj povzroča lastni tok, za razliko od medsebojne induktivnosti, kjer fluks povzroča tok neke druge tuljave. Lastna induktivnost povzroči na sponkah tuljave inducirano napetost:

$$u_i = -\frac{d\Psi}{dt} = -\frac{d\left(Li\right)}{dt} = -L\frac{di}{dt}$$

Minus predznak je uveden zato, da se pravilno interpretira učinek spreminjanja fluksa pri nastanku inducirane napetosti, ki je tak, da se v zanki generira taka notranja (generatorska) napetost, ki z lastnim induciranim tokom nasprotuje spremembam fluksa v zanki. Gledano na tuljavo s stališča bremena je padec

(bremenske) napetosti ravno nasproten (generatorski) inducirani napetosti

$$u_L = -u_{iL} = L\frac{di}{dt}$$

V prvem primeru opazujemo pojav inducirane napetosti z vidika vira napetosti,v drugem pa z vidika bremena.

Medsebojna induktivnost: Če nas zanima fluks v navitju, ki je posledica vzbujanja v drugem navitju, govorimo o **medsebojni induktivnosti**.

$$M_{21} = \frac{\Psi_{21}}{I_1} = \frac{N_2 \cdot \Phi_{21}}{I_1}$$

Φ_{21} fluks skozi drugo tuljavo zaradi toka I_1 skozi prvo tuljavo.

$$M_{12} = \frac{\Psi_{12}}{I_2} = \frac{N_1 \cdot \Phi_{12}}{I_2}$$

Če imamo opravka z linearnimi magnetnimi materiali (če je μ_r konstanten), sta M_{21} in M_{12} kar enaka $M = M_{21} = M_{12}$

Inducirana napetost izražena z medsebojno induktivnostjo tuljave:

$$u_{iM_{21}} = -\frac{d\Psi_{21}}{dt} = -\frac{d(Mi_1)}{dt} = -M\frac{di_1}{dt}$$

Če pa upoštevamo, da je zunanja napetost ravno nasprotna notranji (gonilni), bomo zopet dobili: $u_{M_{21}} = -u_{iM_{21}} = M\frac{di_1}{dt}$

Faktor sklopa: Če je magnetna povezava med dvema tuljavama linearna, ima smisel določiti faktor sklopa. Če sta magnetni sklep skozi lastno tuljavo in sosednjo določena z linearno zvezo $\Psi_{21} = k\Psi_{11}$, $\Psi_{12} = k\Psi_{22}$, kjer sta Ψ11 in Ψ22 fluksa skozi lastno tuljavo pomnožena s številom ovojev lastne tuljave:

$$M_{21} \cdot M_{12} = M^2 = \frac{\Psi_{21}}{I_1} \cdot \frac{\Psi_{12}}{I_2} = \frac{k \cdot \Psi_1}{I_1} \cdot \frac{k \cdot \Psi_2}{I_2} = k^2 L_1 L_2$$

$M = k\sqrt{L_1 L_2}$ $k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}$ k – faktor sklopa

Označitev medsebojne induktivnosti v smislu koncentriranega elementa: V osnovi ju označimo enako kot dve navadni tuljavi z lastno induktivnostjo, ki pa ju povežemo z linijo in puščicama, s čimer prikažemo, da je med njima magnetni sklep. Pri tem pa je zopet potrebno paziti na predznak padca napetosti zaradi medsebojne induktivnosti, saj je predznak odvisen od lege posameznih tuljav.

Predznak je lahko pozitiven ali negativen, kar mora biti v shemi razvidno. To označujemo s pikami na začetku ali koncu vsake tuljave (glede na smer toka) odvisno od tega, če se magnetna pretoka tuljav med seboj podpirata ali ne. Dogovor je tak, da postavimo piki na začetek obeh tuljav (ali pa obe na konec) glede na smer toka, če se magnetni pretok druge tuljave skozi prvo tuljavo podpira z lastnim pretokom skozi prvo tuljavo.

Če imamo dve sklopljeni navitji, potem tok skozi eno navitje povzroča padec napetosti v lastnem, pa tudi v drugem navitju. Slednji je proporcionalen spremembi toka in medsebojni induktivnosti. Vpliv pa je v obe smeri. Torej, če spreminjajoči fluks v drugi tuljavi povzroča tok v drugem navitju, pride do vzajemnega učinka. Napetost na prvi tuljavi je

$$u_1 = R_1 \cdot i_1 + L_1\frac{di_1}{dt} \pm M\frac{di_2}{dt}$$

na drugi pa $u_2 = R_2 \cdot i_2 + L_2\frac{di_2}{dt} \pm M\frac{di_1}{dt}$.

3. Energija mag. polja (energija magnetenja, linearni in nelinearni sistemi)

Izhajamo iz moči na tuljavi $p = u_L \cdot i_L$

$$p(t) = u_L(t) \cdot i_L(t) \quad u_L = \frac{d\Psi}{dt} = L\frac{di}{dt}$$

$$p(t) = L\frac{di(t)}{dt} \cdot i(t)$$

Integracija moči po času pa je energija:

$$w_{mag}(t) = \int_{B(t)} \overline{H} \cdot d\overline{B}$$

Energija izražena tudi s trenutno vrednostjo magnetnega sklepa:

$$\Psi(t) = Li(t)$$

$$W(t) = \frac{\Psi^2(t)}{2L}$$

Energija sistema več tuljav: Imamo več tuljav med njimi pa je magnetni sklep. V tem primeru je potrebno upoštevati še magnetno energijo zaradi skupnega tvorjenja magnetnega polja v sistemu več tuljav. Splošna formula za sistem *N* sklopljenih tuljav je:

$$W(t) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N} L_{jk} \cdot i_j(t) \cdot i_k(t)$$

Imamo dve tuljavi z medsebojno induktivnostjo M:

$$W = \frac{1}{2}L_1 i_1^2 + \frac{1}{2}L_2 i_2^2 \pm M i_1 i_2$$

Predznak je v obeh primerih enak: pozitiven, če se fluksa tuljav »podpirata« in negativen, če se »ne podpirata«. Ko gre skozi obe tuljavi isti tok:

$$W = \frac{1}{2}(L_1 + L_2 \pm 2M)i^2$$

Izraz v oklepaju je skupno nadomestno induktivnost, ki bo torej: $L_{nad} = L_1 + L_2 \pm 2M$

