Osnove elektrotehnike 2

Izmenični signali

Dejan Križaj

2011

KAZALO

16. PREHODNI POJAV

Vsebina: Stacionarno stanje – prehodni pojav, zveze med tokom in napetostjo na uporu, tuljavi in kondenzatorju, začetni pogoji, zapis in oblika rešitve diferencialne enačbe, polnenje in praznenje kondenzatorja in tuljave, časovna konstanta, »obrtniška metoda«, uporaba programov za analizo vezij.

Z analizo vezij priključenih na enosmerne vire smo se že spoznali. Pri tem smo obravnavali le vezja sestavljena izključno iz uporov. Če bi poleg uporov vsebovala še tuljave in kondenzatorje, bi morali ugotoviti, da v enosmernih razmerah kondenzatorji predstavljajo odprte sponke (upornost izolatorja/dielektrika je izredno velika), tuljave pa kratek stik (če zanemarimo Ohmsko upornost navitja). Take razmere nastopijo v vezju tudi po preteku prehodnega pojava.

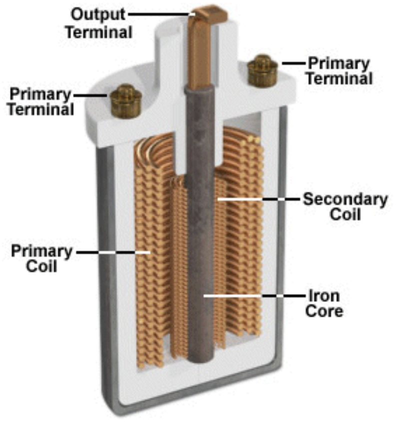
SLIKA: Vezje z upori, idealnimi kondenzatorji in idealnimi tuljavami priključenimi na enosmerni vir v stacionarnih razmerah.

Popolnoma drugačne razmere pa imamo tedaj, ko vire šele priklopimo ali odklopimo z vezja. V prvem trenutku po priklopu vira se na elementih vezja še ne bodo vzpostavile razmere, kot so v enosmernih razmerah. Ugotovili bomo, da tok skozi tuljavo ne more sunkovito narasti, saj mu to preprečuje inducirano polje, ki je večje ob večji spremembi toka. Prav tako ne more hipoma narasti napetost na kondenzatorju, saj je le ta odvisna od naboja med elektrodama, ta pa mora priteči s tokom. V tem primeru pride do t.i. **prehodnega pojava**.

SLIKA: Prehod med dvema stacionarnima stanjema imenujemo prehodni pojav.

PREHODNI POJAVI

Prehodne pojave srečujemo na vsakem koraku. Dobesedno. Z drsenjem čevljev ob tla se le ti naelektrijo, ob vsakem stiku s tlemi pa razelektrijo. Če ostanemo naelektreni in se približamo določenemu prevodnemu objektu (recimo kljuki) pride do razelektritve[1]. Podoben pojav je razelektritev med oblakom in zemljo, kar vidimo kot udar strele[2].



Vžigna tuljava z dvema navitjema. Zaradi transformatorskega principa (prva z manjšim in drugo z zelo velikim številom ovojev) je trenutna izhodna napetost dovolj velika (več 10 kV), da sproži iskro. Ta pa povzroči malo eksplozijo stisnjenega bencina, ta premik bata - in že se premikamo.http://www.2carpros.com/how_does_it_work/ignition.htm

Tako, kot se prehodni pojavi dogajajo v naravi, jih najdemo tudi pri čisto »elektrotehniških« problemih. Ti nas navsezadnje še najbolj zanimajo. Vzemimo vžigalni sistem v avtomobilu s tuljavo z zelo velikim številom ovojev. Če skozi tuljavo teče enosmeren tok, je padec napetosti na tuljavi odvisen le od upornosti ovojev tuljave. Če pa ta tok v hipu prekinemo, pride do induciranja napetosti na tuljavi, ki je lahko ob hipni spremembi toka zelo velika, saj velja $u(t) = L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}$. Ta učinek lahko še zvečamo tako, da vzamemo dve navitji (glej sliko). S prehodnim pojavom imamo opravka pri vsakem električnem vezju, ki ga občasno priključimo na napajanje ali pa izklopimo. Elemente vezja je torej potrebno dimenzionirati tudi za delovanje pri teh razmerah in ne le v stacionarnem stanju.

---

[1] Ta razelektritev nastopi pri napetostih 5 do 15 kV z maksimalnim tokom do 1 A. To je precejšen tok, ki pa traja izredno malo časa (reda µs), poleg tega je koncentriran le pri mestu nastopa razelektritve, potem pa se razširi na večje območje[1]. To neprijetnost lahko zmanjšamo z zmanjšanjem upornosti med telesom in zemljo. Ta upornost naj ne bi bila večja od 100 MΩ, kjer pa je verjetnost razelektritve posebno velika, pa naj ne bo manjša od 50 kΩ. V posebnih primerih (nevarnost eksplozij) je potrebno uporabiti oblačila, katerih upornost ne sme preseči veliksoti GΩ. V primeru naravnih materialov to običajno ni problem, je pa potrebno to upoštevati pri umetnih materialih. Znan nam je tudi pojav razelektritve ob stiku s karoserijo avta, ki nas neprijetno strese.

[2] Zamislimo si razelektritev kondenzatorja, ki se naelektri na napetost med 10 MV in 100 MV. Take napetosti so med zemljo in ionisfero, občasno pa tudi med zemljo in naelektrenim oblakom. Takrat lahko pride do hipne razelektritve, kar se odraža v obliki strele. Tokovi razelektritve so velikosti nekaj deset do 150 kA, dogodek pa lahko traja nekaj sto mikrosekund.

ZVEZE MED TOKOM IN NAPETOSTJO NA ELEMENTIH VEZJA

Za analizo prehodnega pojava se moramo vrniti k osnovnim zvezam med napetostjo in tokom na elementih vezja:

UPOR	$u(t) = R \cdot i(t)$	$i(t) = G \cdot u(t)$	(16.1)
KONDENZATOR	$u(t) = \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i(t)\mathrm{d}t + u(t_0)$ velja tudi $Q(t) = Cu(t)$	$i(t) = C\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}$	(16.2) (16.3)
TULJAVA	$u(t) = L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}$	$i(t) = \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} u(t)\mathrm{d}t + i(t_0)$	(16.4)

Poleg teh osnovnih zvez moramo upoštevati še oba Kirchoffova zakona ter začetne pogoje, ki določajo kontinuiteto toka ali napetosti ob prehodnem pojavu.

ZAČETNI POGOJI

Napetost na kondenzatorju je integral toka skozi kondenzator. Tudi če se tok skozi kondenzator hipoma spremeni (hipna sprememba pritekanja ali odtekanja naboja), se lahko napetost oz naboj ($Q = Cu$) spremeni le postopoma, zvezno. To pa tudi pomeni, da bo morala biti **napetost na kondenzatorju tik pred spremembo enaka napetosti tik po spremembi**, kar lahko zapišemo kot

$$u_C(t_0^+) = u_C(t_0^-). \tag{16.5}$$

Enako trditev ne moremo postaviti tudi za tok skozi kondenzator, le ta se lahko spremeni tudi hipoma.

Začetni pogoj za tok ali napetost na tuljavi ugotovimo s podobnim razmisekom, le da se **pri tuljavi ne more hipoma spremeniti tok skozi tuljavo** (lahko pa se napetost). Zato velja

$$i_L(t_0^+) = i_L(t_0^-) \tag{16.6}$$

Ta dva pogoja nam zadostujeta, da z razmislekom ugotovimo vrednost napetosti ali toka na poljubnih elementih v vezju ob prekopu.

POSTOPEK ANALIZE VEZIJ PRI PREHODNEM POJAVU

1. Zapišemo enačbe vezja po preklopu z uporabo Kirchoffovih zakonov.
2. Tvorimo sistem (ene ali več) diferencialnih enačb, ki jih je potrebno rešiti.
3. V ta namen potrebujemo začetne pogoje, to je stanje na elementih vezja tik po preklopu (ob začetku prehodnega pojava).

POLNJENJE KONDENZATORJA

Ob času t = 0 priklopimo kondenzator in zaporedno vezan upor na enosmerni vir napetosti 12 V. Določimo časovni potek napetosti in toka na kondenzatorju. $R = 10\,\Omega, C = 100\,\mu\mathrm{F}$.

SLIKA: Shema vezja

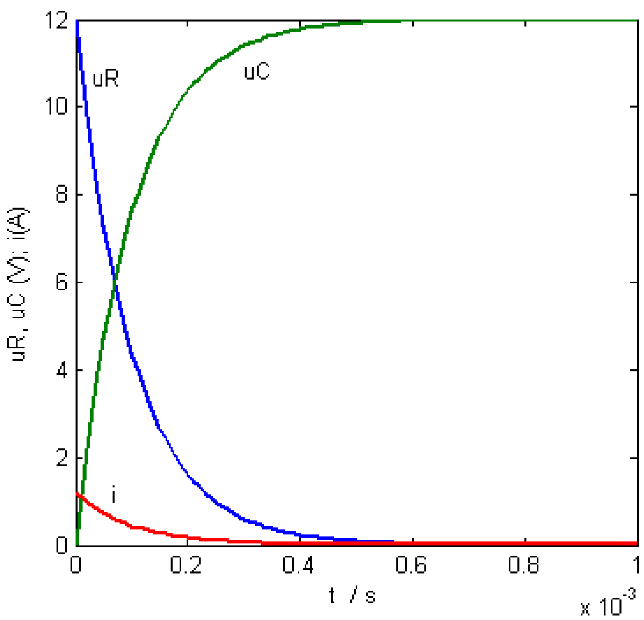
Uporabimo 2 Kirchoffov zakon $U_g = u_R(t) + u_C(t)$ in zvezi med tokom in napetostjo na uporu in kondenzatorju $U_g = iR + \frac{1}{C}\int i\mathrm{d}t$. Z odvajanjem celotne enačbe dobimo diferencialno enačbo za tok skozi kondenzator[3] $0 = R\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{i}{C}$. Dobimo diferencialno enačbo prvega reda s konstantnima koeficientoma, pa še homogeno povrhu (levi del je enak nič). Načinov reševanje takih enačb je več. Pri enostavnih sistemih diferencialnih enačb poznamo t.i. nastavek za rešitev. V konkretnem primeru diferencialne enačbe je rešitev v obliki eksponentne funkcije $i = Ae^{\lambda t}$. Ta nastavek uvrstimo v diferencialno enačbo in dobimo $\left(\lambda + \frac{1}{RC}\right)Ae^{\lambda t} = 0$.

Očitno bo enačbi zadoščeno, če bo $\lambda = -\frac{1}{RC}$. S tem bo rešitev oblike $i(t) = Ae^{-\frac{t}{RC}} = Ae^{-\frac{t}{\tau}}$, kjer je $\tau = RC$. Tau ima enoto časa, zato mu tudi pravimo **časovna konstanta**.

Določiti moramo še konstanto A. V ta namen moramo upoštevati začetni pogoj (16.5): napetost na kondenzatorju tik po preklopu mora biti enaka kot tik pred preklopom $u_C(0^+) = u_C(0^-)$. Zato je $u_C(0^+) = 0\,\mathrm{V}$. V trenutku $t = 0^+$ bo torej vsa napetost na uporu $u_R(0^+) = U_g$, tok pa bo enak $i(0^+) = \frac{u_R}{R} = \frac{U_g}{R}$. To je začetni pogoj, ki ga potrebujemo za dokončno rešitev. Upoštevamo ga v nastavku in dobimo $i(0^+) = \frac{U_g}{R} = A$. Rešitev bo torej eksponentno zmanjševanje toka $i(t) = \frac{U_g}{R}e^{-\frac{t}{\tau}}$. Napetost na uporu je sorazmerna temu toku, napetost na kondenzatorju pa lahko dobimo z

[3] Ta tok običajno imenujemo kar polnilni tok, saj pri tem prehodnem pojavu elektrimo kondenzator z nabojem. Naboj je sorazmeren napetosti na kondenzatorju, saj velja $Q(t) = C\cdot u(t)$).

integracijo toka v skladu z enačbo ali pa kar kot razliko priključene napetosti in napetosti na uporu. Dobimo $u_C(t) = U_g\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$.



SLIKA: Prikaz napetosti na uporu in kondenzatorju (uR) in (uC) ter toku pri prehodnem pojavu polnenja kondenzatorja preko upora.

ČASOVNA KONSTANTA

Za zgornji primer je časovna konstanta 100 µs. V tem času pade napetost na uporu za $e^{-\frac{\tau}{\tau}} = e^{-1}$ ali na 37 % začetne vrednosti. V času 2τ pade na 13,5 % in v času 5τ že pod 1 % začetne vrednosti. Časovno konstantno dobimo lahko tudi iz naklona signala v času *t* = 0 (ob preklopu)[4].

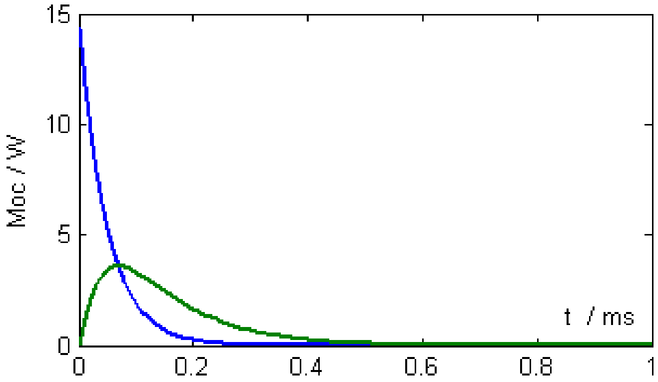
SLIKA: Časovna konstanta je čas, ko se zmanjša ali poveča vrednost opazovane veličine za približno 63 %.

[4] $\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}(t=0) = I_0 e^{-0/\tau}\left(-\frac{1}{\tau}\right) = -\frac{I_0}{\tau}$ ali tudi $\frac{\Delta i}{\Delta t}(t=0) = \frac{I_0 - 0}{0 - \tau} = -\frac{I_0}{\tau}$

MOČNOSTNE RAZMERE

Moč na uporu je $p_R(t) = i^2 R$, na kondenzatorju pa $p_C(t) = i_C \cdot u_C = Cu\frac{du}{dt} = u_C(t) = \frac{U_g^2}{R} e^{-\frac{t}{\tau}} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$

.



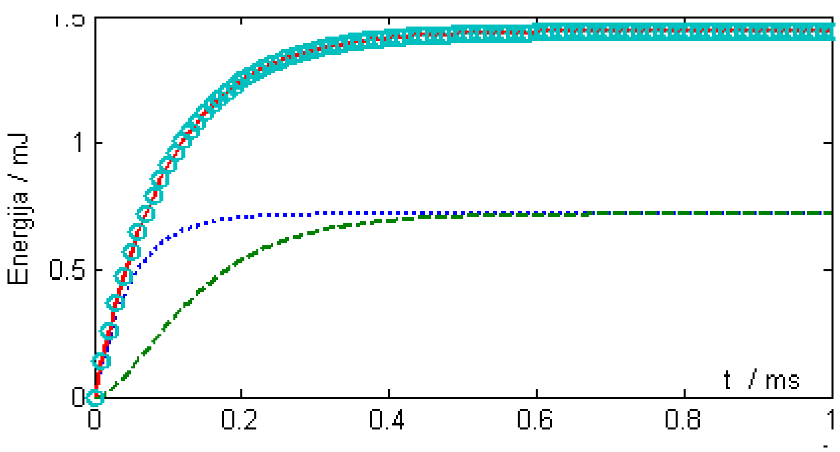
SLIKA: Moč na uporu (modra) upada s tokom, na kondenzatorju (zelena) pa narašča, doseže maksimum in upada proti nič.

ENERGIJSKE RAZMERE

Energijo dobimo z integracijo moči po času: $W(t) = \int_0^t p(t)\mathrm{d}t$.

Energija na uporu je $W_R(t) = \int_0^t Ri^2 \mathrm{d}t = \frac{U_g^2 C}{2}\left(1 - e^{-\frac{2t}{\tau}}\right)$, na kondenzatorju pa

$W_C(t) = C\frac{u_C^2}{2} = \frac{CU_g^2}{2}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)^2$. Energija na uporu se je med prehodnim pojavom »potrošila« oz. pretvorila v toploto (Joulske izgube), energija na kondenzatorju pa se je shranila v obliki zgrajenega električnega polja oz. v obliki naelektrenosti.



SLIKA: Energijske razmere pri polnjenju kondenzatorja: Energija na kondenzatorju (črtkana zelena črta) narašča, naraščajo pa tudi joulske izgube (pikčasta morda črta) na uporu. Vsota (polna rdeča črta) je energija, ki je enaka energiji, ki jo elementom zagotavlja vir (krogci).

PRAZNENJE KONDENZATORJA

Vzemimo, da se je kondenzator polnil do časa $t = 2\tau$, nato pa vir odklopimo in ga hkrati preklopimo na upor R_2= 100 Ω. Določimo tok praznenja in napetost na kondenzatorju.

SLIKA vezja.

Izračun: Rešujemo enačbo $0 = (R_1 + R_2)\dfrac{di}{dt} + \dfrac{i}{C}$. Rešitev bo podobna kot v prejšnjem primeru, torej $i(t) = Ae^{-\frac{t}{(R_1+R_2)C}} = Ae^{-\frac{t}{\tau}}$, kjer pa bo sedaj časovna konstanta daljša, enaka 1,1 ms (prej 0,1 ms). Drugačen je tudi začetni pogoj, saj bo sedaj ob preklopu ostala napetost na kondenzatorju nespremenjena in enaka $u_C(t = 2\tau) = U_g\left(1 - e^{-2}\right) \approx 0{,}86U_g$. Ta napetost bo v trenutku preklopa tudi enaka napetosti na obeh uporih, torej bo tok v času $t(2\tau)$ enak $i(2\tau^+) = \dfrac{0{,}86 \cdot U_g}{R_1 + R_2} = \dfrac{0{,}86 \cdot 12\,\text{V}}{110\,\Omega} \approx 0{,}094\,\text{A}$. Konstanta A bo torej $i(2\tau) = Ae^{-\frac{2\tau}{(R_1+R_2)C}} = Ae^{-2} = 0{,}094\,\text{A} \Rightarrow A = 0{,}697\,\text{A}$. Tok praznjenja je torej $i(t) = 0{,}697e^{-\frac{t}{(R_1+R_2)C}}\,\text{A}$. Napetost na uporoma bo enaka napetosti na kondenzatorju $u_R(t) = u_C(t) = 76{,}67e^{-\frac{t}{\tau}}\,\text{V}$.

Dodatno: Ob času $t = 4\tau$ zopet vklopimo generator preko upora 10 Ω. Kakšen je sedaj potek polnenja?

Izračun: Začetni pogoj je napetost na kondenzatorju $u_C(t = 4\tau) = 78{,}67e^{-\frac{4\tau}{\tau}}\,\text{V} = 1{,}44\,\text{V}$. ....

Oglejte si tudi primer simulacije s programom Spice na koncu poglavja. Prvi primer je ravno simulacija polnenja in praznenja kondenzatorja, ki je priključen na vir napetosti s periodičnimi pulzi.

VKLOP TULJAVE (»POLNJENJE« TULJAVE)

Poglejmo še primer vklopa tuljave in zaporedno vezanega upora na enosmerno napetost U_g ob času t = 0 s.

SLIKA vezja.

Ob vklopu bo napetost generatorja enaka vsoti napetosti na uporu in tuljavi:

$U_g = u_R(t) + u_L(t) = iR + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$. Dobili smo (nehomogeno) diferencialno enačbo prvega reda s konstantnima koeficientoma. Rešitev homogene enačbe zopet iščemo v obliki $i = Ae^{\lambda t}$ in dobimo $\left(\lambda + \frac{R}{L}\right)Ae^{\lambda t} = 0$, od koder je $\lambda = -\frac{R}{L}$ in $i = Ae^{-\frac{t}{L/R}} = Ae^{-\frac{t}{\tau}}$. Tau je **časovna konstanta** in je enaka $\boxed{\tau = \frac{L}{R}}$.

Za rešitev diferencialne enačbe zopet potrebujemo ustrezen začetni pogoj. Ta bo sedaj določen s tokom skozi tuljavo. Ker je bil pred preklopom enak nič, mora biti v skladu z začetnim pogojem $i(0^+) = i(0^-)$ tok tik po preklopu $i(0^+) = 0\,\mathrm{A}$. Če ta pogoj upoštevamo v enačbi $i = Ae^{\lambda t}$ dobimo $0 = Ae^0$, oziroma A=0. Ta rešitev očitno ne bo ustrezna. Pozabili smo namreč na rešitev nehomogenega dela enačbe. En od možnih načinov za določitev prispevka nehomogenega dela enačbe je reševanje z variacijo konstante. Pri takem načinu predstavimo konstanto *A* kot funkcija časa *A*(t). Z odvajanjem enačbe $i = A(t)e^{\lambda t}$ in uvrstitvijo v diferencialno enačbo dobimo $U_g = R\left(Ae^{\lambda t}\right) + L\left(A'(t)e^{\lambda t} + \lambda Ae^{\lambda t}\right) = LA'(t)e^{\lambda t}$ oziroma $A' = \frac{U_g}{L}e^{-\lambda t}$. Z integracijo konstante dobimo $A(t) = \frac{1}{-\lambda}\frac{U_g}{L}e^{-\lambda t} + B = \frac{U_g}{R}e^{-\lambda t} + B$, kjer je *B* neka nova konstanta. Rešitev torej iščemo v obliki $i(t) = A(t)e^{\lambda t} = \frac{U_g}{R} + Be^{\lambda t}$. Konstanto B določimo iz začetnega pogoja (tok enak nič) in bo enaka $B=-\frac{U_g}{R}$. Končni rezultat je torej $i=Ae^{\lambda t}=\frac{U_g}{R}\left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$. Napetost na uporu je sorazmerna temu toku $u_R=U_g\left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$, napetost na tuljavi pa odvodu toka: $u_L=L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}=U_g e^{-\frac{t}{\tau}}$.

Drug način reševanja:

Diferencicalno enačbo zapišemo v obliki $i-\frac{U_g}{R}=-\frac{L}{R}\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$, jo delimo z ($i-\frac{U_g}{R}$) in množimo z d$t$:

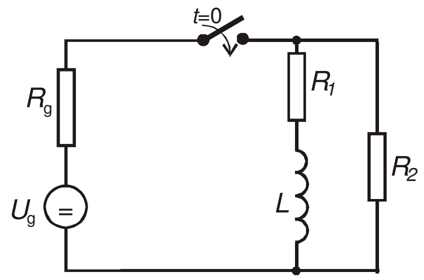
$\frac{\mathrm{d}i}{i-\frac{U_g}{R}}=-\frac{R}{L}\mathrm{d}t$. Sedaj jo integriramo in dobimo $\int\limits_{i(0^+)}^{i(t)}\frac{\mathrm{d}i}{i-\frac{U_g}{R}}=-\frac{R}{L}\int\limits_0^t\mathrm{d}t$

Rezultat je $\frac{i(t)-\frac{U_g}{R}}{i(0^+)-\frac{U_g}{R}}=e^{-\frac{t}{\tau}}$, po preureditvi in upoštevanju začetnega pogoja $i(0^+)=0\mathrm{A}$ pa dobimo $i(t)=\frac{U_g}{R}\left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$. Rezultat je seveda identičen kot v prejšnjem primeru.

Določanje prehodnega pojava z nastavkom in izračunom časovne konstante iz Theveninove nadomestne upornosti

Ugotovili bi lahko, da prehodni pojav v primeru uporabe le enega kondezatorja ali tuljave v vezju vedno lahko zapišemo v obliki diferencialne enačbe prvega reda (s konstantnimi koeficienti), katere **rešitev je vedno oblike** $Ae^{-\frac{t}{\tau}}+B$. Določiti moramo le konstanti *A, B* in časovno konstanto τ.

Eno od konstant dobimo iz začetnega pogoja, drugo pa lahko določimo s premislekom o razmerah po prehodnem pojavu – v stacionarnem stanju. Tedaj bodo v primeru vklopa ali izklopa enosmernega napajanja nastopile enosmerne razmere, v katerih ostane le še vpliv ohmskih upornosti. Upornost kondenzatorja je v idealnih enosmernih razmerah neskončna – skozenj ni toka. Upornost tuljave v enosmernih razmerah pa je le v smislu upornosti navitja. To upornost pri idealni tuljavi zanemarimo. Napetost na tuljavi pri enosmernih razmerah je torej enaka nič. Z upoštevanjem teh lastnosti na enostaven način ugotovimo poljubno napetost ali tok ob koncu prehodnega pojava. Ugotoviti moramo le še časovno konstanto τ, ki pa bo vedno oblike *RC* ali *L/R*, pri čemer bo *R* notranja (Theveninova) upornost gledana s sponk kondenzatorja ali tuljave. Prikažimo uporabo tega načina reševanja na naslednjem primeru.



Primer: Določimo tok skozi tuljavo med prehodnim pojavom za vezje na sliki. $R_g=10\Omega,\quad R_1=20\Omega,\quad R_2=40\Omega,\quad L=20\mathrm{mH},\quad U_g=10\mathrm{V}$

Začetni pogoj določimo iz toka skozi tuljavo tik po preklopu, ki bo enak kot tik pred preklopom, torej 0 A. Ko bo prehodni pojav izzvenel, bodo nastopile enosmerne razmere. Tedaj bo tok skozi upor R_g

$i_g(t \to \infty) = \dfrac{U_g}{R_g + R_1 \| R_2} = \dfrac{10\,\mathrm{V}}{10\Omega + \dfrac{20 \cdot 40}{60}\Omega} = 0,4286\,\mathrm{A}$. Tok skozi tuljavo pa bo $i_L(t \to \infty) = 0,4286\mathrm{A}\dfrac{R_2}{R_1 + R_2} \approx 0,29\,\mathrm{A}$. Tok skozi tuljavo ob začetku prehodnega pojava bo torej enak nič, na koncu pa 0,29 A. Ta pogoja vstavimo v splošen nastavek $i = Ae^{-\frac{t}{\tau}} + B$ in dobimo

$$\begin{aligned} 0 &= A + B \\ 0,29 &= B \end{aligned}.$$

Tok skozi tuljavo bo torej enak $\underline{\underline{i_L(t) = 0,29(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})\,\mathrm{A}}}$.

Časovno konstanto tudi lahko določimo s pomočjo Theveninove nadomestne upornosti[5]. Ugotovili smo, da je pri vklopu ali izklopu kondenzatorja časovna konstanta vedno oblike $\tau = RC$, pri vklopu ali izklopu tuljave pa bo oblike $\tau = L/R$. Sedaj moramo to ugotovitev le še posplošiti. Če imamo opravka le z enim reaktivnim elementom (*C* ali *L*), bo *R* enak upornosti Thevenina, gledano s sponk reaktivnega elementa (kondenzatorja ali tuljave), torej bo splošna oblika $\tau = R_{Th}C$ ali $\tau = \dfrac{L}{R_{Th}}$. V konkretnem primeru je $\tau = \dfrac{L}{R_{Th}}$, kjer je $R_{Th} = R_g \| R_2 + R_1 = \dfrac{10 \cdot 40}{50}\Omega + 20\Omega = 28\Omega$. Časovna konstanta je torej $\tau \approx 0,71\,\mathrm{ms}$.

[5] Zakaj je to tako? Lahko si zamislimo primer, ko je v tuljavi ali kondenzatorju pred prehodnim pojavom shranjena energija v obliki magnetnega (tuljava) ali električnega (kondenzator) polja. Ob prehodnem pojavu se ta energija sčasoma pretvori v toplotno s tokom skozi nadomestno vezavo uporov – skozi upore, ki jih »vidi« tuljava ali kondenzator. To pa je ravno nadomestna ali Theveninova upornost, določena s sponk tuljave oz. kondenzatorja.

DODATNO: VKLOP ZAPOREDNE VEZAVE UPORA IN KONDENZATORJA NA IZMENIČNI VIR NAPETOSTI.

SLIKA: Vklop RC člena na izmenični vir napetosti.

Napetostni vir zapišemo v obliki $u_g(t) = U_g \cos(\omega t + \varphi_g)$.

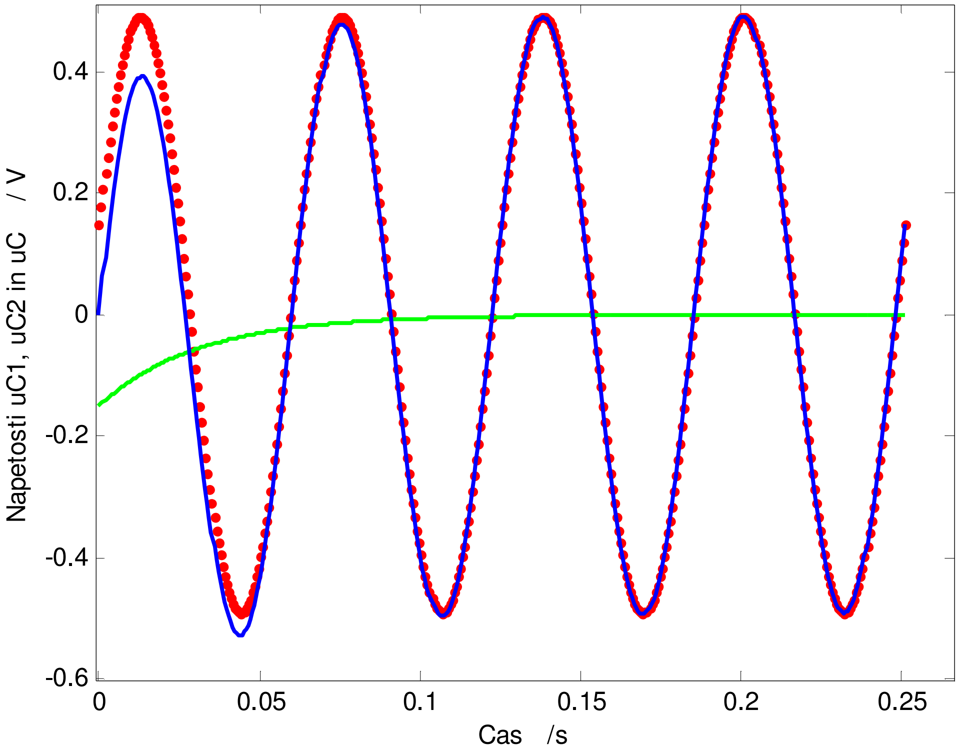
Diferencialna enačba, do katere moramo priti je praktično identična tisti, ki smo jo že zapisali pri vklopu RC člena na enosmerni vir, saj velja $u_g = iR + \frac{1}{C}\int i\mathrm{d}t$. Namesto opazovanja toka lahko zapišemo enačbo za napetost na kondenzatorju. V tem primeru tok izrazimo kot $i = C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$ in velja $u_g = RC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + u_C$. Zopet pridemo do nehomogene diferencialne enačbe prvega reda. Rešitev moramo tokrat iskati v obliki funkcije, ki vsebuje tako harmonično nihanje kot tudi eksponentno upadanje:

$$u_C(t) = Ae^{\lambda t} + B\cos(\omega t + \varphi_g - \varphi).$$

Neznane konstante so štiri: A, λ, B in φ. Za določitev teh konstant je potrebno nastavek uvrstiti v diferencialno enačbo ter upoštevati začetni pogoj, ki je določen z $u_C(0^+) = u_C(0^-) = 0\ \mathrm{V}$. Časovno konstanto določimo iz homogene enačbe, od koder je $\tau = -\frac{1}{\lambda} = RC$. Določitev ostalih koeficientov je nekoliko bolj »matematična«, zato jo bomo preskočili. Zainteresiran bralec jo najde npr. v A.R. Sinigoj: Osnove elektromagnetike, str. 415. Rešitev je

$$u_C(t) = \frac{U_g}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}}\left[\cos\left(\omega t + \varphi_g - arctg(\omega RC)\right) - \cos\left(\varphi_g - arctg(\omega RC)\right)e^{-t/\tau}\right]$$

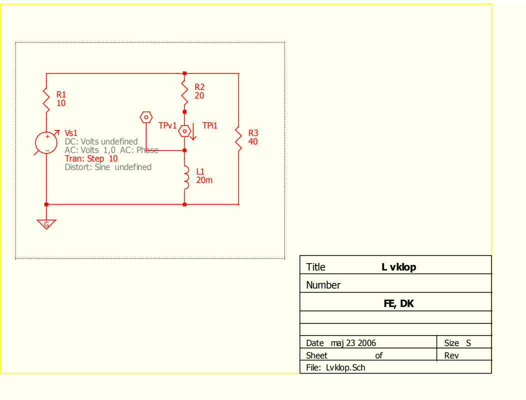
Rezultat je nekoliko daljši pa vendar zanimiv. Ugotovimo lahko, da je sestavljen iz dveh delov: iz harmoničnega nihanja, ki ostane tudi po koncu prehodnega pojava ter drugi člen, ki eksponentno izzveni s časom.

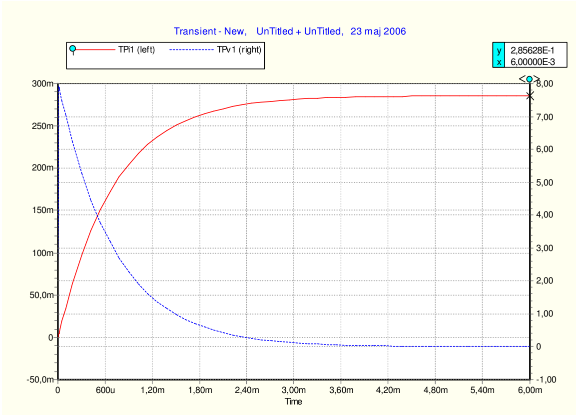


Slika: Prehodni pojav pri vklopu RC člena na izmenični vir napetosti. Rešitev (modra črta) je sestavljena iz dveh členov: eksponentno upadanje »dušenja« (zelena črta) in harmonični signal (rdeče pike). Izračun za $\omega = 100\ \mathrm{s}^{-1}$ **,** $\tau = 0{,}03\ \mathrm{s}$ **.**

DODATNO: ANALIZA S PROGRAMI ZA SIMUALCIJO VEZIJ - SPICE.

V srednjih šolah je za simulacijo vezij precej popularen program Electronic WorkBench (EWB), bolj izpopolnjena in profesionalna varianta pa je program SPICE. Obstaja mnogo verzij programa, nekatere od njih so brezplačne, druge plačljive. Eno od verzij programa (SPICE OPUS) razvijajo tudi na naši fakulteti (fides.fe.uni-lj.si/spice). SPICE omogoča različne načine simulacije, enosmerno, izmenično, tranzientno (prehodni pojavi), pogosto pa omogoča tudi simulacijo šumnih lastnosti, Fourierove analize, analizo občutljivosti itd. Omogoča simulacijo množice različnih elementov, od linearnih do nelinearnih, sklopljenih, pogosto pa omogoča uporabo že prednastavljenih modelov. Nekatere za lažje delo podajo že proizvajalci elementov. Tu predstavljam primer uporabe programa 5Spice, ki je posebno primeren za začetnike, saj omogoča grafično postavitev elementov vezja in je v osnovni verziji brezplačen za uporabo (www.5spice.com).





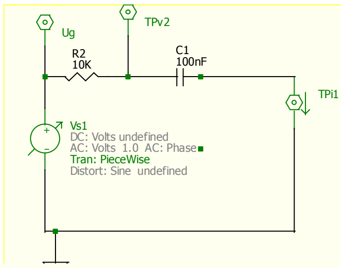
SLIKA: Levo: Grafično oblikovanje analiziranega vezja s programom 5Spice.

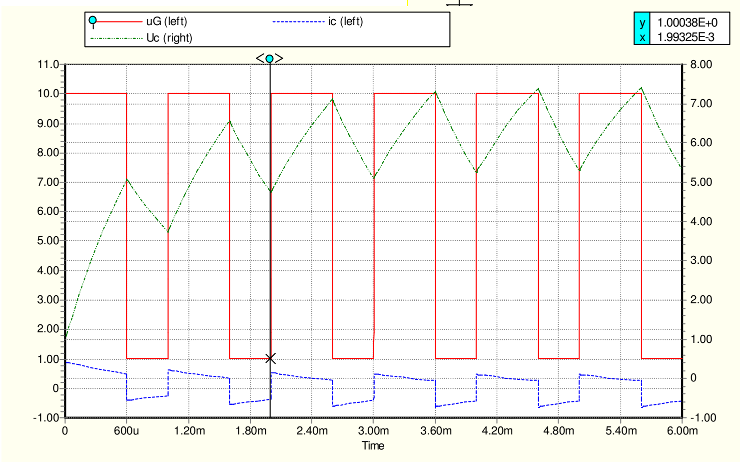
Desno: Primer vklopa induktivnega bremena. Na sliki tok skozi tuljavo (rdeča polna črta) in napetost na tuljavi (modra črtkana črta). Slika dobljena s simulacijo s programom 5Spice.

DODATNO: NEKAJ PRIMEROV ANALIZE PREHODNIH POJAVOV S PROGRAMOM 5SPICE

1.) PRIKLOP ZAPOREDNO VEZANEGA KONDENZATORJA NA NAPETOSTNI GENERATOR PRAVOKOTNIH PULZOV AMPLITUDE 10 V.

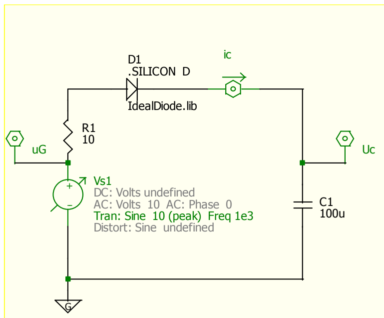
Na sliki napetost na generatorju (polna redeča črta), tok v vezju (modra črtkana) in napetost na kondenzatorju (zelena črtkana). Napetost na kondenzatorju v času trajanja pulza eksponentno narašča v skladu s spoznanimi enačbami, v času izklopa pa upada. V začetku narašča napetost na kondenzatorju hitreje (ker je kondenzator prazen), v nekaj periodah pa se začne ponavljati. V času praznenja kondenzatorja se smer toka spremeni. Tok skozi kondenzator se spreminja skokovito, napetost pa zvezno.

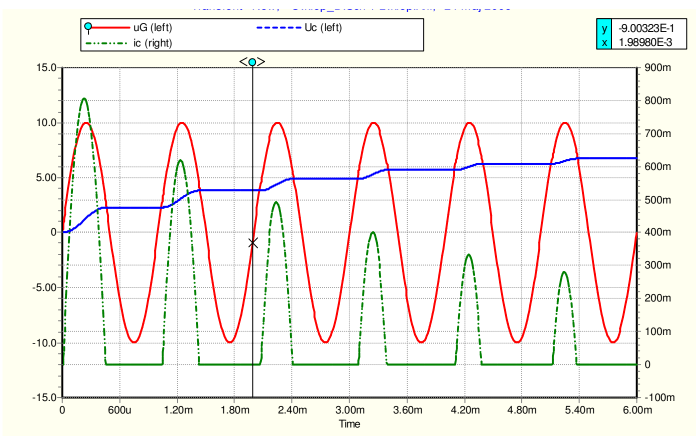




2.) POLNENJE KONDENZATORJA PRI ZAPOREDNI VEZAVI UPORA IN KONDENZATORJA TER DIODE PRIKLJUČENE NA IZMENIČNI VIR NAPETOSTI AMPLITUDE 10 V (POLNA RDEČA ČRTA).

