

Univerza v Ljubljani
Fakulteta za elektrotehniko

Regulacije I – zbirka primerov in nalog

Igor Škrjanc

Ljubljana, 2006

Predgovor

Učbenik **Regulacije I – zbirka primerov in nalog** dopolnjuje in nadgrajuje tematiko učbenika Zvezni regulacijski sistemi - I. del in je namenjen vsem, ki bi radi osvojili temeljna znanja s področja regulacij, v prvi vrsti pa seveda študentom 3. letnika Avtomatike na Fakulteti za elektrotehniko. Tematika je razdeljena na štiri poglavja.

Prvo poglavje obravnava Laplaceovo transformacijo, kot osnovno orodje za obravnavo regulacijskih sistemov. Obravnavamo lastnosti Laplaceove transformacije in inverzne Laplaceove transformacije z metodo določanja parcialnih ulomkov z metodo residuov.

Drugo poglavje obravnava možne predstavitve sistemov za analizo in sintezo sistemov vodenja. Obravnavamo zapis sistema v obliki diferencialne enačbe, prenosne funkcije, bločnega diagrama, diagrama poteka signalov, prostora stanj in prehode med posameznimi zapisi.

V tretjem poglavju analiziramo regulacijske sisteme v časovnem in s-prostoru. Določamo dinamične lastnosti procesa in obravnavamo stabilnost regulacijskih sistemov.

Četrto poglavje pa opisuje načrtovanje enostavnih sistemov vodenja po inženirskih metodah (tabelarično), na osnovi nihajnega preizkusa, po metodi kompenzacije in z optimiranjem cenilk.

Učbenik vsebuje številne primere, ki so izvedeni analitično. Značilni primeri so označeni s trikotnikom (\triangle). Njihova rešitev je prikazana v celoti. Pri ostalih primerih pa so podani samo rezultati.

Na koncu se zahvaljujem sodelavcem, ki so pripomogli k nastanku tega dela. Zahvaljujem se prof. dr. Borutu Zupančiču, ki predava tematiko zveznih regulacijskih sistemov in je bil pobudnik za nastanek učbenika. Posebno zahvalo sem dolžan tudi Gregorju Cijanju, absolventu avtomatike, ki je v okolju L^AT_EX oblikoval tekst in narisal slike.

Ljubljana, januar 2006

Igor Škrjanc

Kazalo

1. Laplaceova transformacija	1
1.1 Lastnosti Laplaceove transformacije	2
1.2 Inverzna Laplaceova transformacija	3
1.2.1 Določanje delnih ulomkov z metodo residuov	4
1.3 Naloge	5
2. Predstavitve sistemov za analizo in načrtovanje vodenja	14
2.1 Diferencialne enačbe	14
2.1.1 Reševanje v s pomočjo Laplaceove transformacije	14
2.1.2 Naloge	16
2.2 Prenosne funkcije	19
2.2.1 Definicija prenosne funkcije	19
2.2.2 Naloge	21
2.3 Bločni diagram	27
2.3.1 Naloge	28
2.4 Diagram poteka signalov	35
2.4.1 Naloge	36
2.4.2 Masonovo pravilo	44
2.5 Povezava med bločnimi diagrami in diagrami poteka signalov . . .	53
2.5.1 Naloge	53
2.6 Prostor stanj	66
2.6.1 Prehod iz matematičnega modela v obliki diferencialne enačbe v zapis v prostoru stanj	66

2.6.2	Prehod med zapisom v prostoru stanj in prenosno funkcijo in realizacija z bločnim diagramom	76
2.6.3	Prehod med prenosno funkcijo in zapisom v prostoru stanj in realizacija z bločim diagramom	79
2.6.4	Uporaba diagrama poteka signalov za zapis sistema v prostoru stanj	92
2.6.5	Prehod med prostorom stanj in zapisom z diferencialno enačbo	102
3.	Analiza regulacijskih sistemov v časovnem prostoru in s-	105
	prostoru	
3.1	Določanje dinamičnih lastnosti iz modela sistema	105
3.2	Naloge	108
3.3	Stabilnost regulacijskih sistemov	129
3.3.1	Routh-Hurwitzov stabilnostni kriterij	130
4.	Načrtovanje regulacijskih sistemov	138
4.1	Naloge	138
	Literatura	152

1. Laplaceova transformacija

Laplaceova transformacija je integralska transformacija, ki sistem diferencialnih enačb transformira v sistem algebrskih enačb. Laplaceova transformacija funkcije $f(t)$ je definirana kot