Energija magnetnega polja v nelinearnih magnetnih strukturah: V feromagnetnih jedrih zveza med B-jem in H-jem oziroma magnetnim sklepom in vzbujalnim tokom ni linearna. Običajno imamo opravka s histerezo

$p = i \cdot u$ in $u = \frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}t}$; $\mathrm{d}W = p\mathrm{d}t = i\mathrm{d}\Psi$

Energija, potrebna za magnetenje od časa 0 do t je enaka: $W_{mag}(t) = \int_0^t i\mathrm{d}\Psi$

Vzemimo feromagnetno jedro, ovito z N ovoji, kjer velja Amperov zakon $Ni = \oint_L \vec{H} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$ in diferencial magnetnega sklepa lahko pišemo $\mathrm{d}\Psi = N\mathrm{d}\Phi = N\left(\vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{A}\right)$.

$$W_{mag}(t) = \int_0^t \oint_L \int_A \left(\frac{1}{N}\vec{H} \cdot \mathrm{d}\vec{l}\right)\left(N\mathrm{d}\vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{A}\right)$$

V oklepaju v enačbi lahko razpoznamo **gostoto magnetne energije:**

$$w_{mag}(t) = \int_{B(t)} \vec{H} \cdot \mathrm{d}\vec{B}$$

Gostota energije pri linearni magnetilni krivulji: V primeru, da imamo opravka z materialom, ki ga lahko opišemo z linearno magnetilno krivuljo, lahko uporabimo $B = \mu * H$.

$$w = \frac{B^2}{2\mu}$$

Celotno energijo magnetenja dobimo z integracijo gostote energije po volumnu $W = \int_V \frac{B^2}{2\mu}\mathrm{d}V$ s H-jem $W = \frac{\mu H^2}{2}V$ [v hom. polju]

4. Histerezne in vrtinčne izgube

Energija, vložena v grajenje magnetnega polja v nelinearni mag. strukturi je nepovratna. Potrebna je za obračanje Weissovih domen, pri čemer pride do mehanskega trenja. Če je tok v ovojih na jedru izmeničen in prehodi histerezno krivuljo f krat na sekundo (frekvenca signala), bo gostota izgubne moči:

$$p_{hist} = f \cdot A_{zanke}$$

Celotna *histerezna izgubna moč* bo enaka gostoti moči pomnoženi z volumnom materiala. $P_{hist} = p_{hist}V$

$A_{BHzanke}$ predstavlja gostoto energije, enota je $\left[\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}\mathrm{T} = \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}\frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{m}^2} = \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{m}^3}\right]$

Vrtinčne izgube – Nastanejo zaradi vrtinčnih tokov [Vrtinčne izgube zmanjšamo z liminacijo materiala oz. uporabo feritnih materialov, ki niso el. prevodni]

$P_{vrt} = B^2 F k_v$

5. Magnetna sila na kotvo elektromagneta

Ko nas zanima sila med poloma magneta, v zračni reži magneta ali pa med dvema vodnikoma s tokom, ločimo dva primera:

1) **Ko ni virov, ki bi dovajali energijo v sistem**

$$F_x = -\left.\frac{\partial W_m}{\partial x}\right|_{\Phi=konst}$$

$$\vec{F} = -\left.\left(\frac{\partial W_m}{\partial x}, \frac{\partial W_m}{\partial y}, \frac{\partial W_m}{\partial z}\right)\right|_{\Phi=konst}$$ splošno

∂W - sprememba energije shranjene v magnetnem polju. Mehansko delo bo v tem primeru zmanjšalo magnetno energijo (trajni magnet).

2) **Ko je vir priključen in konstanten**

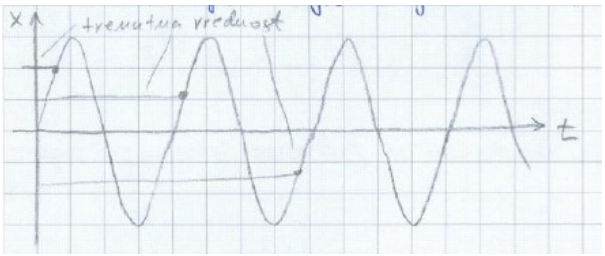
$$F_x = \left.\frac{\partial W_m}{\partial x}\right|_{I=konst}$$

V tem primeru pa bo opravljeno mehansko delo rezultiralo v povečanju magnetne energije, ki bo "prišla" iz virov (elektromagnet).

ČASOVNO SPREMENLJIVO VZBUJANA IN HARMONIČNO VZBUJANA EL.VEZJA

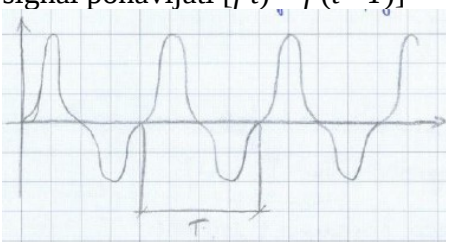
1. Časovno spremenljiva in periodična količina (časovni diagram, trenutna vrednost)

Časovni diagram:



2. Periodična količina (perioda, frekvenca, srednja in efektivna vrednost)

Perioda (T) – čas v katerem se začne signal ponavljati [$f\,t) = f\,(t + T)$]



Frekvenca - periodičnega signala je $f = \frac{1}{T}$, njena enota je s^{-1}, pogosteje uporabimo enoto Hz.

Kotna frekvenca – $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$

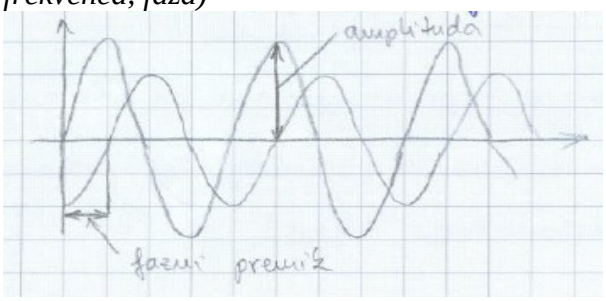
Srednja ali povprečna je v osnovi površina pod krivuljo signala deljena s periodo.

$$I_{sr} = \frac{1}{T}\int_0^T i(t)\cdot dt$$

Efektivna vrednost (RMS – root mean square) povpr. vred. kvadrata signala.