V pozitivni polperiodi dioda prevaja, napetost na kondenzatorju raste (polna modra črta). V negativni polperiodi dioda ne prevaja – tok je enak nič (črtkana zelena črta), ves padec napetosti je na diodi, napetost na diodi ostaja enaka. V realnih razmerah napetost na kondenzatorju v negativni polperiodi nekoliko pada zaradi neidealnega kondenzatorja in zapornega toka diode, ki je majhen vendar različen od nič.





ANALIZA VEZIJ Z ZAPOREDNO VEZAVO UPORA, KONDENZATORJA IN TULJAVE

Vsota vseh napetosti je

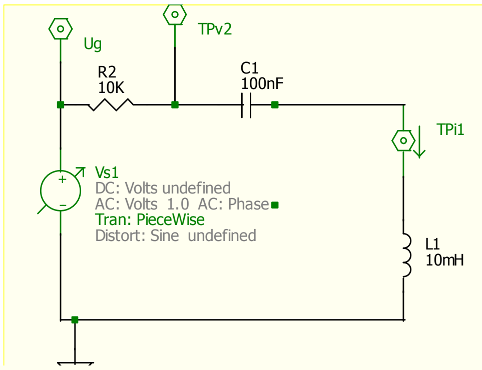
$u_g = u_R + u_C + u_L$, oziroma

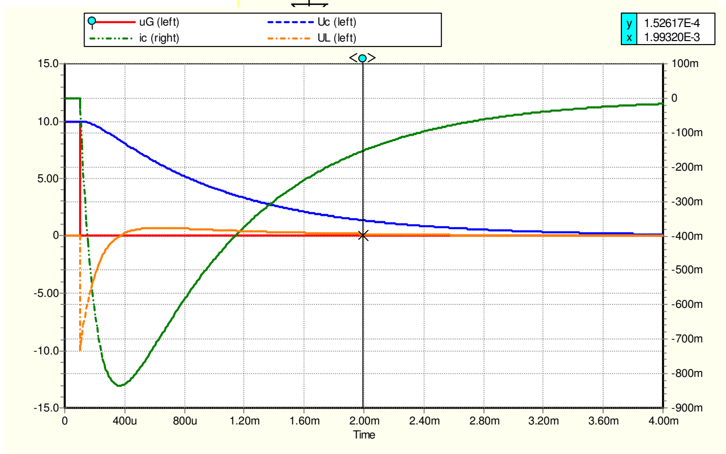
$u_g = iR + \frac{1}{C}\int i\mathrm{d}t + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$. Z odvajanjem dobimo diferencialno enačbo drugega reda

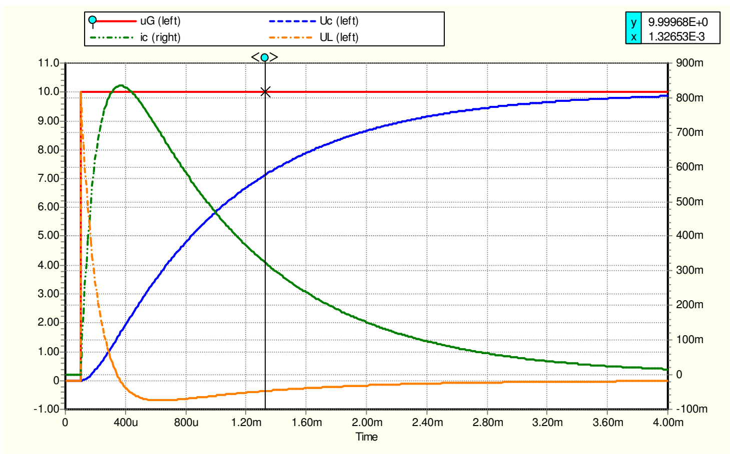
$0 = \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}R + \frac{1}{C}i + L\frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2}$. Rešitve te diferencialne enačbe so lahko zelo razvejane, odvisne od vzbujanja in vrednosti elementov.

3) ODKLOP IN VKLOP ENOSMERNEGA VIRA OD ZAPOREDNE VEZAVE UPORA, KONDENZATORJA IN TULJAVE.

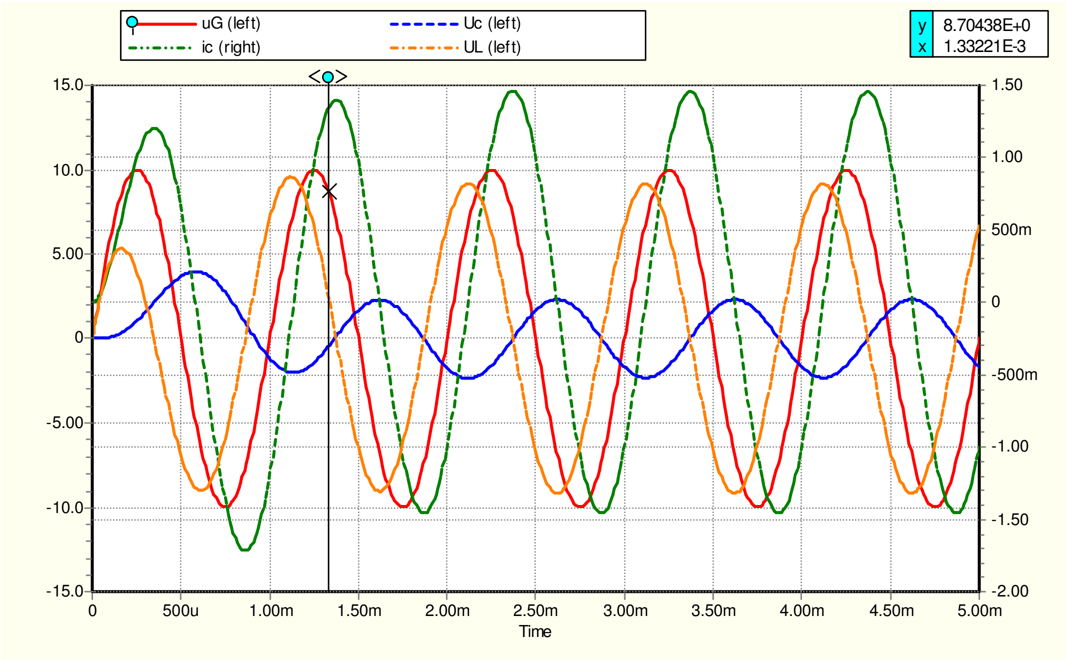
Ob vklopu začne strmo naraščati tok v vezju (zelena črtkana črta), obenem pa močno naraste napetost na tuljavi (oranžna črtkana črta). Tok doseže svoj maksimum in nato pade zlagoma na nič amperov. Napetost na kondenzatorju (polna modra črta) je nič ob vklopu in ob koncu prehodnega pojava doseže napetost vira.



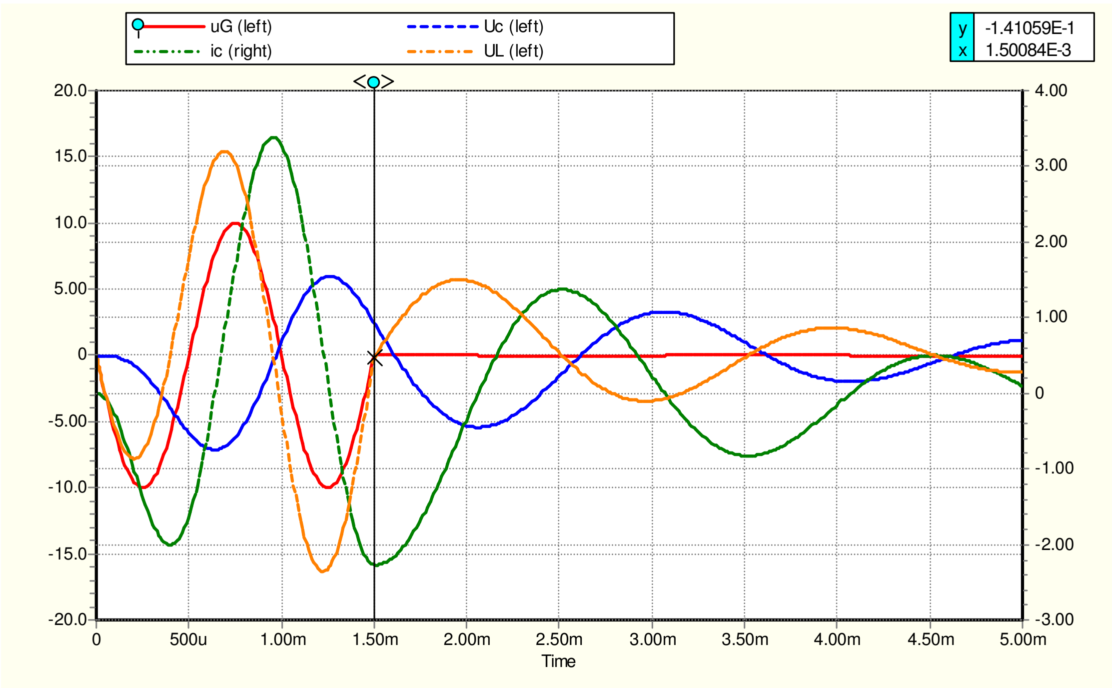




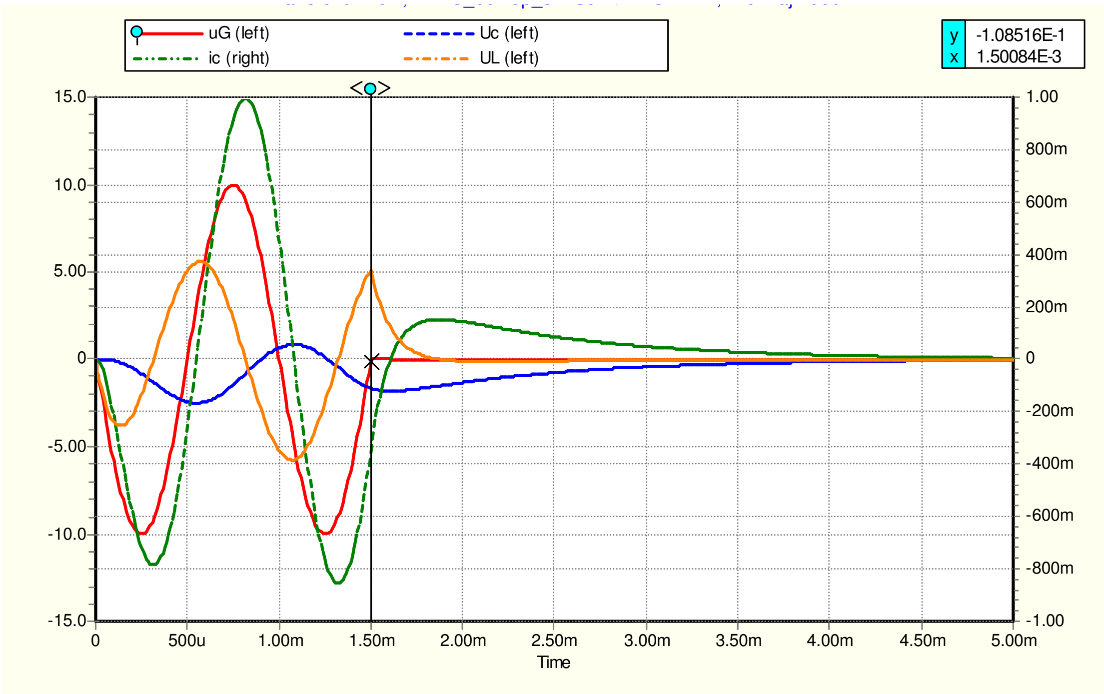
4) Vklop izmeničnega vira na zaporedno vezavo upora, tuljave in kondenzatorja.



5) Izklop izmeničnega vira na zaporedno vezavo upora, tuljave in kondenzatorja . (R=1 Ω, L=1 mH, C = 100 μF).



6) IZKLOP IZMENIČNEGA VIRA NA ZAPOREDNO VEZAVO UPORA, TULJAVE IN KONDENZATORJA. (R=10 Ω, L=1 mH, C = 100 μF). 10X VEČJA UPORNOST POVZROČI NADKRITIČNO NIHANJE.



Vprašanja za obnovo:

1) Kaj je to prehodni pojav? Kdaj nastopi?
2) Prehodni pojav v vezjih: kako ga zapišemo z enačbami?
3) Osnovne zveze med tokom in napetostjo na uporu, tuljavi in kondenzatorju.
4) Začetni pogoji.
5) Rešitev diferencialne enačbe: nastavek.
6) Časovna konstanta.
7) Primer polnenja in praznenja kondenzatorja.
8) Primer vklopa in izklopa tuljave.

Primeri kolokvijskih in izpitnih nalog:
Kolokvij, 9.6.2000,
Kolokvij 12.04.2001,
Izpit 03. 12. 2002,
Izpit 20. aprila 2005,
izpit 17. 4. 2003,
Izpit 13. september 2005,
Izpit 14. 09. 2004.

17. OSNOVNI POJMI PRI OBRAVNAVI PERIODIČNIH SIGNALOV

Vsebina: Opis periodičnih signalov s periodo, frekvenco in krožno frekvenco. Razlaga pojmov amplituda, faza, harmonični signal. Določanje srednje, efektivne in usmerjene vrednosti periodičnih signalov. Pojmi faktor oblike, temenski faktor.

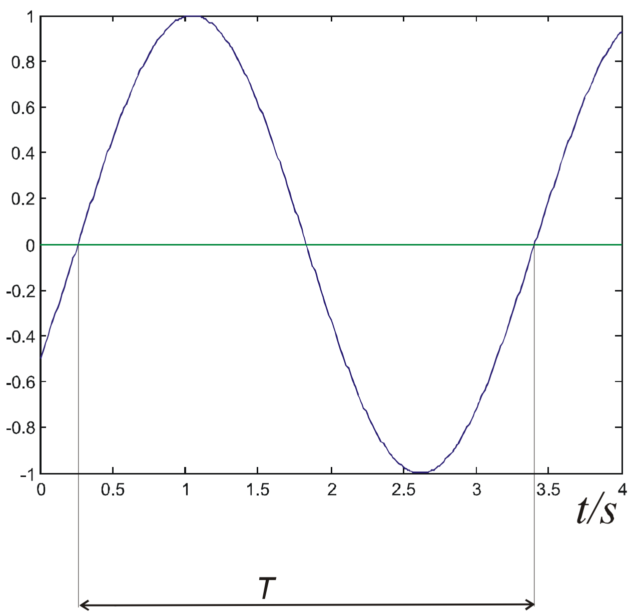
1) PERIODA SIGNALA. Času, v katerem se začne funkcija ponavljati pravimo **perioda** in jo označimo z veliko črko *T*. Za periodično funkcijo velja $f(t) = f(t+T)$.

SLIKA: Primer periodičnega signala s periodo *T*.

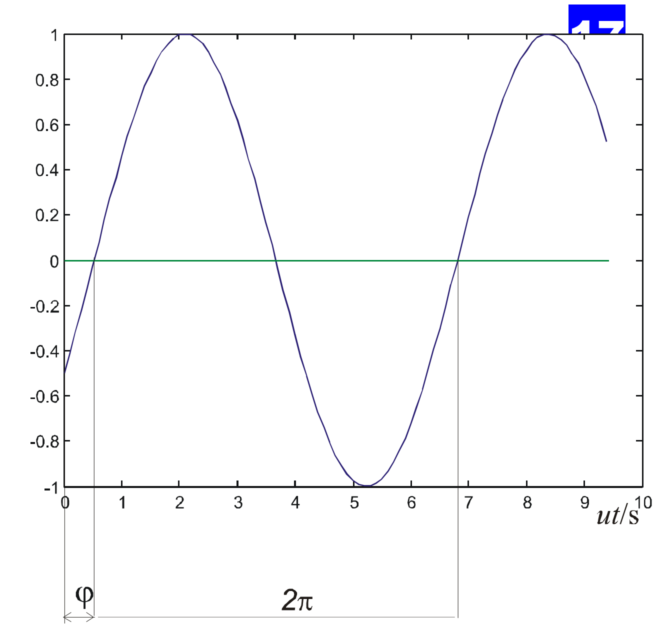
2) FREKVENCA periodičnega signala je $f = \dfrac{1}{T}$, njena enota je s^{-1}, pogosteje uporabimo ekvivalentno enoto Hz (po Heinrichu Hertzu, ki je s svojimi eksperimenti prvi dokazal pravilnost Maxwellovih enačb). Pogosto uporabimo za opis signala tudi **krožna frekvenco** (kotna frekvenca, v primeru vrtenja zanke kotna hitrost) ω, ki je enaka $\boxed{\omega = 2\pi f = \dfrac{2\pi}{T}}$.

3) HARMONIČNI, SINUSNI SIGNAL lahko zapišemo v obliki $i(t) = I_m \sin(\omega t - \varphi)$, kjer je I_m amplituda, ω krožna frekvenca in φ fazni kot.

Prikažimo na grafu signal $i(t)/\mathrm{A} = 1 \cdot \sin(2\mathrm{s}^{-1} t - \pi/6)$. Perioda signala je $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = \pi\ \mathrm{s} \cong 3{,}14\ \mathrm{s}$.

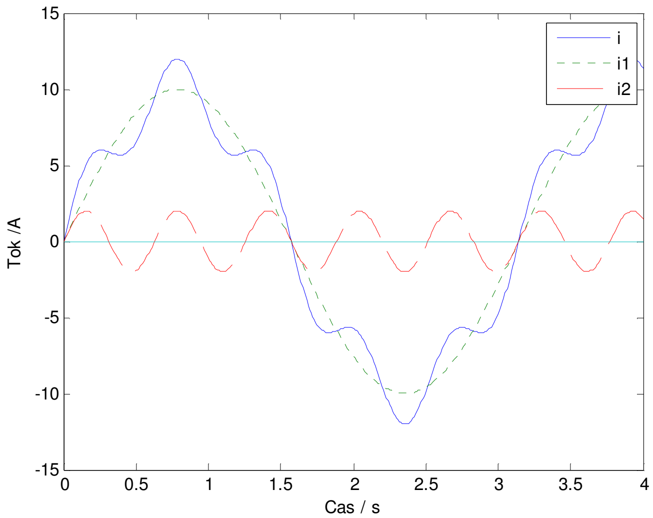


Pogosto namesto prikaza časa na abscisi uporabimo kot spremenljivko produkt krožne frekvence in časa, kar predstavlja fazni kot. V tem primeru je perioda signala določena pri vrednosti 2π. Prednost tega prikaza je tudi v direktnem odčitavanju faznega kota. V konkretnem primeru je $\varphi = \pi/6 \cong 0{,}52\ \mathrm{rd}$.



Harmoničen signal je lahko sestavljen iz več sinusnih signalov različnih amplitud in frekvenc. Prikažimo to na primeru harmoničnega signala sestavljenega iz vsote signalov $i_1(t)/A = 10\sin(2\mathrm{s}^{-1}t)$ in $i_2(t)/A = 2\sin(10\mathrm{s}^{-1}t)$:

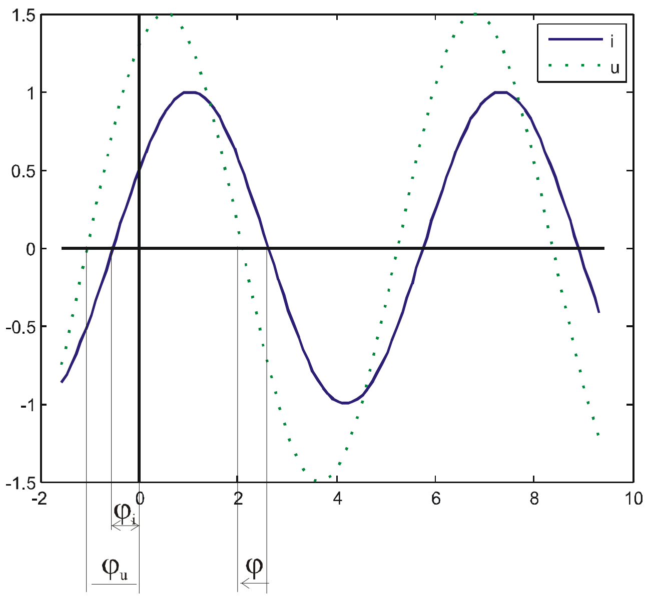
$i(t)/A = 10\sin(2\mathrm{s}^{-1}t) + 2\sin(10\mathrm{s}^{-1}t)$.



Zanimivo je, da je mogoče poljuben signal zapisati v obliki vsote sinusnih signalov, kar imenujemo Fourierova vrsta in se pogosto v praksi uporablja za analizo različnih oblik signalov (Fourierova analiza).

4) FAZNI KOT med dvema signaloma, običajno med napetostjo in tokom.

SLIKA: Primer, ko napetostni signal prehiteva tokovnega. Fazni kot je pozitiven.



Vzemimo primer signala toka $i(t) = I_m \sin(\omega t + \varphi_i)$ in napetosti $u(t) = U_m \sin(\omega t + \varphi_u)$. Fazni kot med napetostjo in tokom je $\boxed{\varphi = \varphi_u - \varphi_i}$. Če je fazni kot pozitiven, rečemo, da napetost prehiteva tok, če pa je negativen, pa, da tok prehiteva napetost. To seveda ne gre jemati dobesedno, saj imata oba signala ob poljubnem času neko vrednost. Morda je najlažje določiti signal, ki prehiteva drugega tako, da pogledamo na grafu, kateri signal doseže maksimalno vrednost pred drugim. Pri tem moramo opazovati najkrajšo časovno razliko.

5) SREDNJA ALI POVPREČNA VREDNOST SIGNALA

je določena s površino pod krivuljo signala v eni periodi deljena s periodo ali matematično (za npr. tokovni signal)

$$I_{sr} = \frac{1}{T}\int_0^T i(t)\mathrm{d}t \tag{16.1}$$

Ta zapis pogosto za harmonične signale preuredimo tako, da namesto integracije po času zapišemo integracijo po kotu ωt . V tem primeru je

$$I_{sr} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} i(t)\mathrm{d}(\omega t) \tag{16.2}$$

Slika: Periodični signal in njegova povprečna vrednost, ki je enaka površini signala deljeni s periodo Integral signala v eni periodi je torej enak $I_{sr}T$.

6) EFEKTIVNA VREDNOST (ang. RMS – root mean square)

je določena kot koren iz srednje vrednosti kvadrata signala:

$$I_{ef} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2(t)\cdot dt} \tag{16.3}$$

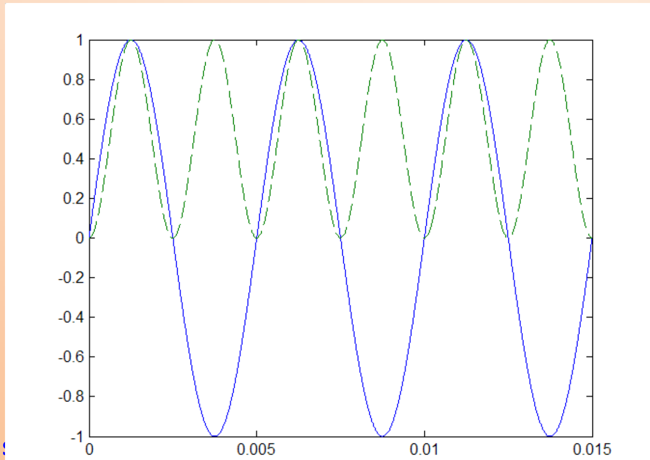
Efektivna vrednost signala je posebno pomembna tedaj, ko nas zanima povprečna moč ali energija signala, kar pa je v elektrotehniki pogosto.

Primer izračuna srednje in efektivne vrednosti: Določimo srednjo in efektivno vrednost tokovnega signala oblike $i = I_m \sin(\omega t)$.

<u>Izračun:</u> $I_{sr} = \dfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} I_m \sin(\omega t)\mathrm{d}(\omega t) = \dfrac{1}{2\pi}\left(-\cos(\omega t)\Big|_0^{2\pi}\right) = 0$. Srednja vrednost je očitno enaka nič, saj je sorazmerna površini pod krivuljo, ki pa je enaka v pozitivni in negativni Y osi. Drugače pa je z efektivno vrednostjo, saj s kvadriranjem postane signal izključno pozitiven. Pri izračunu upoštevamo zvezo $\sin^2(\omega t) = \dfrac{1}{2}\big(1-\cos(\omega t)\big)$:

$$I_{ef} = \sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} I_m^2 \sin^2(\omega t)\mathrm{d}(\omega t)} = I_m\sqrt{\frac{1}{2\pi}\left(\frac{2\pi}{2}-0\right)} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}.$$

Dobimo večini znan rezultat, da je efektivna vrednost harmoničnega signala enaka maksimalni vrednosti signala deljeni z $\sqrt{2}$.



SLIKA: Sinusni s… zris in izračun s programom Matlab: T=5e-3, om=2*pi/T, dt=T/1000, t=0:dt:3*T; plot(t,sin(om*t),t,(sin(om.*t)).^2,'--')

7) Usmerjena vrednost (ang. rectified)

je določena kot povprečje usmerjenega signala, torej kot povprečna vrednost absolutne vrednosti signala.

$$I_r = \frac{1}{T}\int_0^T |i(t)|\,\mathrm{d}t \qquad (16.4)$$

8) Faktor oblike (ang. form factor) pogosto uporabimo za karakterizacijo oblike signala. Določen je kot kvocient efektivne in usmerjene vrednosti

$$\text{faktor oblike} = FF = \frac{I_{ef}}{I_r}. \qquad (16.5)$$

*** Merjenje efektivne vrednosti signala v praksi**

Cenejši merilni inštrumenti ne merijo prave efektivne vrednosti, pač pa jo določajo iz usmerjene vrednosti ali pa iz maksimalne vrednosti. V primeru signala sinusne oblike je $I_{ef} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$, usmerjena vrednost pa je $I_r = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|I_m \sin(\omega t)\right| \mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} I_m \sin(\omega t)\mathrm{d}(\omega t) = \frac{1}{\pi}\left(-\cos(\omega t)\Big|_0^{\pi}\right) I_m = \frac{2}{\pi} I_m = 0{,}64 I_m$.

Faktor oblike je torej $FF = \frac{I_{ef}}{I_r} = \frac{I_m/\sqrt{2}}{I_m 2/\pi} \cong 1{,}1107$. Merilni inštrument za izračun efektivne vrednosti torej pomnoži izmerjeno usmerjeno vrednost signala s faktorjem 1,1107, pri čemer predvideva, da je signal sinusne oblike. Čim je merjeni signal drugačne oblike, je prikazani rezultat efektivne vrednosti napačen. Boljši inštrumenti merijo t.i. "pravo" efektivno vrednost (ang. true RMS).

VEČ:

http://cp.literature.agilent.com/litweb/pdf/5988-6916EN.pdf

http://cp.literature.agilent.com/litweb/pdf/5988-5513EN.pdf

http://us.fluke.com/usen/support/appnotes/default?category=AP_DMM=APP_NOTES(FlukeProducts)#

SLIKA: TRUE RMS meter Fluke 114.

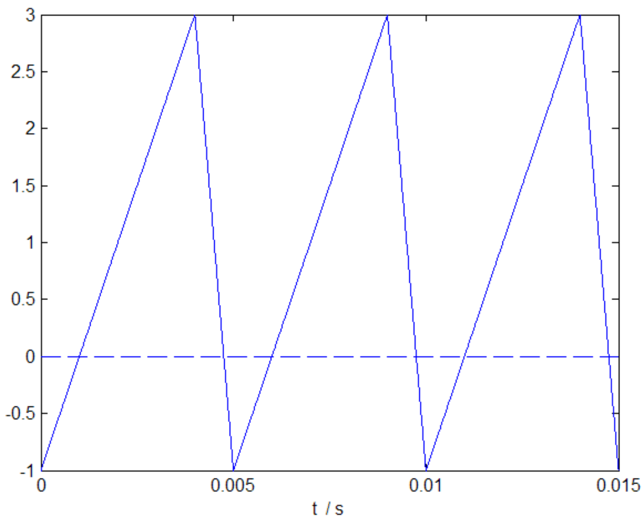
Za merjenje prave efektivne vrednosti je mogoče uporabiti več metod. En od principov temelji na uporabi termistorja, ki meri spremembo temperature na elementu, ta pa je neposredno povezana z efektivno vrednostjo toka. Na tržišču obstajajo tudi čipi, ki opravljajo množenje (kvadriranje) signala in s tem močno olajšajo delo. Primer takega elementa je čip AD8361 podjetja Analog Devices, www.analog.com. Vse več inštrumentov pa že zajema signale s pomočjo analogno/digitalne pretvorbe, kjer je izračun efektivne vrednosti mogoč z enostavno numerično integracijo kvadriranega signala. Vir: http://en.wikipedia.org/wiki/True_RMS_converter.

7) TEMENSKI FAKTOR (**ang. crest factor**) je definiran kot kvocient maksimalne in efektivne vrednosti

$$\text{temenski faktor} = \frac{I_m}{I_{ef}} \qquad (16.6)$$

Za sinusni signal je temenski faktor enak $\frac{I_m}{I_m/\sqrt{2}} = \sqrt{2} \cong 1{,}414$.

Primer izračuna periode, frekvence ter srednje in efektivne vrednosti signala: Določimo periodo, frekvenco, srednjo vrednost in efektivno vrednost časovne oblike tokovnega signala na sliki. Signal je naraščajoč v 80% časa periode in v preostalem času padajoč.

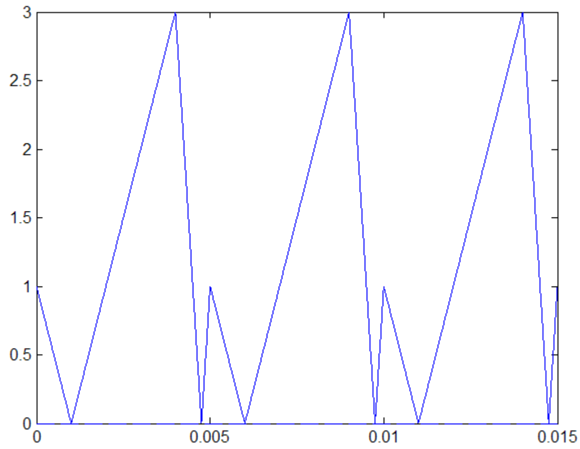


Izračun: Perioda signala je T = 5 ms, frekvenca je $f = \frac{1}{T} = \frac{1}{5\ \mathrm{ms}} = 200\ s^{-1} = 200\ \mathrm{Hz}$. Za izračun srednje vrednosti moramo signal zapisati v matematični obliki in ga integrirati v času ene periode ter deliti s periodo. Ker je sestavljen iz premic (odsekoma zvezen), mora biti oblike $y = k \cdot t + n$. Iz zapisa v dveh skrajnih točkah od t = 0 do $t = 0{,}8 \cdot 5\ \mathrm{ms} = 4\ \mathrm{ms}$ velja $-1 = k \cdot 0 + n$ in $3 = k \cdot 4\ \mathrm{ms} - 1$, od koder dobimo enačbo $i(t) = 1\ \mathrm{A/ms} \cdot t - 1\ \mathrm{A}$. Podobno dobimo za drugi del periode enačbo $i(t) = -4\ \mathrm{A/ms} + 19\ \mathrm{A}$.

Sedaj uporabimo enačbo za izračun srednje vrednosti in dobimo $I_{sr} = \frac{1}{T}\int_0^T i(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{5\ \mathrm{ms}}\left(\int_0^{4\ \mathrm{ms}} (1\ \mathrm{A/ms} \cdot \mathrm{t} - 1\ \mathrm{A})\mathrm{d}t + \int_{4\ \mathrm{ms}}^{5\ \mathrm{ms}} (-4\ \mathrm{A/ms} \cdot \mathrm{t} + 19\ \mathrm{A})\mathrm{d}t\right)$. Rešitev enačbe je:

$I_{sr} = \frac{1}{5\ \mathrm{ms}}\big(8 - 4 - 2(25 - 16) + 19(5 - 4)\big)\ \mathrm{A} \cdot \mathrm{ms} = 1\ \mathrm{A}$. Srednja vrednost tokovnega signala je 1 A. Z izračunom efektivne vrednosti je nekaj več dela, saj je potrebno rešiti sledeči integral: $I_{ef} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i(t)\mathrm{d}t} = \sqrt{\frac{1}{5\ \mathrm{ms}}\left(\int_0^{4\ \mathrm{ms}} (1\mathrm{A/ms} \cdot \mathrm{t} - 1\mathrm{A})^2\mathrm{d}t + \int_{4\ \mathrm{ms}}^{5\ \mathrm{ms}} (-4\mathrm{A/ms} + 19\mathrm{A})^2\,\mathrm{d}t\right)}$. Rešitev za vajo poskusite najti sami. Mi jo bomo poiskali kar s programom Matlab, ki da vrednost 1,5275. Usmerjena vrednost je $I_r = \frac{1}{T}\int_0^T |i(t)|\mathrm{d}t = \frac{1}{5ms}\left(\int_0^{4\ \mathrm{ms}} |1\mathrm{A/ms} \cdot \mathrm{t} - 1\mathrm{A}|\mathrm{d}t + \int_{4\ \mathrm{ms}}^{5\ \mathrm{ms}} |-4\mathrm{A/ms} + 19\mathrm{A}|\,\mathrm{d}t\right) = 1{,}250$

$\text{faktor oblike} = \frac{I_{ef}}{I_r} = 1{,}222$, $\text{temenski faktor} = \frac{I_m}{I_{ef}} = \frac{3}{1{,}5275} = 1{,}964$.



SLIKA: Absolutna vrednost signala: iz te izračunamo usmerjeno vrednost.

Izračun s programom Matlab (signal izrišemo v treh periodah, zato tudi povprečje računamo v treh periodah): T=5e-3; om=2*pi/T; dt=T/1000; t=0:dt:3*T; i=2*sawtooth(om.*t,0.8)+1; plot(t,i); Isr=trapz(i)*dt/(3*T); hold on; plot([0 0 3*T], [0 0 0],'b--');Ief=sqrt(trapz(i.^2)*dt/(3*T)); Ir=trapz(abs(i)*dt/(3*T)); FF=Ief/Ir

Dodatno: Kolikšna moč se troši na bremenu (uporu 3 kΩ), če gre skozi upor tok oblike na sliki (v amperih).

Izračun: Trenutna moč na uporu je $p = u_R i_R = i_R^2 R$. Povprečna moč pa bo $\overline{p} = P = \frac{1}{T}\int_0^T p\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_0^T i_R^2 R\mathrm{d}t = R \cdot \frac{1}{T}\int_0^T i_R^2 \mathrm{d}t = RI_{R,ef}^2$.

Povprečno moč običajno označimo z veliko črko *P*. Očitno je povprečna moč na uporu sorazmerna kvadratu efektivne vrednosti toka. Tu se že kaže pomembnost definiranja efektivne vrednosti: med drugim določa povprečno moč na uporu pri periodičnih signalih. V konkretnem primeru je povprečna moč na uporu enaka $P = R \cdot I_{R,ef}^2 = 3\,\mathrm{k}\Omega \cdot 1{,}5275\ \mathrm{A}^2 = \underline{\underline{7\,\mathrm{kW}}}$.

Če bi želeli preračunati moč, ki se na ohmskem bremenu troši z merilnikom, ki določa efektivno vrednost iz usmerjene vrednosti, bi dobili vrednost 1,25 1,1107 = 1,3884 namesto pravilne vrednosti 1,5275. Napaka prikaza bi bila 9,1 %.

18. UPOR, TULJAVA IN KONDENZATOR PRI IZMENIČNIH SIGNALIH

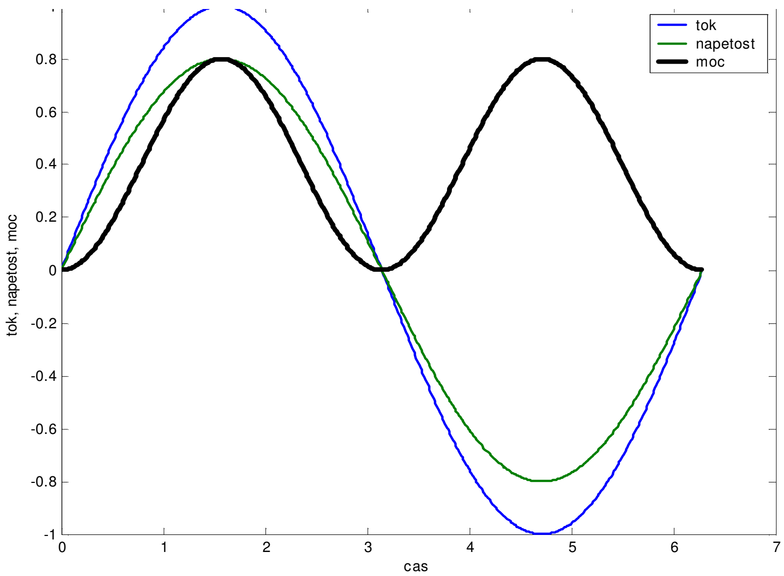
Vsebina: Zveze med tokom in napetostjo na uporu, tuljavi in kondenzatorju pri vzbujanju z izmeničnimi signali. Časovni poteki toka, napetosti, moči in energije na posameznih elementih. Zaostajanje ali prehitevanje signalov napetosti in toka – fazni kot. Povprečne vrednosti moči in energije. Maksimalna energija. Karakter vezja.

UPOR

Velja zveza $u(t) = Ri(t)$.

Če je tok sinusne oblike $i = I_m \sin(\omega t)$, je napetost tudi sinusne oblike

$u = RI_m \sin(\omega t) = U_m \sin(\omega t)$, kjer je $U_m = RI_m$.



SLIKA: Tok in napetost na uporu sta v fazi. Moč niha z dvojno frekvenco in ima enosmerno komponento, ki je povprečna moč.

Moč

Moč na uporu dobimo kot zmnožek toka in napetosti na uporu

$$p = u \cdot i = i^2 R = I_m^2 R \sin^2(\omega t) \qquad (18.1)$$

Za lažji prikaz lahko uporabimo zvezo $\sin^2(\alpha) = \frac{1}{2}\left(1 - \cos\left(2\alpha\right)\right)$, od koder sledi

$$p = \frac{I_m^2 R}{2}\left(1 - \cos\left(2\omega t\right)\right) \tag{18.2}$$

Ugotovimo, da ima (trenutna) moč na uporu tudi sinusno obliko, vendar niha z dvojno frekvenco osnovnega signala, povprečna vrednost pa je $P = \frac{I_m^2 R}{2} = I_{ef}^2 R$. Povprečno vrednost moči določa efektivna vrednost (tokovnega ali napetostnega) signala.