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt. \quad (1.1)$$

Navadno transformov ne izračunavamo po definiciji, ampak ga določimo na osnovi tabel Laplaceovih transformov. Tabele omogočajo, da se izognemo reševanju Laplaceovega integrala in s tem precej poenostavimo praktično uporabo Laplaceove transformacije. Nekaj primerov je prikazanih v tabeli 1.1.

f(t)	F(s)	f(t)	F(s)
$\delta(t)$	1	$\delta(t - \tau)$	$e^{-\tau s}$
$1(t)$	$\frac{1}{s}$	$1(t - \tau)$	$\frac{1}{s}e^{-\tau s}$
t	$\frac{1}{s^2}$	e^{-at}	$\frac{1}{s + a}$
$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$	$\cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
$e^{-at} \sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{(s + a)^2 + \omega^2}$	$e^{-at} \cos(\omega t)$	$\frac{s + a}{(s + a)^2 + \omega^2}$

Tabela 1.1: Tabela Laplaceovih transformov za najbolj pogoste časovne signale.

Z uporabo tabele 1.1 lahko transformiramo najbolj pogoste časovne signale, za bolj zapletene je potrebno uporabiti v nadaljevanju opisane lastnosti Laplaceove transformacije, s katerimi sestavljeni signal lahko razstavimo na enostavnejše komponente, katerih transforme lahko najdemo v tabeli 1.1 in transformiranko nato spet sestavimo v celoto.

1.1 Lastnosti Laplaceove transformacije

1. linearnost:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{a \cdot f_1(t) + b \cdot f_2(t)\} &= \\ &= a \cdot \mathcal{L}\{f_1(t)\} + b \cdot \mathcal{L}\{f_2(t)\} = \\ &= a \cdot F_1(s) + b \cdot F_2(s) \end{aligned} \quad (1.2)$$

2. časovni premik:

$$\mathcal{L}\{f(t - \tau)\} = \mathcal{L}\{f(t)\} e^{-\tau s} = F(s) e^{-\tau s} \quad (1.3)$$

3. množenje s t^n :

$$\mathcal{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s) \quad (1.4)$$

4. odvod:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\} = sF(s) - f(0) \quad (1.5)$$

in

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right\} = s^n F(s) - \sum_{i=1}^n s^{n-i} f^{(i-1)}(0) \quad (1.6)$$

5. integral:

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau) d\tau\right\} = \frac{1}{s} \mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{s} F(s) \quad (1.7)$$

in

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left\{\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau\right\} &= \\ &= \mathcal{L}\left\{\int_{-\infty}^0 f(\tau) d\tau + \int_0^t f(\tau) d\tau\right\} = \\ &= \frac{1}{s} g(0) + \frac{1}{s} F(s) \\ & \quad (\int_{-\infty}^0 f(\tau) d\tau = g(0) = \text{const.}) \end{aligned} \quad (1.8)$$

6. periodičnost funkcije (perioda $f(t)$ je enaka T):

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{1 - e^{sT}} F(s) \quad (1.9)$$

$$F(s) = \int_0^T f(t) e^{-st} dt \quad (1.10)$$

7. teorem začetne vrednosti (če limita obstaja!):

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s) \quad (1.11)$$

8. teorem končne vrednosti (če limita obstaja!):

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s) \quad (1.12)$$

Primer 1.1. \triangle Izračunajmo Laplaceovo transformacijo naslednjega signala, podanega v časovnem prostoru

$$y(t) = 1 + 40e^{-2t} + e^{-t} \cos(22t)$$

Rešitev

Najprej določimo transformiranke iz tabele 1.1 za vsak člen vsote posebej, kar nam dovoljuje lastnost linearnosti. Tako dobimo

$$Y(s) = \frac{1}{s} + 40 \frac{1}{s+2} + \frac{s+1}{(s+1)^2 + 484}$$

$$Y(s) = \frac{1}{s} + 40 \frac{1}{s+2} + \frac{s+1}{s^2 + 2s + 485}$$

Sedaj pa izvedemo končno obliko tako, da postavimo vse člene na skupni imenovalc in seštejemo člene števec ter po potrebi ulomek še okrajšamo

$$Y(s) = \frac{(s^2 + 2s + 485)(s+2) + 40s(s^2 + 2s + 485) + s(s+1)(s+2)}{s(s+2)(s^2 + 2s + 485)}$$

$$Y(s) = \frac{42s^3 + 87s^2 + 19891s + 970}{s^4 + 4s^3 + 489s^2 + 970s}$$

1.2 Inverzna Laplaceova transformacija

Inverzna Laplaceova transformacija je definirana kot

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\delta-j\infty}^{\delta+j\infty} F(s)e^{st} ds \quad (1.13)$$