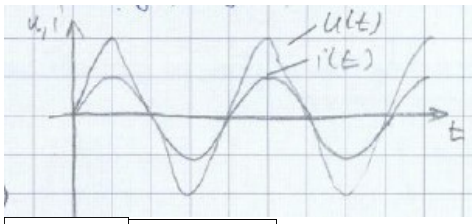
$$I_{ef} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2(t)\cdot dt}$$

3. harmonična količina (amplituda, frekvenca, faza)



4. Odnos med tokom in napetostjo na uporu (kondenzatorju, tuljavi)

UPOR:

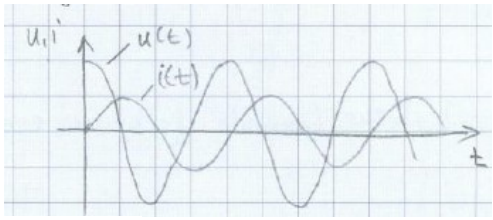


$u(t) = Ri(t)$ $i = I_m \sin(\omega t)$

$u = RI_m \sin(\omega t) = U_m \sin(\omega t)$

Napetost na uporu je v fazi s tokom in je neodvisna od frekvence tokovnega signala.

TULJAVA:



$u = \frac{d\Psi}{dt} = L\frac{di}{dt}$ $i = I_m \sin(\omega t)$

$u = L\frac{d}{dt}(I_m \sin(\omega t)) = LI_m\omega\cos(\omega t) = U_m \cos(\omega t)$

$u = U_m \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$

Napetost prehiteva tok za 90^0[pi/2].

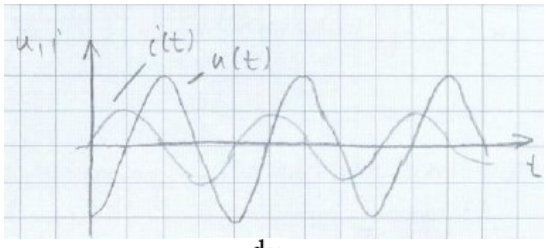
Amplituda napetosti: $U_m = I_m \omega L$

Upornost tuljave (reaktanca) pri izmeničnih signalih se veča linearno s frekvenco $\frac{U_m}{I_m} = X_L = \omega L$

Tuljavo lahko pri zelo nizkih frekvencah (enosmerne razmere) nadomestimo s kratkim stikom (zelo majhna upornost), pri zelo visokih pa z odprtimi sponkami (zelo velika upornost).

Za vezja, v katerih napetost prehiteva tok rečemo, da imajo **induktivni karakter**.

KONDENZATOR:



$i = I_m \sin(\omega t)$ $i = C\frac{du}{dt}$

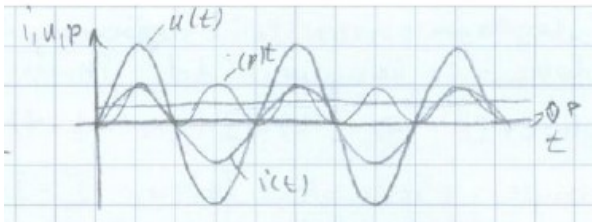
$u = U_m \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$ $U_m = \frac{I_m}{\omega C}$ Amplituda napetosti

Napetost zaostaja za tokom za 90^0[pi/2].

Kondenzator pri zelo nizkih frekvencah (enosmerne razmere) lahko nadomestimo z odprtimi sponkami (zelo velika upornost), pri zelo visokih pa s kratkim stikom (zelo majhna upornost).
Za vezja, v katerih napetost zaostaja za tokom rečemo, da imajo **kapacitivni karakter**.

5. Močnostne in energijske razmere na uporu (kondenzatorju, tuljavi)

UPOR:



Moč:

$$p = \frac{I_m^2 R}{2}\left(1-\cos(2\omega t)\right)$$

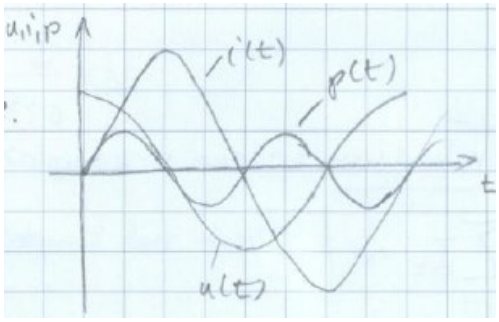
Trenutna moč na uporu ima sinusno obliko, vendar niha z dvojno frekvenco osnovnega signala. Povprečna moč:

$$P = \frac{I_m^2 R}{2} = I_{ef}^2 R$$

Energija:

$$W_T = \int_0^T p\,\mathrm{d}t = PT = I_{ef}^2 RT$$

TULJAVA:



Moč:

$$p = iu = I_m \sin(\omega t)\cdot U_m \cos(\omega t) = \frac{I_m U_m}{2}\sin(2\omega t)$$

Trenutna moč niha z dvojno frekvenco vendar je brez enosmerne komponente. Energija se v četrtini periode porablja za grajenje mag. polja, v drugi četrini pa se vrača v vezje. Povprečna moč je 0 W.

Energija:

$$W(t) = \int_0^t p\,\mathrm{d}t = \frac{I_m U_m}{2}\int_0^t \sin(2\omega t)\mathrm{d}t = \frac{I_m U_m}{2.2\omega}\left(1-\cos(2\omega t)\right)$$

Energija, ki je akumulirama v mag. polju tuljave, niha z dvojno frekvenco osnovnega signala, je v vsakem trenutku pozitivna in v povprečju velika

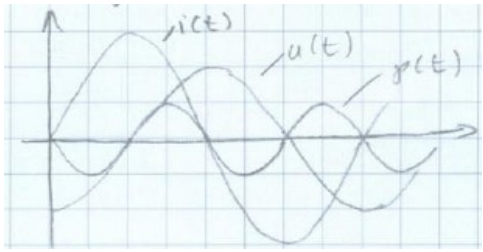
$$W_{sr} = \frac{I_m U_m}{4\omega} = \frac{L I_m^2}{4}$$

$$W = \frac{L i^2}{2}$$ Trenutna energija

Maksimalna energija v tuljavi nastopi tedaj, ko je maksimalen tok.

$$W_{max} = \frac{L I_m^2}{2}$$

KONDENZATOR:



Moč:

$$p = iu = -I_m \sin(\omega t)\cdot U_m \cos(\omega t) = -\frac{I_m U_m}{2}\sin(2\omega t)$$

Trenutna moč niha z dvojno frekvenco vendar je brez enosmerne komponente. Energija se v četrtini periode porablja za grajenje mag. polja, v drugi četrini pa se vrača v vezje. Povprečna moč je 0 W.