ENERGIJA

Določimo še energijo v eni periodi (toplotna energija ali joulske izgube), ki bo

$$W_T = \int_0^T p\mathrm{d}t = PT = I_{ef}^2 RT \tag{18.3}$$

Skupne ugotovitve za upor:

1) Če je tok skozi tuljavo $i = I_m \sin(\omega t)$, bo napetost na uporu $u = U_m \sin(\omega t)$. **Napetost na uporu je v fazi s tokom**, kar lahko prikažemo tudi grafično na kazalčnem diagramu.
2) Amplituda napetosti je $U_m = I_m R$.
3) Upornost (*R)* je neodvisna od frekvence tokovnega (in napetostnega) signala.
4) Moč na uporu niha z dvojno frekvenco tokovnega (ali napetostnega) signala „okoli” enosmerne komponente, ki predstavlja povprečno moč in je enaka $P = \frac{I_m^2 R}{2} = I_{ef}^2 R$.

TULJAVA

Zveza med tokom skozi tuljavo in napetostjo na tuljavi je

$$u = \frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}t} = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}.$$

Če je tokovni signal oblike $i = I_m \sin(\omega t)$, bo napetost na tuljavi

$$u = L\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(I_m \sin(\omega t)\right) = LI_m\omega\cos(\omega t) = U_m \cos(\omega t) \text{ ali tudi } u = U_m \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right).$$

Napetostni signal je časovno zamaknjen glede na tokovni signal. Rečemo, da napetost prehiteva tok za kot $\pi/2$. To lahko prikažemo tako s časovnim potekom, kot s kazalčnim diagramom ali kasneje – s kompleksorji v kompleksni ravnini.

SLIKA: Časovni potek in kazalčni diagram faznega prehitevanja napetosti na tuljavi pred tokom.

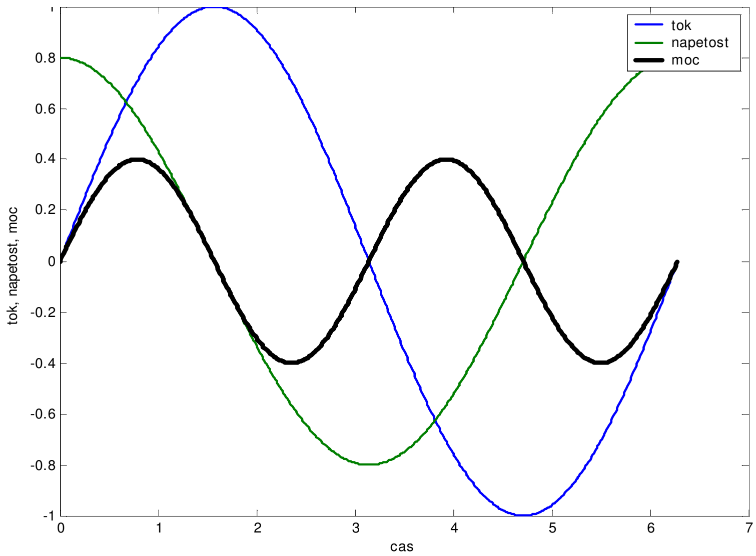
Amplituda napetosti bo torej $U_m = I_m\omega L$, kjer $\omega L = X_L$ imenujemo reaktanca oz. upornost tuljave pri izmeničnih signalih. **Upornost tuljave (reaktanca) pri izmeničnih signalih se veča linearno s frekvenco in je enaka** $\frac{U_m}{I_m} = X_L = \omega L$.

Moč

Trenutna moč je zmnožek trenutne napetosti in toka na tuljavi, torej

$$p = iu = I_m \sin(\omega t) \cdot U_m \cos(\omega t) = \frac{I_m U_m}{2}\sin(2\omega t) \tag{18.4}$$

Trenutna moč niha z dvojno frekvenco vendar je brez enosmerne komponente. Povprečna (izgubna) moč je 0 W.



SLIKA: Tokovni in napetostni signal na tuljavi sta zamaknjena za četrtino periode. Napetost prehiteva tok, moč na tuljavi niha z dvojno frekvenco in nima enosmerne komponente. Povprečna moč na tuljavi je nič.

ENERGIJA

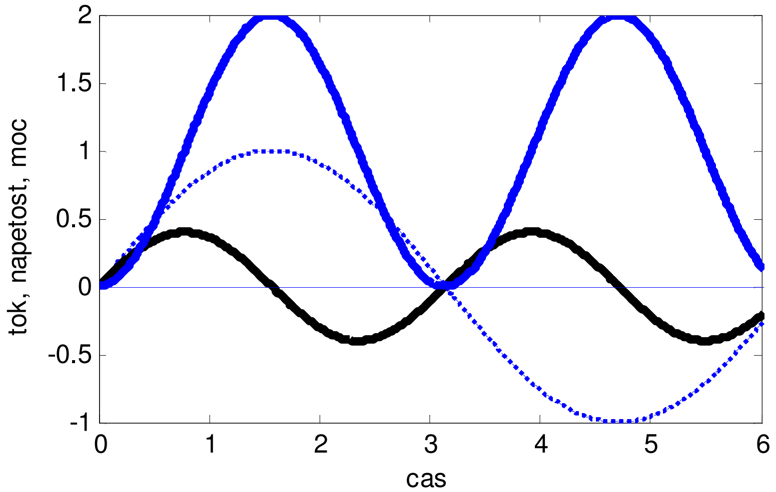
Energijo v tuljavi dobimo z integracijo moči $W(t)=\int_0^t p\mathrm{d}t=\frac{I_mU_m}{2}\int_0^t \sin(2\omega t)\mathrm{d}t=\frac{I_mU_m}{2\cdot 2\omega}\left(1-\cos(2\omega t)\right)$. Energija, ki se akumulira v magnetnem polju tuljave, niha z dvojno frekvenco osnovnega signala. V vsakem trenutku je pozitivna in v povprečju velika

$$W_{\mathrm{sr}}=\frac{I_mU_m}{4\omega}=\frac{LI_m^2}{4}. \qquad (18.5)$$

Spomnimo se še druge oblike zapisa trenutne energije. V poglavju (13) smo obravnavali energijo v magnetnem polju tuljave in ugotovili, da jo lahko zapišemo kot $W(t)=\int_{t_0}^{t} p(t)\mathrm{d}t=\int_{t_0}^{t} L\frac{di}{dt}i\mathrm{d}t=\int_{i(t_0)}^{i(t)} Li\mathrm{d}i$, od koder smo zapisali enačbo za trenutno energijo v magnetnem polju tuljave z induktivnostjo *L* v obliki $W=\frac{Li^2}{2}$.

Maksimalna energija v tuljavi nastopi tedaj, ko je tok maksimalen. Tedaj je

$$W_{\max}=\frac{LI_m^2}{2} \qquad (18.6)$$



Slika:Moč (polna črna črta) in energija (polna modra črta) pri vzbujanju tuljave s sinusnim tokovnim signalom (modra črtkana črta).

Skupne ugotovitve za tuljavo:

1) Če je tok skozi tuljavo $i = I_m \sin(\omega t)$, bo napetost na tuljavi $u = U_m \sin(\omega t + \frac{\pi}{2})$. **Napetost na tuljavi prehiteva tok** za četrtino periode signala, kar lahko prikažemo tudi grafično na kazalčnem diagramu.
2) Amplitudo napetosti lahko zapišemo tudi kot $U_m = I_m \omega L$, kjer je ωL upornost tuljave pri izmeničnih signalih, kar imenujemo tudi **reaktanca** $X_L = \omega L$. Reaktanca se linearno veča s frekvenco.
3) Za lažjo predstavo lahko tuljavo pri zelo nizkih frekvencah (enosmerne razmere) nadomestimo s kratkim stikom (zelo majhna upornost), pri zelo visokih pa z odprtimi sponkami (zelo velika upornost).
4) Moč na tuljavi niha z dvojno frekvenco tokovnega (ali napetostnega) signala, povprečna moč je enaka nič.
5) Energija v magnetnem polju tuljave niha z dvojno frekvenco osnovnega signala, je vedno pozitivna in v povprečju velika $\overline{W} = W_{sr} = \frac{LI_m^2}{4}$. Trenutna vrednost je sorazmerna kvadratu toka $W = \frac{Li^2}{2}$, maksimalna energija v tuljavi nastopi vsako četrtino periode signala, ko je velika $W_{\max} = \frac{LI_m^2}{2}$.
6) Za vezja, v katerih napetost prehiteva tok rečemo, da imajo **induktivni karakter**.

Primer izračuna napetosti na tuljavi pri vzbujanju z izmeničnim signalom: Na toroidno jedro okroglega preseka površine 1 cm^2 , s srednjim polmerom 2 cm in μ_r = 100, navijemo 500 ovojev. Kolikšna je napetost na tuljavi, če jo vzbujamo s tokom $i = 0{,}4\cos(100\,\mathrm{s}^{-1}t)\ \mathrm{A}$? Določimo še povprečno in maksimalno moč na tuljavi.

Izračun: Induktivnost toroida je $L = \dfrac{\mu_r \mu_0 N^2 A}{2\pi r_s} = 25\ \mathrm{mH}$, torej je induktivna upornost $X_L = \omega L = 2{,}5\ \Omega$, maksimalna napetost je $U_m = I_m X_L = 0{,}4\ \mathrm{A} \cdot 2{,}5\Omega = 10\ \mathrm{V}$. Če bi želeli zapisati napetost na tuljavi v obliki časovnega signala, bi morali upoštevati, da napetost na tuljavi tok prehiteva za fazni kot $\dfrac{\pi}{2}$, torej bo $u(t) = 10\cos(100\,\mathrm{s}^{-1}t + \dfrac{\pi}{2})\ \mathrm{V}$. Povprečna moč je enaka nič vatov, maksimalna moč je $\dfrac{I_m U_m}{2} = 2\ \mathrm{W}$, povprečna energija je $W_{sr} = \dfrac{L I_m^2}{4} = 1\ \mathrm{mJ}$, maksimalna pa 2 mJ.

KONDENZATOR

Zopet vzemimo sinusno obliko toka $i = I_m \sin(\omega t)$. Tok izrazimo s časovno spremembo naboja na ploščah kondenzatorja $i = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}$ in upoštevamo zvezo med nabojem na ploščah in napetostjo $Q(t) = Cu(t)$ in dobimo $i = C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$. Ker tok poznamo, zanima pa nas napetost, izrazimo napetost na kondenzatorju kot[1] $\int_0^t \mathrm{d}u = \frac{1}{C}\int_0^t i\mathrm{d}t$. Za sinusno obliko toka bo napetost enaka

$$u(t) = \frac{1}{C}\int_0^t I_m \sin(\omega t)\mathrm{d}t + u(0) = -\frac{I_m}{\omega C}\cos(\omega t) = \frac{I_m}{\omega C}\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$ oziroma

$u = U_m \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$. Napetost na kondenzatorju zaostaja za tokom za četrtino periode.

SLIKA: Časovni potek in kazalčni diagram faznega zaostajanja napetosti na kondenzatorju pred tokom.

Amplituda napetosti je torej $U_m = \frac{I_m}{\omega C}$.

Člen $\frac{1}{\omega C}$ ima enoto upornosti in tudi predstavlja upornost kondenzatorja pri izmeničnih signalih.

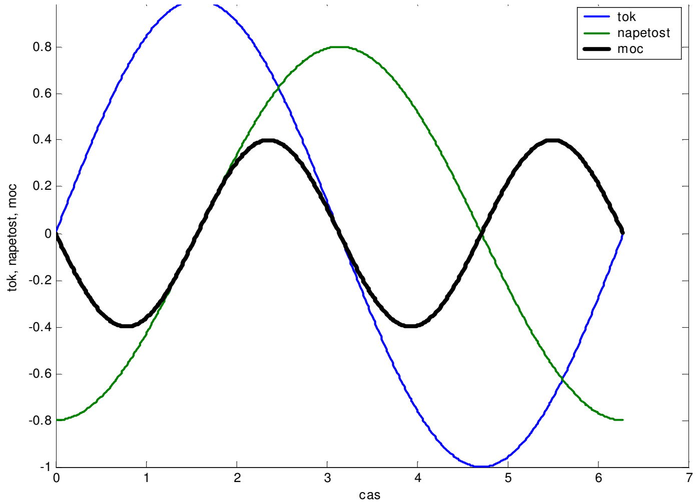
Moč

Trenutna moč je zmnožek trenutne napetosti in toka na kondenzatorju, torej

[1] Zakaj dodamo $u(0)$? Pri veličinah, ki so določene z integralom, je potrebno upoštevati "zgodovino" integranta. Torej bi bilo vedno potrebno slediti integrirano veličino od –inf. , torej $u = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i\mathrm{d}t = \frac{1}{C}\int_0^t i\mathrm{d}t + u(0)$.

$$p = iu = -I_m \sin(\omega t) \cdot U_m \cos(\omega t) = -\frac{I_m U_m}{2} \sin(2\omega t) \tag{18.7}$$

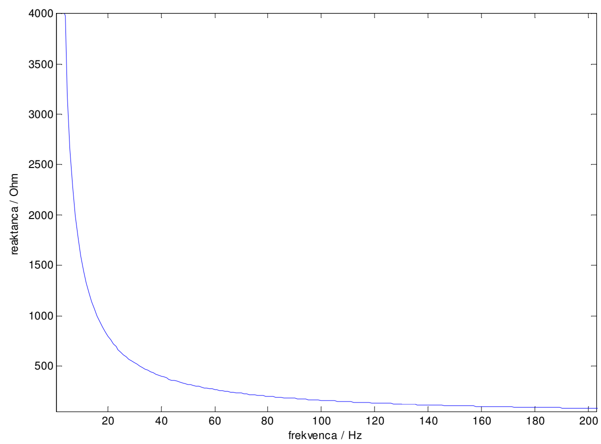
Trenutna moč niha z dvojno frekvenco vendar brez enosmerne komponente, enako kot pri tuljavi. Povprečna (izgubna) moč je torej tako kot na tuljavi enaka nič vatov.



SLIKA: Tokovni in napetostni signal na kondenzatorju. Napetost na kondenzatorju zaostaja za tokom za četrtino periode signala.

ENERGIJA

Podobno kot pri tuljavi energija v kondenzatorju niha z dvojno frekvenco osnovnega signala. Je vedno pozitivna, v povprečju enaka $W_{sr} = \frac{CU_m^2}{4}$. Maksimalna energija shranjena v polju kondenzatorja pa je $W_{\max} = \frac{CU_m^2}{2}$.



SLIKA: Kapacitivna upornost $X_C = \frac{1}{\omega C}$ se zmanjšuje s višanjem frekvence vzbujalnega signala s funkcijsko odvisnostjo $1/f$. Na sliki je reaktanca za *C* = 10 μF.

Skupne ugotovitve za kondenzator:

1) Če je tok skozi tuljavo $i = I_m \sin(\omega t)$, bo napetost na kondenzatorju $u = U_m \sin(\omega t - \frac{\pi}{2})$. **Tok na kondenzatorju prehiteva napetost** za četrtino periode signala, kar lahko prikažemo tudi grafično na kazalčnem diagramu.
2) Amplitudo napetosti lahko zapišemo tudi kot $U_m = \frac{I_m}{\omega C}$, kjer je $\frac{1}{\omega C}$ upornost kondenzatorja pri izmeničnih signalih[2]. Upornost kondenzatorja se manjša s frekvenco.
3) Za lažjo predstavo lahko kondenzator pri zelo nizkih frekvencah (enosmerne razmere) nadomestimo z odprtimi sponkami (zelo velika upornost), pri zelo visokih pa s kratkim stikom (zelo majhna upornost).
4) Moč na kondenzatorju niha z dvojno frekvenco tokovnega (ali napetostnega) signala, povprečna moč je enaka nič.
5) Energija niha z dvojno frekvenco osnovnega signala, v povprečju je enaka $W_{sr} = \frac{CU_m^2}{4}$, maksimalna energija v kondenzatorju nastopi vsako četrtino periode signala, ko je velika $W_{\max} = \frac{CU_m^2}{2}$. Energija je akumulirana v električnem polju kondenzatorja.

Primer izračuna za kondenzator: Na kondenzator kapacitivnosti 8 μF priključimo vir napetosti sinusne oblike amplitude 1 V. Kolikšna mora biti frekvenca napetostnega signala, da bo imel tok kondenzatorja amplitudo 2,5 mA?

Izračun: Iz $U_m = \frac{I_m}{\omega C}$ dobimo $\omega C = \frac{1\ \text{V}}{2{,}5\ \text{mA}} = 400\ \Omega$, od koder je $\omega = \frac{1}{400\ \Omega \cdot 8\ \mu\text{F}} = 312{,}50\ \text{s}^{-1}$ oziroma $f = \frac{312{,}50}{2\pi}\ \text{Hz} \approx 50\ \text{Hz}$.

6) Za vezja, v katerih napetost zaostaja za tokom rečemo, da imajo **kapacitivni karakter**.

Vprašanja za obnovo:

1) Določitev napetosti na uporu, tuljavi, kondenzatorju pri vzbujanju z izmeničnim signalom.
2) Zveze med amplitudami toka in napetosti. Upornosti pri izmeničnih signalih.
3) Prehitevanje ali zaostajanje toka za napetostjo, karakter vezja.
4) Moč: časovni signal, povprečna moč.
5) Energija: trenutna, povprečna, maksimalna.

Kolokvijske in izpitne naloge:
kolokvij, 13. 06.2002
izpit, 20. junij 2003
Izpit 26. 6. 2002
izpit, 8. aprila 2002

[2] Pogosto se uporablja zapis reaktance kondenzatorja kot $X_C = \frac{1}{\omega C}$. Kasneje bomo ugotovili, da je reaktanca definirana kot imaginarni del impedance in je v primeru kondenzatorja negativna, torej $X_C = -\frac{1}{\omega C}$.

19. IZMENIČNI SIGNALI – MOČ

Vsebina poglavja: časovna oblika moči za poljubni linearni dvopol, nihanje z dvojno frekvenco osnovnega signala, razdelitev moči na več komponent, delovna moč (faktor delavnosti), jalova moč, navidezna moč, trikotnik moči, odčitek *S* in *P* iz časovne oblike signala moči.

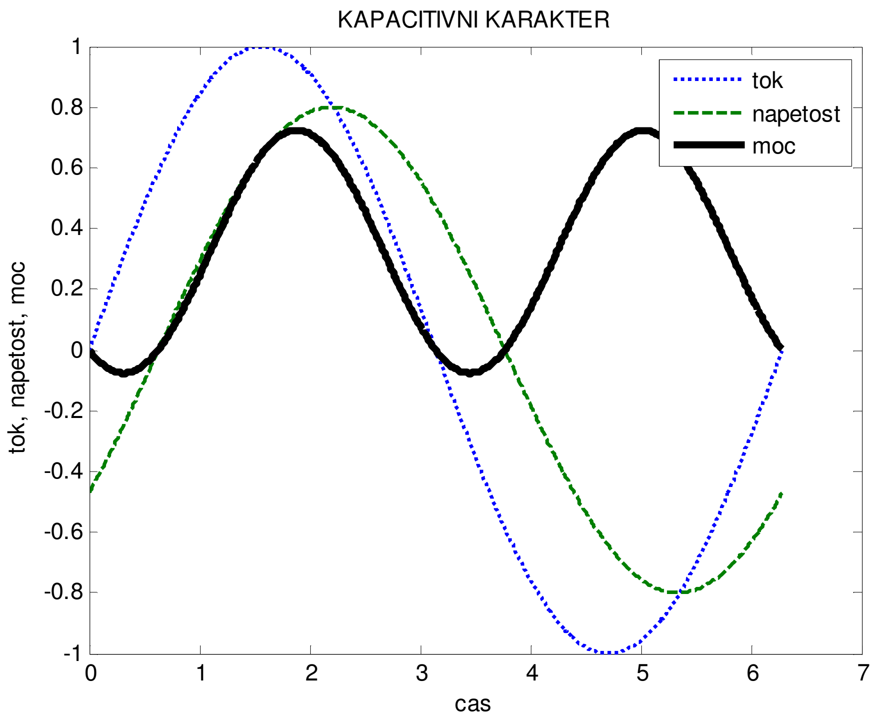
Zanima nas potek trenutne moči v linearnem dvopolnem (dve zunanji sponki) vezju, kjer je napetost na zunanjih sponkah enaka $u = U_m \sin(\omega t)$, tok pa je zamaknjen za nek poljubni kot $i = I_m \sin(\omega t - \varphi)$. Trenutna moč v vezje je enaka zmnožku napetosti in toka

$$p(t) = u(t) \cdot i(t) = U_m \sin(\omega t) \cdot I_m \sin(\omega t - \varphi)\,. \tag{19.1}$$

Z uporabo zveze $\sin(\alpha) \cdot \sin(\beta) = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)\right)$ zapišemo moč vezja kot

$$p(t) = \frac{U_m I_m}{2}\left[\cos(\varphi) - \cos(2\omega t - \varphi)\right] \tag{19.2}$$

Vidimo, da lahko trenutno moč vezja opišemo kot vsoto dveh komponent moči, ene enosmerne in ene izmenične, ki niha z dvojno frekvenco. S povprečenjem moči preko periode dobimo povprečno moč, ki bo očitno kar enaka tej enosmerni komponenti moči, ki jo imenujemo **delovna moč**.



SLIKA: Primer moči na bremenu kapacitivnega karakterja (tok prehiteva napetost).

Delovna moč

Delovna moč je torej določena kot povprečna moč

$P=\frac{1}{T}\int_0^T p(t)\mathrm{d}t$. Iz enačbe (19.2) vidimo, da je povprečna moč enaka

$$\boxed{P=\frac{U_m I_m}{2}\cos(\varphi)=U_{ef}I_{ef}\cos(\varphi)} \quad \text{DELOVNA MOČ} \tag{19.3}$$

»Okoli« te vrednosti niha signal moči.

Delovna moč je tista moč, ki se pretevarja v neko drugo obliko, na uporu v toplotno (Joulske izgube), v motorjih pa v mehansko (in toplotno).

Faktor $\cos(\varphi)$ pogosto imenujemo tudi **faktor delavnosti** ali **faktor moči**.

Navidezna moč

Trenutna moč niha z dvojno frekvenco okoli vrednosti povprečne (delovne) moči. Amplituda nihanja moči (brez enosmerne komponente) je

$$S=\frac{I_m U_m}{2} \tag{19.4}$$

in jo imenujemo **navidezna moč**. Navidezna moč je običajno tista, ki nam pove, koliko smemo obremenjevati napravo.

Jalova moč

Tudi nihanje moči okoli enosmerne komponente (povprečne moči) lahko razstavimo v skladu z zvezo $\cos(\alpha-\beta)=\cos(\alpha)\cdot\cos(\beta)+\sin(\alpha)\cdot\sin(\beta)$. Dobimo

$\cos(2\omega t-\varphi)=\cos(2\omega t)\cdot\cos(\varphi)+\sin(2\omega t)\cdot\sin(\varphi)$. Ob vstavitvi tega člena v enačbo (19.2) dobimo

$$p(t)=\frac{U_m I_m}{2}\left[\cos(\varphi)\left(1-\cos(2\omega t)\right)-\sin(\varphi)\sin(2\omega t)\right] \tag{19.5}$$

Prvi člen v oglatem oklepaju predstavlja nihanje moči okoli povprečne (delovne) moči, drugi člen pa nihanje moči okoli ničle. Amplituda drugega člena je enaka

$$Q=\frac{I_m U_m}{2}\sin(\varphi). \tag{19.6}$$

in jo imenujemo **jalova moč**.

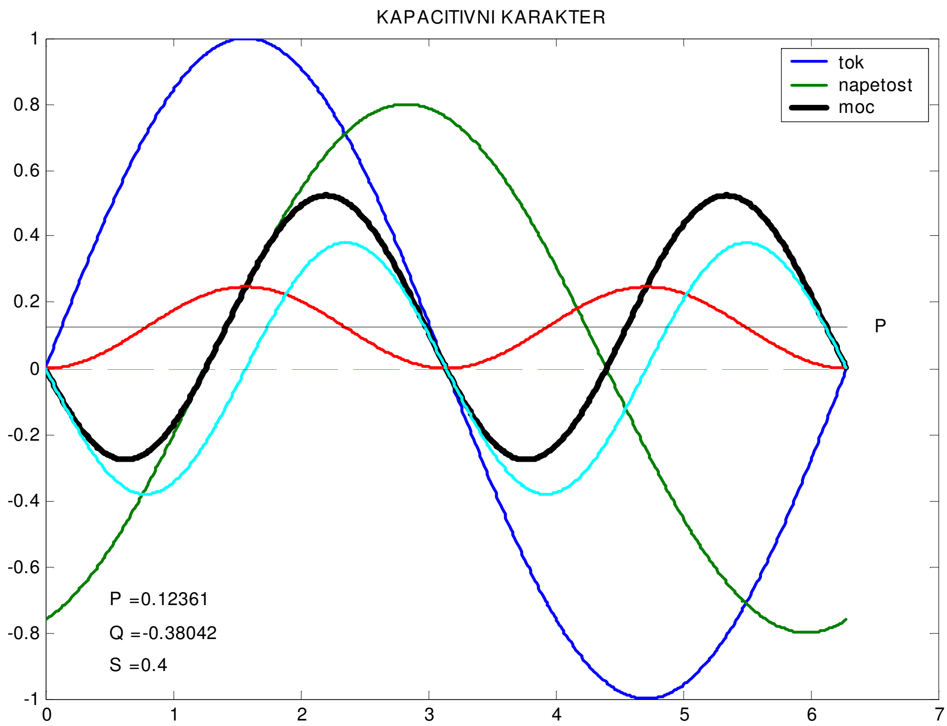
Očitno je, da velja

$$S^2 = P^2 + Q^2, \quad (19.7)$$

kar običajno prikažemo s pravokotnim trikotnikom s stranicami *P*, *Q* in *S*.

SLIKA: Trikotnik moči sestavljajo delovna, jalova in navidezna moč.

Zaradi pomembnosti moči v elektrotehniki in lažje prepoznavnosti, za delovno moč uporabljamo enoto W (Watt), za jalovo pa VAr (Volt – Amper reaktivno), za navidezno pa VA (Volt - Ampere).



SLIKA: Primer časovnega poteka komponent moči (s polno črto) na vezju kapacitivnega karakterja (tok prehiteva napetost). Prikazana je trenutna moč (polna krepka črna črta), pa tudi razdelitev te moči na dva dela: nihanje moči z amplitudo izmeničnega signala enaki *P* okoli povprečja (polna rdeča črta), ki je enako *P* in jalova moč *Q*, ki je enaka amplitudi dela signala moči, ki niha okoli ničle (polna črta turkizne barve). Trenutna moč niha okoli povprečne vrednosti (delovne moči *P*) z amplitudo, ki je enaka navidezni moči *S*.

Primer izračuna delovne, jalove in navidezne moči: Motor priključimo na izmeničen vir napetosti $u = 400\sin(\omega t)\,\mathrm{V}$ in med delovanjem izmerimo efektivno vrednost toka 3,68 A, ki za napetostnim signalom zaostaja za fazni kot 25^0. Določite delovno, jalovo in navidezno moč motorja.

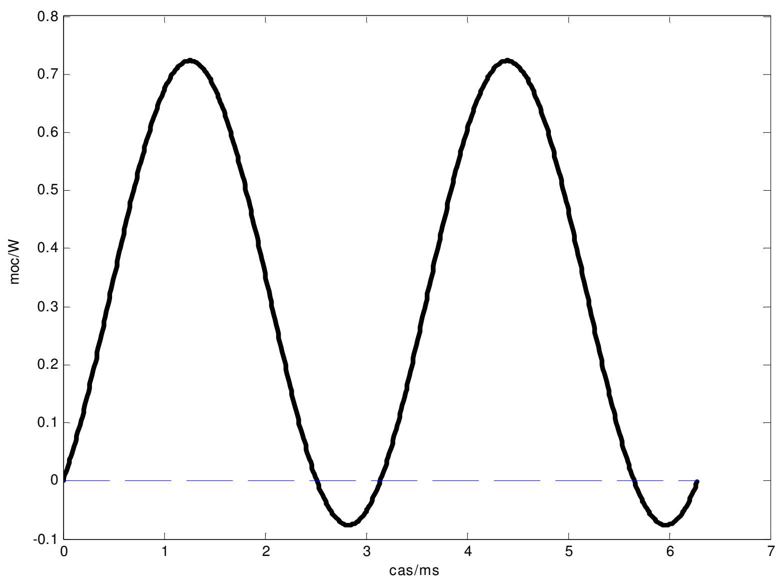
Izračun: Maksimalna vrednost toka bo $I_m = I_{ef}\sqrt{2} = 5{,}2\,\mathrm{A}$. Delovna moč bo $P = \frac{I_m U_m}{2}\cos(\varphi) \cong 961\,\mathrm{W}$, jalova $Q = \frac{I_m U_m}{2}\sin(\varphi) \approx 448\,\mathrm{VAr}$ in navidezna $S = \frac{I_m U_m}{2} = 1060\,\mathrm{VA}$.

Primer izračuna delovne in jalove moći: Navidezna moč električnega aparata je 550 VA, faktor delavnosti pa je 0,8. Določimo delavno in jalovo moč aparata.

Izračun: Iz trikotnika moči lahko razberemo, da je delovna moč $P = S\cos(\varphi) = 440\,\mathrm{W}$. Ker poznamo *P* in *S* lahko *Q* določimo iz $Q = \sqrt{S^2 - P^2} = 330\,\mathrm{VAr}$.

DOLOČANJE MOČI IZ ČASOVNEGA POTEKA MOČI

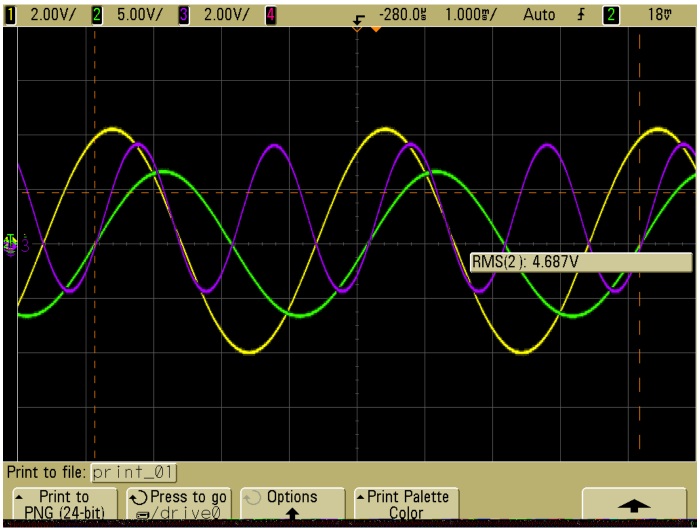
Iz grafa trenutne moči določimo delovno, jalovo in navidezno moč ter frekvenco in fazni kot med napetostjo in tokom. Vrišimo delovno in navidezno moč v sliko. Določimo še amplitudo napetosti, če je amplituda toka 2A.



<u>Izračun</u>: Amplituda moči je navidezna moč, ki niha okoli enosmerne komponente, ki je enaka delovni moči. Iz vršnih vrednosti lahko razberemo navidezno moč. Spodnja temenska vrednost moči je –0,08 W, zgornja pa 0,72 W, $S=\dfrac{0,72-(-0,08)}{2}=0,4\,\mathrm{VA}$. Če to vrednost odštejemo od zgornje vršne vrednosti ali pa prištejemo spodnji, dobimo delovno moč $P=0,72\,\mathrm{W}-0,4\,\mathrm{W}=0,32\,\mathrm{W}$, jalova moč bo torej $Q=\sqrt{S^2-P^2}=0,24\,\mathrm{VAr}$.

Razberemo še periodo signala, ki je 3,2 ms, od koder je frekvenca signala moči $f_{moc}=\dfrac{1}{3,2\,\mathrm{ms}}=312,5\mathrm{s}^{-1}$. Moč niha z dvojno frekvenco toka (napetosti), tok bo torej nihal s kotno frekvenco 156,3 Hz. Ugotoviti moramo še fazni zamik med napetostjo in tokom. Že iz prejšnjega primer smo ugotovili, da je $S=P\cos(\varphi)$ od koder je $\varphi=\mathrm{Arc}\cos\left(\dfrac{S}{P}\right)=18^0$. Določimo še amplitudo napetosti: iz $S=\dfrac{I_mU_m}{2}$ sledi $U_m=\dfrac{2S}{I_m}=0{,}4\mathrm{V}$.

Slika: Primer izrisa trenutne moči iz osciloskopa pri laboratorijski vaji za induktivni karatker vezja. Razloči signal napetosti, toka, moči, določi periodo, frekvenco, delovno moč, navidezno moč. Kako določimo jalovo moč? Kaj izmerimo z ampermetrom in voltmerom?



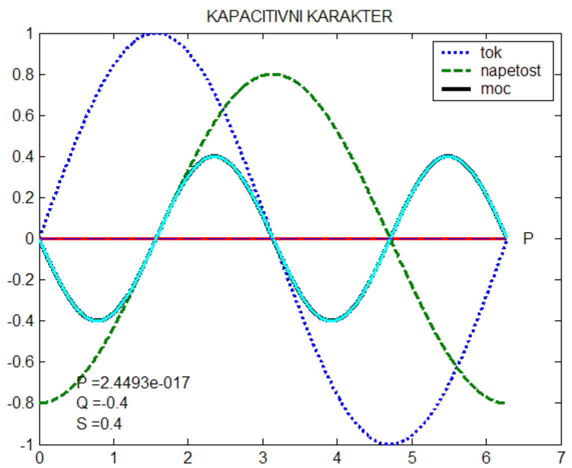
Vprašanja za obnovo:

1) Trenutna moč na poljubnem elementu vezja.
2) Delovna moč in faktor moči, jalova moč, navidezna moč. Enote. Trikotnik moči.
3) Prikaz moči kot časovni signal in določitev delovne, navidezne moči in frekvence iz signala. (Pomoč: Laboratorijske vaje)

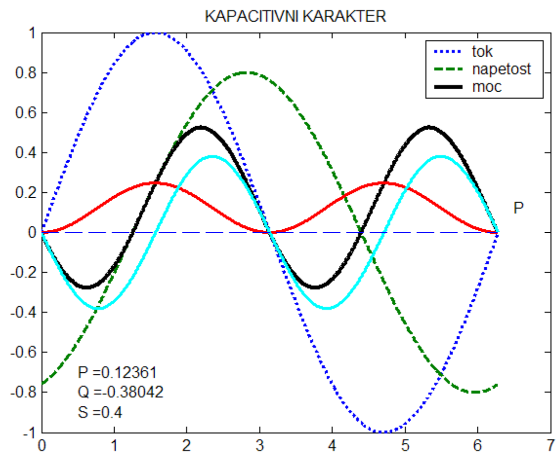
Primeri izpitnih in kolokvijskih nalog
izpit, 23. januar 2007
Izpit, 10. 06. 2004

DODATEK: Matlab program za prikaz moči na bremenu kapacitivnega, ohmskega ali induktivnega značaja

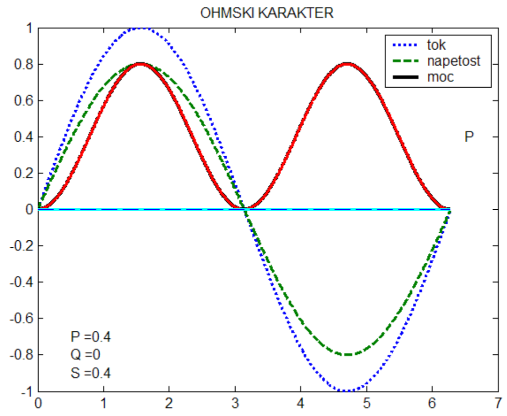
```
% Moc na bremenu, fazo spreminjamo od -pi/2 do +pi/2

Im=1; Um=0.8;

x=0:0.01:2*pi;

axis auto

for ii=-1:0.2:1

        fi=ii*pi/2;

        i=Im*sin(x);

        u=Um.*sin(x+fi);

        P=Um*Im*cos(fi)/2;

        Q=Um*Im*sin(fi)/2;

        S=Um*Im/2;


        plot(x,i,':',x,u,'--','LineWidth',2);

        hold on

        plot(x,u.*i,'k','LineWidth',3)

        plot(x,P*(1-cos(2*x)),'r',x,Q*sin(2*x),'c','LineWidth',2)

        plot([0 2*pi], [0 0],'Color','b','LineStyle','--')

        plot([0 2*pi], [P P],'Color','k','LineStyle','-')

        %axis off

        title('OHMSKI KARAKTER')

        if fi<0 title('KAPACITIVNI KARAKTER'); end

        if fi>0 title('INDUKTIVNI KARAKTER'); end

        if fi==0 title('OHMSKI KARAKTER'); end

        legend('tok','napetost','moc')

        text(0.5,-0.7,strcat('P = ',num2str(P)));

        text(0.5,-0.8,strcat('Q = ',num2str(Q)));

        text(0.5,-0.9,strcat('S = ',num2str(S)));

        text(6.5,P,'P');

        k = waitforbuttonpress

        hold off

end
```



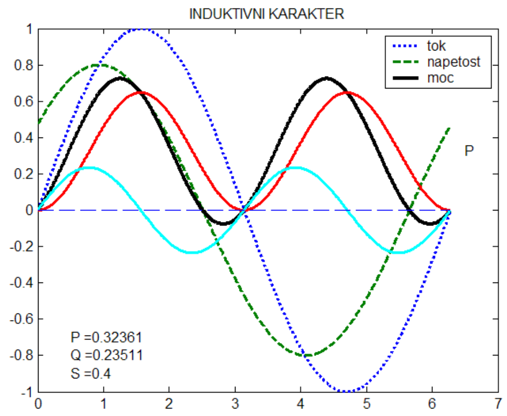
SLIKA: Moč na bremenu kapacitivnega karakterja.



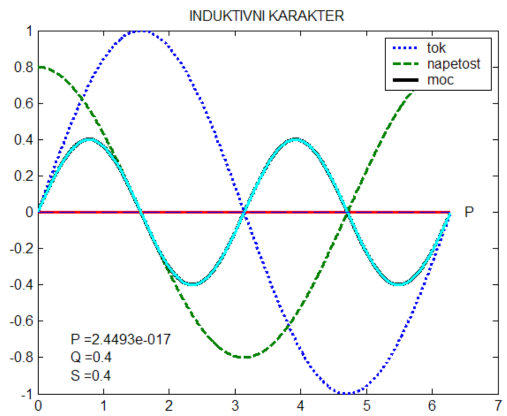
SLIKA: Moč na kondenzatorju.