Tudi inverzno Laplaceovo transformacijo večinoma računamo s pomočjo tabele 1.1. Ker je signal navadno sestavljen iz vsote signalov in ker so signali v prostoru kompleksne frekvence s večinoma opisani z racionalnimi funkcijami, je potrebno izraz razstaviti na vsoto delnih ulomkov, predeno tabelo lahko uporabimo. Izraz

razstavimo na delne ulomke glede na korene imenovalca. Razstavljanje izvedemo tako, da napišemo nastavke za tako določene racionalne funkcije, katerih števec določimo tako, da so eno stopnjo nižji od imenovalca, izjema so spet večkratni koreni imenovalca. Številске vrednosti koeficientov števca lahko določimo iz primerjave istoležih členov, ko nastavke delnih ulomkov spet sestavimo ali pa z metodo residuov.

1.2.1 Določanje delnih ulomkov z metodo residuov

Obstajajo naslednji možni nastavki delnih ulomkov za Laplaceove transformirane enostavnih signalov

(a) Inverzna Laplaceova transformacija s pomočjo faktorizacije:

$$Y(s) = \frac{Q(s)}{P(s)} = \frac{Q(s)}{(s + s_1)(s + s_2) \dots (s + s_n)} = \frac{K_1}{s + s_1} + \frac{K_2}{s + s_2} + \dots + \frac{K_n}{s + s_n}$$

$$K_i = (s + s_i)Y(s) \Big|_{s=-s_i}$$

(b) Inverzna Laplaceova transformacija s pomočjo faktorizacije, ko so poli višjih redov:

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{Q(s)}{P(s)} = \frac{Q(s)}{(s + s_1) \dots (s + s_i)^r \dots (s + s_n)} = \\ &= \frac{K_1}{s + s_1} + \dots + \frac{K_n}{s + s_n} + \frac{A_1}{s + s_i} + \frac{A_2}{(s + s_i)^2} + \dots + \frac{A_r}{(s + s_i)^r} \\ \\ K_i &= (s + s_i)Y(s) \Big|_{s=-s_i} \\ A_r &= (s + s_i)^r Y(s) \Big|_{s=-s_i} \\ &\vdots \\ A_{r-i} &= \frac{1}{i!} \cdot \frac{d^i}{ds^i} [(s + s_i)^r Y(s)] \Big|_{s=-s_i} \\ &\vdots \\ A_1 &= \frac{1}{(r-1)!} \cdot \frac{d^{r-1}}{ds^{r-1}} [(s + s_i)^r Y(s)] \Big|_{s=-s_i} \end{aligned} \tag{1.14}$$

1.3 Naloge

Primer 1.2. \triangle Določite časovni odziv sistema podanega s funkcijo:

$$Y(s) = \frac{13s + 29}{(s + 1)(s + 2)(s + 5)}$$

Rešitev

$$Y(s) = \frac{K_1}{s + 1} + \frac{K_2}{s + 2} + \frac{K_3}{s + 5}$$

$$K_1 = \left[(s + 1) \frac{13s + 19}{(s + 1)(s + 2)(s + 5)} \right]_{s=-1} = 4$$

$$K_2 = \left[(s + 2) \frac{13s + 19}{(s + 1)(s + 2)(s + 5)} \right]_{s=-2} = -1$$

$$K_3 = \left[(s + 5) \frac{13s + 19}{(s + 1)(s + 2)(s + 5)} \right]_{s=-5} = -3$$

$$Y(s) = \frac{4}{s + 1} - \frac{1}{s + 2} - \frac{3}{s + 5}$$

$$y(t) = 4e^{-t} - e^{-2t} - 3e^{-5t}$$

Primer 1.3. \triangle Določite časovni odziv sistema podanega s funkcijo:

$$Y(s) = \frac{1}{s(s + 2)(s + 1)^3}$$

Rešitev

$$Y(s) = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{s + 2} + \frac{A_1}{s + 1} + \frac{A_2}{(s + 1)^2} + \frac{A_3}{(s + 1)^3}$$