Energija:

Niha z dvojno in je vedno pozitivna.

$$W_{sr} = \frac{C U_m^2}{4}$$; povpr.

$$W_{max} = \frac{C U_m^2}{2}$$; max.

6. Kazalec harmonične količine (časovni in frekvenčni prostor)

Eulerjev obrazec:

$$e^{j\alpha} = \cos(\alpha) + j\sin(\alpha)$$

S pomočjo Eulerjevega obrazca lahko zapišemo poljuben harmoničen signal, pri čemer pa poleg realnega dela pridobimo še imaginarni del.

$$\underline{i}(t) = I\left(\cos(\omega t+\varphi) + j\sin(\omega t+\varphi)\right) = I e^{j(\omega t+\varphi)} = I e^{j\varphi} e^{j\omega t} = \underline{I} e^{j\omega t}$$

Tvorili smo kompleksor harmonične funkcije $\underline{I} = I e^{j\varphi}$, ki opisuje amplitude in fazo (fazni kot) toka, kar pa je tudi popolna informacija o toku v vezju.

7. Odnos med kazalcema toka in napetosti na uporu (kondenzatorju, tuljavi)

UPOR:

$i(t) = I\cos(\omega t)$ $\underline{I} = Ie^{j0} = I$

$u(t) = R \cdot i(t)$

$\underline{U} = R\underline{I}$ Kompleksorja toka in napetosti sta v fazi.

TULJAVA:

$\underline{I} = Ie^{j0} = I$ $u(t) = I\omega L\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$

$\underline{U} = I\omega L e^{j\frac{\pi}{2}} = I\omega L \cdot j$

$\underline{U} = j\omega L\underline{I}$

KONDENZATOR:

$\underline{U} = \frac{I}{\omega C}e^{-j\frac{\pi}{2}} = \frac{I}{e^{j\frac{\pi}{2}}\omega C} = \frac{I}{j\omega C}$

$\underline{U} = \frac{\underline{I}}{j\omega C}$ $\underline{U} = -j\frac{\underline{I}}{\omega C}$

8. Kirchoffova zakona v kompleksnem

$\sum_{k=1}^{m}\underline{I}_k = 0$

- Vsota vseh kompleksorjev toka v spojišče je enaka nič.

$\sum_{j=1}^{n}\underline{U}_j = 0$

- Vsota vseh kompleksorjev napetosti v zanki je enaka nič.

9. Imitanca (impedanca, admitanca) dvopola (enostavnih in sestavljenih dvopolov)

Kvocient komplesorjev napetosti in toka imenujemo **impedanca** ali **kompleksna upornost.**

$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}}$ velja: $\underline{Z} = \frac{Ue^{j\varphi_u}}{Ie^{j\varphi_i}} = \frac{U}{I}e^{j(\varphi_u - \varphi_i)} = Ze^{j\varphi}$

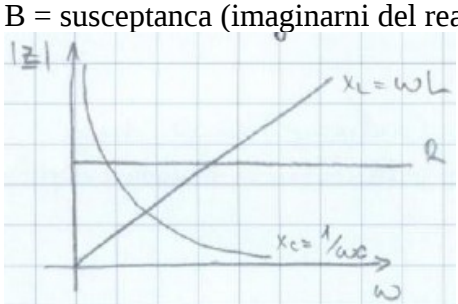
Impedanca je kompleksno število. Absolutna vrednost impedance je kvocient med amplitudo napetosti in toka, argument pa je razlika med faznima kotoma napetostnega in tokovnega signala. Inverzna impedanci je **admitanca** ali **kompleksna prevodnost.**

$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{\underline{I}}{\underline{U}}$ lahko tudi: $\underline{Y} = \frac{1}{Z}e^{-j\varphi} = Ye^{-j\varphi}$

	Impedanca	Admitanca
	$\underline{Z}$	$\underline{Y}$
Upor	R	G
Tuljava	$j\omega L = jX_L$	$\frac{1}{j\omega L} = jB_L$
Kondenzator	$\frac{1}{j\omega C} = jX_C$	$j\omega C = jB_C$

$X_{L,C}$=reaktanca (imaginarni del impedance)

B = susceptanca (imaginarni del reaktance)



- ZAPOREDNA VEZAVA:

$\underline{Z}_{zaporedno} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 + \ldots$

- VZPOREDNA VEZAVA:

$\underline{Y}_{vzporedno} = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3 + \ldots$

10. Kompleksna moč (delovna, jalova in navidezna moč, faktor moči)

Trenutno moč vezja opišemo kot vsoto dveh komponent moči, ene enosmerne in ene izmenične, ki niha z dvojno frekvenco. S povprečenjem moči preko periode dobimo povprečno moč, ki bo enaka tej enosmerni komponenti moči, ki jo imenujemo **delovna moč**.

$P = \frac{U_m I_m}{2}\cos(\varphi) = U_{ef}I_{ef}\cos(\varphi)$ Cosφ – imenujemo faktor moči ali faktor delavnosti

To je del moči, ki se pretvarja v neko drugo obliko, na uporu v toplotno (Joulske izgube), v motorjih pa v mehansko.

Navidezna moč: trenutna moč niha z dvojno frekvenco okoli vrednosti povprečne moči. Amplituda nihanja moči (brez enosmerne komponente). Pove nam, koliko smemo obremenjevati napravo.

$S = \frac{I_m U_m}{2}$

Jalova moč:

$$p(t)=\frac{U_m I_m}{2}\left[\cos(\varphi)\left(1-\cos(2\omega t)\right)-\sin(\varphi)\sin(2\omega t)\right]$$

Prvi člen v oglatem oklepaju predstavlja nihanje moči okoli povprečne (delovne) moči, drugi člen pa nihanje moči okoli ničle. Amplituda drugega člena je enaka:

$Q=\frac{I_m U_m}{2}\sin(\varphi)$, velja tudi: $S^2=P^2+Q^2$

To moč bi lahko zapisali tudi s kompleksorji v obliki:

$\underline{S}=\underline{P}+j\underline{Q}$ $\underline{S}=\frac{1}{2}\underline{U}\cdot\underline{I}^*$

Če upoštevamo še Ohmov zakon:

$\underline{S}=\frac{1}{2}\underline{I}\underline{Z}\underline{I}^*=\frac{1}{2}\left|\underline{I}\right|^2\underline{Z}=\frac{1}{2}I^2\underline{Z}=\frac{1}{2}U^2\underline{Y}^*$

Delovna moč predstavlja realno, jalova pa imaginarno komponento kompeksorja navidezne moči.