SLIKA: Moč na uporu



SLIKA: Moč na bremenu induktivnega karakterja



SLIKA: Moč na induktivnem bremenu (tuljavi)

20. OBRAVNAVA IZMENIČNIH SIGNALOV S KOMPLEKSNIM RAČUNOM

Vsebina: Reševanje vezja z diferencialnimi enačbami. Osnove kompleksnega računa: kompleksno število, osnovne operacije, konjugacija, Eulerjev obrazec. Povezava med časovnim signalom sinusne oblike in kompleksnim zapisom - v obe smeri. Prikaz kompleksorjev v kompleksni ravnini. Povezava med kompleksorji toka in napetosti na uporu, kondenzatorju in tuljavi. Kirchoffova zakona s kompleksorji, kompleksna upornost in prevodnost (impedanca, admitanca), reaktanca, susceptanca.

Spoznali smo že zveze med tokom in napetostjo na posameznih elementih pri vzbujanju z izmeničnimi signali. Običajno imamo opravka z vezji, v katerih imamo pri napajanju z izmeničnimi signali priključene tako upore kot tudi kondenzatorje in tuljave. Kako v takih primerih analizirati vezje? Vzemimo kar preprost primer tuljave, ki je preko zaporedno vezanega upora priključena na izmenični napetostni generator. Kako določiti tok v vezju ali napetost na tuljavi?

Primer določanja tokov in napetosti v vezju z reševanjem diferencialne(ih) enačb

Upor *R* = 2 Ω je zaporedno s tuljavo z induktivnostjo *L* = 10 mH priključen na vir izmenične napetosti $u_g = 10\sin(\omega t)\ \mathrm{V}\ ;\omega = 50\ \mathrm{Hz}$. Določimo tok.

SLIKA: Zaporedna vezava upora in tuljave priključena na vir izmenične napetosti.

Pri izračunu moramo upoštevati osnovne zveze med tokom in napetostjo na posameznem elementu in Kirchoffova zakona. Odtod sledi $u_g = u_R + u_L$. Sedaj napetosti na uporu in tuljavi izrazimo s tokom:

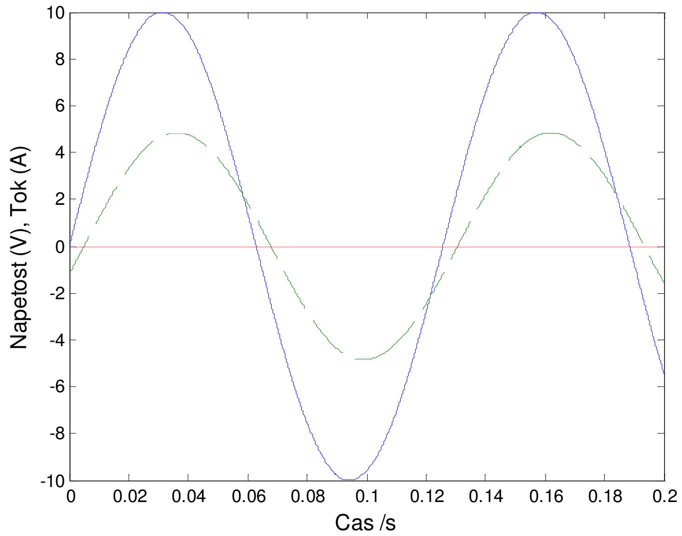
$$u_g = Ri + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}.$$

Dobimo diferencialno enačbo, katere rešitev bo tok v vezju. Obstaja vrsta načinov reševanja diferencialnih enačb, morda najpreprostejši je kar z uporabo t.i. »nastavka«, to je vnaprej poznane oblike rešitve. V konkretnem primeru bo le ta oblike $i = A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t)$. Ta nastavek uporabimo v diferencialni enačbi in dobimo (za enostavnejše računanje ne upoštevamo enot)

$10\sin(\omega t)=2\left(A\sin(\omega t)+B\cos(\omega t)\right)+0{,}01\cdot\left(A\omega\cos(\omega t)-B\omega\sin(\omega t)\right)$. Sedaj moramo le še združiti člene, ki sodijo skupaj (sinusne in kosinusne člene) in dobimo:

$10\sin(\omega t)=2A\sin(\omega t)-0{,}01B\omega\sin(\omega t)$, od koder mora veljati $10=2A-0{,}5B$ in hkrati

$0=2B\cos(\omega t)+0{,}01A\omega\cos(\omega t)$, od koder mora veljati $0=2B+0{,}5A$. Dobimo sistem dveh enačb, od koder določimo konstanti *A* in *B*, ki sta *B* = -1,1765 in *A* = 4,7059. Rešitev je torej $i\cong 4{,}71\sin(\omega t)-1{,}18\cos(\omega t)$. To rešitev lahko zapišemo tudi v obliki $i=K\sin(\omega t+\varphi)$, kjer je $K=\sqrt{A^2+B^2}\cong 4{,}86$ in $\varphi=\mathrm{Arc}\tan\dfrac{B}{A}\cong -0{,}25$ v radianih oziroma $\varphi\cong -0{,}25\cdot\dfrac{180^0}{\pi}=-14^0$, torej $i=\underline{\underline{4{,}86\sin(\omega t-14^0)\ \mathrm{A}}}$.



SLIKA: Napetost (modra polna črta) in tok (zelena črtkana črta).

Rezultat je zanimiv in pričakovan. Če bi bil na vir priključen le upor, bi bil tok v fazi z napetostjo, če bi bila priključena le idealna tuljava, bi tok zaostajal za 90^0, če pa sta zaporedno priključena oba elementa, pa tok zaostaja za napetostjo za določen fazni kot, ki je med 0 in 90^0. V konkretnem primeru tok zaostaja za napetostjo za fazni kot 14^0.

Dodatno: Ali bi bila situacija podobna, če bi na napetostni vir priključili vzporedno vezana upor in tuljavo?

Odgovor: Da, tudi v tem primeru bi tok zaostajal za napetostjo. Poskusite preveriti sami!

Ugotovitev: Za analizo tudi že preprostega vezja, ki je priključeno na izmenični vir, potrebno zapisati diferencialno(e) enačbo(e) in poiskati njeno rešitev. To pa ni vedno enostavno. V nadaljevanju bomo ugotovili, da je najbolj učinkovita metoda za analizo vezij vzbujanih z izmeničnimi signali z uporabo kompleksnega računa. S pomočjo kompleksnega računa lahko v osnovi diferencialne enačbe »prevedemo« na preproste algebrajske. Poleg analitičnega pristopa nam bo v veliko pomoč tudi grafičen prikaz s t.i. kompleksorji (kazalci) v kompleksni ravnini.

Osnove kompleksnega računa

Kompleksno število. Kompleksno število sestavlja realni in imaginarni del. Običajno kompleksna števila označimo s črtico pod črko. Primer takega števila je npr. $\underline{Z} = 2 + j3$. 2 je realni del, 3 pa imaginarni del kompleksnega števila.

j je **imaginarno število** in je enako $j = \sqrt{-1}$ oziroma, $j^2 = -1$. V matematiki ga pogosto označimo s črko *i*, ki pa jo v elektrotehniki pogosto uporabljamo kot simbol za tok.

Kompleksno število lahko prikažemo v t.i. kompleksni ravnini kot točko s koordinatama na realni in imaginarni osi (2, j3). Še bolj pogosto tako število prikažemo s kazalcem – **kompleksorjem** v kompleksni ravnini.

Poljubno kompleksno število zapišemo z realnim in imaginarnim delom kot

$$\boxed{\underline{Z} = \mathrm{Re}\{\underline{Z}\} + j\,\mathrm{Im}\{\underline{Z}\} = X + jY}.$$

X je realni del, *Y* pa imaginarni del kompleksnega števila.

SLIKA: Prikaz kompleksnega števila v kompleksni ravnini kot točka ali v obliki kazalca (vektorja). Določen je z realnim in imaginarnim delom ali pa z amplitudo in faznim kotom.

Pogosto zapišemo kompleksno število tudi v **polarni obliki**, z amplitudo in faznim kotom. Velja $|\underline{Z}| = \sqrt{X^2 + Y^2}$, fazni kot pa je $\varphi = \mathrm{Arctan}\left(\frac{Y}{X}\right)$. Narišemo ga s kazalcem (kompleksorjem) v kompleksni ravnini. Velikost kazalca je *Z* in je od realne osi »zasukan« za kot φ.

Eulerjev obrazec

Za tvorjenje kompleksnih signalov (kompleksorjev) in za pretvarjanje iz polarnega zapisa v realni in imaginarni del kompleksnega števila se poslužujemo t.i. Eulerjevega obrazca

$$\boxed{e^{j\alpha} = \cos(\alpha) + j\sin(\alpha)} \tag{20.1}$$

Primeri računanja s kompleksnimi števili.

$\underline{Z}_1 = 2 + j3$; $\underline{Z}_2 = 4 - j5$

Vsota: $\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 = 2 + j3 + 4 - j5 = 6 - j2$

Razlika: $\underline{Z}_1 - \underline{Z}_2 = (2 + j3) - (4 - j5) = -2 + j8$

Produkt: $\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2 = (2 + j3) \cdot (4 - j5) = 2 \cdot 4 - j^2 15 + j(12 - 10) \ = 23 + j2$

Kvocient: $\underline{Z}_1 / \underline{Z}_2 = \dfrac{(2 + j3)}{(4 - j5)} = \dfrac{(2 + j3)}{(4 - j5)} \dfrac{(4 + j5)}{(4 + j5)} = \dfrac{-7 + j22}{4^2 + 5^2} = \dfrac{-7 + j22}{41} \cong -0{,}17 + j0{,}54$

Kvocient s pomočjo polarnega zapisa:

$$\underline{Z}_1 / \underline{Z}_2 = \frac{(2 + j3)}{(4 - j5)} \cong \frac{3{,}6e^{j56^0}}{6{,}4e^{-j51^0}} \cong 0{,}562e^{j107^0} \cong 0{,}562\left(\cos(107^0) + \mathrm{j}\sin(107^0)\right) = -0{,}164 + j0{,}54 \,.$$

Razlika med prvim in drugim izračunom nastopi zaradi različnega zaokroževanja. Polarni zapis je bolj primeren za množenje in deljenje. Pri pretvarjanju v polarni zapis je potrebno biti previden v primeru, ko je realni del negativen, saj se to število (kazalec) nahaja v drugem ali tretjem kvadrantu. V tem primeru je potrebno kotu dodati 180^0 oz. π. Primer: Pretvorimo kompleksno število $-2 + j2 = 2\sqrt{2}e^{j\left(\pi + Arc\tan\frac{2}{-2}\right)} = 2\sqrt{2}e^{j(3\pi/4)}$.

Konjugacija: $\underline{Z}_1^* = 2 - j3$. Pri konjugaciji obrnemo predznak imaginarnemu delu. Posebno primerna je uporaba konjugacije za izračun absolutne vrednosti kompleksnega števila:

$$|\underline{Z}_1| = |2 + j3| = \sqrt{\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_1^*} = \sqrt{(2 + j3)(2 - j3)} = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$$

Prikaz kompleksorjev v kompleksni ravnini. Posamezne kompleksorje lahko prikažemo v kompleksni ravnini, jih seštevamo ali odštevamo na enak način kot vektorje.

SLIKA: Primer seštevanja in odštevanja dveh kompleksorjev v kompleksni ravnini. Princip je enak kot pri seštevanju vektorjev. S konjugacijo se kompleksor prezrcali preko realne osi.

TVORJENJE KOMPLEKSORJEV IZ ČASOVNIH (HARMONIČNIH) SIGNALOV

S pomočjo Eulerjevega obrazca lahko zapišemo poljuben harmoničen signal, pri čemer pa poleg realnega dela pridobimo še imaginarni del. Vzemimo primer tokovnega signala oblike $i(t) = 2\cos(\omega t)\,\mathrm{A}$. Ta tok lahko zapišemo z upoštevanjem Eulerjevega obrazca kot $\underline{i}(t) = 2\left(\cos(\omega t) + j\sin(\omega t)\right)\mathrm{A} = 2e^{j\omega t}\,\mathrm{A}$. Tak kompleksen zapis toka seveda nima posebnega fizikalnega pomena. Fizikalno ima pomen le njegov realni del, torej $i(t) = \mathrm{Re}\{\underline{i}(t)\} = \mathrm{Re}\{2\left(\cos(\omega t) + j\sin(\omega t)\right)\mathrm{A}\} = 2\cos(\omega t)\,\mathrm{A}$. V nadaljevanju bomo spoznali, da nam to »kompliciranje« z vpeljavo kompleksnih števil olajša obravnavo vezij vzbujanih s harmoničnimi signali.

Vzemimo sedaj bolj splošen zapis toka $i(t) = I\cos(\omega t + \varphi)$ in ga zapišimo z upoštevanjem Eulerjevega obrazca kot $\underline{i}(t) = I\left(\cos(\omega t + \varphi) + j\sin(\omega t + \varphi)\right) = Ie^{j(\omega t + \varphi)} = Ie^{j\varphi}e^{j\omega t} = \underline{I}e^{j\omega t}$. Tvorili smo kompleksor harmonične funkcije $\underline{I} = Ie^{j\varphi}$, ki opisuje amplitudo in fazo (fazni kot) toka, kar pa je tudi popolna informacija o toku v vezju. Frekvenca signala se namreč pri linearnih vezjih vzbujanih s harmoničnim signalom ne spreminja. Dovolj bo torej, da bomo poznali le amplitudo in fazo (fazni kot) signala, seveda relativno na druge signale v vezju, če pa bi nas zanimal trenutni (časovni) potek signala, kompleksor pomnožimo s členom $e^{j\omega t}$ in upoštevamo le realni del.

Kompleksorje tvorimo iz časovnih harmoničnih signalov tako, da upoštevamo le amplitudo in fazo (fazni kot) signala, relativno glede na kosinusno funkcijo in ga zapišemo v obliki $\underline{I} = Ie^{j\varphi}$.

Primeri računanja s kompleksorji: Tvorimo kompleksorje toka za sledeče oblike tokov:

$$i_1(t) = 1\cos(\omega t)\,\mathrm{A} \quad \Rightarrow \quad \underline{I}_1 = 1\,\mathrm{A}$$

$$i_2(t) = 2\cos(\omega t + 45^0)\,\mathrm{A} \quad \Rightarrow \quad \underline{I}_2 = 2e^{j45^0}\,\mathrm{A}$$

$$i_3(t) = 3\sin(\omega t)\,\mathrm{A} = 3\cos(\omega t - \pi/2)\mathrm{A}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{I}_3 = 3e^{-j\pi/2}\mathrm{A} = 3\left(\cos(-\pi/2) + j\sin(-\pi/2)\right)\mathrm{A} = -j3\,\mathrm{A}$$

$$i_4(t) = 4\sin(\omega t + 30^0)\,\mathrm{A} = 4\cos(\omega t - 90^0 + 30^0)\,\mathrm{A} = 4\cos(\omega t - 60^0)\,\mathrm{A}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{I}_4 = 4e^{-j60^0}\mathrm{A} = 4\left(\cos(-60^0) + j\sin(-60^0)\right)\mathrm{A} = 4\left(\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\mathrm{A} \cong \left(2 - j3,46\right)\mathrm{A}$$

SLIKA: Prikaz kompleksorjev toka v kompleksni ravnini.

DOLOČITEV ČASOVNEGA SIGNALA IZ KOMPLEKSORJA

Iz znanega kompleksorja vedno lahko dobimo časovno obliko signala. Kompleksor je potrebno pomnožiti z $e^{j\omega t}$ in upoštevati le realni del signala. Vzemimo kot primer kompleksor toka $\underline{I}_2 = 2e^{j45^0}\,\mathrm{A}$, ki ga pomnožimo z $e^{j\omega t}$ in upoštevamo Eulerjev obrazec. Časovno obliko toka dobimo iz realnega dela izraza

$$i_2(t) = \mathrm{Re}\left\{2e^{j45^0}e^{j\omega t}\mathrm{A}\right\} = \mathrm{Re}\left\{2e^{j(\omega t+45^0)}\mathrm{A}\right\} = 2\,\mathrm{Re}\left\{\cos(\omega t+45^0)+j\sin(\omega t+45^0)\right\}\mathrm{A}{=}2\cos(\omega t+45^0)\mathrm{A}$$

Primer zaporedne vezave upora in tuljave na začetku poglavja z uporabo kompleksnega računa (s pomočjo reševanja diferencialne enačbe na strani 44)

Izračun: Napetostni signal oblike $u_g = U_m\sin(\omega t) = U_m\cos(\omega t - \pi/2)$ zapišemo kot $\underline{u}_g = U_m e^{j(\omega t-\pi/2)} = \underline{U}e^{j\omega t}$, kjer je $\underline{U} = U_m e^{-j\pi/2} = -jU_m$. Rešitev pričakujemo v obliki $\underline{i} = Ie^{j(\omega t+\varphi_i)} = \underline{I}e^{j\omega t}$, kjer je $\underline{I} = Ie^{j\varphi_i}$.

Vstavimo ta zapisa v diferencialno enačbo $u_g = Ri + L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$ in dobimo

$\underline{U}e^{j\omega t} = R\underline{I}e^{j\omega t} + L\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\underline{I}e^{j\omega t}\right)$ in z odvajanjem $\underline{U}e^{j\omega t} = R\underline{I}e^{j\omega t} + L\underline{I}j\omega e^{j\omega t}$. Člen $e^{j\omega t}$ lahko v enačbi pokrajšamo in tako postane enačba enostavna algebrajska: $\boxed{\underline{U} = R\underline{I} + j\omega L\underline{I}}$. Iz enačbe določimo kompleksor toka $\underline{I} = \dfrac{\underline{U}}{R+j\omega L}$. Razstavimo enačbo na realni in imaginarni del. Če se želimo »znebiti« imaginarnega dela v imenovalcu, moramo imenovalec pomnožiti z njegovo konjugirano kompleksno vrednostjo, to je z $R - j\omega L$. Dobimo

$\underline{I} = \dfrac{\underline{U}(R-j\omega L)}{(R+j\omega L)\cdot(R-j\omega L)} = \dfrac{\underline{U}(R-j\omega L)}{R^2-(j\omega L)^2} = \dfrac{\underline{U}(R-j\omega L)}{R^2+(\omega L)^2}$. To je že rešitev, ki jo lahko izrišemo v kompleksni ravnini. Narišemo kompleksor napetosti, ki je

$\underline{U} = U_m e^{-j\pi/2} = -jU_m$, kompleksor toka pa je $\underline{I} = \dfrac{-jU_m(R-j\omega L)}{R^2+(\omega L)^2} = -\dfrac{U_m(\omega L + jR)}{R^2+(\omega L)^2}$ in ima negativen tako realni kot imaginarni del. Vsota teh dveh kompleksorjev je kompleksor toka, ki zaostaja za kompleksorjem napetosti za kot, ki ga dobimo iz zapisa toka v polarni obliki: $\underline{I} = Ie^{j\varphi_i}$. Amplituda toka je $I = \left|\dfrac{\underline{U}}{R+j\omega L}\right| = \dfrac{U_m}{\sqrt{R^2+(\omega L)^2}}$, fazni kot pa[8] $\varphi_i = \mathrm{Arctan}\left(\dfrac{\mathrm{Im}\{\underline{I}\}}{\mathrm{Re}\{\underline{I}\}}\right) = \mathrm{Arctan}\left(\dfrac{-R}{-\omega L}\right)$. Z vstavitvijo vrednosti dobimo *I* = 4,85 A in $\varphi_i \cong 76^0 + 180^0 = 256^0$. Kompleksor toka je torej $\underline{I} \cong 4{,}85e^{j256^0}\,\mathrm{A}$. Spomnimo se lahko, da je bil kompleksor napetosti

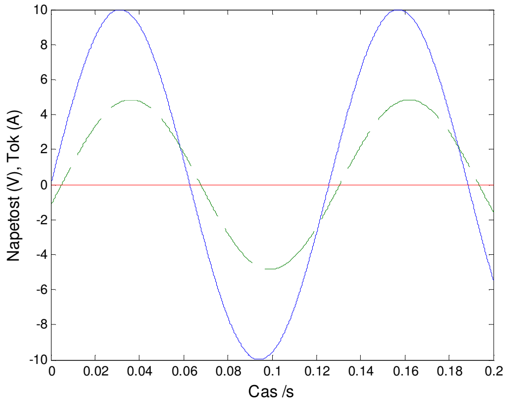
[8] Dobljenemu kotu je potrebno prišteti kot 180o, saj sta tako realni kot imaginarni del negativna.

$\underline{U} = U_m e^{-j\pi/2} = U_m e^{j3\pi/2} = U_m e^{j270^0}$. Fazni kot med tokom in napetostjo je torej $\varphi = \varphi_u - \varphi_i = 270^0 - 256^0 = 14^0$. Kazalec napetosti prehiteva kazalec toka za fazni kot 14^0. To predstavlja **induktivni karakter vezja**.

Tok v časovni obliki dobimo tako, da kompleksor toka pomnožimo z $e^{j\omega t}$ in upoštevamo le realni del:

$i(t) = \mathrm{Re}\left\{\underline{I}e^{j\omega t}\right\} = \mathrm{Re}\left\{4{,}85e^{j256^0}e^{j\omega t}\mathrm{A}\right\} = \mathrm{Re}\left\{4{,}85e^{j(\omega t+256^0)}\mathrm{A}\right\} = \underline{\underline{4{,}85\cos(\omega t + 256^0)\ \mathrm{A}}}$, kar lahko zapišemo tudi s sinusom:

$$i(t) = 4{,}85\sin(\omega t + 90^0 + 256^0)\ \mathrm{A} = 4{,}85\sin(\omega t + 346^0)\ \mathrm{A} = \underline{\underline{4{,}85\sin(\omega t - 14^0)\ \mathrm{A}}}$$



SLIKA: Levo: kazalca (kompleksorja) napetosti in toka. Desno: časovni signal.

KOMPLEKSORJI TOKA IN NAPETOSTI NA ELEMENTIH VEZJA

Kako si torej pomagamo s kompleksnim računom pri analizi vezij s harmoničnimi signali? Poglejmo si zveze med kompleksorji toka in napetosti na posameznih elementih vezja:

UPOR

Vzemimo $i(t) = I\cos(\omega t)$, kompleksor bo kar $\underline{I} = Ie^{j0} = I$. Tokovni signal pa lahko zapišemo kot $i(t) = Re\left\{\underline{I}e^{j\omega t}\right\}$. Napetost na uporu bo $u(t) = Re\left\{\underline{U}e^{j\omega t}\right\}$ in bo enaka $u(t) = R \cdot i(t)$ oziroma $Re\left\{\underline{U}e^{j\omega t}\right\} = Re\left\{R\underline{I}e^{j\omega t}\right\}$ od koder sledi zapis s kompleksorji:

$$\boxed{\underline{U} = R\underline{I}} \qquad (20.2)$$

Ponovno vidimo, da sta kompleksorja toka in napetosti na uporu v fazi.

SLIKA: Kompleksor napetosti in toka na uporu.

TULJAVA

Vzemimo zopet $i(t) = I\cos(\omega t)$ s kompleksorjem $\underline{I} = Ie^{j0} = I$. Ugotovili smo že, da napetost na tuljavi prehiteva tok za četrtino periode in bo torej enaka $u(t) = I\omega L\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$. Če ta signal zapišemo kot kompleksor, dobimo $\underline{U} = \underline{I}\omega L e^{j\frac{\pi}{2}} = \underline{I}\omega L \cdot j$, kar v splošnem zapišemo v obliki

$$\boxed{\underline{U} = j\omega L\underline{I}} \qquad (20.3)$$

SLIKA: S prikazom v kompleksni ravnini pokažemo, da napetost na tuljavi prehiteva tok za četrtino periode signala.

Drugačna razlaga: Tvorimo kompleksni časovni signal (pravi je realni del tega): $\underline{i}(t)=\underline{I}e^{j\omega t}$. Ker velja $u=L\frac{di}{dt}$, mora veljati tudi $\underline{u}=L\frac{d\underline{i}}{dt}$. Po odvajanju dobimo $\underline{u}(t)=L\underline{I}\,j\omega e^{j\omega t}=\underline{U}e^{j\omega t}$. Veljati mora $\underline{U}=j\omega L\underline{I}$.

KONDENZATOR

Vzemimo zopet $i(t)=I\cos(\omega t)$ s kompleksorjem $\underline{I}=Ie^{j0}=I$. Ugotovili smo že, da napetost na kondenzatorju zaostaja za tokom za četrtino periode in bo torej enaka $u(t)=\frac{I}{\omega C}\cos\left(\omega t-\frac{\pi}{2}\right)$. Če ta signal zapišemo kot kompleksor, dobimo $\underline{U}=\frac{I}{\omega C}e^{-j\frac{\pi}{2}}=\frac{I}{e^{j\frac{\pi}{2}}\omega C}=\frac{I}{j\omega C}$, kar v splošnem zapišemo v obliki

$$\boxed{\underline{U}=\frac{\underline{I}}{j\omega C}} \tag{20.4}$$

ali tudi

$$\underline{U}=-j\frac{\underline{I}}{\omega C}$$

SLIKA: S prikazom v kompleksni ravnini pokažemo, da napetost na kondenzatorju zaostaja za tokom za četrtino periode signala.

Drugačna razlaga: Tvorimo kompleksni časovni signal (pravi je realni del tega): $\underline{i}(t)=\underline{I}e^{j\omega t}$. Ker velja $u=\frac{1}{C}\int i\mathrm{d}t$, mora veljati tudi $\underline{u}=\frac{1}{C}\int \underline{i}\mathrm{d}t$. Po integraciji dobimo $\underline{u}(t)=\frac{1}{C}\underline{I}\frac{1}{j\omega}e^{j\omega t}=\underline{U}e^{j\omega t}$. Veljati mora $\underline{U}=\frac{\underline{I}}{j\omega C}$.

KIRCHOFFOVA ZAKONA S KOMPLEKSNIM ZAPISOM

Pri vezjih z enosmernimi signali je za 1 K.Z. veljalo $\sum_{k=1}^{m} I_k = 0$, kar bi pri vezjih z izmeničnimi signali lahko zapisali v obliki $\sum_{k=1}^{m} i_k(t) = \sum_{k=1}^{m} I_k \cos(\omega t + \varphi_k) = 0$ oziroma izraženo s kompleksnim zapisom $\sum_{k=1}^{m} \mathrm{Re}\left\{\underline{I}_k e^{j\omega t}\right\} = 0$. To bo veljalo, če bo

$$\boxed{\sum_{k=1}^{m} \underline{I}_k = 0}. \tag{20.5}$$

Z besedami: vsota vseh kompleksorjev toka v spojišče je enaka nič.

SLIKA: Vsota vseh kompleksorjev toka v spojišču je enaka nič.

Podobno bi lahko pokazali, da za drugi K.Z. velja

$$\boxed{\sum_{j=1}^{n} \underline{U}_j = 0}, \tag{20.6}$$

oziroma, da je vsota vseh kompleksorjev napetosti v zanki je enaka nič.

SLIKA: Vsota vseh kompleksorjev napetosti v zanki je enaka nič.

Primer izračuna tokov s pomočjo kompleksnega računa: Tok $i(t)=3\cos(\omega t+30^{\circ})\,\mathrm{A}$ se razdeli v dve veji. Kolikšen je tok v drugi veji, če je v prvi veji tok enak $i_1(t)=2\cos(\omega t-45^{0})\,\mathrm{A}$?

SLIKA: Izris tokov v vejah.

Izračun: Tokove zapišemo kot kompleksorje $\underline{I}=3e^{j30^{\circ}}\,\mathrm{A}$, $\underline{I}_1=2e^{-j45^{\circ}}\,\mathrm{A}$ in ker mora biti vsota vseh tokov v spojišče enaka nič, bo to veljalo tudi za kompleksorje $\underline{I}_2=\underline{I}-\underline{I}_1$. Torej lahko zapišemo $I_2=3e^{j30^{\circ}}\,\mathrm{A}-2e^{-j45^{\circ}}\,\mathrm{A}=3(\cos(30^{\circ})+j\sin(30^{\circ}))\mathrm{A}+2(\cos(-45^{\circ})+j\sin(-45^{\circ}))\mathrm{A}$.
$\underline{I}_2=3e^{j30}\mathrm{A}-2e^{-j45}\mathrm{A}=3(\cos(30^{0})+\mathrm{j}\sin(30^{0}))\ \mathrm{A}+2(\cos(-45^{0})+\mathrm{j}\sin(-45^{0}))\ \mathrm{A}$

$\underline{I}_2=(2{,}6\ +\ j1{,}5)\ \mathrm{A}-(1{,}414\ -\ j1{,}414)\ \mathrm{A}=(1{,}18\ +\ j2{,}9)\ \mathrm{A}=3{,}15e^{j67{,}9^{\circ}}\,\mathrm{A}$. Če želimo zapisati tok v drugi veji v časovni obliki, pomnožimo kompleksor z $e^{j\omega t}$ in upoštevamo le realni del signala $i_2(t)=\mathrm{Re}\left\{3{,}155e^{j67{,}9^{\circ}}\mathrm{A}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right\}=\mathrm{Re}\left\{3{,}15e^{j(\omega t+67{,}9^{\circ})}\mathrm{A}\right\}=3{,}15\cos(\omega t+67{,}9^{\circ})\,\mathrm{A}$.

Kirchoffove zakone torej lahko uporabimo tudi pri zapisu tokov in napetosti s kompleksorji.

Impedanca in admitanca

Vzemimo tokovni signal oblike $i(t)=I\cos(\omega t+\varphi_i)$, ki ga opišemo s kompleksorjem $\underline{I}=Ie^{j\varphi_i}$, ki na sponkah v dvopolno vezje povzroča padec napetosti oblike $u(t)=U\cos(\omega t+\varphi_u)$, ki ga opišemo s kompleksorjem $\underline{U}=Ue^{j\varphi_u}$. Kvocient komplesorjev napetosti in toka imenujemo **impedanca** ali **kompleksna upornost** (včasih rečemo tudi polna upornost):

$$\boxed{\underline{Z}=\frac{\underline{U}}{\underline{I}}}. \tag{20.7}$$

Velja $\underline{Z}=\dfrac{Ue^{j\varphi_u}}{Ie^{j\varphi_i}}=\dfrac{U}{I}e^{j(\varphi_u-\varphi_i)}=Ze^{j\varphi}$.

Govorimo lahko o Ohmovem zakonu pri izmeničnih signalih zapisan v obliki

$$\boxed{\underline{U}=\underline{Z}\,\underline{I}} \tag{20.8}$$

SLIKA: Poljubno (dvovhodno) vezje s priključeno napetostjo in tokom v vezje. Kvocient kompleksorjev napetosti in toka je definiran kot impedanca vezja.

Impedanca je izražena kot kompleksno število. Absolutna vrednost impedance je kvocient med amplitudo napetosti in toka, argument pa je razlika med faznima kotoma napetostnega in tokovnega signala. Inverzna impedanci je **admitanca** ali kompleksna prevodnost

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{\underline{I}}{\underline{U}}, \tag{20.9}$$

ki jo tudi lahko predstavimo kot $\underline{Y} = \frac{1}{Z} e^{-j\varphi} = Ye^{-j\varphi}$.

Zapišimo kompleksne upornosti in prevodnosti za posamezne elemente vezja

	Impedanca	**Admitanca**
	$\underline{Z}$	$\underline{Y}$
Upor	R	G
Tuljava	$j\omega L = jX_L$	$\frac{1}{j\omega L} = jB_L$
Kondenzator	$\frac{1}{j\omega C} = jX_C$	$j\omega C = jB_C$

Pogosto se uporablja tudi pojma reaktanca in susceptanca. **Reaktanca** predstavlja imaginarni del impedance in je za tuljavo $X_L = \omega L$ in za kondenzator[9] $X_C = -\frac{1}{\omega C}$. **Susceptanca** predstavlja imaginarni del admitance in je za tuljavo $B_L = -\frac{1}{\omega L}$ in $B_C = \omega C$.

ZAPOREDNA IN VZPOREDNA VEZAVA IMPEDANC IN ADMITANC

[9] Pogosto se v literaturi pojem reaktance enači s pojmom upornosti pri izmeničnih signalih. V tem smislu se uporablja za reaktanco kondezatorja pozitivno vrednost. Glede na definicijo (reaktanca je imaginarni del impedance), mora biti reaktanca kondenzatorja negativna.

Če so impedance vezane zaporedno, jih lahko seštevamo tako, kot smo seštevali zaporedno vezane upornosti pri enosmernih vezjih

$$\underline{Z}_{zaporedno} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 + \ldots \qquad (20.10)$$

SLIKA: Zaporedna vezava impedanc.

Enako lahko seštevamo tudi vzporedno vezane kompleksne prevodnosti

$$\underline{Y}_{vzporedno} = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3 + \ldots \qquad (20.11)$$

SLIKA: Vzporedna vezava impedanc (admitanc).

Primer izračuna impedance: Določimo impedanco zaporedno vezanega upora R = 100 Ω in kondenzatorja C = 2 µF pri frekvenci ω = 1 kHz.

Izračun: Ker imamo zaporedno vezavo, pišemo $Z = R + \frac{1}{j\omega C} = 100\ \Omega + \frac{1}{j10^3 \cdot 2 \cdot 10^{-6}}\ \Omega = (100 - j500)\ \Omega$. Dobimo realni in imaginarni del impedance, ki jo lahko predstavimo v kompleksni ravnini. Določimo lahko še amplitudo in fazo impedance kot $Z = \sqrt{100^2 + (-500)^2}\ \Omega = 510\,\Omega$ in fazni kot $\varphi = \mathrm{Arctan}\left(\frac{-500}{100}\right) = -78{,}7^{\circ}$.

SLIKA:

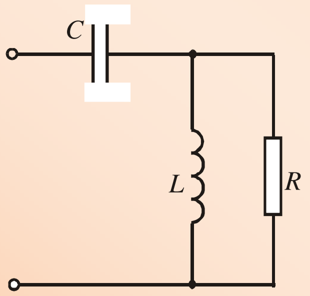
Primer izračuna admitance: Določimo admitanco vzporedne vezave upora in kondenzatorja iz prejšnjega primera.

<u>Izračun</u>: Tokrat seštevamo prevodnosti, rezultat bo $\underline{Y} = G + j\omega C$, številčno pa $\underline{Y} = 0{,}01\,\mathrm{S} + j0{,}002\,\mathrm{S} = 0{,}01(1 + j0{,}2)\,\mathrm{S} = 1{,}02 \cdot 10^{-2} \mathrm{e}^{\mathrm{j}11{,}3^\circ}\,\mathrm{S}$

Primer uporabe kompleksnega računa za računanje vezij: Tok v vezje vzporedne vezave kondenzatorja in upora iz prejšnjega primera je $i(t) = 20\cos(10^3\,\mathrm{s}^{-1} \cdot t)\ \mathrm{mA}$. Določimo napetost na sponkah vezja.

<u>Izračun</u>: Admitanco smo že izračunali v primeru 2, tvorimo še kompleksor tokovnega signala $\underline{I} = 20\,\mathrm{A}$ in upoštevamo $\underline{U} = \underline{Z}\,\underline{I} = \dfrac{\underline{I}}{\underline{Y}} = \dfrac{20\ \mathrm{mA}}{1{,}02 \cdot 10^{-2} e^{j11{,}3^\circ}\ \mathrm{S}} = 1{,}96 e^{-j11{,}3^\circ}\ \mathrm{V}$. Da dobimo »nazaj« napetostni signal, moramo kompleksor napetosti pomnožiti z $e^{j\omega t}$ in upoštevati le realni del: $u(t) = \mathrm{Re}\left\{1{,}96 e^{-j11{,}3^\circ} \cdot e^{j\omega t}\ \mathrm{V}\right\} = 1{,}96\cos(10^{-3}\,\mathrm{s}^{-1} t - j11{,}3^\circ)\ \mathrm{V}$.

Primer izračuna impedance vezja, toka v vezje in delovne moči: Na sponke vezja na sliki priključimo napetostni vir z amplitudo 400 V in frekvenco 50 Hz. Določimo impedanco vezja, tok v vezje in delovno moč. (*C* = 100 µF, *L* = 20 mH, *R* = 20 Ω)



<u>Izračun:</u> Izračunamo impedanco vezja $\underline{Z} = \underline{Z}_C + \underline{Z}_L \| R$, kjer je $\underline{Z}_C = \frac{1}{j\omega C} = -j31,3\ \Omega$ in $Z_L = j\omega L = j6,28\ \Omega$ in $\underline{Z}_L \| R = \frac{j6,28 \cdot 20}{j6,28 + 20}\ \Omega = (1,79 + j5,7)\,\Omega$. Impedanca vezja je torej $\underline{Z} = (-j31,3 + 1,79 + j5,7)\,\Omega\ =\ (1,79 \text{ - } j25,58)\,\Omega = 26,2e^{\text{-}j86^{\circ}}\,\Omega$. Tok v vezje je $\underline{I} = \underline{\mathrm{U}}\underline{\mathrm{Y}} = \frac{400\ \mathrm{V}}{26,2 \cdot e^{-j86^0}}\ \mathrm{S} \cong 15,3e^{j86^0}\ \mathrm{A}$. Delovno moč dobimo iz $P = \frac{U_m I_m}{2}\cos(\varphi) = \frac{400\,\mathrm{V} \cdot 15,6\,\mathrm{A}}{2}\cos(-86^0) = 213,45\ \mathrm{W}$.

Primer določitve impedance in admitance iz znane napetosti in toka: Tok v zaporedno vezavo dveh elementov je $i(t) = 5\cos(\omega t + 45^0)\ \mathrm{A}$, napetost pa $u(t) = 20\cos(\omega t - 10^0)\ \mathrm{V}$. Določimo vrednosti elementov, če je $\omega = 5\ \mathrm{kHz}$.

<u>Izračun</u>: Tvorimo kompleksorja toka in napetosti: $\underline{I} = 5e^{j45^0}\ \mathrm{A}$ in $\underline{U} = 20e^{-j10^{\circ}}\ \mathrm{V}$. Določimo impedanco: $\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{20e^{-j10^{\circ}}\ \mathrm{V}}{5e^{j45^{\circ}}\ \mathrm{A}} = 4e^{-j55^{\circ}}\ \Omega$. Sedaj zapišemo v obliki realnega in imaginarnega dela: $\underline{Z} = 4\left(\cos(\text{-}55^{\circ}) + j\sin(\text{-}55^{\circ})\right) \cong (2,29 - j3,28)\ \Omega$. Očitno bo en element upor vrednosti 2,29 Ω, drug element pa bo kondenzator z reaktanco $-3,28 = -\frac{1}{\omega C} \quad \Rightarrow \quad C = 6,1\ \mu\mathrm{F}$.

Dodatno: Določite elementa vzporedne vezave vezij za enak tok in napetost.

<u>Izračun:</u> $R \cong 6,98\ \Omega, \quad C \cong 97,66\ \mu\mathrm{F}$.