$$\begin{aligned}
K_1 &= \left[s \frac{1}{s(s+2)(s+1)^3} \right]_{s=0} = \frac{1}{2} \\
K_2 &= \left[(s+2) \frac{1}{s(s+2)(s+1)^3} \right]_{s=-2} = \frac{1}{2} \\
A_3 &= \left[(s+1)^3 \frac{1}{s(s+2)(s+1)^3} \right]_{s=-1} = -1 \\
A_2 &= \frac{d}{ds} \left[(s+1)^3 \frac{1}{s(s+2)(s+1)^3} \right]_{s=-1} = 0 \\
A_1 &= \frac{1}{2!} \cdot \frac{d^2}{ds^2} \left[(s+1)^3 \frac{1}{s(s+2)(s+1)^3} \right]_{s=-1} = -1
\end{aligned}$$

$$Y(s) = \frac{1}{2s} + \frac{1}{2(s+2)} - \frac{1}{s+1} - \frac{1}{(s+1)^3}$$

$$y(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-2t} - e^{-t} - \frac{1}{2}t^2e^{-t}$$

Primer 1.4. Določite časovni odziv sistema podanega s funkcijo:

$$Y(s) = \frac{s+2}{s(s+1)(s+1)}$$

Rešitev

$$\begin{aligned}
Y(s) &= \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{s+1} + \frac{K_3}{s+3} \\
K_1 &= \frac{2}{3} \quad ; \quad K_2 = -\frac{1}{2} \quad ; \quad K_3 = -\frac{1}{6} \\
y(t) &= \frac{2}{3} - \frac{1}{2}e^{-t} - \frac{1}{6}e^{-3t}
\end{aligned}$$

Primer 1.5. Določite časovni odziv sistema podanega s funkcijo:

$$Y(s) = \frac{1}{(s+2)^3(s+3)}$$

Rešitev

$$Y(s) = \frac{A_1}{s+2} + \frac{A_2}{(s+2)^2} + \frac{A_3}{(s+2)^3} + \frac{K_1}{s+3}$$

$$A_1 = 1 \quad ; \quad A_2 = -1 \quad ; \quad A_3 = 1 \quad ; \quad K_1 = -1$$

$$y(t) = e^{-2t} - te^{-2t} + \frac{1}{2}t^2e^{-2t} - e^{-3t}$$

Primer 1.6. Določite časovni odziv sistema podanega s funkcijo:

$$Y(s) = \frac{1}{s(s+1)(s^2+1)}$$

Rešitev

$$Y(s) = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{s+1} + \frac{K_3s + K_4}{s^2+1}$$

$$K_1 = 1 \quad ; \quad K_2 = -\frac{1}{2} \quad ; \quad K_3 = -\frac{1}{2} \quad ; \quad K_4 = -\frac{1}{2}$$

$$Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{2(s+1)} - \frac{1}{2} \cdot \frac{s+1}{s^2+1} = \frac{1}{s} - \frac{1}{2(s+1)} - \frac{s}{2(s^2+1)} - \frac{1}{2(s^2+1)}$$

$$y(t) = 1 - \frac{1}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}\cos(t) - \frac{1}{2}\sin(t)$$

Primer 1.7. Določite časovni odziv sistema podanega s funkcijo:

$$Y(s) = \frac{s+1}{s(s^2+2s+3)}$$

Rešitev

$$Y(s) = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2s + K_3}{s^2+2s+3}$$

$$K_1 = \frac{1}{3} \quad ; \quad K_2 = -\frac{1}{3} \quad ; \quad K_3 = \frac{1}{3}$$

$$\begin{aligned}
Y(s) &= \frac{1}{3s} - \frac{1}{3} \cdot \frac{s-1}{s^2+2s+3} = \frac{1}{3s} - \frac{1}{3} \cdot \frac{(s+1)-2}{(s+1)^2+2} = \\
&= \frac{1}{3s} - \frac{1}{3} \cdot \frac{s+1}{s^2+2s+3} + \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{(s+1)^2+2} \\
y(t) &= \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \cdot e^{-t} \cos(\sqrt{2} \cdot t) + \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot e^{-t} \sin(\sqrt{2} \cdot t)
\end{aligned}$$

Primer 1.8. Določite časovni odziv sistema podanega s funkcijo:

$$Y(s) = \frac{5s+3}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

Rešitev

$$\begin{aligned}
Y(s) &= \frac{K_1}{s+1} + \frac{K_2}{s+2} + \frac{K_3}{s+3} \\
K_1 &= -1 \quad ; \quad K_2 = 7 \quad ; \quad K_3 = -6 \\
y(t) &= -e^{-t} + 7e^{-2t} - 6e^{-3t}
\end{aligned}$$

Primer 1.9. Pretvorite naslednje signale v prostor kompleksne frekvence s .