Bilanca moči:

Vsota moči virov (generatorjev) = vsota moči na bremenih vezja

11. Kompenzacija jalove moči

Večina električnih naprav ima induktivni karakter, saj za pretvarjanje iz električne v mehansko energijo potrebujejo razna navitja (motorji, transformatorji, dušilke…). Ti potrebujejo energijo za vzpostavljanje in »zmanjševanje« magnetnega polja, ki se manifestira v izmenjalni moči, ta pa v jalovi moči, ki je definirana kot amplituda te izmenjalne moči. Ta moč je potrebna za delovanje el. naprav in se ji ne moremo izogniti. Bremeni pa ta moč električno omrežje in jo porabnik tudi plačuje. Jalovo moč je navzven mogoče do določene mere kompenzirati, to pomeni, da bremenu dodamo elemente, ki izmenjujejo energijo z bremenom. V ta namen se uporablja vzporedno vezavo kondenzatorjev.

Poznamo **popolno in nepopolno kompenzacijo**. Pri popolni kompenzaciji breme navzven deluje kot ohmsko, torej je jalova moč navzven enaka nič, pri nepopolni, pa jalovo moč le zmanjšamo do določene mere. Pogosto za mero kompenzacije uporabimo faktor delavnosti cos(φ). Popolna kompenzacija ima faktor delavnosti 1.

- Popolna kompenzacija: φ=0 oz cosφ=1
- Nepopolna kompenzacija: φ- zmanjšamo tako, da je običajno cosφ=0.9-0.94

12. Resonanca (vsiljeno nihanje zaporednega in vzporednega nihajnega kroga)

Resonančni pojav nastopi ob izrazitem povečanju amplitude toka ali napetosti.

ZAPOREDNI NIHAJNI KROG:

Zaporednega nihajni krog sestavljajo zaporedna vezava kondenzatorja, upora in tuljave.

Frekvenca, pri kateri imamo max. tok [resonančna frekv.]

$\omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}}$

VZPOREDNI NIHAJNI KROG:

Imamo vzporedno vezavo upora, kondenzatorja in tuljave.

Frekvenca, pri kateri imamo max. napetost

$\omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}}$

Razlika je v tem, da je sedaj pri resonančni frekvenci na zunanjih sponkah maks. napetost, pri zaporedni resonanci pa tok. *Vzporedno resonanco* zato tudi imenujemo **napetostna**, *zaporedno* pa **tokovna resonanca.**

13. Pasovna širina in kvaliteta nihajnega kroga (bočni frekvenci, razglašenost, uporabe)

Razglašenost vezja:

$$\beta=\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}$$

Kvaliteta vezja je določena s kvocientom moči na reaktivnem elementu in delovno močjo:

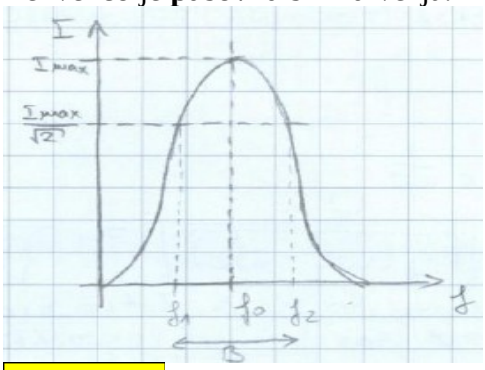
$$Q=\frac{Q_{X_0}}{P}$$

Kvaliteta vezja je mera za »ozkost« resonančne krivulje. Bolj kot je krivulja ozka (strma okoli resonančne frekvence), večja je njena kvaliteta. V primeru zaporedne vezave elementov R, L, C je kvaliteta večja pri manjši upornosti.

Dušenje je recipročna vrednost kvalitete ($D = 1/Q$).

Bočni frekvenci (f_2 in f_1) sta določeni pri vrednostih toka, ki je od maksimalne vrednosti manjši za koren od 2.

Razlika med zgornjo in spodnjo bočno frekvenco je **pasovna širina** vezja.



$$B = f_2 - f_1$$

Normirana pasovno širino, ki je pasovna širina deljena z resonančno frekvenco:

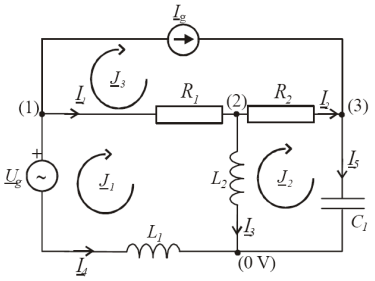
$$B_{\text{norm}} = \frac{f_2 - f_1}{f_0}$$

Kvaliteta je definirana tudi kot recipročna vrednost normirane pasovne širine:

$$Q = \frac{1}{B_{\text{norm}}} = \frac{f_0}{f_2 - f_1}$$

14. Metode analize harmonično vzbujanih vezij

Sklopljene tuljave: Sklopljeni elementi, nastopajo v primeru obravnave vezij z najmanj dvema tuljavama, ki si delita del ali celoten fluks. Ti elementi imajo zaradi sklopitve dodaten padec napetosti na tuljavi, ki se padcu napetosti zaradi lastne induktivnosti prišteva ali pa odšteva. Podpiranje (seštevanje) fluksov označimo tako, da postavimo piko v obeh sklopljenih elementih na začetek ali konec elementa glede na tok v element. Ta dodatni padec napetosti lahko označimo s posebnim simbolom (romb) in ga imenujemo **tokovno krmiljen napetostni vir**.



1) Metode Kirchoffovih zakonov (1. in 2.)
2) Metode zančnih tokov
3) Metoda spojiščnih potencialov

Stavki teoremi:

1) Stavek superpozicije

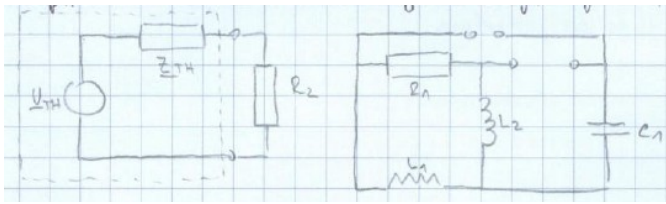
Če imamo več različnih virov v vezju, lahko pri linearnem vezju odklopimo določen vir in analiziramo vezje kot vsoto več poenostavljenih vezij. Če so viri različnih frekvenc, ne smemo izračunanih kompleksorjev tokov preprosto sešteti, saj gre za časovne signale različnih frekvenc. Seštejemo lahko časovne signale. Z metodo superpozicije lahko analiziramo tudi vezje, ki vključuje enosmerne in izmenične vire.