Vprašanja za obnovo:

1) Kako analizirano vezja, ki so vzbujana z izmeničnimi signali?
2) Kompleksno število: računanje s kompleksnimi števili, Eulerjev obrazec, zapis signala s kompleksorjem, prehod iz časovnega signala v kompleksni zapis in obratno.
3) Zveze med kompleksorji toka in napetosti na uporu, tuljavi in kondenzatorju.
4) Zapis Kirchoffovih zakonov s kompleksorji.
5) Definicija impedance in admitance. Impedanca in admitanca posameznih elemenotv vezja.
6) Definicija reaktance in susceptance. Reaktanca in susceptanca tuljave in kondenzatorja.
7) Zaporedna in vzporedna vezava impedanc in admitanc.

Primeri izpitnih in kolokvijskih nalog

Izpit, 19. 11. 2004
Izpit 20. 06. 2005 (4)
Izpit, 17. 4. 2003 (3)
Izpit, 17. 09.2002 (3)
Izpit, 17.04.2003
Izpit, 11.12.2002 (3)

21. MOČ S KOMPLEKSNIM RAČUNOM

Vsebina: Zapis moči s kompleksnim računom, delovna, jalova, navidezna moč, bilanca moči, kompenzacija jalove moči, maksimalna moč.

Ugotovili smo že, da moč poljubnega (linearnega) dvopola niha z dvojno frekvenco vzbujalnega signala okoli povprečne – delovne moči $P = \frac{U_m I_m}{2}\cos(\varphi)$. Moč niha z amplitudo $S = \frac{U_m I_m}{2}$ okoli povprečne (delovne) moči. S imenujemo navidezna moč. Jalovo moč, definirana kot $Q = \frac{U_m I_m}{2}\sin(\varphi)$, direktno iz časovnega signala moči ne moremo razbrati (razen če je breme čisto kapacitivno ali induktivno), lahko pa jo določimo iz. t.i. trikotnika moči, saj velja $S^2 = P^2 + Q^2$. Lahko pa časovni signal moči razdelimo na dva signala: enega, ki je vedno pozitiven in niha okoli povprečne moči in predstavlja skupno moč na uporih in drugega, ki niha okoli ničle in predstavlja moč na tuljavah in kondenzatorjih. Slednji je v povprečju enak nič, amplituda tega signala pa je jalova moč $Q = \frac{U_m I_m}{2}\sin(\varphi)$.

SLIKA: Prikaz časovnega signala moči in razdelitev na dva signala: enega, ki predstavlja moč na uporih in enega, ki predstavlja moč na tuljavah in kondenzatorjih.

Navidezno moč lahko zapišemo tudi s kompleksorjem v obliki

$$\underline{S} = P + jQ, \tag{21.1}$$

oziroma

$$\underline{S} = S\left(\cos(\varphi) + j\sin(\varphi)\right) = Se^{j\varphi} \tag{21.2}$$

Fazni kot je razlika faznih kotov napetostnega in tokovnega signala: $\varphi = \varphi_u - \varphi_i$. Če to upoštevamo v enačbi (21.2), lahko kompleksor moči zapišemo v obliki $\underline{S} = \frac{I_m U_m}{2} e^{j\varphi_u} e^{-j\varphi_i}$, oziroma kot

$$\boxed{\underline{S}=\frac{1}{2}\underline{U}\,\underline{I}^{*}},\tag{21.3}$$

pri čemer sta $\underline{U}=U_m e^{j\varphi_u}$ in $\underline{I}=I_m e^{j\varphi_i}$ kompeksorja napetosti in toka. Pri izračunu moči s kompleksorji je torej potrebno upoštevati konjugirano vrednost kompleksorja toka.

Če pri enačbi (21.3) upoštevamo še Ohmov zakon v kompleksnem zapisu, dobimo uporabne zveze:

$$\underline{S}=\frac{1}{2}\underline{I}\,\underline{Z}\,\underline{I}^{*}=\frac{1}{2}|\underline{I}|^{2}\,\underline{Z}=\frac{1}{2}I^{2}\underline{Z}=\frac{1}{2}U^{2}\underline{Y}^{*}\tag{21.4}$$

Delovna moč predstavlja realno, jalova pa imaginarno komponento kompeksorja navidezne moči,

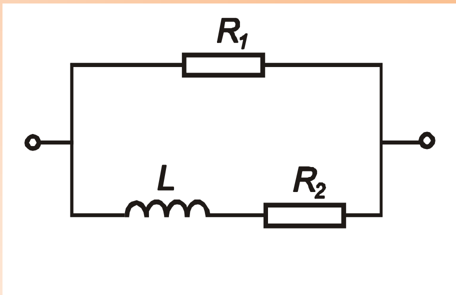
$$P=\mathrm{Re}\{\underline{S}\}=\mathrm{Re}\left\{\frac{1}{2}I^{2}\underline{Z}\right\}=\frac{1}{2}I^{2}\,\mathrm{Re}\{\underline{Z}\}\tag{21.5}$$

$$Q=\mathrm{Im}\{\underline{S}\}=\mathrm{Im}\left\{\frac{1}{2}I^{2}\underline{Z}\right\}=\frac{1}{2}I^{2}\,\mathrm{Im}\{\underline{Z}\}\tag{21.6}$$

Primer izračuna moči s kompleksnim računom:

Izračunajmo delovno, jalovo in navidezno moč vezja na sliki, ki je vzbujano z napetostnim signalom $u(t)=50\sin(\omega t)$ V.

$R_1=10\ \Omega,\ R_2=5\ \Omega,\ L=100\ \mathrm{mH},\ \omega=50\ \mathrm{s}^{-1}$.



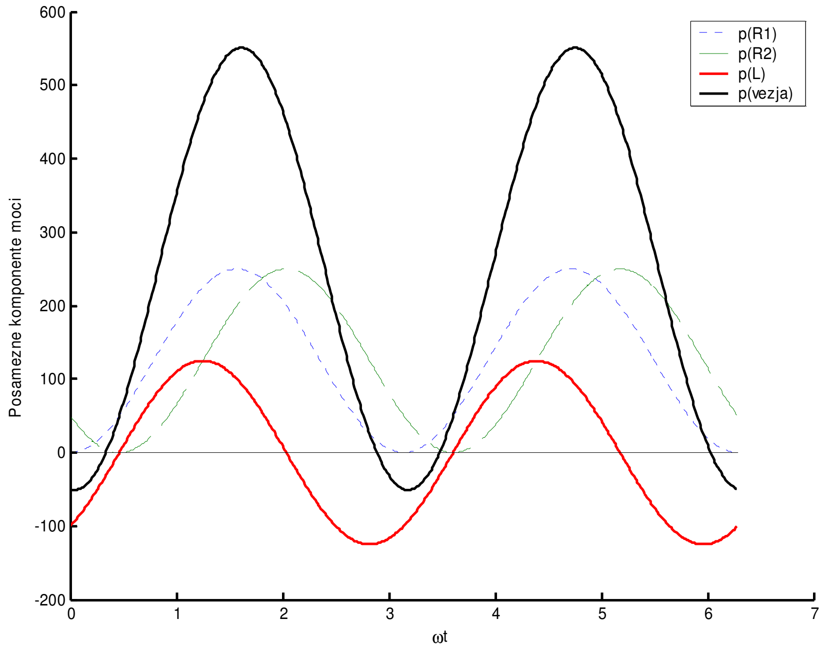
Izračun: V konkretnem primeru je najenostavneje izračunati admitanco vezja, ki je enaka

$\underline{Y}=\dfrac{1}{R_1}+\dfrac{1}{R_2+j\omega L}$, kar je z vstavitvijo vrednosti enako $\underline{Y}=\dfrac{1}{10\ \Omega}+\dfrac{1}{(5+j50\cdot 0{,}1)\ \Omega}=0{,}1\ \mathrm{S}+\dfrac{1-j}{10}\ \mathrm{S}=0{,}1(2-j)\ \mathrm{S}$. Za določitev moči zadostuje poznavanje absolutne vrednosti napetosti (ali toka). Dobimo

$\underline{S}=\dfrac{1}{2}U^{2}\underline{Y}^{*}=\dfrac{1}{2}(50\ \mathrm{V})^{2}\cdot 0{,}1(2+j)\mathrm{S}=125(2+j)\ \mathrm{VA}$, torej je delovna moč 250 W, jalova 125 Var-ov, navidezna pa 279,5 VA. Faktor moči je $\cos(\varphi)=\dfrac{P}{S}=0{,}45$.

Dodatno: vprašajmo se o močeh na posameznih elementih vezja. Naredimo primerjavo tako, da izračunamo posebej moč na uporu R_1 in R_2. Moč na uporu R_1 lahko izračunamo neposredno, saj je na tem uporu celotna priključena napetost in je torej $P_{R1} = \dfrac{U^2}{2R_1} = \dfrac{(50\,\mathrm{V})^2}{2 \cdot 10\,\Omega} = 125\,\mathrm{W}$. Moč na uporu R_2 dobimo iz toka skozi ta upor, ki je $\underline{I}_2 = \dfrac{\underline{U}}{R_2 + j\omega L}$, oziroma amplituda toka $I_2 = \dfrac{U}{\sqrt{R_2^2 + (\omega L)^2}} = 7{,}07\,\mathrm{A}$. Moč na tem uporu bo torej $P = \dfrac{1}{2}(7{,}07\,\mathrm{A})^2\, 5\Omega = 125\,\mathrm{W}$.

Oglejmo si še sliko, ki prikazuje posamezne prispevke moči v vezju ter seštevek.



SLIKA: Posamezne komponente moči na elementih vezja in skupna moč. Skupna moč (črna polna črta) niha z dvojno frekvenco, na uporih (črtkana in pikčasta črta) je vedno pozitivna, na tuljavi (rdeča polna črta) pa niha okoli ničle. Amplituda izmenjalne moči je jalova moč (125 VAr-ov), amplitudi posameznih delovnih moči pa sta tudi 125 W, skupaj 250 W. (moc2.m)

Pozor: Pri gornjih zapisih je potrebno biti previden v toliko, da se zavedamo, da smo tvorili kompleksorje toka in napetosti z upoštevanjem amplitude časovnega signala. Pogosto se v literaturi pojavljajo tudi oblike zapisa moči z upoštevanjem efektivnih vrednosti toka in napetosti, ki so od maksimalnih pri harmoničnih signalih manjše za $\sqrt{2}$. Primer zapisa z efektivnimi vrednostmi toka in napetosti bi torej bil $\underline{S} = \underline{U}_{ef}\underline{I}_{ef}^*$, pri čemer se pogosto index *ef* kar izpušča. Za pravilno uporabe formule za moč moramo torej vedeti, da pri uporabi amplitud signalov upoštevamo faktor $1/2$, pri efektivnih pa je že upoštevan.

BILANCA MOČI

Vzemi primer iz prejšnjega poglavja in izračunajmo moč, ki jo v vezje pošilja napetostni generator. Ugotovimo lahko, da je ta moč $p_g(t) = u_g(t) \cdot i_g(t)$ enaka moči vezja. Torej je moč, ki jo generator pošilja v vezje enaka potrošeni moči. Lahko ugotovimo še več: to moč lahko razdelimo v jalovo in delovno in ugotovimo, da mora veljati tudi ta bilanca. Poleg tega velja tudi splošno, za več generatorjev.

Vsota moči virov (generatorjev) = vsota moči na bremenih vezja

Primer določitve kompleksorja moči: Kot primer lahko vzamemo kar prejšnji primer, kjer smo že ugotovili, da je moč na uporih enaka 2x125 W, na tuljavi pa 125 Var-ov, skupaj torej $\underline{S} = 125(2+j)\ \mathrm{VA}$. Tok v vezje dobimo iz admitance in bo $\underline{I} = \underline{U} \cdot \underline{Y} = 50\,\mathrm{V} \cdot 0{,}1(2-j)\ \mathrm{S} = 5(2-j)\mathrm{A}$. Moč v vezje bo torej $\underline{S} = \frac{1}{2}\underline{U} \cdot \underline{I}^* = \frac{1}{2}U^2\underline{Y}^*$, kar pa je ista enačba, s katero smo že izračunali moč vezja.

KOMPENZACIJA JALOVE MOČI

Večina električnih naprav ima induktivni karakter, saj za pretvarjanje iz električne v mehansko energijo običajno vsebujejo navitja. To so predvsem razni motorji, transformatorji, dušilke, varilni aparati, indukcijske peči, fluorescenčne svetilke in podobno. Ti potrebujejo energijo za vzpostavljanje in »zmanjševanje« magnetnega polja, ki se manifestira v izmenjalni moči, ta pa v jalovi moči, ki je definirana kot amplituda te izmenjalne moči. Jalova moč je potrebna za delovanje električnih naprav, torej se ji ne moremo izogniti. Bremeni pa ta moč električno omrežje in jo v tem smislu porabnik tudi plačuje. Jalovo moč je navzven mogoče do določene mere kompenzirati, to pomeni, da bremenu dodamo elemente, ki izmenjujejo energijo z bremenom. V ta namen se najpogosteje uporablja vzporedno vezavo kondenzatorjev. Ločimo **popolno in nepopolno kompenzacijo**. Pri popolni kompenzaciji breme navzven deluje kot ohmsko, torej je jalova moč navzven enaka nič. Pri nepopolni kompenzaciji pa jalovo moč le zmanjšamo do določene mere. Pogosto za mero kompenzacije uporabimo faktor delavnosti $\cos(\varphi)$. Popolna kompenzacija terja, da je faktor delavnosti enak 1. Pogosto ne želimo ali pa ne potrebujemo popolne kompenzacije delovne moči. V tem primeru uporabimo kondenzatorje za zmanjšanje, ne pa tudi izničenje jalove moči. Poglejmo kar primer.

Primer izračuna kompenzacije moči: Določimo velikost kompenzacijskega kondenzatorja (kondezatorjev) za popolno kompenzacijo bremena iz primera 1. Kondenzator(je) vežemo vzporedno bremenu.

Izračun: Tudi pri priključenem kondenzatorju je (jalova) moč tuljave še vedno enaka 125 Var-ov, zapišimo jo kot $Q_L = 125\,\mathrm{VAr}$. Ta je pozitivnega predznaka, ki jo kompenziramo z reaktivno (jalovo) močjo kondezatorja, ki bo $jQ_C = \frac{1}{2}U^2\underline{Y}_C^* = \frac{1}{2}U^2(-j\omega C)$, oziroma $Q_C = -\frac{1}{2}U^2\omega C$.

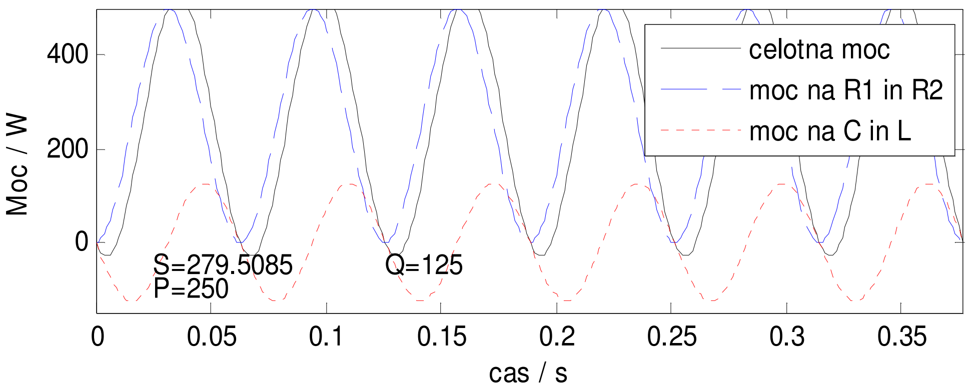
Veljati mora $Q_L + Q_C = 0$, oziroma $C = \dfrac{2 \cdot 125\,\mathrm{VAr}}{U^2\omega} = 2\,\mathrm{mF}$ [1].

SLIKA: Trikotnik moči s prikazom popolne kompenzacije jalove moči.

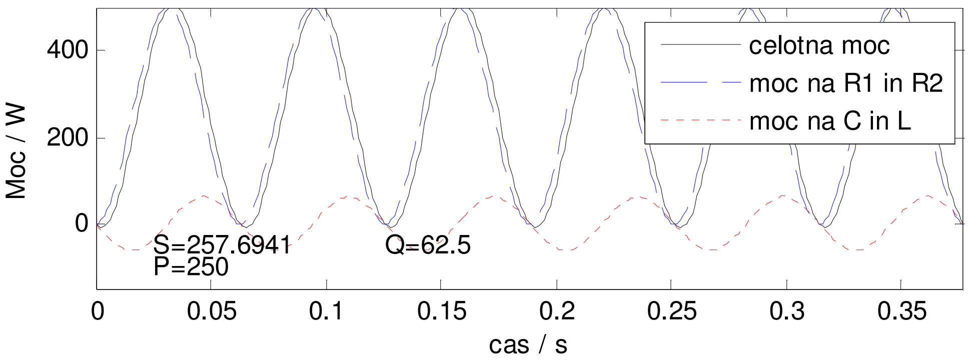
Primer izračuna kompenzacije moči: Vzemimo, da želimo za kompenzacijo moči iz primera 1 in 2 uporabiti kondenzator s kapacitivnostjo 0,5 mF. Za koliko procentov bomo zmanjšali jalovo energijo?

Izračun: Z uporabo enakih zvez kot v primeru 2 ugotovimo jalovo komponento moči na kondenzatorju, ki bo $Q_C = -\frac{1}{2}U^2\omega C = -31{,}25\,\mathrm{VAr}$. Celotno jalovo komponento bomo zmanjšali za $125\ \mathrm{VAr} - 31{,}25\ \mathrm{VAr} = 93{,}75\ \mathrm{VAr}$, kar je za 25%. Izračunajmo še faktor moči, ki bo sedaj $S = \sqrt{P^2 + Q^2} = 267\,\mathrm{VA}$ in $\cos(\varphi) = \frac{P}{S} \cong 0{,}94$.

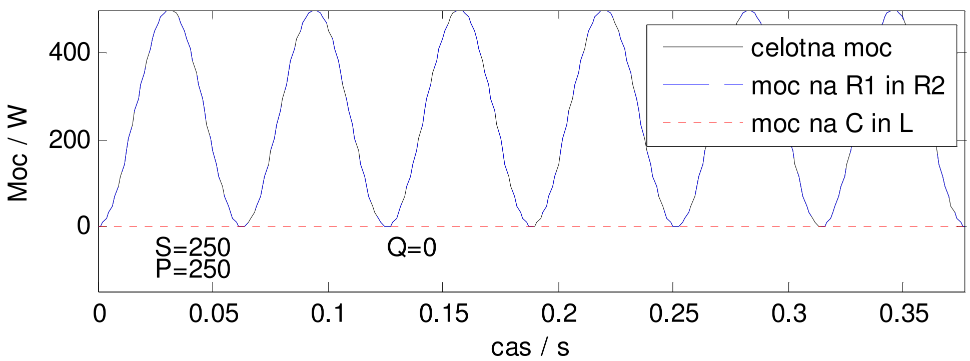
SLIKA: Trikotnik moči z delno kompenzacijo jalove moči.



a)

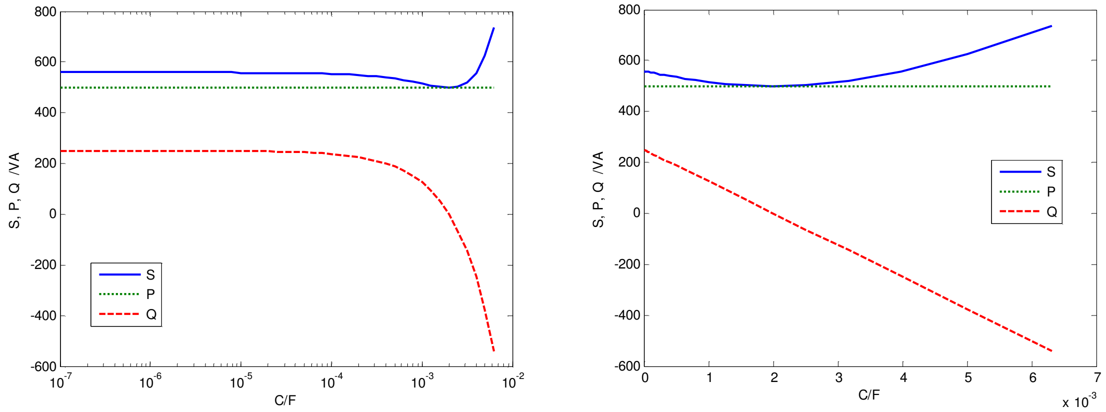


b)



c)

SLIKA: Celotna moč, moč na uporih R_1 in R_2 ter moč na C in L pri a) nekompenziranem vezju, b) delno kompenziranem vezju (C = 1 mF) in c) popolnom kompenziranem vezju (C = 2 mF). (RL_kompenzacija_moci.m)



SLIKA: Spreminjanje *S*, *P* in *Q* s spreminjanjem vrednosti kompenzacijskega kondezatorja. Na desni linearna, na levi logaritemska skala abscise. Ko je *Q* = 0 Varov, je navidezna moč (S) najmanjša in enaka delovni moči (P). (RRL_kompenzacija_moci.m)

PRILAGODITEV BREMENA – MAKSIMALNA DELOVNA MOČ

V katerem primeru bo moč na bremenu največja? Enako vprašanje smo si zastavili tudi pri enosmernih vezjih in prišli do zaključka, da bo to tedaj, ko bo upornost bremena enaka nadomestni notranji upornosti gledano s sponk bremena. Pogosto smo jo določili kot Theveninovo ali Nortonovo nadomestno upornost. Tudi pri vezjih z izmeničnimi signali ni dosti drugače.

Ogledati si moramo razmere, ko na realni vir, ki ga lahko opišemo s kompleksorjema napetosti generatorja $\underline{U}_g$ in notranje kompleksne upornosti generatorja $\underline{Z}_g$, priključimo kompleksno breme $\underline{Z}_b$. Moč na bremenu dobimo kot realni del kompleksorja navidezne moči $P = \mathrm{Re}\{\underline{S}_b\}$ in je $P = \frac{1}{2} I^2 \,\mathrm{Re}\{\underline{Z}_b\} = \frac{1}{2} I^2 R_b$. Amplitudo toka dobimo iz preproste zveze $\underline{U}_g = \underline{I}(\underline{Z}_g + \underline{Z}_b) = \underline{I}\left(R_g + R_b + j(X_g + X_b)\right)$ od koder izpeljemo

$$P_b = \frac{1}{2} R_b \frac{U_g^2}{(R_g + R_b)^2 + (X_g + X_b)^2}. \tag{21.7}$$

Sedaj se vprašamo, v katerem primeru bo ta moč največja. Vsekakor tedaj, ko bo imenovalec čim manjši, to pa bo tedaj, ko bo

$$X_g = -X_b. \tag{21.8}$$

Najprimernejši ohmski upornosti pa bi dobili z odvajanjem moči po določeni upornosti. Ugotovili bi podobno kot pri enosmernih vezjih, da bo delovna moč največja tedaj, kot bosta ohmski upornosti bremena in generatorja enaki:

$$R_g = R_b. \tag{21.9}$$

Če združimo ugotovitve o reaktivnih in ohmskih komponentah v en zapis, lahko zapišemo pogoj za maksimalno delovno moč na bremenu

$$\boxed{\underline{Z}_g = \underline{Z}_b^*} \tag{21.10}$$

Velja tudi obratno: $\underline{Z}_b = \underline{Z}_g^*$. Ko to velja rečemo tudi, da je **breme prilagojeno na harmoničen vir**.

Pogoja za maksimalno moč (21.8) in (21.9) vstavimo v enačbo (21.7) in dobimo izraz za maksimalno moč na prilagojenem vezju[10]

$$\boxed{P_{b,\max} = \frac{U_g^2}{8R_g}} \tag{21.11}$$

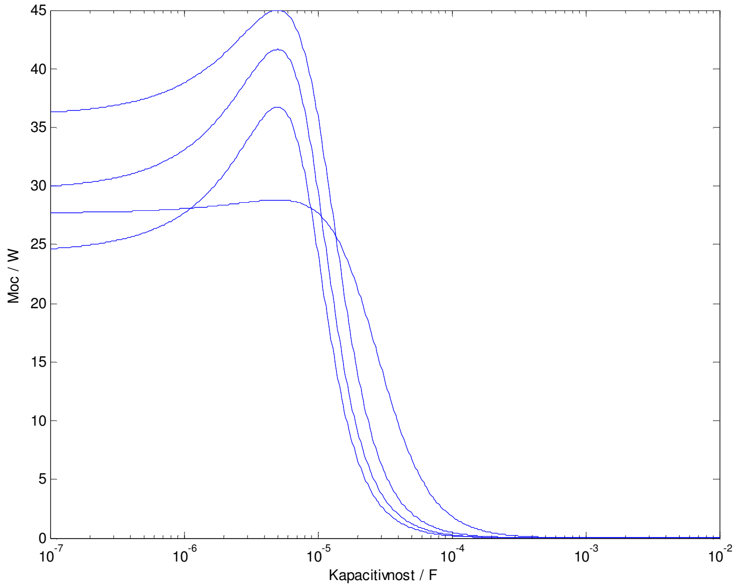
Primer prilagoditve bremena za maksimalno moč: Vir z notranjo upornostjo, ki jo predstavimo z zaporedno vezavo upora $R_g = 10\,\Omega$ in tuljave z $X_L = \omega L = 10\ \Omega$ je priključen na breme iz vzporedno vezanega upora in kondezatorja. Določimo vrednosti bremenskih upornosti, da bo na bremenu maksimalna moč. $\omega = 10^4\ \mathrm{s}^{-1}$.

Izračun: Veljati mora $\underline{Z}_b = \underline{Z}_g^*$, torej tudi $\underline{Y}_b = \frac{1}{\underline{Z}_g^*} = \frac{1}{R_b - j\omega L} = \frac{1}{10 - j10}\mathrm{S} = \frac{1+j}{20}\mathrm{S}$. Ker je $\underline{Y}_b = G_b + j\omega C$, mora biti ob izpolnitvi pogoja za maksimalno moč na bremenu $G_b = \frac{1}{20}\mathrm{S} \;\Rightarrow\; R_b = 20\,\Omega$ in $C = \frac{1}{\omega \cdot 20} = 5\ \mu\mathrm{F}$.

SLIKA: Vezje priključeno na kompleksno breme.

---

[10] Če je kompleksor napetosti določen iz efektivne vrednosti, velja $U_{g,ef} = U_g/\sqrt{2}$ in $P_{b,\max} = \frac{U_{g,ef}^2}{4R_g}$.



SLIKA: Slika prikazuje delovno moč na bremenu pri spreminjanju kapacitivnosti za različne upornosti bremena. Upornosti se vrstijo od 5 Ω, 20 Ω, 35 Ω in 50 Ω. Največjo moč dosežemo (kot pričakovano) pri kapacitivnosti 5 μF in upornosti bremena 20 Ω. (maxmoc.m)

```
% maksimalna moc, Matlab program

Rg=10; L=1e-3; om=1e4; Rb=20; U=60;

Zg=Rg+j*om*L;

for Rb=5:15:50

ii=2:0.01:7;

C=10.^(-ii);

Yb=1/Rb+j*om.*C;

Zb=1./Yb;

I=U./(Zg+Zb);

Pb=0.5*I.*conj(I).*real(Zb);

semilogx(C,Pb)

hold on

end

xlabel('Kapacitivnost / F')

ylabel('Moc / W')
```

MAKSIMALNA MOČ PRI LE OHMSKEM ALI LE INDUKTIVNEM BREMENU

Kaj pa če ne moremo poljubno izbirati vseh komponent? Na primer, da ima vir le ohmsko ali pa le induktivno breme. Potem ugotovimo, da lahko $\underline{Z}_g = \underline{Z}_b^*$ pomnožimo s konjugiranimi vrednostmi in dobimo pravilo, da morajo biti enake absolutne vrednosti bremena in vira:

$$\left|\underline{Z}_b\right| = \left|\underline{Z}_g\right| \tag{21.12}$$

Če imamo na razpolago le R_b ne pa tudi X_b, mora biti le ta za maksimalno moč enak $R_b = \left|\underline{Z}_g\right|$. Ustrezno se spremeni tudi izraz za maksimalno moč, ki bo sedaj

$$P_{b,max} = \frac{U_g^2}{4\left(R_g + Z_g\right)}. \tag{21.13}$$

Za obnovo:

1) Izračun moči s kompleksorjem toka in napetosti.
2) Zapis kompleksne moči z delovno in jalovo komponento. Trikotni moči.
3) Različni zapisi moči z upoštevanjem Ohmovega zakona.
4) Tellegenov stavek – bilanca moči.
5) Kompenzacija jalove moči. Priključitev kondenzatorja. Popolna in nepopolna kompenzacija. Izračun potrebne velikost kondenzatorja.
6) Prilagoditev moči – maksimalna moč na bremenu: kdaj nastopi, pogoj če je breme kompleksno ali če je čisto realno (upor). Kako določimo potrebno velikost bremena za optimalno prilagoditev? Enačba za določitev maksimalne moči.

Primeri izpitnih in kolokvijskih nalog

Izpit, 9. junij 2005

izpit, 14. junij 2006

izpit, 20. junij 2006 (5)

22. RESONANČNI POJAV

Vsebina: Zaporedni in vzporedni nihajni krog ali tokovna in napetostna resonanca. Pogo za resonanco in določitev resonančne frekvence in bočnih frekvenc. Dodatni pojmi kot npr. pasovna širina, normirana pasovna širina, kvaliteta vezja, dušenje, razglašenost.

V vezjih s harmoničnimi signali je posebno zanimiv pojav, ko na zunanjih sponkah vezja (pa tudi na določenih elementih vezja) pri določeni frekvenci dosežemo izrazito visoke napetosti ali toke. Tej frekvenci rečemo resonančna frekvenca, vezje pa je tedaj v resonanci. Podrobneje si bomo pogledali le vezji z zaporedno ali vzporedno vezavo upora, kondenzatorja in tuljave. Ti vezji imenujemo tudi zaporedni in vzporedni nihajni krog.

Resonančne pojave v elektrotehniki pogosto koristno uporabimo za različna filtriranja ali prilagoditve, lahko pa so tudi nezaželeni (samozagon motorjev, itd).

ZAPOREDNI NIHAJNI KROG - TOKOVNA RESONANCA

SLIKA: Zaporedni nihajni krog.

Vzemimo najprej primer zaporednega nihajnega kroga, ki ga sestavljajo zaporedna vezava kondenzatorja, upora in tuljave. Na vhod priključimo napetostni harmonični vir $u(t) = U\cos(\omega t)$.

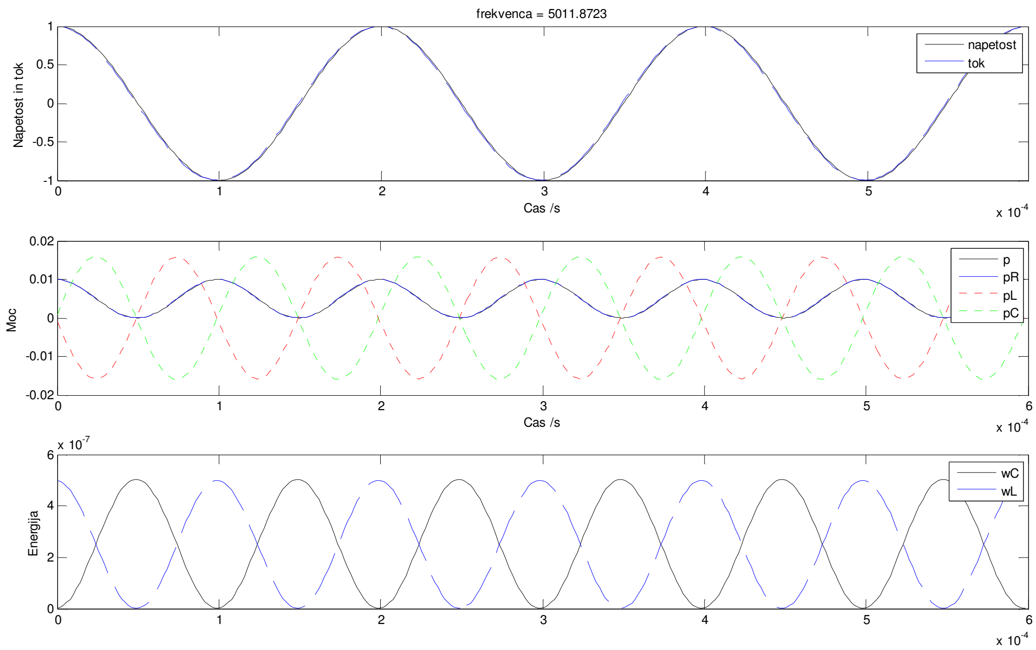
Napetosti na kondenzatorju in tuljavi sta fazno zamaknjeni za π, rečemo tudi, da sta v protifazi. Ko je trenutna moč na tuljavi v naraščanju, je na kondenzatorju v upadanju. Njuna vsota je v resonanci enaka nič. Kompleksorji napetosti na posameznih elementih vezja so:

$$\underline{U}_R = \underline{I}R$$
$$\underline{U}_L = \underline{I}\,j\omega L$$
$$\underline{U}_C = \underline{I}\frac{1}{j\omega C}$$

Moči določimo kot $P = \frac{1}{2}I^2R$, $Q_L = \frac{1}{2}I^2\omega L$ in $Q_C = -\frac{1}{2}I^2\frac{1}{\omega C}$. Pri nizkih frekvencah (pred resonančno frekvenco) je amplituda moči na kondenzatorju velika, saj je na njem velika napetost. Z višanjem frekvence se povečuje moč na tuljavi, ki je ves čas v protifazi z močjo na kondenzatorju (ti moči se torej (gledano iz zunanjih sponk) odštevata). Z bližanjem resonančni frekvenci se povečuje tok skozi zaporedno vezavo in s tem tudi moč na uporu. V resonanci sta moči na tuljavi in kondenzatorju v protifazi in se s stališča zunanjih sponk popolnoma kompenzirata. Tedaj je »breme« čisto ohmsko, napetost in tok sta v fazi, tok je maksimalen in enak *U/R*.

SLIKA: Kompleksorji napetosti in toka pred, pri in po resonančni frekvenco.

Energija je integral moči. Na uporu se energija porablja, na tuljavi in kondenzatorju pa se shranjuje v obliki magnetnega oziroma električnega polja. V resonanci je vezje čisto ohmsko, energija tuljave in kondenzatorja se izmenjuje 2x v periodi.



SLIKA: Prikaz napetosti in toka (zgoraj), moči na posameznih elementih vezja (sredina) in energija na kondenzatorju in tuljavi v resonanci. Tok in napetost na zunanjih sponkah sta v fazi, moči na tuljavi in kondenzatorju sta v protifazi in se odštevata, energija med kondenzatorjem in tuljavo se izmenja 2x v periodi signala.

IZRAČUN RESONANČNE FREKVENCE IN TOKA PRI RESONANCI

$$\underline{U} = \underline{U}_R + \underline{U}_L + \underline{U}_C = \underline{I}R + \underline{I}\,j\omega L + \underline{I}\frac{1}{j\omega C} = \underline{I}\left(R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}\right) = \underline{I}\,\underline{Z}\,.$$

Impedanca vezja je torej: $\underline{Z} = R + j\omega L - j\dfrac{1}{\omega C}$.

Tok v vezje je $|\underline{I}| = \left|\dfrac{\underline{U}}{\underline{Z}}\right| = \dfrac{U}{\left|R + j\left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)\right|} = \dfrac{U}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)^2}}$. Tok bo maksimalen, ko bo absolutna vrednost impedance najmanjša, ta pa bo tedaj, ko bo $\left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right) = 0$, kar bo pri t.i. **resonančni frekvenci** $\boxed{\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}}$.

Pri tej frekvenci bo imaginarni del impedance enak nič, impedanca vezja bo čisto ohmska, tok v vezje pa bo največji. Enak bo

$I(f = f_0) = I_0 = U / R$.

Vezje bo torej v resonanci tedaj, ko bo navzven (na zunanjih sponkah) čisto ohmsko: tok in napetost bosta v fazi. Pogoj za resonanco zaporedne vezave RLC je

$$\varphi = \varphi_u - \varphi_i = 0\,, \qquad (22.1)$$

oziroma, ko je

$$\mathrm{Im}\{\underline{Z}\} = 0 \qquad (22.2)$$

oziroma, ko je

$$\mathrm{Im}\{\underline{Y}\} = 0\,. \qquad (22.3)$$

Za izračun resonance vezja je primerna enačba (22.1) ali (22.2) ali (22.3), odvisno pač od tega, s katero obliko lažje pridemo do rezultata. Potrebno pa je poudariti, da je lahko pri vezjih, ki niso primer zaporedne ali vzporedne vezave upora, kondenzatorja in tuljave maksimum amplitude toka ali napetosti dosežen tudi pri različnih vrednostih kot izhajajo iz gornjih pogojev. Značilnost resonančnega pojava je v tem, da tedaj prihaja do usklajenega prehajanja energije iz elementov vezja, ki shranjujejo energijo v magnetnem polju (tuljave) v elemente, ki shranjujejo energijo v električnem polju (kondenzatorji). Zaradi tega so napetosti ali toki na elementih vezja v resonanci lahko mnogo večji kot na vhodnih sponkah. Razlog, da le te niso največje na vhodnih sponkah je v tem, da so ti toki ali napetosti v vezju v protifazi (zamaknjeni za 180^0 ali blizu) in se navzven med seboj odštevajo.

LASTNOSTI RESONANČNEGA VEZJA opisujemo z naslednjimi parametri:

Razglašenost vezja je določena z izrazom

$$\beta = \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}, \tag{22.4}$$

Kvaliteta vezja je določena s kvocientom moči na reaktivnem elementu in delovno močjo

$$Q = \frac{Q_{X_0}}{P} \tag{22.5}$$

kjer je $Q_{X_0} = \frac{1}{2} I^2 \omega_0 L = \frac{1}{2} I^2 \frac{1}{\omega_0 C}$ in $P = \frac{1}{2} I^2 R$, torej

$$Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{\sqrt{L/C}}{R} \tag{22.6}$$

Kvaliteta vezja je mera za »ozkost« resonančne krivulje. Bolj kot je krivulja ozka (strma okoli resonančne frekvence), večja je njena kvaliteta. V primeru zaporedne vezave elementov R, L, C je kvaliteta večja pri manjši upornosti.

Dušenje je soroden pojem kot kvaliteta, saj je definiran kot recipročna vrednost kvalitete

D = 1/*Q*.

Bočni frekvenci in pasovna širina

SLIKA: Tok kot funkcija frekvence. Označimo resonančno frekvenco f_0, tok pri resonančni frekvenci $I_0 = I(f = f_0)$, ter spodnjo in zgornjo bočno frekvenco (f_1 in f_2), ki nastopita pri $I_0/\sqrt{2}$ ter pasovno širino.

Bočni frekvenci (f_2 in f_1) sta določeni pri vrednostih toka, ki je od maksimalne vrednosti manjši za $\sqrt{2}$.