- (1) $u(t) = 1(t)$
- (2) $u(t) = t$
- (3) $u(t) = 1(t) + t$
- (4) $u(t) = 3 + 14t$
- (5) $y(t) = 2 + e^{-3t} + e^{-4t}$
- (6) $y(t) = 3 - e^{-3t} + te^{-3t}$
- (7) $u(t) = \sin(3t)$
- (8) $u(t) = e^{-3t} \sin(12t) + 14$
- (9) $y(t) = 33 + 3e^{-12t} \sin(2t) + 4e^{-12t} \cos(2t)$
- (10) $y(t) = 13e^{-3t} + 3te^{-3t} - 2e^{-2t} \sin(2t) + 5e^{-2t} \cos(2t)$
- (11) $y(t) = 22e^{-5t} - 13e^{-3t} + 3te^{-3t} + 5t^2e^{-3t} - 2e^{-6t} \sin(2t) + 16e^{-6t} \cos(2t)$

Rešitev

$$(1) U(s) = \frac{1}{s}$$

$$(2) U(s) = \frac{1}{s^2}$$

$$(3) U(s) = \frac{s+1}{s^2}$$

$$(4) U(s) = \frac{3s+14}{s^2}$$

$$(5) Y(s) = \frac{4s^2 + 21s + 24}{s^3 + 7s^2 + 12s}$$

$$(6) Y(s) = \frac{2s^2 + 16s + 27}{s^3 + 6s^2 + 9s}$$

$$(7) U(s) = \frac{3}{s^2 + 9}$$

$$(8) Y(s) = \frac{14s^2 + 96s + 2142}{s^3 + 6s^2 + 153s}$$

$$(9) Y(s) = \frac{37s^2 + 846s + 4884}{s^3 + 24s^2 + 148s}$$

$$(10) Y(s) = \frac{18s^3 + 130s^2 + 353s + 390}{s^4 + 10s^3 + 41s^2 + 84s + 72}$$

$$(11) Y(s) = \frac{25s^5 + 482s^4 + 3617s^3 + 13092s^2 + 23152s + 16580}{s^6 + 26s^5 + 280s^4 + 1586s^3 + 4959s^2 + 8100s + 5400}$$

Primer 1.10. *Uporabite Laplaceovo transformacijo na naslednjih diferencialnih enačbah, ki opisujejo sistem in jih zapišite v s -prostoru.*

$$(1) \begin{aligned} \ddot{y}(t) - 2\dot{y}(t) + 2y(t) &= u(t) \\ y(0) &= 0 \\ \dot{y}(0) &= 0 \end{aligned}$$

$$(2) \begin{aligned} \ddot{y}(t) + 3\dot{y}(t) + 2y(t) &= 4u(t) + 4\dot{u}(t) \\ y(0) &= 0 \\ \dot{y}(0) &= 0 \end{aligned}$$

$$(3) \ddot{y}(t) - 2\dot{y}(t) + 2y(t) = u(t)$$

$$y(0) = 1$$

$$\dot{y}(0) = 4$$

$$(4) \ddot{y}(t) + 3\dot{y}(t) + 2y(t) = 4u(t) + 4\dot{u}(t)$$

$$y(0) = -2$$

$$\dot{y}(0) = 5$$

$$(5) 5\ddot{y}(t) - 3\dot{y}(t) + 3y(t) + 2y(t) = 4u(t) + 4\dot{u}(t)$$

$$y(0) = 1$$

$$\dot{y}(0) = 1$$

$$\ddot{y}(0) = 2$$

Rešitev

$$(1) Y(s)(s^2 - 2s + 2) = U(s)$$

$$(2) Y(s)(s^2 + 3s + 2) = U(s)(4s + 4)$$

$$(3) Y(s)(s^2 - 2s + 2) - s - 2 = U(s)$$

$$(4) Y(s)(s^2 + 3s + 2) + 2s + 1 = U(s)(4s + 4)$$

$$(5) Y(s)(5s^3 - 3s^2 + 3s + 2) - 5s^2 - 2s - 10 = U(s)(4s + 4)$$

Primer 1.11. Pretvorite naslednje vhodne in izhodne signale sistemov iz frekvenčnega s -prostora v časovni prostor.