2) Theveninovo nadomestno vezje
3) Nortonovo nadomestno vezje
4) Teorem maksimalne moči

15. Theveninov in Nortonov teorem

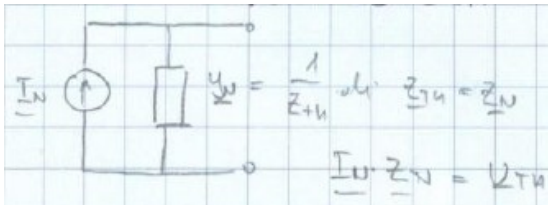
- THEVENINOVO NADOMESTNO VEZJE

Vezje med poljubnima dvema sponkama nadomestimo z realnim napetostnim virom. Recimo, da nas zanima tok skozi upor R_2. Poiščimo nadomestno Theveninovo upornost in napetost. Theveninova upornost je notranja upornost vezja gledana s sponk upora R_2, pri čemer tokovni vir odklopimo, napetostnega pa kratko sklenemo.



- NORTONOVO NADOMESTNO VEZJE

Predstavimo ga z realnim tokovnim virom. Tok lahko določimo kot tok kratkega stika med sponkama vezja, ki ga želimo nadomestiti.



17. Transformator brez izgub (prestava, magnetilni in ravnotežni tok, transformacija moči)

S transformatorjem lahko zvišamo ali znižamo izmenično napetost, prilagodimo

breme, ga uporabimo za merjenja, kot ločilni transformator, itd.. Ne vsebuje gibljivih delov in je s tem njegova življenjska doba dolga, poleg tega pa z dokaj dobrim magnetnim sklepom omogoča relativno majhne izgube pri pretvarjanju iz višje v nižjo napetost in obratno. V osnovi lahko transformator predstavimo kot dvovhodno vezje s sklopljenima tuljavama. Vhodna in izhodna stran sta v principu enakovredni, saj lahko z zamenjavo strani zvišamo ali znižamo izhodno napetost, impedanco, tok. Vzemimo idealno sklopljeni tuljavi s faktorjem sklopa enak 1. Tedaj bo zveza med lastnima induktivnostima navitij in medsebojno induktivnostjo sledeča:

$$M = \sqrt{L_1 L_2}$$

Vhodno napetost na eni strani zapišemo kot $\underline{U}_1 = j\omega L_1 \underline{I}_1 + j\omega M \underline{I}_2$

To stran bomo imenovali **primarna**, drugo stran pa **sekundarna**. Primarna stran je običajno priključena na napajalno napetost (vir), sekundarna pa na breme. Ker smo toka in pike označili tako, da se fluksa obeh tuljav podpirata, bo napetost na drugi strani (sekundarni) enaka

$$\underline{U}_2 = j\omega L_2 \underline{I}_2 + j\omega M \underline{I}_1$$

Izhodna napetost je odvisna le od razmerja lastnih induktivnosti tuljav, te pa so sorazmerne kvadratu ovojev

$$\frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2} = \sqrt{\frac{L_1}{L_2}} = \sqrt{\frac{N_1^2/R_m}{N_2^2/R_m}} = \frac{N_1}{N_2} = n \qquad \frac{U_1}{U_2} = \frac{N_1}{N_2}$$

Razmerje med vhodno in izhodno napetostjo enako razmerju števila ovojev *n*. Temu razmerju rečemo tudi **napetostna prestava.**

Napetostna prestava in maksimalni fluks v jedru:

$$U_{i1,ef} = \left|\underline{U}_{i1,ef}\right| = N_1 2\pi f \frac{\Phi_{gl,\max}}{\sqrt{2}} = 4,44 f N_1 \Phi_{gl,\max}$$

Magnetilni tok - Če so na sekundarni strani sponke odprte, teče na primarni strani tok

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_1}{j\omega L_1} = I_{1m}$$

Ta tok pozroča fluks v jedru transformatorja in je v fazi s fluksom.

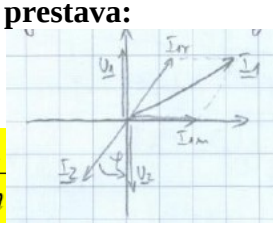
Če na sekundarno navitje transformatorja priključimo breme, rečemo, da je transformator **obremenjen.** Sedaj bomo imeli dva toka, ki magnetita jedro.

$$\underline{\Theta} = N_1 \underline{I}_1 + N_2 \underline{I}_2$$

Magnetna napetost bo neodvisna od bremenskega toka, saj se priključena napetost in s tem inducirana napetost na primarni strani (v idealnih razmerah enaka priključeni napetosti) ni spremenila.

$$N_1 \underline{I}_1 + N_2 \underline{I}_2 = N_1 \underline{I}_{1m}$$

Tokovna prestava:



$$\frac{\underline{I}_1}{\underline{I}_2} = -\frac{1}{n}$$

Moč na bremenu je manjša od moči na vhodu za jalovo moč magnetenja *S*1*m*. Le ta pa je običajno dosti manjša od moči na bremenu, velja

$$\underline{S}_1 \cong \underline{S}_2$$

Kar pomeni, da je v idealnih razmerah moč bremena enaka moči na vhodu.

18. Idealni transformator (transformacija impedance)

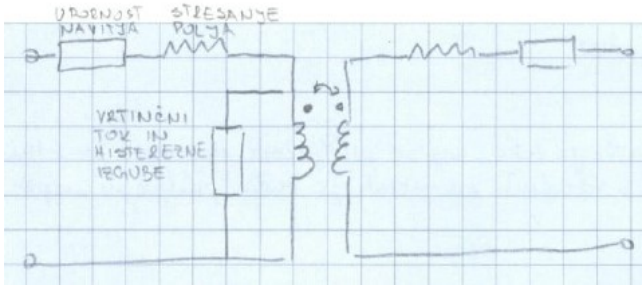
$$\underline{Z}_{vh} = \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1}$$

S preureditvijo osnovnih enačb transformatorja in ob predpostavki, da bo bremenska upornost mnogo manjša od induktivnih upornosti

$$\underline{Z}_{vh} \approx n^2 \underline{Z}_b$$

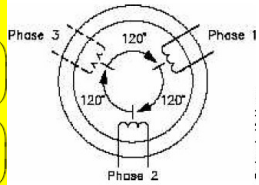
19. Realni transformator (vrste izgub in modelno vezje ter kazalčni diagram)