Razlika med zgornjo in spodnjo bočno frekvenco je **pasovna širina** vezja

$B = f_2 - f_1$. Poznamo tudi normirano pasovno širino, ki je pasovna širina deljena z resonančno frekvenco: $B_{\text{norm}} = \frac{f_2 - f_1}{f_0}$. Kvaliteta je definirana tudi kot recipročna vrednost normirane pasovne širine $Q = \frac{1}{B_{\text{norm}}} = \frac{f_0}{f_2 - f_1}$.

Določimo pasovno širino za serijsko resonančno vezje. Poiskati moramo frekvenci, pri kateri pade amplituda za $\sqrt{2}$. Veljati mora $I(\omega_{1,2}) = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \left(\omega_{1,2}L - \frac{1}{\omega_{1,2}C}\right)^2}} = \frac{I_{max}}{\sqrt{2}} = \frac{U}{R\sqrt{2}}$. Enačbi bo zadoščeno, če bo $R^2 + \left(\omega_{1,2}L - \frac{1}{\omega_{1,2}C}\right)^2 = 2R^2$ oziroma $\left|\omega_{1,2}L - \frac{1}{\omega_{1,2}C}\right| = R$, to pa bo tedaj, ko bo $\omega_1 L - \frac{1}{\omega_1 C} = -R$ in $\omega_2 L - \frac{1}{\omega_2 C} = R$. Če enačbi seštejemo, dobimo zvezo $LC = \frac{1}{\omega_1\omega_2} = \frac{1}{\omega_0^2}$ oziroma $\boxed{f_0^2 = f_1 f_2}$. Če pa enačbi odštejemo izpeljemo zvezo $B_{\text{norm}} = \frac{R}{\omega_0 L}$.

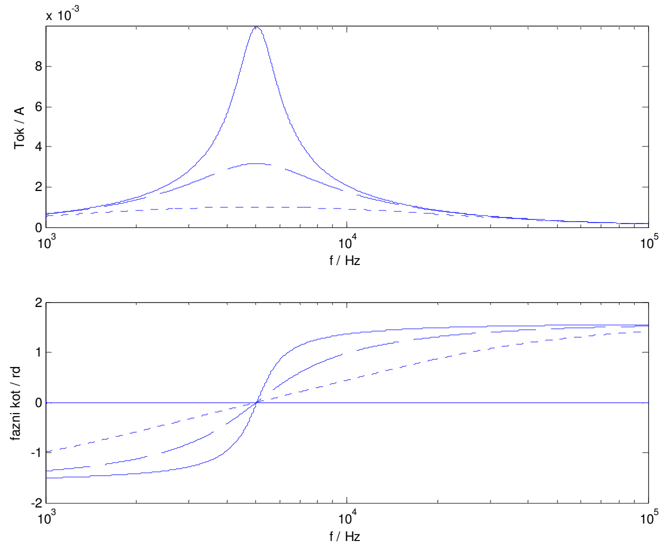
Da bi določili pasovno širino, moramo rešiti kvadratno enačbo, saj iz $\omega_1 L - \frac{1}{\omega_1 C} = -R$ sledi $\omega_1^2 L - \frac{1}{C} = \omega_1 R$. Rešitvi za ω_1 in ω_2 sta: $\omega_2 = \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \omega_0^2} + \frac{R}{2L}$ in $\omega_1 = \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \omega_0^2} - \frac{R}{2L}$.

DODATNI SLIKOVNI MATERIAL

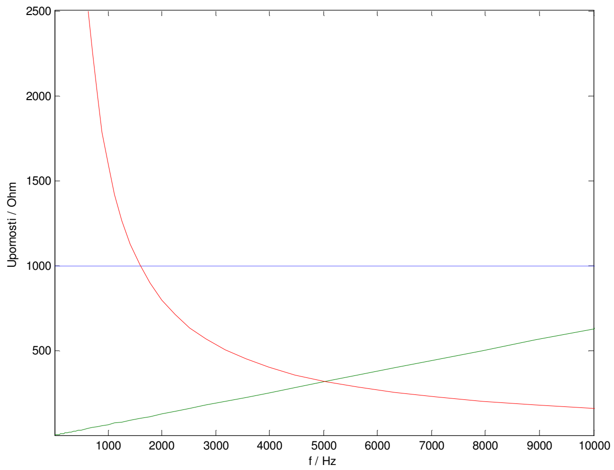
Slika A: Prikaz toka kot funkcijo frekvence (resonančna krivulja) za konkretne podatke za tri različne vrednosti upornosti. Opazujemo lahko obliko krivulj, spreminjanje faznega kota in kvaliteto vezja.

Slika B: Prikaz ohmskih upornosti kot funkcijo frekvence.

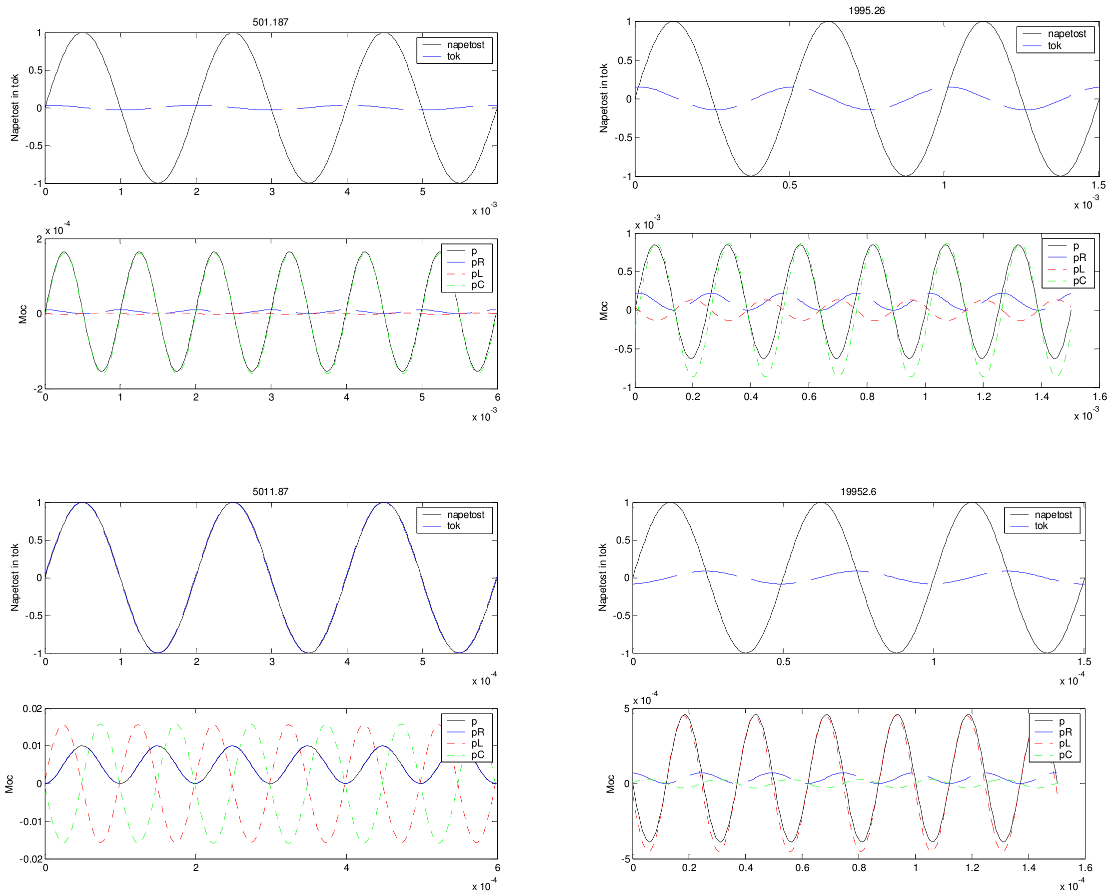
Slika C: Prikaz časovnega signala toka in napetosti ter moči na posameznih elementih pri različnih frekvencah (pred, po in pri resonanci).



SLIKA A: Primer zaporedne resonance pri vrednostih elementov *L* = 10 mH, *C* = 10 μF, *R* = 100 Ω (polna črta), 316 Ω (prekinjena črta) in 1000 Ω (pikčasta črta). Pri manjši upornosti je krivulja toka bolj ozka, kar določimo tudi s pasovno širino ali kvaliteto nihanjega kroga. Na spodnji sliki vidimo spreminjanje faznega kota, ki je pri resonančni frekvenci enak nič. Skala na abscisi je logaritemska. (RLC2.m)



SLIKA B: Spreminjanje posamezne upornosti s frekvenco. Pri resonančni frekvenci sta reaktanci tuljave in kondenzatorja enaki. (RLC2.m)



SLIKA C: Zgoraj: prikaz časovnega signala napetosti in toka pred (levo zgoraj, *f* = 901 Hz), tik pred (desno zgoraj, *f* = 2000 Hz) pri (levo spodaj, *f* = 5011 Hz) in za (desno spodaj, *f* = 901 Hz) resonančno frekvenco. Spodaj: Moč na uporu (pR), moč na tuljavi (pL), moč na kondenzatorju (pC) in skupna moč (p): Jalova moč v resonanci je enaka nič, na posameznih reaktivnih elementih (tuljava, kondenzator) pa je jalova moč velika vendar v protifazi. (RLC3.m)

VZPOREDNI NIHAJNI KROG - NAPETOSTNA RESONANCA

Imamo vzporedno vezavo upora, kondenzatorja in tuljave.

SLIKA: Vzporedni nihajni krog.

Napetost na sponkah vezja je $|\underline{U}| = |\underline{I}||\underline{Z}| = \frac{|\underline{I}|}{|\underline{Y}|} = \frac{I}{\sqrt{G^2 + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2}}$. Napetost na sponkah vezja bo maksimalna, ko bo izpolnjen pogoj $\omega C - \frac{1}{\omega L} = 0$. To pa je tudi tedaj, ko bo admitanca vezja ($\underline{Y} = G + j\omega C + \frac{1}{j\omega L}$) čisto realna, oziroma, ko bo imaginarni del admitance enak nič. Iz tega sledi, da bo resonančna frekvenca $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, kar je enako kot pri zaporedni resonanci.

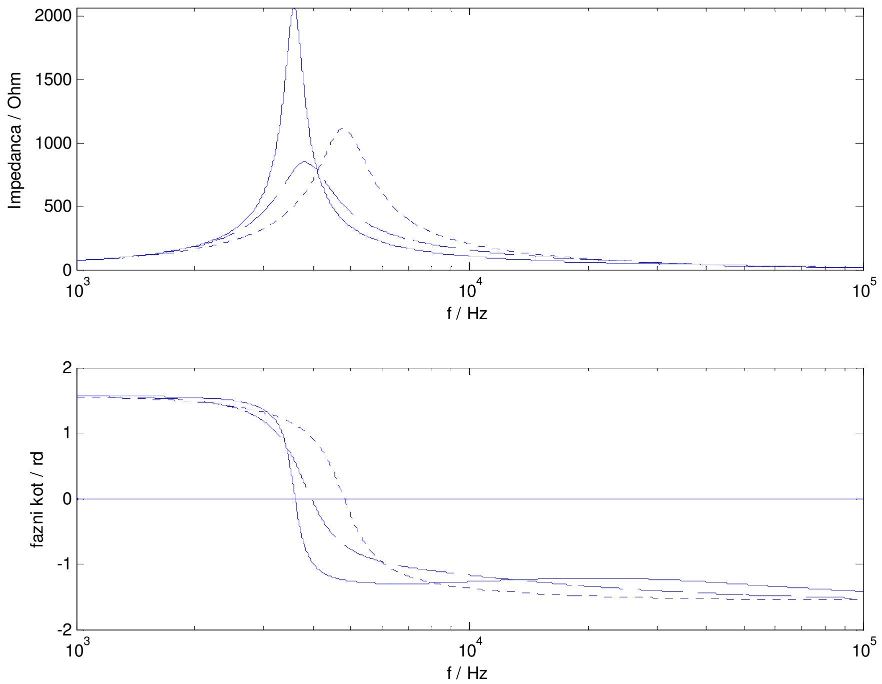
Admitanca tega vezja je $\underline{Y} = G + j\omega C + \frac{1}{j\omega L}$. Vezje bo v resonanci, ko bo imaginarni del admitance enak nič, to je, ko bo $\omega C - \frac{1}{\omega L} = 0$.

V čem je torej razlika med »vzporedno« in »zaporedno« resonanco? Razlika je v tem, da je sedaj pri resonančni frekvenci na zunanjih sponkah maksimalna napetost, pri zaporedni resonanci pa tok. Vzporedno resonanco zato tudi imenujemo napetostna, zaporedno pa tokovna resonanca.

Tudi pri vzporedni resonanci lahko govorimo o razglašenosti $\beta = \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}$, kvaliteti $Q = \frac{\omega_0 C}{G}$ in pasovni širini $B = \frac{1}{Q}$. Analogno zaporedni resonanci lahko izpeljemo zvezo med bočnima frekvencama in resonančno frekvenco $\boxed{f_0^2 = f_1 f_2}$.

DRUGA VEZJA

Vzemimo primer vezja vzporedno vezanih dveh impedanc: upora in kondenzatorja v eni veji in tuljave in kondenzatorja v drugi veji. Admitanca vezja bo $\underline{Y} = \dfrac{1}{R + \dfrac{1}{j\omega C}} + \dfrac{1}{R + j\omega L}$. S pomočjo analize admitance lahko ugotovimo, da gre za primer napetostne impedance, ki pa nima maksimuma vedno pri faznem kotu enakem nič. Pri R = 100 Ω (polna črta) je pri maksimumu impedance (toka) fazni kot enak 60^0, pri 316 Ω (prekinjena črta) $11{,}8^0$ in pri 1000 Ω (pikčasta črta) $1{,}7^0$. Vidimo tudi, da se pri različnih vrednostih upornosti ne spreminja le amplituda impedance (napetosti), pač pa tudi resonančna frekvenca.



SLIKA: Primer resonance vezja pri faznem kotu, ki je različen od nič. (RLC.m)

Vprašanja za obnovo:

1) Kaj je to resonančni pojav? Kaj je značilno za resonančni pojav?
2) Kakšne elemente moramo imeti v vezju, da pride do resonančnega pojava?
3) Kaj je to zaporedni in vzporedni nihajni krog? Kakšen je pogoj za resonanco? Kako določimo resonančno frekvenco? Kakšen je karakter bremena pri resonanci?
4) Prikaz časovnega poteka toka, napetosti in moči pred in ob resonanci.
5) Prikaz kazalcev napetosti/toka pri resonanci.
6) Razglašenost, kvaliteta vezja, dušenje, bočna frekvenca, pasovna širina.
7) Določitev resonančne frekvence za splošno vezje.

Izpit 19. 1. 2006

Izpit, 28. avgust 2006 (4)

Izpit, 6.02.2003 (4)

23. METODE REŠEVANJA VEZIJ

Vsebina poglavja: Metode za analizo vezij z izmeničnimi signali (metoda Kirchoffovih zakonov, metoda zančnih tokov, metoda spojiščnih potencialov), stavki (superpozicije, Theveninovo in Nortonovo nadomestno vezje, Tellegen). Posebnost pri izmeničnih vezjih – obravnava sklopljenih tuljav.

Načine analize enosmernih vezij smo že spoznali. Pri vezjih z izmeničnimi signali lahko ugotovimo, da smo z vpeljavo kompleksorjev toka in napetosti vpeljali sorodne relacije: s kompleksorji smo zapisali Ohmov zakon ter oba Kirchoffova zakona. Za reševanje vezij z izmeničnimi signali lahko torej uporabimo iste metode reševanja kot pri enosmernih, le s kompleksorji jih moramo pisati.

SKLOPLJENE TULJAVE. Imamo pa pri izmeničnih signalih še en poseben slučaj. In sicer magnetno sklopljene elemente, ki nastopajo v primeru obravnave vezij z najmanj dvema tuljavama, ki si delita del (ali celoten) fluksa. Ti elementi imajo zaradi sklopitve dodaten padec napetosti na tuljavi, ki se padcu napetosti zaradi lastne induktivnosti prišteva ali pa odšteva.

O označevanju podpiranja fluksov smo že govorili v prejšnjih poglavjih, torej samo na kratko: podpiranje (seštevanje) fluksov označimo tako, da postavimo piko v obeh sklopljenih elementih na začetek ali konec elementa glede na tok v element.

Ta dodatni padec napetosti lahko označimo s posebnim simbolom (romb) in ga imenujemo **tokovno krmiljen napetostni vir**. S takimi in podobnimi elementi si pomagamo tudi pri nadomestnih vezjih bolj zahtevnih elementov, kot so različni tipi nelinearnih elementov (tranzistorjev, ...).

Primer upoštevanja medsebojne induktivnosti: V veji s tokom $\underline{I}_1 = 10\,\mathrm{A}$ je tuljava z $X_{L1} = 10\ \Omega$, ki ima magnetni sklep (k = 0,8) s tuljavo z $X_{L2} = 90\,\Omega$ v sosednji veji s tokom $\underline{I}_2 = (2 + j5)\,\mathrm{A}$. Fluksa se podpirata. Kolikšna je napetost na tuljavama?

Izračun: Določiti moramo medsebojno induktivnost oziroma upornost zaradi medsebojne induktivnosti $\omega M = \omega k\sqrt{L_1 L_2} = k\sqrt{\omega L_1 \cdot \omega L_2} = k\sqrt{X_{L1} X_{L2}}$, ki bo 24 Ω. Nato določimo še padec napetosti kot

$$\underline{U}_1 = \underline{I}_1 \cdot jX_{L1} + \underline{I}_2 \cdot jX_M = 10\,\mathrm{A} \cdot j10\Omega + (2 + j5)\,\mathrm{A} \cdot j24\Omega = (-120 + j148)\,\mathrm{A}$$
$$\underline{U}_2 = \underline{I}_2 \cdot jX_{L2} + \underline{I}_2 \cdot jX_M = (2 + j5)\,\mathrm{A} \cdot j90\Omega + 10\,\mathrm{A} \cdot j24\Omega + = (-450 + j420)\,\mathrm{A}$$

SLIKA: Magnetno sklopljeni tuljavi. Napetost zaradi medsebojne induktivnosti lahko predstavimo s tokovno krmiljenim napetostnim virom.

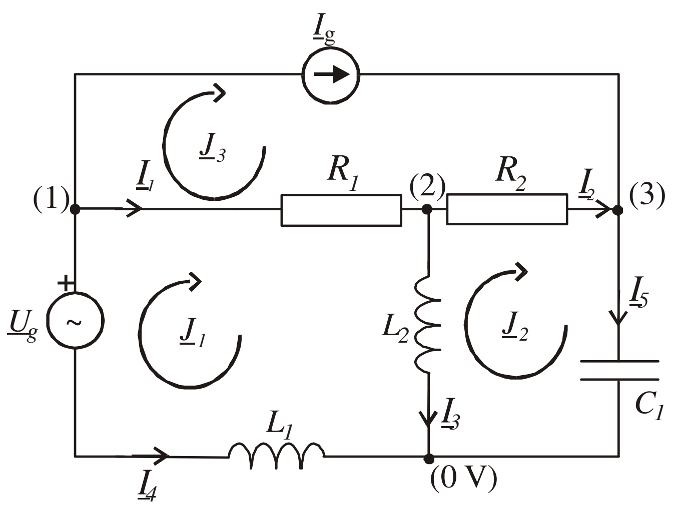
Osnovne metode za analizo vezij:

1) Metoda Kirchoffovih zakonov
2) Metoda zančnih tokov
3) Metoda spojiščnih potencialov

Stavki (teoremi):

1) Stavek superpozicije
2) Stavek Thevenina / Nortona
3) Stavek Tellegena
4) Stavek o največji moči

Vse omenjene metode analize in stavkov bomo prikazali na sledečem primeru vezja.



SLIKA: Primer vezja za analizo vezij: R_1 = 10 Ω, R_2 = 5 Ω, C = 5 μF, L_1 = 16,67 mH, L_2 = 50 mH, u_g = 100 cos(ωt) V, i_g = 1 cos(ωt +π/2) A, ω = 33,34 s^{-1}. (Matlab: metode.m)

Kompleksorji impedanc in virov so:

$$\underline{Z}_{L_1} = j\omega L = j5\,\Omega \;,\; \underline{Z}_{L_2} = j15\,\Omega \,,\; \underline{Z}_C = \frac{1}{j\omega C} = -j20\,\Omega \,,\; \underline{U}_g = 100\text{ V} \,,\; \underline{I}_g = j1\text{ A} .$$

METODA KIRCHOFFOVIH ZAKONOV

Temelji na uporabi 1. in 2 K. Z.:

1K.Z.: Vsota vseh tokov iz (ali v) spojišča je enaka nič, število enačb = število spojišč -1.

$$\text{spojišče (1): } \underline{I}_1 + \underline{I}_4 + \underline{I}_g = 0$$
$$\text{spojišče (2): } -\underline{I}_1 + \underline{I}_3 + \underline{I}_2 = 0$$
$$\text{spojišče (3): } -\underline{I}_2 + \underline{I}_5 - \underline{I}_g = 0$$
$$\text{spojišče (0): ni potrebno, odvečna enačba}$$

2.K. Z.: Vsota vseh napetosti v zanki je enaka nič, število enačb = številu dopolnilnih vej.

$$\text{zanka J}_1\text{: } \underline{I}_1 R_1 + \underline{I}_3 \underline{Z}_{L2} + (-\underline{I}_4 \underline{Z}_{L1}) - \underline{U}_g = 0$$
$$\text{zanka J}_2\text{: } -\underline{I}_3 \underline{Z}_{L1} + \underline{I}_2 R_2 + \underline{I}_5 \underline{Z}_C = 0$$
$$\text{zanka J}_3\text{: ni potrebna, niti je ne moremo zapisati}$$

Dobimo pet enačb za pet tokov. Reševanje takega sistema je lahko zamudno, običajno nam to delo poenostavijo računalniki. Mi moramo le poskrbeti, da sistem enačb zapišemo v matrični obliki. V našem primeru bi tvorili sistem:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 10 & 0 & j15 & -j5 & 0 \\ 0 & 5 & -j15 & 0 & -j20 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \\ \underline{I}_3 \\ \underline{I}_4 \\ \underline{I}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -j1 \\ 0 \\ j1 \\ 100 \\ 0 \end{bmatrix}$$

To je zapis v obliki **A x=b** Poglejmo si primer reševanja takega sistema s programom Matlab. Tvorimo matriko A, ki bo **A=[1,0,0,1,0;-1,1,1,0,0;0,-1,0,0,1;10,0,15j,-5j,0;0,5,-15j,0,-20j]** in vektor b, ki bo **b=[-j;0;j;100;0].** Matlab ponuja različne načine reševanja sistemov enačb. Še najbolj enostavno dobimo rešitev tako, da invertiramo matriko A in jo pomnožimo z vektorjem b: Dobimo rešitev v obliki vektorja z iskanimi toki. Matlab: **x=inv(A)*b**

Rezultat je pet kompleksnih števil za toke od I_1 do I_5:

1.0873 - 2.3450i

-0.1135 + 3.1485i

1.2009 - 5.4934i

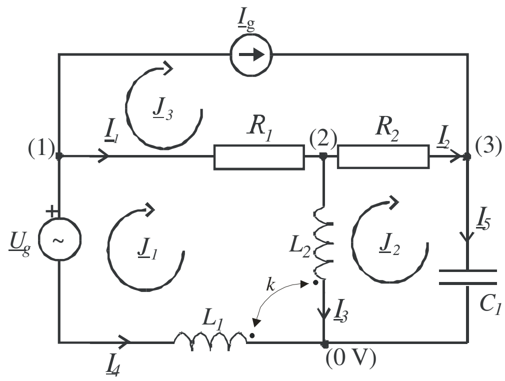
-1.0873 + 1.3450i

-0.1135 + 4.1485i

Tok $\underline{I}_1$ bo torej (1,0873-j2,3450) A itd.

Drugi načini reševanja sistema enačb: Lahko uporabimo tudi Kramerjevo pravilo z reševanjem z determinanto in poddeterminantami, ki pa je nekoliko bolj zamudno. Determinanto dobimo z ukazom **det(A)**, pri poddeterminantah pa moramo najprej sekvenčno menjati stolpce z vektorjem b. To naredimo s sledečimi ukazi: **D1=A, D1(:,1)=b, I1=det(D1)/det(D)**. Dobimo 1.0873 - 2.3450i, kar je seveda rešitev za tok $\underline{I}_1$. Tretji način je tako imenovana Gaussova eliminacija (več pri matematiki), kjer enak rezultat dobimo s preprostim Matlab ukazom **x=A\b**.

ANALIZA VEZJA V PRIMERU SKLOPLJENIH TULJAV



Slika: Enako kot predhodno vezje, le da sta tuljavi sklopljeni s faktorjem sklopa *k*.

V tem primeru je potrebno upoštevati dodatna padca napetosti na tuljavah, ki sta posledica fluksa iz sosednjih tuljav. Ta se prišteva ali odšteva od napetosti na tuljavi v skladu z dogovorom o »pikah«. V konkretnem primeru gre v obeh tuljavah tok najprej skozi tuljavo in potem »skozi« piko, zato se prispevka prištevata. Določiti je potrebno kompleksno upornost zaradi medsebojne induktivnosti, ki je:

$$j\omega M = j\omega k\sqrt{L_1 L_2} = jk\sqrt{\omega L_1 \omega L_2} = j0{,}8\sqrt{5\,\Omega \cdot 15\,\Omega} \cong j6{,}93\,\Omega$$

Napetosti na tuljavi L_1 se prišteje prispevek $\underline{I}_3 \underline{Z}_M = \underline{I}_3 j\omega M$, napetosti na tuljavi L_2 pa se prišteje prispevek $\underline{I}_4 \underline{Z}_M = \underline{I}_4 j\omega M$.

Za vsoto napetosti v zankah sedaj dobimo enačbe:

$$\begin{aligned}
&\text{zanka J}_1\text{: } \underline{I}_1 R_1 + \underline{I}_3 \underline{Z}_{L2} + \underline{I}_4 \underline{Z}_M + (-\underline{I}_4 \underline{Z}_{L1}) + (-\underline{I}_3 \underline{Z}_M) - \underline{U}_g = 0 \\
&\text{zanka J}_2\text{: } -\underline{I}_3 \underline{Z}_{L1} - \underline{I}_4 \underline{Z}_M + \underline{I}_2 R_2 + \underline{I}_5 \underline{Z}_C = 0 \\
&\text{zanka J}_3\text{: ni potrebna, niti je ne moremo zapisati}
\end{aligned}$$

Nova matrika bo torej (spremenjeni sta le zadnji dve vrstici):

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 10 & 0 & j8{,}07 & j1{,}93 & 0 \\ 0 & 5 & -j15 & -j6{,}93 & -j20 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \\ \underline{I}_3 \\ \underline{I}_4 \\ \underline{I}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -j1 \\ 0 \\ j1 \\ 100 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Rešitev je sedaj seveda drugačna: I1=2.0536 - 3.6033i, I2=-2.9026 + 6.8662i, itd.

METODA ZANČNIH TOKOV

Označimo zanke z zančnimi toki in zapišemo enačbe v skladu z 2 K.Z. Vejske toke zapišemo z zančnimi. Število potrebnih enačb je enako številu dopolnilnih vej (ponovi pojme graf, drevo, veje, dopolnilne veje,... iz OE1).

$$(\underline{J}_1-\underline{J}_3)R_1+(\underline{J}_1-\underline{J}_2)\underline{Z}_{L2}+\underline{J}_1\underline{Z}_{L1}-\underline{U}_g=0$$
$$(\underline{J}_2-\underline{J}_1)\underline{Z}_{L2}+(\underline{J}_2-\underline{J}_3)R_2+\underline{J}_2\underline{Z}_C=0$$
$$\underline{J}_3=\underline{I}_g$$

Dobimo sistem treh enačb, ki pa je pravzaprav le sistem dveh, saj je tok v tretji zanki določen kar s tokom $\underline{I}_g$. Če to upoštevamo v naslednjem koraku, dobimo matrični sistem oblike[11]

$$\begin{bmatrix} R_1+\underline{Z}_{L2}+\underline{Z}_{L1} & -j\underline{Z}_{L2} \\ -\underline{Z}_{L2} & R_2+\underline{Z}_{L2}+\underline{Z}_C \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} J_1 \\ J_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \underline{U}_g+\underline{I}_gR_1 \\ \underline{I}_gR_2 \end{bmatrix}$$

oziroma $\begin{bmatrix} 10+j20 & -j15 \\ -j15 & 5-j5 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} J_1 \\ J_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 100+j10 \\ j5 \end{bmatrix}$

Tudi ta sistem enačb lahko preprosto rešimo z eno od zgoraj omenjenih načinov. Matrika A bo **A=[10+20j,-15j;-15j,5-5j], b pa b=[100+10j;5j]**. Rešitev dobimo z ukazom **X=inv(A)*b** in dobimo

1.0873 - 1.3450i

-0.1135 + 4.1485i

Zančni tok $\underline{J}_1$ je torej (1,0873-j1,3450) A. Ta tok je tudi enak toku -$\underline{I}_4$, kar se lahko prepričamo iz prejšnje rešitve sistema petih enačb.

METODA SPOJIŠČNIH POTENCIALOV

Število enačb enako številu spojišč -1. Izhajamo iz tega, da izrazimo toke v vejah s potenciali spojišč.

Če je v veji upor, izrazimo tok v veji s padcem napetosti na tem uporu, le-to pa izrazimo s potenciali spojišč, na katera je priključen. Če je v veji le napetostni vir, tok v tej veji izrazimo s toki v sosednje spojišče (v skladu s 1 KZ). Potencial enega od spojišč lahko poljubno izberemo (običajno ozemljimo).

$$\text{spojišče (1): } \frac{\underline{V}_1-\underline{U}_g}{\underline{Z}_{L1}}+\frac{\underline{V}_1-\underline{V}_2}{R_1}+\underline{I}_g=0$$

$$\text{spojišče (2): } \frac{\underline{V}_2-\underline{V}_1}{R_1}+\frac{\underline{V}_2}{\underline{Z}_{L2}}+\frac{\underline{V}_2-\underline{V}_3}{R_2}=0$$

$$\text{spojišče (3): } \frac{\underline{V}_3-\underline{V}_2}{R_2}+\frac{\underline{V}_3}{\underline{Z}_C}-\underline{I}_g=0$$

Dobimo sistem treh enačb, ki jih zapišemo v matrični obliki

$$\begin{bmatrix} 1/j5+1/10 & -1/10 & 0 \\ -1/10 & 1/10+1/5+1/j15 & -1/5 \\ 0 & -1/5 & 1/5-1/j20 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{V}_1 \\ \underline{V}_2 \\ \underline{V}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -j+100/j5 \\ 0 \\ j \end{bmatrix}$$

Rešitev so spojiščni potenciali, iz katerih lahko nato izračunamo vejske toke, itd.

Izračun z Matlabom: **A=[1/5j+1/10,-1/10,0; -1/10,1/10+1/5+1/15j,-1/5;0,-1/5,1/5-1/20j], b=[-j+100/5j;0;j], inv(A)*b**

Rešitev je

93.2751 - 5.4367i

82.4017 +18.0131i

82.9694 + 2.2707i

STAVKI

1. STAVEK SUPERPOZICIJE

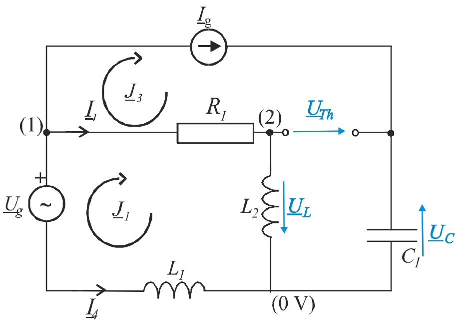
Če imamo več različnih virov v vezju, lahko pri linearnem vezju odklopimo določen vir in analiziramo vezje kot vsoto več poenostavljenih vezij. Če so viri različnih frekvenc, ne smemo izračunanih kompleksorjev tokov preprosto sešteti, saj gre za časovne signale različnih frekvenc. Seštejemo lahko časovne signale. Z metodo superpozicije lahko analiziramo tudi vezje, ki vključuje enosmerne in izmenične vire. Odklopljen napetostni vir nadomestimo s kratkim stikom, tokovni vir pa z odprtimi sponkami.

SLIKA: Razdelitev vezja v dve vezji s posameznimi vključenimi viri.

2. THEVENINOVO IN NORTONOVO NADOMESTNO VEZJE.

Enako kot je veljalo za enosmerna vezja, lahko pri (linearnih) izmeničnih vezjih vezje med poljubnima dvema sponkama nadomestimo z realnim napetostnim ali tokovnim virom. Nortonovo nadomestno vezje je ekvivalentno Theveninovemu, le da ga predstavimo z realnim tokovnim virom. Velja $\underline{I}_N = \frac{\underline{U}_{Th}}{\underline{Z}_{Th}}$ in $\underline{Z}_{Th} = \underline{Z}_N = 1/\underline{Y}_N$.

SLIKA: Theveninovo in Nortonovo nadomestno vezje.



SLIKA: Levo: Nadomestimo vezje med sponkama upora R_2 s Theveninovim nadomestnim virom. Desno: Theveninov nadomestni vir.

Osnovna pravila za izračun elementov Theveninovega (ali Nortonovega) nadomestnega vezja:

- Theveninovo (ali Nortonovo) nadomestno upornost določimo kot kompleksno upornost med sponkama, kjer želimo določiti nadomestno vezje. Pri tem napetostne vire v vezju kratko sklenemo, tokovne pa odklopimo. Za lažje pomnjenje si lahko pomagamo z vedenjem, da je notranja upornost idealnega napetostnega vira enaka nič, tokovnega pa neskončna. Velja $\underline{Z}_{Th} = \underline{Z}_N = 1/\underline{Y}_N$.
- V primeru bolj kompleksnega vezja (če ni mogoče kar preprosto seštevati zaporedno in vzporedno vezane elemente vezja) moramo Theveninovo upornost določiti tako, da med sponki priključimo poljubno napetost (npr. Kar 1 V) in določimo tok v vezje. Razmerje med njima pa je vhodna impedanca oziroma Theveninova nadomestna (kompleksna) upornost. Tak primer vezja so tudi vezja s sklopljenimi elementi.
- Theveninovo nadomestno napetost določimo kot napetost odprtih sponk med sponkama (seveda pri priključenih virih).
- Vrednost Nortonovega tokovnega vira določimo kot tok kratkega stika med priključnima sponkama ($\underline{I}_N = \underline{I}_{\text{k.s.}}$) ali iz Theveninove napetosti: $\underline{I}_N = \underline{U}_{Th} / \underline{Z}_{Th}$

Primer: Izračun toka skozi upor R_2 z nadomestitvijo vezja med sponkama upora s Theveninovim nadomestnim virom.

Recimo, da nas zanima le en tok v vezju, ki ga analiziramo. Naj bo to tok skozi upor R_2 v že analiziranem vezju. Poiščimo nadomestno Theveninovo upornost in napetost. Theveninova upornost je notranja upornost vezja gledana s sponk upora R_2, pri čemer tokovni vir odklopimo (odprte sponke), napetostnega pa kratko sklenemo. Dobimo $\underline{Z}_{Th} = \left(R_1 + \underline{Z}_{L1}\right) \| \underline{Z}_{L2} + \underline{Z}_C$. Zopet si pomagajmo z Matlabom >>**ZT=1/(1/(10+5j)+1/(15j))-20j**. Rezultat je $\underline{Z}_{Th} = 4{,}5 - \mathrm{j}14\ \Omega$.

Napetost Thevenina dobimo kot napetost med sponkama odklopljenega upora. Uporabiti moramo določeno metodo reševanja tudi za izračun te napetosti. Vzemimo za vajo metodo spojiščnih potencialov, pri kateri upoštevamo, da mora biti vsota tokov v spojišče enaka nič:

$$\frac{\underline{V}_1 - \underline{U}_g}{\underline{Z}_{L1}} + \underline{I}_g + \frac{\underline{V}_1}{R_1 + \underline{Z}_{L2}} = 0 \Rightarrow \underline{V}_1 \left(\frac{1}{\underline{Z}_{L1}} + \frac{1}{R_1 + \underline{Z}_{L2}} \right) = -\underline{I}_g + \frac{\underline{U}_g}{\underline{Z}_{L1}} .$$

Rešitev z Matlabom: >> **V1=(-j+100/5j)/(1/5j+1/(10+15j)).** Rezultat je $\underline{V}_1$=(84-j10,5)V.

Napetost Thevenina je $\underline{U}_{Th} = \underline{U}_{L2} + \underline{U}_C = \underline{V}_1 \dfrac{\underline{Z}_{L2}}{R_1 + \underline{Z}_{L2}} - \underline{I}_g \underline{Z}_C$.

Rešitev z Matlabom >> **UTh=V1*15j/(10+15j)-j*(-20j)**. Rezultat je $\underline{U}_{Th}$ = (43+j31,5) V.

Tok skozi upor R_2 je torej $\underline{I}_{R2} = \dfrac{\underline{U}_{Th}}{\underline{Z}_T + R_2} = \dfrac{43 + j31{,}5\ \mathrm{V}}{4{,}5 - j14 + 5\ \Omega} = (-0{,}1135 + j3{,}1485)\ \mathrm{A}$.

Rezultat je enak kot z metodo Kirchoffovih zakonov.

Poskusimo še z metodo zančnih tokov (pri čemer je sedaj upor R_2 odklopljen): Napetost Thevenina bo $\underline{U}_{Th} = (\underline{J}_1 - \underline{I}_g)\underline{Z}_{L2} + (-\underline{I}_g)(\underline{Z}_C)$. Tok J_1 dobimo iz zančne enačbe

$-\underline{U}_g + \underline{J}_1(R_1 + \underline{Z}_{L1} + \underline{Z}_{L2}) - \underline{I}_g(R_1 + \underline{Z}_{L2}) = 0$, od koder >> **J1=(100+j*(10+15j))/(10+20j)** $\underline{J}_1 = (2{,}1 - j3{,}2)\ \mathrm{A}$ in >> **UTh=(J1-j)*15j-j*(-20j)** $\underline{U}_{Th} = (43 + j31{,}5)\ \mathrm{V}$.

3. Tellegenov stavek

Tellegenov stavek pravi, da je vsota moči virov enaka vsoti moči bremen. V obravnavanem vezju bo moralo veljati

$$\frac{1}{2}\underline{U}_g(-\underline{I}_4^*) + \frac{1}{2}(\underline{V}_3 - \underline{V}_1)\underline{I}_g^* = \frac{1}{2}I_4^2\underline{Z}_{L1} + \frac{1}{2}I_3^2\underline{Z}_{L2} + \frac{1}{2}I_5^2\underline{Z}_C + \frac{1}{2}I_2^2R_2 + \frac{1}{2}I_1^2R_1 .$$

Izračunamo z Matlabom: >> **PV=0.5*100*(-I(4))+0.5*j*(V(3)-V(1)).** Dobimo $\underline{S}_{virov} = (50{,}5 - j122{,}4)\ \mathrm{VA}$.