Pri realnem transf. upoštevamo stresanje polja, upornost navitja, izgubo v jedru (histerezne, vrtinčni tokovi)



20. Trifazni sistem (modelno vezje trifaznega generatorja, fazne in medfazne napetosti)

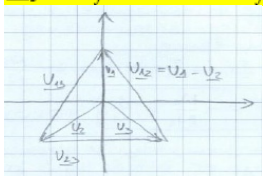
$$u_1 = U_m \cos(\omega t + \alpha),$$
$$u_2 = U_m \cos\left(\omega t + \alpha - \frac{2\pi}{3}\right)$$
$$u_3 = U_m \cos\left(\omega t + \alpha + \frac{2\pi}{3}\right)$$



Trifazni sistem s takim zaporedjem faz imenujemo <u>pozitiven</u>, saj se kompleksorji napetosti izmenjujejo v smeri urinega kazalca

- Efektivne vrednosti:

$$\underline{U}_1 = U_f e^{j\frac{\pi}{2}} = U_f e^{j90^0}$$
$$\underline{U}_2 = U_f e^{j\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{3}\right)} = U_f e^{-j\frac{\pi}{6}} = U_f e^{-j30^0}$$
$$\underline{U}_3 = U_f e^{j\left(\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3}\right)} = U_f e^{-j150^0}$$



- Medfazne napetosti:

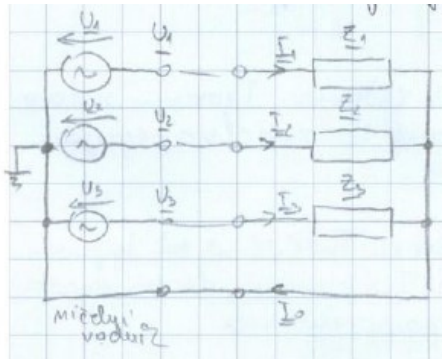
$$U_{mf} = \sqrt{3} U_f$$

21. Prednosti trifaznega sistema (pri prenosu energije, vrtilno magnetno polje)

Lažji prenos energije na večje oddaljenosti. Zmanjšanje materiala - en vodnik lahko uporabimo skupno (povratni ali ničelni vodnik)

Asinhroni stroji delujejo na principu kratko sklenjene vrtljive tuljave (zanke) v vrtilnem magnetnem polju. V kratko sklenjeni tuljavici se pod vplivom časovne spremembe fluksa inducira napetost, ki požene t.i. kratkostični tok v tuljavi. Ta tok povzroča lastno polje tuljave. Vemo, da na vodnike s tokom deluje magnetna sila in navor. Na tuljavico torej deluje navor, ki zavrti zanko. Ker magnetni moment nastaja pod vplivom toka v zanki, ta je pa posledica inducirane napetosti v tuljavi (ki zaostaja za tokom, ki tvori vrtilno magnetno polje), se vrteča tuljavica vrti počasneje kot vrtilno magnetno polje. Temu rečemo asinhrono ali nesočasno vrtenje (motorji, lahko tudi generatorji). Poleg asinhronih motorjev poznamo tudi **sinhrone motorje**. Pri teh je na rotorju trajni magnet ali pa ima dodatno navitje, ki je napajano z enosmernim tokom (elektromagnet). Tak rotor se vrti sinhrono z vrtilnim magnetnim poljem. Ti motorji se ne morejo vzbuditi sami, zato imajo na rotorju dve navitji, eno kratkostično, ki je potrebno pri zagonu in eno navitje, ki ga napajamo z enosmernim tokom. Ko vklopimo ta tok, potegne rotor v sinhronizem z »zunanjim« vrtilnim poljem.

22. Analiza vzbujanega trifaznega bremena v zvezdni vezavi z nevtralnim vodnikom



Vsako od bremen je priključeno na eno od faznih napetosti.

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_1} = \underline{U}_1 \underline{Y}_1$$
$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_2} = \underline{U}_2 \underline{Y}_2$$
$$\underline{I}_3 = \frac{\underline{U}_3}{\underline{Z}_3} = \underline{U}_3 \underline{Y}_3$$

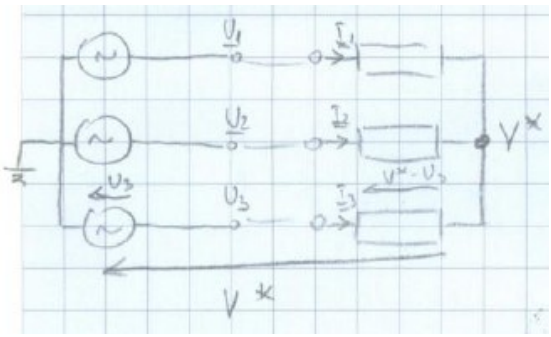
Vsota teh tokov je tok v ničelnem vodniku

$$\underline{I}_0 = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3$$

Moč bremena je enaka vsoti moči posameznih bremen $\underline{S} = \underline{S}_1 + \underline{S}_2 + \underline{S}_3$

$$\underline{S}_1 = \underline{U}_1 \cdot \underline{I}_1^* = I_1^2 \underline{Z}_1 = U_1^2 \underline{Y}_1^*$$

23. Potencial zvezdišča



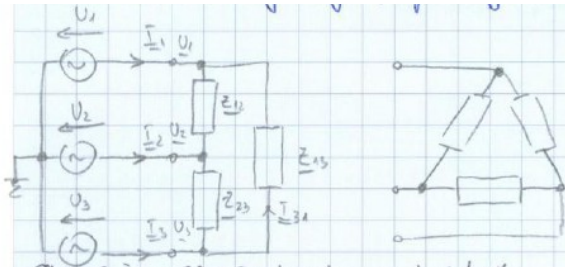
Potencial zvezdišča: Razmere na bremenu vezanem v trikot brez ničelnega vodnika lahko analiziramo s poljubno metodo analize vezij. Najpreprosteje kar z metodo spojiščnih potencialov. En potencial ozemljimo, običajno tistega na strani spojišča generatorjev, potencial drugega pa določimo iz pogoja, da mora biti vsota vseh faznih tokov enaka nič:

$\underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = 0$

Temu potencialu rečemo **potencial zvezdišča**. Če imamo priključen ničelni vodnik, potem je ta potencial enak nič:

$$\underline{V}^* = \frac{\underline{U}_1\underline{Y}_1 + \underline{U}_2\underline{Y}_2 + \underline{U}_3\underline{Y}_3}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3}$$

24. Analiza vzbujanega trifaznega bremena v trikotni vezavi



Elementi bremena so priključeni na medfazne napetosti. V tej vezavi torej nimamo možnosti uporabe ničelnega vodnika. Napetosti na posameznih elementih bremena so za koren iz 3 večji od faznih napetosti: $U_{mf} = \sqrt{3}U_f$

$\underline{I}_{12} = \frac{\underline{U}_{12}}{\underline{Z}_{12}}, \quad \underline{I}_{23} = \frac{\underline{U}_{23}}{\underline{Z}_{23}}, \quad \underline{I}_{31} = \frac{\underline{U}_{31}}{\underline{Z}_{31}}$ posamezne impedance

Fazni toki pa so razlike teh tokov, npr:

$\underline{I}_1 = \underline{I}_{12} - \underline{I}_{31}$, itd.