Moč na bremenih pa je >> **PB=0.5*(I(4)^2*5j+I(3)^2*15j+I(5)^2*(-20j)+I(2)^2*5+I(1)^2*10).** Dobimo $\underline{S}_{bremen} = (50{,}5 - j122{,}4)\ \mathrm{VA}$.

Vidimo, da sta moči enaki, kar je tudi dober način preverjanja pravilnega rezultata analize vezja.

<u>Vprašanje</u>: Zakaj smo množili z $-\underline{I}_4^*$ in ne z $\underline{I}_4^*$. <u>Odgovor</u>: Zato, ker moramo upoštevati tok, ki izhaja iz + sponke.

4. MAKSIMALNA MOČ

O maksimalni moči smo že govorili v poglavju o moči (PONOVI). Zato tokrat bolj na kratko.

Vzemimo primer optimiranja upornosti R_2 iz obravnavanega primera tako, da bo na njem (delovna) moč maksimalna. Iz teorije vemo, da bo to tedaj, ko bo upornost bremena (upora) enaka absolutni vrednosti Theveninove upornosti, ki je $|\underline{Z}_{Th}| = |4{,}5 - \mathrm{j}14|\ \Omega = 14{,}7\ \Omega$. Maksimalna moč pa bo[12] >>

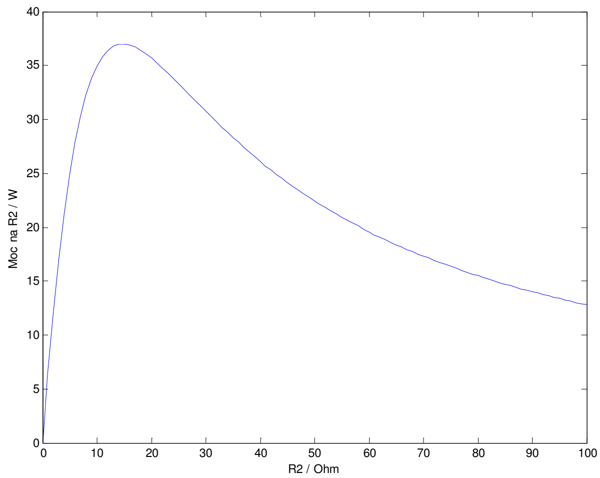
Pmax=UTh*conj(UTh)/(4*(5+14.7))

$$P_{b,max} = \frac{U_{Th}^2}{4(R_2 + Z_{Th})} \approx 36\ \mathrm{W}.$$

Poleg uporabljene metode lahko uporabimo tudi klasično analizo vezij za določitev maksimalne moči. Uporaba programov Matlab je dobrodošla tudi v primeru optimiranja elementov, saj je izračunavanje (linearnih) sistemov enačb izredno hitro. Naredimo preprost programček, ki povečuje vrednost upora R_2 od 1 do 100 Ω, vsakič izračunamo toke in moč na uporu R_2 ter na koncu izrišemo graf. Iz grafa ugotovimo, da bo največja moč dejansko pri upornosti R_2 med 10 in 20. Glede na natančnost izračuna, dobimo maksimum pri vrednosti upora 15 Ω. Poleg tega odčitamo maksimalno moč približno 36 W.

SLIKA: Moč na uporu R_2 ima maksimum pri vrednosti, ki je enaka absolutni vrednosti Theveninove nadomestne upornosti. (Matlab: Moc_na_R2.m)

```
% Program v Matlabu za izris moči na uporu R2
P=[]; % prazen array
for R2=0:1:100 % povečujem upornost od 0 do 100
A=[1,0,0,1,0;-1,1,1,0,0;0,-1,0,0,1;10,0,15j,-5j,0;0,R2,-
15j,0,-20j]; % matrika
b=[-j;0;j;100;0];
I=inv(A)*b; % resitev tokov, I(2) je tok skozi upor R2
PR2=0.5*I(2).*conj(I(2))*R2 % izracun moci
P=[P PR2] % shranjevanje vrednosti moci v vektor P
end
plot(0:1:100,P) % izris
xlabel('R2 / Ohm')
ylabel('Moc na R2 / W')
```



Vprašanja za obnovo:

1) Upoštevanje sklopljenih tuljav pri analizi vezij. Tokovno krmiljen napetostni vir.
2) Metode reševanja vezij: način uporabe, primer.
3) Stavki: superpozicija, Thevenin/Norton, Tellegen, maksimalna moč: primer uporabe.

[12] S »polovičko« pri izrazih za moč je potrebno biti vedno nekoliko previden. Včasih so moči izražene z efektivnimi vrednostmi, tedaj je izraz za moč brez polovičke, če pa so z maksimalnimi, pa je potrebno v izrazu upoštevati ½.

* Reševanje bolj kompleksnih vezij s programsko opremo

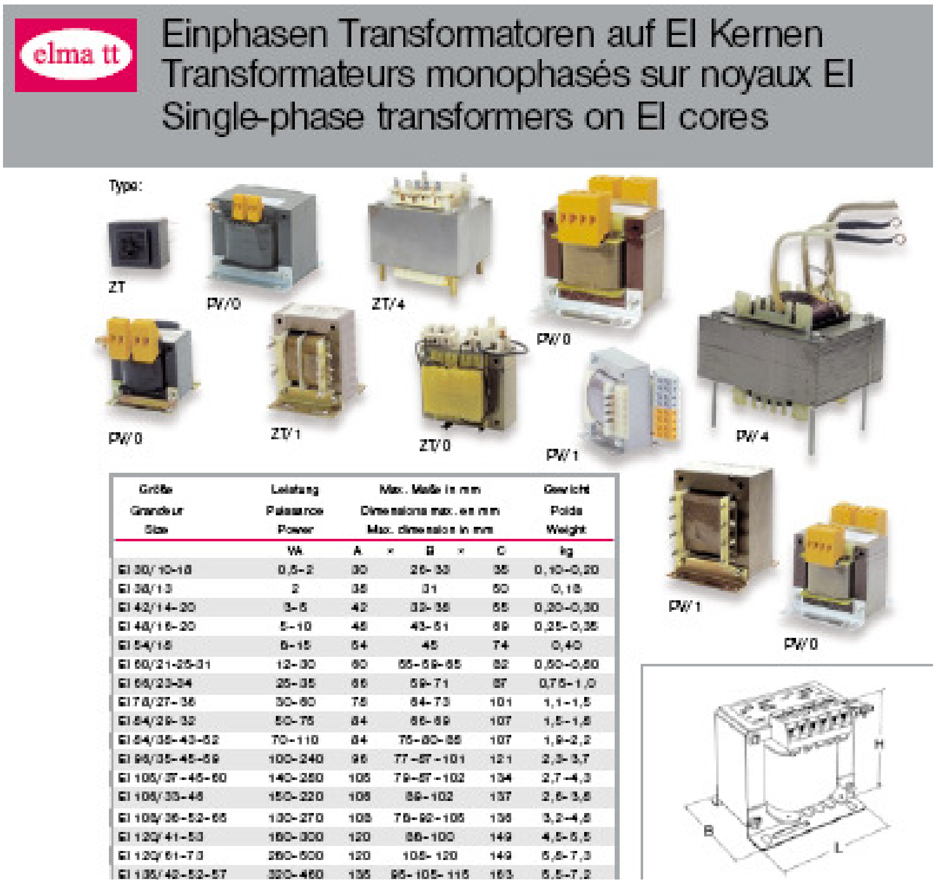
Programi za analizo vezij, kot je na primer Spice, najpogosteje uporabljajo kar »preprosto« metodo Kirchoffovih zakonov, saj reševanje večjega sistema enačb za računalnike ni težava. Reševanje postane težavnejše, ko v analizi upoštevamo kompleksnejše modele nelinearnih elementov. Ti imajo lahko tudi modele, ki so opisani z več kot deset parametri. Zaradi zahtevnosti določanja teh parametrov, pogosto proizvajalci podajajo kar SPICE parametre svojih izdelkov.

```
10BQ100
*****************************************************************************
* SPICE Model Diode                                                         *
*****************************************************************************
.SUBCKT 10BQ100 ANO CAT
D1 ANO 1 CAT
*Define diode model
.model D10BQ100 D(Is=341.4E-06 N=2.664 Rs=3.65E-03 Ikf=37.08E-03 Xti=2 Eg=1.11
+               Cjo=65.57E-12 M=.5751 Vj=4.282 Fc=0.5 Isr=17.26E-27 Nr=5.662
+               Bv=119.9 Ibv=215.5E-06 Tt=43.28E-09)

*****************************************************************************

.ENDS 10BQ100
```

SLIKA: Primer SPICE modela Schottky diode 10BQ100 (zaporna napetost 100 V) proizvajalca International Rectifier. »Preprosto« diodo popišejo z nič manj kot 15 parametri.

24. TRANSFORMATOR

Vsebina: Zapis enačb transformatorja kot dveh sklopljenih tuljav, napetostna prestava, povezava med maksimalnim fluksom in napetostjo, neobremenjen transformator in magnetilni tok, obremenjen transformator in ravnotežni tok, tokovna prestava, enačba magnetnega ravnotežja, ponazoritev tokov in napetosti na neobremenjenem in obremenjenem transformatorju s kazalci (kompleksorji), reducirane vrednosti (sekundarne napetosti, toka in impedance bremena), moč na primarju in bremenu, vhodna impedanca, realni transformator.



Größe Grandeur Size	Leistung Puissance Power	Max. Maße in mm Dimensions max. en mm Max. dimension in mm			Gewicht Poids Weight
	VA	A ×	B ×	C	kg
EI 30/10-18	0,5-2	30	26-33	36	0,10-0,20
EI 38/13	2	38	31	50	0,18
EI 42/14-20	3-6	42	33-38	55	0,20-0,30
EI 48/16-20	5-10	48	43-51	69	0,25-0,35
EI 54/18	8-15	54	45	74	0,40
EI 60/21-25-31	12-30	60	55-59-65	82	0,50-0,80
EI 66/23-34	25-35	66	59-71	87	0,75-1,0
EI 78/27-36	30-60	78	64-73	101	1,1-1,5
EI 84/29-32	50-75	84	66-69	107	1,5-1,8
EI 84/35-43-52	70-110	84	75-80-88	107	1,9-2,2
EI 96/35-45-59	100-240	96	77-87-101	121	2,3-3,7
EI 105/37-45-60	140-250	105	79-87-102	134	2,7-4,3
EI 106/33-46	150-220	106	89-102	137	2,6-3,8
EI 108/36-52-65	130-270	108	76-92-105	136	3,2-4,8
EI 120/41-53	180-300	120	86-100	149	4,5-6,5
EI 120/61-73	250-500	120	105-120	149	5,8-7,3
EI 135/42-52-57	320-460	135	95-105-115	163	5,5-7,2

SLIKA: Primer različnih tipov transformatorjev podjetja Elma TT. Osnovni informaciji sta navidezna moč in dimenzije transformatorja. http://www.elmatt.si/

Transformator je primer posebno zanimive električne naprave, ki jo lahko obravnavamo kot posebno obliko vezja s sklopljenima tuljavama (lahko tudi več sklopljenih tuljav). Zanimiv ni le teoretično, temveč predvsem zaradi njegove pogoste uporabe. S transformatorjem lahko zvišamo ali znižamo izmenično napetost, prilagodimo breme, ga uporabimo za merjenja, kot ločilni transformator, itd.. Ne vsebuje gibljivih delov zato je njegova življenjska doba dolga, poleg tega pa z dokaj dobrim magnetnim sklepom omogoča relativno majhne izgube pri pretvarjanju iz višje v nižjo napetost in obratno.

V osnovi lahko transformator predstavimo kot dvovhodno vezje s sklopljenima tuljavama. Vhodna in izhodna stran sta v principu enakovredni, saj lahko z zamenjavo strani zvišamo ali znižamo izhodno napetost, impedanco, tok.

SLIKA: Transformator je naprava, ki ima dve navitji na skupnem jedru iz feromagnetnega materiala. Ločimo primarno in sekundarno navitje. a) transformator v obliki dveh navitij na jedru, b) transformator predstavljen s koncentriranimi elementi in c) transformator kot dvovhodno vezje.

V obliki koncentriranih elementov ga lahko predstavimo s sklopljenima tuljavama. Vzemimo idealno sklopljeni tuljavi s faktorjem sklopa enak 1. Tedaj bo zveza med lastnima induktivnostima navitij in medsebojno induktivnostjo sledeča: $M = \sqrt{L_1 L_2}$.

Vhodno napetost na eni strani zapišemo kot

$$\underline{U}_1 = j\omega L_1 \underline{I}_1 + j\omega M \underline{I}_2 . \qquad (24.1)$$

To stran bomo imenovali **primarna**, drugo stran pa **sekundarna**. Primarna stran je običajno priključena na napajalno napetost (vir), sekundarna pa na breme. Ker smo toka in pike označili tako, da se fluksa obeh tuljav podpirata, bo napetost na drugi strani (sekundarni) enaka

$$\underline{U}_2 = j\omega L_2 \underline{I}_2 + j\omega M \underline{I}_1 . \qquad (24.2)$$

Če iz te enačbe izrazimo vhodni tok, dobimo

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_2}{j\omega M} - \frac{L_2}{M} \underline{I}_2 . \qquad (24.3)$$

Če sedaj to enačbo vstavimo v prvo (24.1), dobimo:

$$\underline{U}_1 = j\omega L_1\left(\frac{\underline{U}_2}{j\omega M} - \frac{L_2}{M}\underline{I}_2\right) + j\omega M\,\underline{I}_2 \quad (24.4)$$

S preureditvijo dobimo

$$\underline{U}_1 = \frac{j\omega L_1}{j\omega M}\underline{U}_2 + j\omega\left(M - \frac{L_1 L_2}{M}\right)\underline{I}_2 \quad (24.5)$$

Ker pa je pri idealnem sklepu (k = 1) $M = \sqrt{L_1 L_2}$, je drugi člen enačbe (24.5) enak nič, in je

$$\underline{U}_1 = \frac{L_1}{M}\underline{U}_2 = \frac{L_1}{\sqrt{L_1 L_2}}\underline{U}_2 = \sqrt{\frac{L_1}{L_2}}\underline{U}_2 . \quad (24.6)$$

Pridemo do zanimivega zaključka, da je **izhodna napetost odvisna le od razmerja lastnih induktivnosti tuljav**. Za te pa vemo, da so sorazmerne kvadratu ovojev, saj velja $L = \frac{N^2}{R_m}$, kjer je R_m magnetna upornost tuljave in bo torej

$$\frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2} = \sqrt{\frac{L_1}{L_2}} = \sqrt{\frac{N_1^2/R_m}{N_2^2/R_m}} = \frac{N_1}{N_2} = n \quad (24.7)$$

To enačbo lahko zapišemo tudi samo z amplitudami vhodne in izhodne napetosti:

$$\boxed{\frac{U_1}{U_2} = \frac{N_1}{N_2} = n}.$$

Dobili smo mnogim srednješolcem znan izraz, da je razmerje med vhodno in izhodno napetostjo enako razmerju števila ovojev n. Temu razmerju rečemo tudi **napetostna prestava**.

Primerdoločitve števila ovojev transformatorja: Na primarju s 100 ovoji imamo priključen generator izmenične napetosti z amplitudo 320 V. Kolikšno število ovojev potrebujemo za sekundarno navitje , da bo amplituda izhodne napetosti 50 V?

<u>Izračun:</u> $N_2 = N_1\frac{U_2}{U_1} = 100\frac{50\,\mathrm{V}}{320\mathrm{V}} \approx 15{,}6.$

NAPETOSTNA PRESTAVA IN MAKSIMALNI FLUKS V JEDRU

Do izraza za napetostno prestavo lahko pridemo tudi na nekoliko bolj preprost način, če predpostavimo idealni transformator brez priključenega bremena. Potem je inducirana napetost na primarni strani enaka časovni spremembi magnetnega sklepa, torej $u_{i1} = -N_1 \frac{d\Phi_{gl}}{dt}$, na sekundarni pa $u_{i2} = -N_2 \frac{d\Phi_{gl}}{dt}$. Če trenutne vrednosti napetosti izrazimo z maksimalnimi (ali efektivnimi), dobimo $\frac{U_2}{U_1} = \frac{N_2}{N_1} = n$. Pogosto se zapis inducirane napetost s spremembo fluksa izkoristi za izpeljavo zveze med inducirano napetostjo in fluksom. Če izraz zapišemo s kompleksorji v obliki $\underline{u}_{i1} = -N_1 \frac{d\underline{\Phi}_{gl}}{dt}$ in predpostavimo, da se glavni fluks spreminja harmonično, bo kompleksor inducirane napetosti na primarni strani

$$\underline{U}_{i1} = -N_1 j\omega \underline{\Phi}_{gl} \tag{24.8}$$

Fluks običajno zapišemo z maksimalno vrednostjo, napetost pa z efektivno. V tem smislu bo efektivna vrednost inducirane napetosti na primarni strani

$$U_{i1,ef} = \left|\underline{U}_{i1,ef}\right| = N_1 2\pi f \frac{\Phi_{gl,\max}}{\sqrt{2}} = 4,44 f N_1 \Phi_{gl,\max} . \tag{24.9}$$

Na enak način bi lahko zapisali za sekundarno stran $U_{i2,ef} = 4,44 f N_2 \Phi_{gl,\max}$ Ti enačbi pogosto zasledimo v učbenikih, pa tudi v priročnikih, saj lahko služijo oceni velikosti gostote magnetnega pretoka v jedru, to pa je pomembno za pravilno dimenzioniranje transformatorja. Enačba je »nerodna« le v toliko, da je inducirana napetost izražena z efektivno, fluks pa z maksimalno vrednostjo.

Primer določitve največje gostote polja v jedru: Enofazni 50 Hz transformator ima na primarni strani 25, na sekundarni pa 300 ovojev. Jedro ima presek 300 cm^2. Določimo največjo gostoto pretoka v jedru, če je transformator na primarni strani priključen na napetost 250 V (efektivno).

Izračun: $250\,\mathrm{V} = 4,44 \cdot 50\,\mathrm{Hz} \cdot 25 \cdot B \cdot 300\,\mathrm{cm}^2 \;\Rightarrow\; B = 1,5\,\mathrm{T}$.

Komentar: v smislu načrtovanja transformatorja bi morali sedaj preveriti, ali smo pri ocenjeni vrednosti polja posegli v področje magnetilne krivulje, ki se približuje ali celo presega nasičenje. V tem primeru lahko zaradi izrazite nelinearnosti induktivnosti v tem območju pričakujemo tudi nelinearno (popačeno glede na vhodni signal) izhodno napetost. Rešitev moramo v tem primeru iskati v primerni izbiri materiala za jedro, večjem preseku jedra, ...

MAGNETILNI TOK. Vrnimo se še malo na naš zapis enačb transformatorja z lastnimi in medsebojnimi induktivnostmi. Če so na sekundarni strani sponke odprte, teče na primarni strani tok

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_1}{j\omega L_1} = \underline{I}_{1m}. \tag{24.10}$$

Temu toku rečemo **magnetilni tok**, ki je očitno tok, ki povzroča fluks v jedru transformatorja. Ta tok je v fazi s fluksom.

OBREMENJEN TRANSFORMATOR

Če na sekundarno navitje transformatorja priključimo breme, rečemo, da je transformator **obremenjen**. Tedaj tok $\underline{I}_2$ ni več enak nič, pač pa je $-\underline{I}_2 = \underline{I}_b = \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_b}$. Sedaj bomo imeli dva toka, ki magnetita jedro. Celotna magnetna napetost bo torej (glede na označbe) vsota posameznih magnetnih napetosti:

$$\underline{\Theta} = N_1\underline{I}_1 + N_2\underline{I}_2. \tag{24.11}$$

Ta magnetna napetost bo neodvisna od bremenskega toka, saj se priključena napetost in s tem inducirana napetost na primarni strani (ki je v idealnih razmerah enaka priključeni napetosti) ni spremenila. Nespremenjena magnetna napetost bo torej enaka

$$\underline{\Theta} = N_1\underline{I}_{1m}, \tag{24.12}$$

kjer je $\underline{I}_{1m}$ magnetilni tok, ki smo ga že določili ob odprtih sponkah na senkundarju . Veljati mora torej $N_1\underline{I}_{1m} = N_1\underline{I}_1 + N_2\underline{I}_2$ oziroma s preureditvijo $N_1\left(\underline{I}_1 - \underline{I}_{1m}\right) = -N_2\underline{I}_2$. Razliko celotnega toka v primarju in magnetilnega toka imenujemo **ravnotežni tok**: $\underline{I}_{1r} = \underline{I}_1 - \underline{I}_{1m}$. To je tok, ki mora teči v primarnem navitju poleg magnetilnega (saj je $\underline{I}_1 = \underline{I}_{1m} + \underline{I}_{1r}$). Velja torej

$$N_1\underline{I}_{1r} = -N_2\underline{I}_2. \tag{24.13}$$

Ta tok bo očitno »držal ravnotežje« vplivu toka $\underline{I}_2$ na primarni strani, tako, da bo inducirana napetost nespremenjena.

Povzemimo: Če je transformator neobremenjen, je vhodni tok enak magnetilnemu toku, ki je potreben za magnetenje (in razmagnetenje jedra). Če pa je transformator obremenjen, je tok primarja vsota magnetilnega in ravnotežnega toka, pri čemer je magnetilni tok običajno dosti manjši od ravnotežnega:

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_{1m} + \underline{I}_{1r} \approx \underline{I}_{1r} = -\frac{N_2}{N_1}\underline{I}_2 \,.$$

[13]Ta pomemben rezultat, da bo razmerje tokov (približno) obratno sorazmerno številu ovojev zapišimo še enkrat:

$$\boxed{\frac{\underline{I}_1}{\underline{I}_2} = -\frac{1}{n}} \qquad (24.14)$$

Ta izraz imenujemo tudi **tokovna prestava.**

Če upoštevamo le absolutne vrednosti tokov, je enačba enaka le brez minusa: $\frac{I_1}{I_2} = \frac{1}{n}$.

Primer izračuna napetostne prestave: Idealni transformator je priključen na izmenično napetost z efektivno vrednostjo 240 V in ima na sekundarju z napetostjo 12 V (efektivno) priključeno 150 W žarnico. Določimo napetostno prestavo, tok bremena in tok primarja.

Izračun: $n = \frac{N_1}{N_2} = \frac{240\,\mathrm{V}}{12\,\mathrm{V}} = 20$. $I_b = \frac{P_b}{U_2} = \frac{150\,\mathrm{W}}{12\,\mathrm{V}} = 12{,}5\,\mathrm{A}$, $I_1 = \frac{I_b}{n} = \frac{12{,}5\ \mathrm{A}}{20} = 0{,}625\ \mathrm{A}$.

Združeni enačbi (24.11) in (24.12) imenujemo tudi **enačba magnetnega ravnotežja**

$$N_1\underline{I}_1 + N_2\underline{I}_2 = N_1\underline{I}_{1m} \,, \qquad (24.15)$$

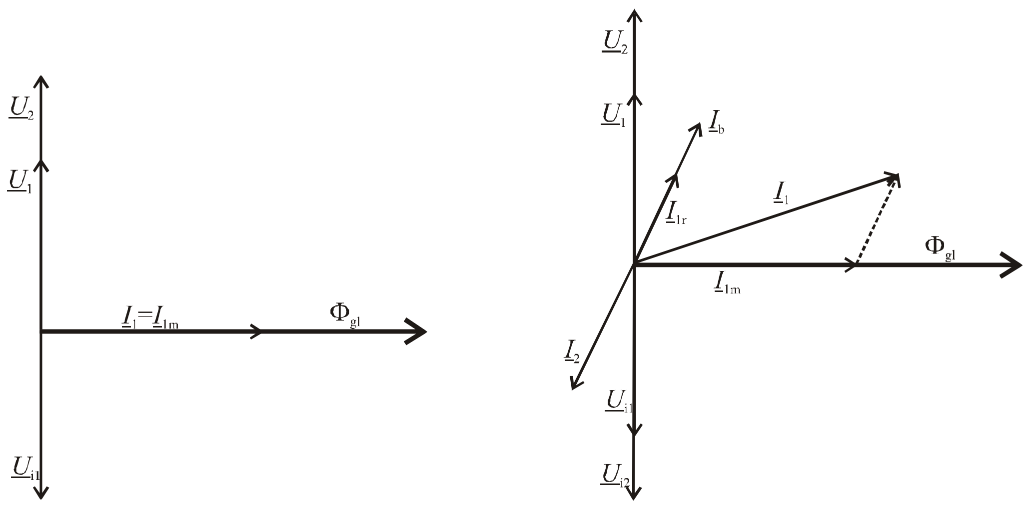
saj »pove«, da je v idealiziranem transformatorju celotna magnetna napetost konstantna – neodvisna od obremenitve. To pa tudi pomeni, da je v idealnem transformatorju glavni fluks v jedru neodvisen od obremenitve, enak je v primeru, ko je transformator neobremenjen kot tedaj, ko je obremenjen. Pri realnem transformatorju se zaradi izgub glavni fluks pri obremenitvi celo nekoliko zmanjša.

[13] Negativen predznak pri tokovni prestavi se pogosto v literaturi ne pojavlja. Tu je posledica tega, da tokove pišemo s kompleksorji in da smo označili tok $\underline{I}_2$ v nasprotni smeri kot tok bremena.

PONAZORITEV TOKOV IN NAPETOSTI NA NEOBREMENJENEM IN OBREMENJENEM TRANSFORMATORJU S KAZALCI (KOMPLEKSORJI)

<u>Neobremenjen transformator:</u> Običajno rišemo kazalce (kompleksorje) tako, da postavimo kazalec glavnega fluksa v jedru v smeri realne osi (predpostavimo, da je kosinusna funkcija). Kazalec inducirane napetosti na primarju v skladu z enačbo $\underline{U}_{i1} = -N_1 j\omega \underline{\Phi}_{gl}$ zaostaja za $\frac{\pi}{2}$. Hkrati ugotovimo, da je kazalec priključene napetosti pri neobremenjenem transformatorju ravno nasprotnega predznaka od inducirane napetosti: $\underline{U}_1 = -\underline{U}_{i1}$ in torej prehiteva kazalec fluksa za $\frac{\pi}{2}$. Magnetilni tok je v fazi z glavnim fluksom, saj je to tok, ki ta fluks povzroča. V skladu z napetostno prestavo je kazalec inducirane napetosti sekundarja enako usmerjen kot kazalec inducirane napetosti primarja, kar je hkrati tudi napetost na zunanjih sponkah sekundarja.

<u>Obremenjen transformator:</u> Vzemimo, da obremenimo transformator z bremenom induktivnega značaja. V tem primeru tok $\underline{I}_b$ zaostaja za napetostjo sekundarja za določen kot φ_2. Kot kompenzacija teče v primarju t.i. magnetilni tok, ki je nasprotnega predznaka glede na tok $\underline{I}_2$ in enakega kot $\underline{I}_b$. Tok primarja je sedaj vsota ravnotežnega in magnetilnega toka.



SLIKA: Kompleksorji glavnega fluksa, priključene napetosti, induciranih napetosti in napetosti na bremenu: a) neobremenjen transformator, b) obremenjen transformator.

REDUCIRANE VREDNOSTI NAPETOSTI IN TOKOV

Za analizo delovanja se pogosto uporabljajo t.i. reducirane veličine, ki jih dobimo na sledeči način: enačbo (24.15) delimo z N_1 in dobimo enačbo oblike

$$\underline{I}_1 + \underline{I}_2^{'} = \underline{I}_{1m}, \tag{24.16}$$

kjer smo zapisali tok $\underline{I}_2^{'}$ zapisali kot $\underline{I}_2^{'} = \frac{N_2}{N_1}\underline{I}_2 = \frac{\underline{I}_2}{n}$. Ta tok **imenujemo reducirana vrednost sekundarnega toka**, namen tega zapisa pa je predvsem v tem, da lahko tvorimo preprosto nadomestno vezje z nereducirano primarno stranjo in reducirano sekundarno stranjo. Pri tem je potrebno »reduciratni« tudi sekundarno napetost kot $\underline{U}_2^{'} = n\underline{U}_2$, pa tudi bremensko upornost, saj velja $\underline{Z}_b^{'} = \frac{\underline{U}_2^{'}}{\underline{I}_2^{'}} = n^2\underline{Z}_b$.

SLIKA: Nadomestna shema idealnega transformatorja prikazana z reduciranimi vrednostmi.

Moč

Kompleksor moči na primarju je

$$\underline{S}_1 = \frac{1}{2}\underline{U}_1\underline{I}_1^* = \frac{1}{2}\underline{U}_1\left(\underline{I}_{1m}^* + \underline{I}_{1r}^*\right) = \frac{1}{2}\underline{U}_1\underline{I}_{1m}^* - \frac{1}{2}\underline{U}_2\underline{I}_2^* = \underline{S}_{1m} + \underline{S}_2 \tag{24.17}$$

Moč na bremenu je manjša od moči na vhodu za jalovo moč magnetenja $\underline{S}_{1m}$. Le-ta pa je običajno dosti manjša od moči na bremenu, torej bo veljalo

$$\boxed{\underline{S}_1 \cong \underline{S}_2} \tag{24.18}$$

Kar pomeni, da je v idealnih razmerah moč bremena enaka moči na vhodu.

VHODNA IMPEDANCA TRANSFORMATORJA

Vhodno impedanco dobimo iz kvocienta

$$\underline{Z}_{vh} = \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1} \quad . \tag{24.19}$$

S preureditvijo osnovnih enačb transformatorja in ob predpostavki, da bo bremenska upornost mnogo manjša od induktivnih upornosti, bo $\underline{Z}_{vh} = \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1} = \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1}\frac{\underline{I}_2}{\underline{U}_2}\frac{\underline{U}_2}{\underline{I}_2} = -n^2\frac{\underline{U}_2}{-\underline{I}_b} = n^2\underline{Z}_b$

$$\boxed{\underline{Z}_{vh} \approx n^2\underline{Z}_b} \tag{24.20}$$

Rezultat, ki bi ga pričakovali tudi iz nadomestnega vezja idealnega transformatorja z reduciranimi komponentami.

REALNI TRANSFORMATOR Z ŽELEZNIM JEDROM

Realni transformator se od idealnega razlikuje predvsem po tem, da pri upoštevamo še ohmske upornosti primarnega in sekundarnega navitja ter sipana magnetna pretoka primarne in sekundarne tuljave (tisti pretok, ki gre le skozi ovoje ene, ne pa tudi druge tuljave).To lahko v nadomestnem vezju predstavimo z ohmskima upornostima ter induktivnostima v primarnem (sekundarnem) tokokrogu.

SLIKA: Nadomestna shema realnega transformatorja z upoštevanjem ohmske upornosti primarnega in sekundarnega navitja in sipanih magnetnih pretokov primarne in sekundarne tuljave (navitja).

Vprašanja za obnovo:

1) Ponazoritev transformatorja kot dvopolno vezje s sklopljenima tuljavama.
2) Zapis enačb za analizo idealnega transformatorja.
3) Napetostna prestava.
4) Neobremenjen transformator. Magnetilni tok. Kaj je njegova »funkcija«.
5) Zveza med fluksom v jedru in napetostjo na primarju.
6) Obremenjen transformator. Ravnotežni tok.
7) Tokovna prestava.
8) Ponazoritev tokov in napetosti neobremenjenega in obremenjenega transformatorja s kompleksorji v kompleksni ravnini.
9) Enačba magnetnega ravnotežja.
10) Vhodna in izhodna moč transformatorja.
11) Vhodna impedanca transformatorja.
12) Izgube v transformatorju.
13) Nadomestno vezje idealnega in realnega transformatorja.

DODATNO: OSNOVE DIMENZIONIRANJA TRANSFORMATORJEV V PRAKSI.

Za optimalno načrtovanje transformatorjev je potrebno upoštevati mnogo dejavnikov, od katerih je najpomembnejša moč primarja, ki je določena s produktom toka in napetosti primarja[14] $\frac{1}{2}U_1 I_1$, podana v VA. Pravilna izbira jedra bo odvisna od tega, da pri tej moči jedro še ne bo prišlo v nasičenje. V ta namen moramo poznati vrednost gostote magnetnega pretoka v nasičenju oz. točko, do katere je magnetilna krivulja še razmeroma linearna. Do primerne enačbe za potreben presek jedra pridemo z množenjem enačbe (24.9) z efektivnim tokom primarja. Dobimo

$S_1 = U_{1,ef} I_{1,ef} = 4,44 f N_1 \Phi I_{1,ef} = 4,44 f B^2 A_{Fe}^2 \frac{1}{\Phi} N_1 I_{1,ef}$. S preureditvijo enačbe dobimo aproksimativni izraz, ki je znan v praksi, to je, da je primerna površina preseka jedra približno

$$A_{Fe} = C\sqrt{S_1 / f} \tag{24.21}$$

kjer je konstanta C odvisna od oblike transformatorja. Po praksi in izkušnjah je njena vrednost enaka $7 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{m^2/\sqrt{Ws}}$, kar pri gostoti 1 T in frekvenci 50 Hz da znan aproksimativni izraz $A_{fe} \approx \sqrt{S_1}$ v $\mathrm{cm^2}$. Iz enačbe (24.21) je razvidno, da je potreben presek jedra manjši pri višjih frekvencah. To je t.i. čisti presek jedra, ki ne upošteva površine laminacije, za določitev končnega (geometričnega preseka) je potrebno upoštevati še t.i. polnilni faktor jedra.

[14] Pogosto se pri dimenzioniranju transformatorjev uporabljajo efektivne vrednosti tokov in napetosti. To smo ugotovili že pri enačbi (24.9), kjer je bila inducirana napetost izražena kot efektivna vrednost, fluks v jedru pa kot maksimalni.

Tudi število ovojev primarja določimo iz enačbe (24.9), ki jo zapišemo v obliki $U_{i,ef} = 4,44 fN_1BA_{Fe}$. Površino A_{Fe} smo določili iz (24.21), gostota magnetnega pretoka je okoli 1 do 1,2 T za vroče valjano silicijevo-železno pločevino. Za število ovojev sekundarja lahko upoštevamo napetostno prestavo, v praksi pa lahko zaradi izgub upoštevamo potrebno povečanje števila ovojev z množenjem s faktorjem 1,1, do 1,2.

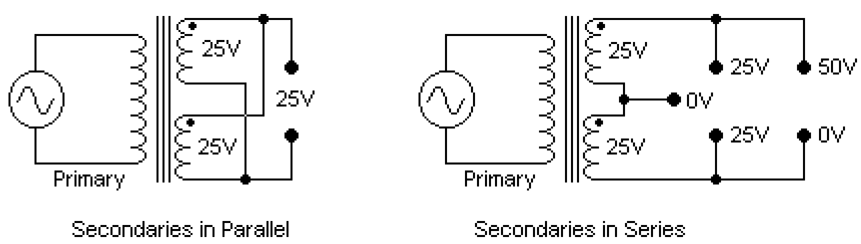
Potrebno površino prereza (premera) žice določimo iz toka v primarnem in sekundarnem navitju glede na še dopustno segretje navitja, ki je določeno z gostoto toka. Tok primarja je $I_{1,ef} = \frac{S_1}{U_{1,ef}}$, gostota toka pa $J = \frac{I_{1,ef}}{A_{Cu}}$, od koder je $A_{Cu} = \frac{I_{1,ef}}{J}$. Če vzamemo v praksi pogosto uporabljeno vrednost gostote toka 2,55 A/mm2, dobimo za premer žice izraz $\sqrt{0,5I}\ \mathrm{mm}$.

Vir: F. Mlakar, I Kloar: Mali transformatorji in dušilke, Elektrotehniški vestnik, Ljubljana, 1970. Dostopen v knjižnici FE.

Še nedokončano ….

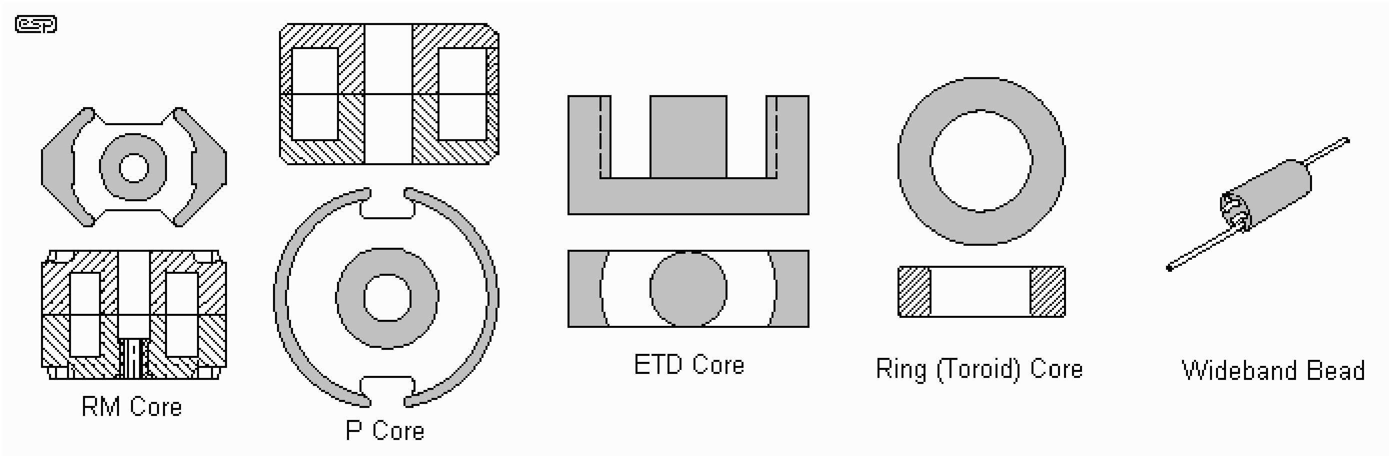
* IZVEDBE

Mnogo transformatorjev je izdelanih tako, da imajo na sekundarju dva odcepa. Npr 2x25 V toroidni transformator pri 5 A (250 VA) ima na sekundarju dve navitji. Ti lahko vežemo vzporedno, kar omogoča toke do 10 A vendar le napetost do 25 V ali pa zaporedno, pri čemer dobimo na sekundarju napetost 50 V pri toku 5 A ali pa v primeru vezave sredinskega odcepa na ozemljitev napetost +25 V in -25 V.



SLIKA: Primeri vezave transformatorja z odcepom na sekundarju. Vir: R. Elliott, Transformers – Part II, http://sound.westhost.com/xfmr.htm

IZGUBE. Izgube v jedru zaradi histereznih in vrtinčnih tokov lahko predstavimo z upornostjo R_p, ki je vzporedna induktivnosti primarnega navitja L_p. L predstavlja stresano induktivnost zaradi sipanja magnetnega polja (nepopoln magnetni sklep). R_w so izgube zaradi upornosti navitja, C_1 in C_2 pa predstavljata kapacitivnosti med posameznimi ovoji navitja. C_{p-s} predstavlja kapacitivnost med primarnim in sekundarnim navitjem, ki običajno predstavlja probleme šuma transformatorja. Toroidni transformatorji imajo v tem oziru večje težave kot transformatorji iz E-I jedra. V primeru da je ta kapacitivnost velika, prenaša šume iz primarja (npr omrežja) na sekundarno stran.