Za simetrično breme ugotovimo, da je trenutna moč konstantna!

$$p(t) = \frac{3}{2}UI\cos(\beta)$$

V primeru simetričnega bremena bodo bremenski toki zaostajali ali prehitevali fazne ali medfazne napetosti za isti fazni kot.

25. Prehodni pojav (fizikalno ozadje, metode reševanja, začetno in končno stanje)

Veljata Kirchoffova zakona in osnovne zveze:

UPOR: $u(t) = R \cdot i(t) \quad \Leftrightarrow \quad i(t) = G \cdot u(t)$

KONDENZATOR: $u(t) = \frac{1}{C}\int_0^t i(t) + u_{C0} \quad \Leftrightarrow \quad i(t) = C\frac{du(t)}{dt}$

TULJAVA: $u(t) = L\frac{di(t)}{dt} \quad \Leftrightarrow \quad i(t) = \frac{1}{L}\int_0^t u(t)dt + i_{L0}$

Zapišemo enačbe vezja po preklopu z uporabo Kirchoffovih zakonov. Tako tvorimo sistem (ene ali več) diferencialnih enačb, ki jih je potrebno rešiti.

Potrebujemo še začetne pogoje - stanje na elementih vezja tik po preklopu.

Začetni pogoji: Napetost na kondenzatorju je integral toka skozi kondenzator. Tudi, če se tok hipoma spremeni, se lahko napetost spremeni le postopoma, zvezno. To pomeni, da bo napetost na kondenzatorju tik pred spremembo enaka napetosti tik po spremembi.

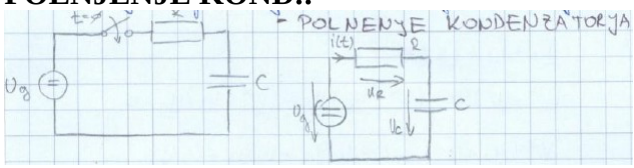
$$u_C(0^+) = u_C(0^-)$$

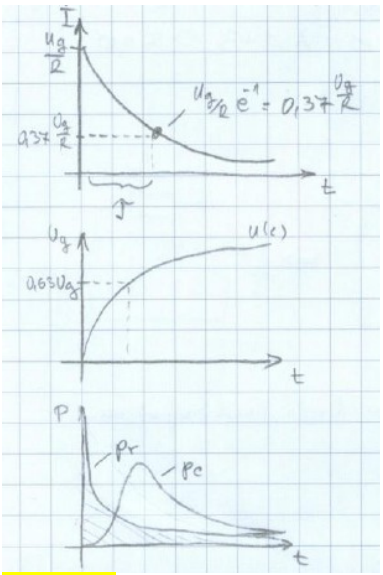
Tok skozi kondenzator se lahko spremeni hipoma. Pri tuljavi se ne more hipoma spremeniti tok skozi tuljavo (lahko pa se napetost).

$$i_L(0^+) = i_L(0^-)$$

26. Polnjenje in praznjenje kondenzatorja ali tuljave

POLNJENJE KOND.:





$\tau = RC$ tau – časovna konst.

$$i(t) = \frac{U_g}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}$$ tok na kond.

$$u_C(t) = U_g \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$ napetost na kond.

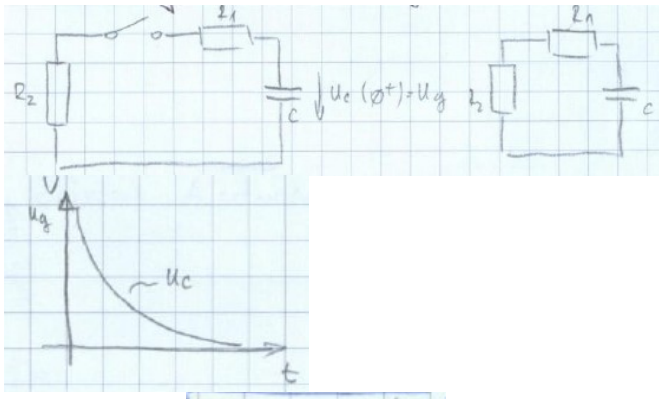
<u>Moč:</u>

$$p_C(t) = i_C \cdot u_C = Cu\frac{du}{dt}$$

<u>Energija:</u>

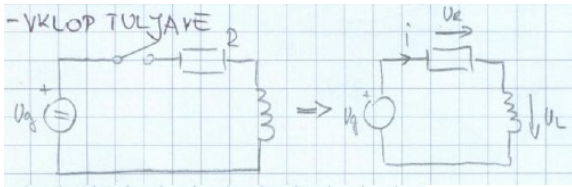
$$W_C(t) = C\frac{u_C^2}{2} = \frac{CU_g^2}{2}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)^2$$

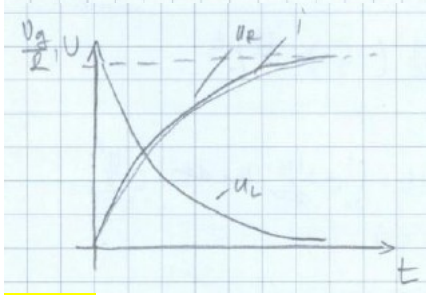
PRAZNJENJE KOND.:



$Ae^{-\frac{t}{\tau}}$ tok i(t) $\boxed{U_c = U_g e^{-t/C}}$

VKLOP TULJAVE:





$\tau = \frac{L}{R}$

$$\boxed{i_L(t \Rightarrow \infty) = \frac{U_g}{R}}$$