SLIKA: Nekaj primerov feritnih jedr.

Posebni transformatorji: avtotransformator, trifazni tranformatorji, ...

Viri na spletu:

http://www.ee.lsu.edu/mendrela/transformers.pdf

25. VRTILNO MAGNETNO POLJE

SLIKA: Paroma dve tuljavi postavljeni pravokotno in napajani s tokom, ki je v fazi premaknjen za pi/2 povzročata v središču vrtilno magnetno polje s konstantno amplitudo.

Vzemimo primer dveh parov tuljav, ki sta postavljeni kot kaže skica in napajani s tokoma $i_A(t) = I_m \sin(\omega t)$ in $i_B(t) = I_m \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = I_m \cos(\omega t)$. Poglejmo kakšno magnetno polje povzročajo tuljave v središču, ki ga obenem označimo kot središče koordinatnega sistema. Tuljavi s tokom i_A imata os v smeri Y osi, tuljavi s tokom i_B pa imata os v smeri X osi. Polje v osi tuljave (pa tudi izven osi) je sorazmerno in v fazi s tokom tuljave, torej sta polji $\vec{B}_A(0,t) = \vec{e}_y B_m.\sin(\omega t)$ in $\vec{B}_B(0,t) = \vec{e}_x B_m.\cos(\omega t)$. Skupno polje je vsota obeh polj in je enako $\vec{B} = \vec{B}_A + \vec{B}_B = \vec{e}_y B_m.\sin(\omega t) + \vec{e}_x B_m.\cos(\omega t)$.

Poglejmo, kolikšna je amplituda polja:

$$\left|\vec{B}\right| = \sqrt{\left(B_m.\sin(\omega t)\right)^2 + \left(B_m.\cos(\omega t)\right)^2} = B_m$$

Amplituda tega polja je konstantna in torej neodvisna od časa, oziroma od kotne frekvence.

In kakšna je smer polja?

$$\tan(\alpha) = \frac{B_m \sin(\omega t)}{B_m \cos(\omega t)} = \tan(\omega t) \Rightarrow \alpha = \omega t .$$

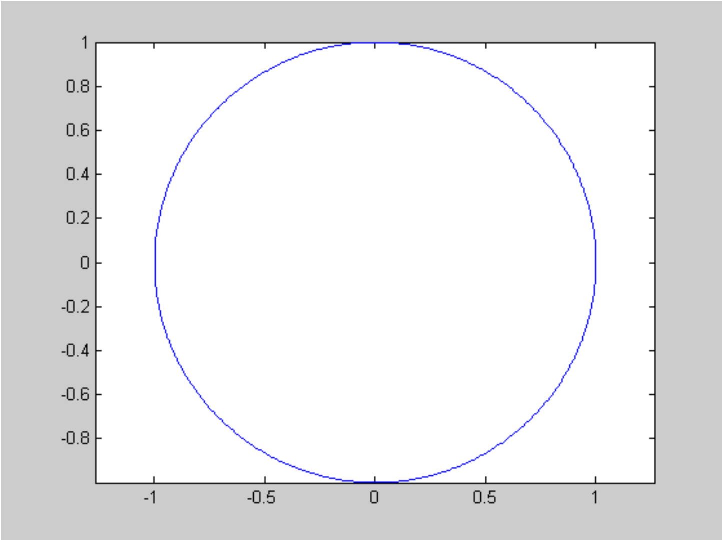
Ves čas konstantno veliko magnetno polje se vrti s konstantno kotno hitrostjo ω.

UPORABA VRTILNEGA MAGNETNEGA POLJA

Asinhroni stroji delujejo na principu kratko sklenjene vrtljive tuljave (zanke) v vrtilnem magnetnem polju. V kratko sklenjeni tuljavici se pod vplivom časovne spremembe fluksa inducira napetost, ki požene t.i. kratkostični tok v tuljavi. Ta tok povzroča lastno polje tuljave. Vemo, da na vodnike s tokom deluje magnetna sila $(d\vec{F} = Id\vec{l} \times \vec{B})$ in navor $\vec{T} = \vec{r} \times \vec{F}$. Za analizo vrtljivih delov tokovodnikov je bolj primeren izraz za navor na magnetni dipolni moment tuljavice $\vec{m} = \vec{e}_n IA$, ki je $\vec{T} = \vec{m} \times \vec{B}_{vrt}$. Na tuljavico torej deluje navor, ki zavrti zanko. Ker magnetni moment nastaja pod vplivom toka v zanki, ta je pa posledica inducirane napetosti v tuljavi (ki zaostaja za tokom, ki tvori vrtilno magnetno polje), se vrteča tuljavica vrti počasneje kot vrtilno magnetno polje. Temu rečemo asinhrono ali nesočasno vrtenje. Asinhroni stroji so predvsem motorji, lahko pa so tudi generatorji. V slednjem primer se moa tuljavica vrteti hitreje od vrtilnega polja, ki ga dobimo v stacionarnih tuljavah.

SLIKA: Navor na kratko sklenjeno tuljavico v vrtilnem magnetnem polju povzroča vrtenje zanke. Hitrost vrtenja zaostaja za hitrostjo vrtenja magnetnega polja.

SINHRONI STROJI. Poleg asinhronih motorjev poznamo tudi sinhrone motorje. Pri teh je na rotorju trajni magnet ali pa ima dodatno navitje, ki je napajano z enosmernim tokom (elektromagnet). Tak rotor se vrti sinhrono z vrtilnim magnetnim poljem. Zopet bi lahko upoštevali zapis za navor $\vec{T} = \vec{m} \times \vec{B}_{vrt}$. Sinhrone motorje uporabljamo predvsem kot generatorje. V tem primeru magnetni dipolni moment prehiteva vektor vrtilnega magnetnega polja. Kot motorje jih uporabljamo za kompenzacijo jalove moči. Se pa ti motorji ne morejo vzbuditi sami, zato imajo na rotorju dve navitji, eno kratkostično, ki je potrebno pri zagonu in eno navitje, ki ga napajamo z enosmernim tokom. Ko vklopimo ta tok, potegne rotor v sinhronizem z »zunanjim« vrtilnim poljem.



SLIKA: Primer trajektorije vrtilnega magnetnega polja, ki ga dobimo s preprostimi ukazi v Matlabu. Poskusite spreminjati amplitudo in fazo posameznega toka (polja). Na zaslonu dobimo različne oblike elips.

```
% prikaz trajektorije vrtilnega polja s programom Matlab

ot=0:0.01:2*pi; % kotna hitrost

Bx=1*sin(ot);

By=1*cos(ot)

plot(Bx,By)

axis equal
```

```
% Bolj dovršen program v Matlabu, ki riše trajektorijo gibanja:

% Definicija tocke, ki se rise na zaslonu

tocka=line('Xdata',[],'Ydata',[],'marker','o','markersize',8,'markerfacecolor','b');

% Definiranje polj

t=[0:0.01:4*pi];

x=zeros(1,length(t)); y=zeros(1,length(t));
```

```
% Enacbe, ki mi predstavljajo gibanje elektrona v magnetnem polju v vseh treh koordinatah

x=0.5*sin(t); y=1*cos(t);

% prikaz na zaslonu

grid; axis([min(x) max(x) min(y) max(y)]); axis equal

xlabel('x / m'); ylabel('y / m');

% izris koordinat gibajoce tocke

i=0;

while 1

    i=i+1;

   set(tocka,'Xdata',x(i),'Ydata',y(i),'erasemode','xor');

%   set(tocka1,'Xdata',x(i),'Ydata',y(i),'erasemode','none');

   for j=1:50000; j; end;

   drawnow;

   if i>length(t)-2; i=0; end

end
```

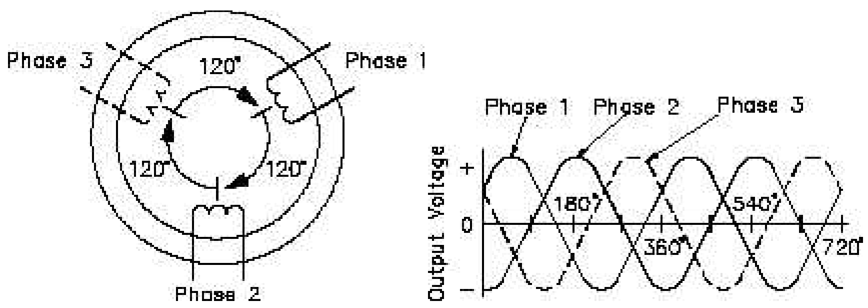
26. Trifazni sistemi

Vsebina poglavja: sistem trifaznih napetosti, zapis faznih napetosti, efektivne vrednosti in prikaz kompleksorji. Fazne in medfazne napetosti. Vezava bremena v trikot, vezava bremena v zvezdo z ali brez ničelnega vodnika. Potencial zvezdišča. Simetrično in nesimetrično breme.

Spoznali smo že primer dvofaznega sistema pri vrtilnem magnetnem polju, ki sta ga ustvarjala dva para prečno postavljenih tuljav s fazno zamaknjenim tokom za ¼ periode. Ugotovili smo, da bi tako ustvarjeno vrtilno magnetno polje ustvarjalo navor na kratko sklenjeno vrtljivo tuljavico in njeno vrtenje (laboratorijske vaje). Vrtenje tuljavice bi dosegli tudi, če bi vrtljivo tuljavo napajali s konstantnim tokom. V prvem primeru dobimo asinhrono vrtenje (tuljava se vrti z manjšo frekvenco kot je frekvenca vzbujanja), v drugem pa sinhrono (frekvenca vrtenja je enaka frekvenci vzbujanja). Možen pa je tudi obraten postopek: da se vrti magnet ali vrtljiva tuljava napajana z enosmernim tokom, v stranskih tuljavah pa se inducirajo napetosti, ki so fazno zamaknjene v skladu z lego tuljav. V že obravnavanem primeru bi dobili inducirane napetosti na tuljavah, ki bi bile fazno zamaknjene za četrtino periode. Z ustrezno priključitvijo dobimo dvofazni sistem napetosti. Na podoben način, le z uporabo treh parov navitij na fiksnem delu (statorju) okoli vrtečega dela (rotorja) z (elektro)magnetom, dobimo trifazni sistem napetosti. Za vrtenje rotorja uporabimo recimo vodno energijo (hidroelektrarne). Že Nikola Tesla je ugotovil, da ima trifazni sistem kar nekaj prednosti pred enosmernim, ki ga je v začetnem obdobju elektrifikacije promoviral Edison. Glavna prednost trifaznega sistema je bila lažji prenos energije na večje oddaljenosti, ki je bil v primeru Edisonovega enosmernega zaradi Ohmskih izgub na »omrežju« praktično onemogočen in omejen le na krajše razdalje. Poleg tega večfazni simetrični sistemi omogočajo dodatno zmanjšanje količine materiala, saj lahko en vodnik uporabimo skupno (povratni ali ničelni vodnik). V primeru, da je na simetrični trifazni sistem generatorjev priključeno simetrično trifazno breme, je vsota vseh faznih tokov v skupno spojišče enaka nič, kar pomeni, da v ničelnem vodniku ni toka. V takem primeru bi lahko ta vodnik »izpustili«, lahko pa ga obdržimo za primer, ko breme ni popolnoma simetrično. V takem primeru bo tok v ničelnem vodniku različen od nič, vendar običajno še vedno manjši od tokov v faznih vodnikih. Premer ničelnega vodnika je v takih primerih lahko manjši od faznih vodnikov.

Sistem trifaznih napetosti

V poglavju o vrtilnem polju smo spoznali, da je le-ta posledica krmiljenja sistema zasukanih tuljav s fazno zamaknjenim tokom. Ugotovili smo, da to polje omogoča vrtenje trajnega magneta ali kratkostične tuljavice, kar je osnova za razumevanje delovanja motorjev. Režim motorja lahko tudi obrnemo. Če namesto vzbujanja tuljav s tokom vrtimo rotor, se bo v tuljavah inducirala napetost. Če so tuljave zamanjene za določen kot, bomo dobili več virov napetosti s faznim zamikom določenim z kotom zamika tuljav. Če imamo sistem treh tuljav zavrtenih za kot 120^o, dobimo na izhodu tuljav napetosti, ki so fazno zamaknjene za kot 120^o.



Slika: Postavitev tuljav in generacija faznih napetosti.

Glej še:

http://www.k-wz.de/physik/threephasegenerator.html

http://en.wikipedia.org/wiki/Three-phase_electric_power

http://www.windpower.org/en/tour/wtrb/syncgen.htm

ZAPIS FAZNIH NAPETOSTI

V primeru trifaznega sistema bomo na sponkah parov tuljav, ki zajemajo šestine oboda statorja, dobili napetosti:

$$\begin{aligned} u_1 &= U_m \cos(\omega t + \alpha), \\ u_2 &= U_m \cos\left(\omega t + \alpha - \frac{2\pi}{3}\right), \\ u_3 &= U_m \cos\left(\omega t + \alpha + \frac{2\pi}{3}\right). \end{aligned} \tag{26.1}$$

Trifazni sistem s takim zaporedjem faz imenujemo pozitiven, saj se kompleksorji napetosti izmenjujejo v smeri urinega kazalca. V nasprotnem primeru imamo opravka z negativnim trifaznim sistemom. Mi bomo obravnavali na strani generatorjev le simetrične trifazne sisteme, to so taki, katerih amplituda vseh treh virov je enaka, faze pa so zamaknjene za $\frac{2\pi}{3}$.

SLIKA: Trifazni sistem prikažemo kot tri generatorje z enako amplitudo in faznim zamikom za 1/3 periode $\left(\frac{2\pi}{3}\right)$. Prikazana je vezava v »zvezdo«, pri kateri vežemo negativne sponke v skupno točko, ki jo ozemljimo.

EFEKTIVNE VREDNOSTI IN PRIKAZ S KAZALCI (KOMPLEKSORJI).

Pogosto si pri analizi vezij s trifaznimi sistemi pomagamo s kazalčnimi diagrami (kompleksorji), kjer običajno namesto amplitud napetosti in tokov uporabljamo efektivne vrednosti. Razlog je preprosto v tem, da sta v energetiki prenos in poraba moči izredno pomembni, ti pa sta direktno povezani z efektivnimi vrednostmi signalov. Za kompleksor napetosti harmoničnega signala v poljubni fazi bo torej efektivna vrednost napetosti enaka $U = U_{ef} = U_m / \sqrt{2}$.

Za kot α (glej fazne napetosti (26.1)) si lahko izberemo poljubno vrednost, saj gre v principu za časovno vrtenje treh fazno zamaknjenih kazalcev. Mi si bomo izbrali $\alpha = \frac{\pi}{2}$, lahko pa bi izbrali tudi drugače (pogosto je v uporabi tudi $\alpha = 0$). V primeru vezave v zvezdo je med ničelnim vodnikom in faznim vodnikom t.i. **fazna napetost**, torej bi lahko pisali tudi $U = U_f$. Nam vsem sta znani fazna (efektivna) napetost 230 V in medfazna (efektivna) napetost 400 V, ki jo dobimo iz domače vtičnice. Kompleksorji napetosti bodo torej

$$\underline{U}_1 = U_f e^{j\frac{\pi}{2}} = U_f e^{j90^0} = jU_f \tag{26.2}$$

$$\underline{U}_2 = U_f e^{j\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{3}\right)} = U_f e^{-j\frac{\pi}{6}} = U_f e^{-j30^0} \tag{26.3}$$

$$\underline{U}_3 = U_f e^{j\left(\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3}\right)} = U_f e^{-j150^0} \tag{26.4}$$

Najlepše to prikažemo na sliki, kjer so kazalci zarotirani za $2\pi/3$ (za 120^0).

SLIKA: Kazalčni diagram faznih napetosti simetričnega pozitivnega trifaznega sistema.

Pogosto potrebujemo tudi zapise napetosti v obliki realnega in imaginarnega dela. Tedaj pišemo

$$\begin{aligned} \underline{U}_1 &= jU_f \\ \underline{U}_2 &= U_f\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - j\frac{1}{2}\right) \\ \underline{U}_3 &= U_f\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - j\frac{1}{2}\right) \end{aligned} \tag{26.5}$$

MEDFAZNE NAPETOSTI

Pogosto se trifazne vire priključuje na breme tudi tako, da se uporabi medfazne napetosti. Te dobimo tako, da priključimo breme med sponke faznih napetosti. Matematično jih dobimo z odštevanjem kompleksorjev faznih napetosti, kot na primer

$$\underline{U}_{12}=\underline{U}_1-\underline{U}_2=jU_f-U_f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-j\frac{1}{2}\right)=U_f\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-j\frac{3}{2}\right)=\sqrt{3}U_f\left(-\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=U_{mf}e^{j120^\circ}$$

(26.6)

$$\underline{U}_{23}=\underline{U}_2-\underline{U}_3=U_f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-j\frac{1}{2}\right)-\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-j\frac{1}{2}\right)=\sqrt{3}U_f=U_{mf} \quad (26.7)$$

$$\underline{U}_{31}=\underline{U}_3-\underline{U}_1=U_f\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-j\frac{1}{2}\right)-jU_f=\sqrt{3}U_f\left(-\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=U_{mf}e^{-j120^\circ} \quad (26.8)$$

Prikažimo medfazne napetosti še v kompleksni ravnini. Tu dobimo kompleksor medfazne napetosti preprosto z odštevanjem kazalcev dveh faznih napetosti.

SLIKA: Prikaz faznih in medfaznih napetosti v kompleksni ravnini.

Tako iz matematičnega zapisa medfaznih napetosti, kot iz prikaza v kompleksni ravnini, lahko ugotovimo, da so medfazne napetosti za $\sqrt{3}$ večje od faznih ($U_{mf}=\sqrt{3}U_f$), kar lahko s pridom izkoriščamo npr. za povečanje moči na bremenu. V drugih primerih pa lahko s tako vezavo uničimo napravo, ki je namenjena priključitvi le na fazne napetosti.

VEZAVA BREMEN

Najpogosteje se uporabljata dva načina vezave bremen na trifazni sistem. Poimenujemo ju **vezava v trikot** in **vezava v zvezdo**. V prvem primeru ločimo še vezavo v **zvezdo z ničelnim vodnikom** in **brez ničelnega vodnika**. Pri vezavi v trikot uporabimo za priklop bremena medfazne napetosti in ničelnega vodnika ne potrebujemo.

VEZAVA BREMENA V ZVEZDO Z NIČELNIM VODNIKOM

Ta vezava je morda najbolj enostavna za obravnavo, saj je vsako od bremen priključeno na eno od faznih napetosti. Fazni toki so zato

$$\begin{aligned}
\underline{I}_1 &= \frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_1} = \underline{U}_1\underline{Y}_1 \\
\underline{I}_2 &= \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_2} = \underline{U}_2\underline{Y}_2 \\
\underline{I}_3 &= \frac{\underline{U}_3}{\underline{Z}_3} = \underline{U}_3\underline{Y}_3
\end{aligned} \tag{26.9}$$

Vsota faznih tokov je enaka toku v ničelnem vodniku

$$\underline{I}_0 = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 \tag{26.10}$$

Moč bremena je enaka vsoti moči posameznih faznih bremen

$$\underline{S} = \underline{S}_1 + \underline{S}_2 + \underline{S}_3\,, \tag{26.11}$$

pri čemer lahko posamezno moč določimo z že znanimi zvezami. Npr, moč v fazi 1 je[15]

$$\underline{S}_1 = \underline{U}_1\underline{I}_1^* = I_1^2\underline{Z}_1 = U_1^2\underline{Y}_1^* \tag{26.12}$$

SLIKA: Vezava bremena na trifazni sistem v vezavi zvezda z ničelnim vodnika.

[15] Pri zapisu enačb za moč smo upoštevali (kot je v navadi pri obravnavi trifaznih sistemov) efektivne vrednosti tokov in napetosti. V primeru obravnave z maksimalnimi vrednostmi je potrebno izraze pomnožiti z 0,5.

Primer izračuna delovne moči trifaznega bremena: Trifazno breme, ki ga sestavljajo impedance $\underline{Z}_1 = 100\ \Omega, \underline{Z}_2 = (50 + j50)\ \Omega, \underline{Z}_3 = -j100\ \Omega$ priključimo na trifazni sistem 230/400 V v vezavi v zvezdo z ničelnim vodnikom. Določimo delovno moč bremena.

Izračun: Delovno moč lahko izračunamo na enak način, kot smo že spoznali pri enofaznih sistemih. Zopet imamo na razpolago dva načina. Pri prvem uporabimo zvezo $P = UI\cos(\varphi)$, pri drugem pa $P = \mathrm{Re}\{\underline{S}\} = U^2\,\mathrm{Re}\{\underline{Y}^*\}$. V fazi 1 imamo le upor, moč na njem je $P_1 = \dfrac{(230\,\mathrm{V})^2}{100\,\Omega} = 529\,\mathrm{W}$. Za moč na bremenu v fazi 2 zapišemo impedanco $\underline{Z}_2 = 50\sqrt{2}e^{j\frac{\pi}{4}}\,\Omega$ in $\underline{Y}_2^* = \dfrac{1}{50\sqrt{2}}e^{j\frac{\pi}{4}}\,\mathrm{S} = \dfrac{1}{50\sqrt{2}}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + j\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\mathrm{S}$. Realni del konjugirane admitance je zopet 1/100 Ω, torej bo moč bremena v fazi 2 $P_2 = \dfrac{(230\,\mathrm{V})^2}{100\,\Omega} = 529\,\mathrm{W}$. Delovna moč v fazi tri je enaka nič (je le jalova moč). Vsota vseh delovnih moči je torej 1058 W.

Dodatno: Določimo navidezno moč na bremenu:

$$\underline{S}_1 = \frac{(230\,\mathrm{V})^2}{100\,\Omega} = 529\,\mathrm{VA}$$

$$\underline{S}_2 = \frac{(230\,\mathrm{V})^2}{50\sqrt{2}e^{-j45^0}\,\Omega} = 529(1 + j)\,\mathrm{VA}$$

$$\underline{S}_3 = \frac{(230\,\mathrm{V})^2}{j100\,\Omega} = -j529\,\mathrm{VA}$$

$$\underline{S} = 1058\,\mathrm{VA}$$

Primer izračuna toka v ničelnem vodniku: Za podatke iz prejšnjega primera določimo tok v ničelnem vodniku.

Izračun: Tok v ničelnem vodniku je enak vsoti posameznih faznih tokov $\underline{I}_0 = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3$. Izračunati moramo torej vsak fazni tok posebej in jih sešteti:

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_1} = \frac{j230\,\mathrm{V}}{100\,\Omega} = j2,3\,\mathrm{A}$$

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_2} = \frac{230e^{-j30^0}\,\mathrm{V}}{50\sqrt{2}e^{j45^0}\,\Omega} = 3,25e^{-j75^0}\,\mathrm{A} \approx (0,84 - j3,14)\ \mathrm{A}$$

$$\underline{I}_3 = \frac{\underline{U}_3}{\underline{Z}_3} = \frac{230e^{-j150^0}\,\mathrm{V}}{100e^{-j90^0}\,\Omega} = 2,3e^{-j60^0}\,\mathrm{A} \approx (1,15 - j2)\ \mathrm{A}$$

$$\underline{I}_0 = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 \approx (2 - j2,83)\,\mathrm{A}$$

VEZAVA BREMENA V ZVEZDO BREZ NIČELNEGA VODNIKA

Iz prejšnjega primera ugotovimo, da tok v ničelnem vodniku ni enak nič. Zakaj ni enak nič oziroma kakšna bremena bi morali imeti priključena, da bi bil enak nič? Odgovori si sam!

Kaj pa, če ničelnega vodnika ni, ali pa recimo izpade? Kakšne bodo razmere v tem primeru? Ali bo delovna moč še vedno enako velika?

SLIKA: Vezava bremena v zvezdo brez ničelnega vodnika.

POTENCIAL ZVEZDIŠČA. Razmere na bremenu vezanem v trikot brez ničelnega vodnika lahko analiziramo s poljubno metodo analize vezij. Najpreprosteje kar z metodo spojiščnih potencialov. En potencial ozemljimo, običajno tistega na strani spojišča generatorjev, potencial drugega pa določimo iz pogoja, da mora biti vsota vseh faznih tokov enaka nič:

$$\underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = 0 \tag{26.13}$$

Slika: Vezava v zvezdo brez ničelnega vodnika.

Te toke izrazimo s tokovi skozi posamezne impedance bremena

$$-\left(\underline{V}^* - \underline{U}_1\right)\underline{Y}_1 - \left(\underline{V}^* - \underline{U}_2\right)\underline{Y}_2 - \left(\underline{V}^* - \underline{U}_3\right)\underline{Y}_3 = 0 \tag{26.14}$$

S preureditvijo dobimo

$$\underline{V}^* \left(\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3\right) = \underline{U}_1\underline{Y}_1 + \underline{U}_2\underline{Y}_2 + \underline{U}_3\underline{Y}_3, \tag{26.15}$$

od koder je

$$\boxed{\underline{V}^* = \frac{\underline{U}_1\underline{Y}_1 + \underline{U}_2\underline{Y}_2 + \underline{U}_3\underline{Y}_3}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3}}. \tag{26.16}$$

Temu potencialu rečemo **potencial zvezdišča**. Če je ničelni vodnik priključen, je seveda potencial zvezdišča enak nič in predstavlja točko v središču kompleksne ravnine. V nasprotnem primeru pa se ta točka premakne v neko drugo točko, napetosti na elementih pa so določene iz razlike faznih napetosti in potenciala zvezdišča:

$$\underline{U}_{\underline{Z}_1} = \underline{U}_1 - \underline{V}^* \tag{26.17}$$

$$\underline{U}_{\underline{Z}_2} = \underline{U}_2 - \underline{V}^* \tag{26.18}$$

$$\underline{U}_{\underline{Z}_3} = \underline{U}_3 - \underline{V}^* \tag{26.19}$$

Ko izračunamo napetosti na impedancah bremena, je pot do izračuna tokov ali moči na elementih preprosta.

SLIKA: Premik potenciala zvezdišča ob odklopu ničelnega vodnika in kompleksorji napetosti na elementih bremena.

Primer izračuna potenciala zvezdišča: Določimo potencial zvezdišča in moči na elementih bremena iz primera 1 vezanih v zvezdo, če je ničelni vodnik odklopljen.

<u>Izračun</u>: Poiščemo potencial zvezdišča:

$$\underline{V}^* = \frac{\underline{U}_1\underline{Y}_1 + \underline{U}_2\underline{Y}_2 + \underline{U}_3\underline{Y}_3}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3} = \frac{\dfrac{j230\,\mathrm{V}}{100\,\Omega} + \dfrac{230e^{-j30^0}\,\mathrm{V}}{50\sqrt{2}e^{j45^0}\,\Omega} + \dfrac{230e^{-j150^0}\,\mathrm{V}}{100e^{-j90^0}\,\Omega}}{\dfrac{1}{100\,\Omega} + \dfrac{1}{50\sqrt{2}e^{j45^0}\,\Omega} + \dfrac{1}{100e^{-j90^0}\,\Omega}} = 230\,\mathrm{V}\frac{j + \dfrac{2}{\sqrt{2}}e^{-j75^0} + e^{-j60}}{1 + \dfrac{2}{\sqrt{2}}e^{j45^0} + j}$$

$$\underline{V}^* = (-21 - j120,6)\,\mathrm{V}$$

Moči na posameznih bremenih so torej

Matlab: S2=abs(230*(sqrt(3)/2-0.5j)-(-21-120.6j))^2/(50-50j)

$$\underline{S}_1 = \left|\underline{U}_1 - \underline{V}^*\right|^2 \underline{Y}_1^* = \left|j230 - (-21 - j120,6)\right|^2 \frac{1}{100\,\Omega} = 1233,9\ \mathrm{VA}$$

$$\underline{S}_2 = \left|\underline{U}_2 - \underline{V}^*\right|^2 \underline{Y}_2^* = \left|230\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - j\frac{1}{2}\right) - (-21 - j120,6)\right|^2 \mathrm{V}^2 \frac{1}{(50 - j50)\,\Omega} = 485,13(1 + j)\ \mathrm{VA}$$

$$\underline{S}_3 = \left|\underline{U}_3 - \underline{V}^*\right|^2 \underline{Y}_3^* = \left|230\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - j\frac{1}{2}\right) - (-21 - j120,6)\right|^2 \mathrm{V}^2 \frac{1}{j100\,\Omega} = -j317,65\ \mathrm{VA}$$

Ugotovimo lahko, da so se moči na elementih bremena spremenile. Navidezna moč je sedaj $\underline{S} \approx \underline{\underline{(1719 + j167,7)\ \mathrm{VA}}}$, torej je delovna moč enaka 1719 W, kar za 62,5 % več kot pri priključitvi z ničelnim vodnikom.

<u>Komentar</u>: Ugotovimo lahko, da se napetosti na posameznih elementih bremena lahko precej spremenijo ob izklopu ničelnega vodnika. To lahko predstavlja tudi problem v primeru, da napetost na elementu (ali pa moč) preseže dovoljeno vrednost.

VEZAVA BREMENA V TRIKOT

Pri tej vezavi so elementi bremena priključeni na medfazne napetosti. V tej vezavi torej nimamo možnosti uporabe ničelnega vodnika. Napetosti na posameznih elementih bremena so za $\sqrt{3}$ večji od faznih napetosti: $U_{mf} = \sqrt{3}U_f$. Toki skozi posamezne impedance so torej določeni z medfaznimi napetostmi, npr:

$$\underline{I}_{12} = \frac{\underline{U}_{12}}{\underline{Z}_{12}}, \quad \underline{I}_{23} = \frac{\underline{U}_{23}}{\underline{Z}_{23}}, \quad \underline{I}_{31} = \frac{\underline{U}_{31}}{\underline{Z}_{31}}.$$

Fazni toki pa so razlike teh tokov, npr:

$\underline{I}_1 = \underline{I}_{12} - \underline{I}_{31}$, itd.

Slika: Vezava bremena v trikot (dva različna načina prikaza). Desno: Prikaz medfaznih napetosti s kompleksorji.

Primer izračuna navidezne moči za breme vezano v vezavi trikot: Zopet vzemimo elemente bremena iz primera 1: $\underline{Z}_1 = 100\Omega, \underline{Z}_2 = (50 + j50)\,\Omega, \underline{Z}_3 = -j100\Omega$ in ga v vezavi trikot priključimo na trifazni sistem 230/400 V. Določimo navidezno moč bremena.

<u>Izračun</u>: Zopet vzemimo formulo $\underline{S} = U^2 \underline{Y}^*$, pri čemer so sedaj elementi bremena na medfazni napetosti, ki je za $\sqrt{3}$ večji od faznih, razlika v izračunu navidezne moči v prvem primeru in tem primeru so le v večji medfazni napetosti. Ker je za moč pomemben kvadrat napetosti, bo **moč v vezavi trikot za 3x večja od tiste pri vezavi v zvezdo z ničelnim vodnikom.** $S_\Delta = 3S_Y$.

$$\underline{S}_1 = \frac{(\sqrt{3}\cdot 230\,\mathrm{V})^2}{100\,\Omega} = 3\frac{(230\,\mathrm{V})^2}{100\,\Omega} = 1587\,\mathrm{VA}\text{, itd..}$$

$$\underline{S} = 3\cdot 1058\,\mathrm{VA}$$

SIMETRIČNO BREME

Simetrično breme je posebno primerno tedaj, ko nimamo na razpolago ničelnega vodnika, saj ga v primeru simetričnega bremena niti ne potrebujemo (tok v ničelnem vodniku je enak nič). V primeru simetričnega bremena (vse impedance v posameznih fazah (ali medfazah) so enake) bodo bremenski toki zaostajali ali prehitevali fazne ali medfazne napetosti za isti fazni kot. To lahko prikažemo v kompleksni ravnini.

SLIKA: Prikaz napetosti in tokov v kompleksni ravnini pri simetričnem trifaznem bremenu.

Trenutne moči na posameznih elementih bremena so:

$$p_1(t) = UI\cos(\omega t)\cdot\cos(\omega t + \beta)$$
$$p_2(t) = UI\cos(\omega t - \frac{2\pi}{3})\cdot\cos(\omega t + \beta - \frac{2\pi}{3})$$
$$p_3(t) = UI\cos(\omega t + \frac{2\pi}{3})\cdot\cos(\omega t + \beta + \frac{2\pi}{3})$$

Celotna moč je vsota vseh treh moči: $p(t) = p_1(t) + p_2(t) + p_3(t)$. Z upoštevanjem zveze $\cos(\alpha)\cos(\beta) = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)\right]$ dobimo pomemben rezultat:

$$p(t) = \frac{3}{2} UI \cos(\beta).$$

Pri simetričnem bremenu (impedance v vseh fazah enake) je trenutna moč konstantna. Torej precej različna od enofaznega sistema, ko trenutna moč niha z dvojno frekvenco vira. Poglejte si časovne poteke moči na grafih za različna bremena na naslednji strani.

Vprašanja za obnovo:

1) Kako realiziramo sistem dvofaznih ali trifaznih napetosti?
2) Zapišite časovni potek napetosti trifaznih generatorjev.
3) Pozitiven in negativen trifazni sistem.
4) Prikaz trifaznih napetosti s kazalci: fazne in medfazne napetosti.
5) Vezava bremen:
    a. Zvezda z ničelnim vodnikom
    b. Zvezda brez ničelnega vodnika
    c. Trikot
6) Napetost na bremenih, fazni tok in tok skozi breme, moč na bremenu pri posamezni vezavi.
7) Napetost zvezdišča.
8) Simetrično breme. Trenutna moč.

Kolokvijske in izpitne naloge:

2. kolokvij 12.04.2001,izpit, 19. januar 2006, izpit, 23. junij 2005

kolokvij, 16. junij 2004, izpit, 24. junij 2004, Izpit, 10. marec 2006

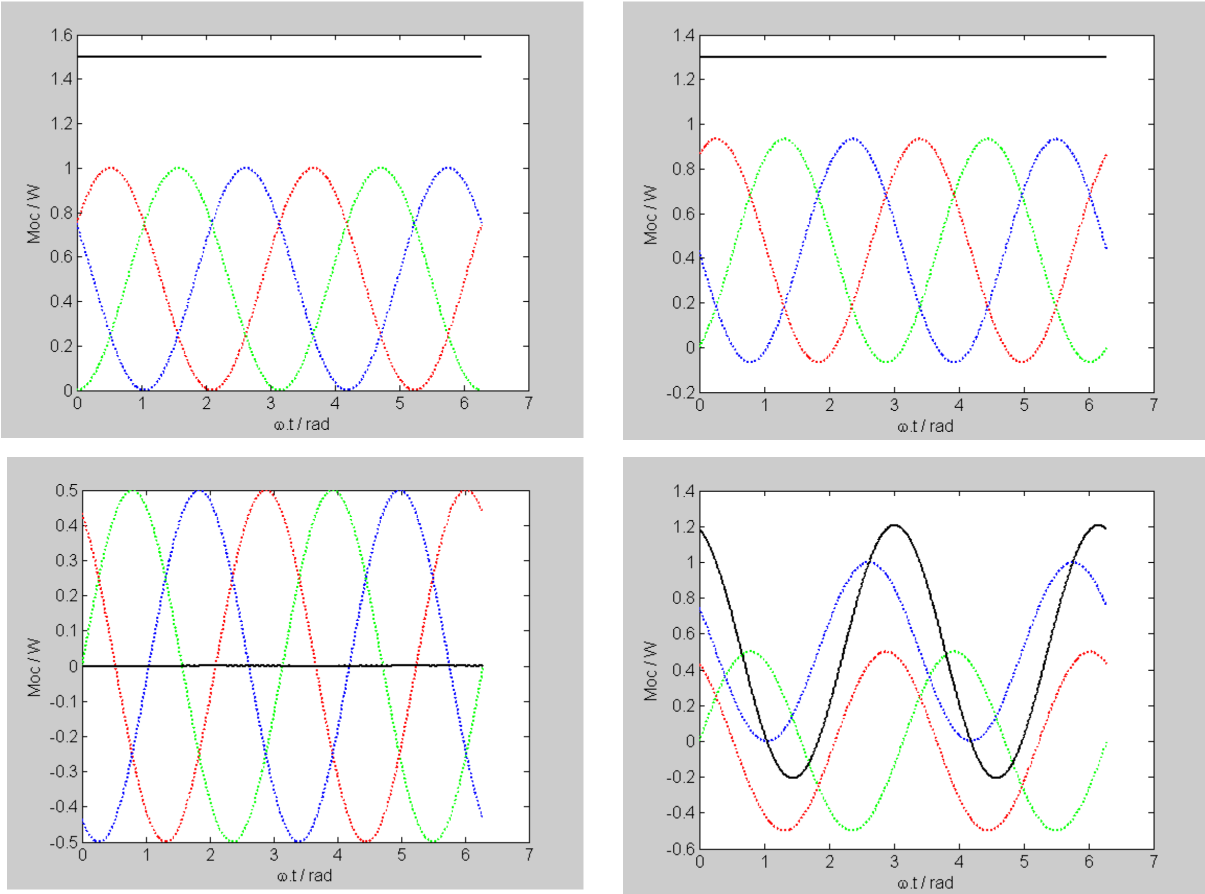
Izpit, 11. 06. 2002, Izpit 20. 06. 2005, Izpit 28. 01. 2005

izpit, 4. februar 2005, Izpit, 28. avgust 2006, Izpit, 15. september 2006

Izpit, 15. september 2006, izpit, 16. aprila 2002 , izpit 23. junija 2006

Izpit 26. 6. 2002 , Izpit, 02. 12. 2003

PRIMERI ČASOVNIH POTEKOV MOČI NA RAZLIČNIH TIPIH BREMEN



SLIKA: Na trifazni sistem je priključeno breme z vezavo v zvezdo z ničelnim vodnikom. Levo zgoraj) Breme je simetrično in ohmsko, Desno zgoraj) breme je simetrično in induktivnega značaja: $\underline{Z} = Ze^{j\frac{\pi}{6}}$, Levo spodaj) breme je simetrično in čisto induktivno in Desno spodaj) breme je nesimetrično. Trenutna moč na posameznem elementu bremena niha z dvojno frekvenco vira (prikazana s črtkanimi črtami), celotna trenutna moč bremena je vsota trenutnih moči na posameznih elementih (polna črta). Na zgornjih dveh grafih je trenutna moč bremena konstantna (največja je v primeru čisto ohmskega bremena), v primeru simetričnega čisto induktivnega bremena je delovna moč enaka nič, v primeru nesimetričnega bremena trenutna moč niha z dvojno frekvenco osnovnega signala (toka ali napetosti) in ni časovno konstantna.