$$(1) U(s) = \frac{1}{s}$$

$$(2) U(s) = \frac{1}{s^2}$$

$$(3) U(s) = \frac{1}{s + 3}$$

$$(4) U(s) = \frac{1}{s - 4}$$

$$(5) Y(s) = \frac{s}{(s + 4)(s + 5)}$$

$$(6) U(s) = \frac{s + 2}{s}$$

$$(7) Y(s) = \frac{s+3}{(s+1)(s^2+2s+2)}$$

$$(8) Y(s) = \frac{s^2+s+15}{(s^2+3s+3)(s^2+3s+4)}$$

$$(9) Y(s) = \frac{s+10}{(3s^2+7s+4)(s^2+4s+3)}$$

$$(10) Y(s) = \frac{s+11}{(3s+1)(s+3)}$$

$$(11) Y(s) = \frac{s+5}{(s+2)(s^2+7s+10)}$$

$$(12) Y(s) = \frac{44}{(s+3)(s^2+5s-14)}$$

Rešitev

$$(1) u(t) = 1(t)$$

$$(2) u(t) = t$$

$$(3) u(t) = e^{-3t}$$

$$(4) u(t) = e^{4t}$$

$$(5) y(t) = 5e^{-5t} - 4e^{-4t}$$

$$(6) u(t) = \delta(t) + 2 \cdot 1(t)$$

$$(7) y(t) = 2e^{-t} - 2e^{-t} \cos(t) + e^{-t} \sin(t)$$

$$(8) y(t) = -2e^{-1,5t} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + 10\sqrt{3}e^{-1,5t} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + 2e^{-1,5t} \cos\left(\frac{\sqrt{7}}{2}t\right) - 4\sqrt{7}e^{-1,5t} \sin\left(\frac{\sqrt{7}}{2}t\right)$$

$$(9) y(t) = \frac{78}{15}e^{-\frac{4}{3}t} + \frac{9}{2}te^{-t} - \frac{61}{4}e^{-t} - \frac{7}{20}e^{-3t}$$

$$(10) y(t) = \frac{4}{3}e^{-\frac{1}{3}t} - e^{-3t}$$

$$(11) y(t) = te^{-2t}$$

$$(12) y(t) = -\frac{11}{5}e^{-3t} + \frac{11}{9}e^{-7t} + \frac{44}{45}e^{2t}$$

Primer 1.12. Izračunajte Laplaceovo transformacijo signala, ki je zapisan v naslednji obliki:

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < t_1 \\ A, & t_1 \leq t \leq t_2 \\ 0, & t > t_2 \end{cases}$$

Rešitev

Pulzni signal lahko sestavimo iz dveh premaknjenih stopnic, kjer $1(t + t_0)$ pomeni signal, ki ima skok pri vrednoti, kjer je argument enak nič ($t = -t_0$).

$$1(t + t_0) = \begin{cases} 0, & t < -t_0 \\ 1, & t \geq -t_0 \end{cases}$$

Z zapisom premaknjenih stopnic lahko signal $f(t)$ zapišemo kot:

$$f(t) = A(1(t - t_1) - 1(t - t_2))$$

Laplaceov transform je tako enak

$$F(s) = \frac{A}{s} (e^{-st_1} - e^{-st_2})$$

Primer 1.13. Izračunajte Laplaceovo transformacijo trikotnega pulznega signala, ki je zapisan v naslednji obliki:

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < t_1 \\ \frac{A}{t_2 - t_1}(t - t_1), & t_1 \leq t \leq t_2 \\ 0, & t > t_2 \end{cases}$$

Rešitev

Trikotni pulzni signal lahko sestavimo na naslednji dva načina:

$$f(t) = A \frac{t - t_1}{t_2 - t_1} (1(t - t_1) - 1(t - t_2))$$

ali

$$f(t) = A \frac{t - t_1}{t_2 - t_1} 1(t - t_1) - A \frac{t - t_2}{t_2 - t_1} 1(t - t_2) - A 1(t - t_2)$$

Laplaceov transform je tako enak

$$F(s) = \frac{A}{t_2 - t_1} \left(\frac{e^{-st_1} - e^{-st_2}}{s^2} \right) - A \frac{e^{-st_2}}{s}$$

Primer 1.14. Sistem s prenosno funkcijo

$$G_P(s) = \frac{1}{(s+1)}$$

vzbujamo s signalom, ki je zapisan v naslednji obliki:

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t < t_a \\ A, & t_a \leq t \leq t_b \\ B, & t > t_b \end{cases}$$

Analitično določite odziv sistema na vzbujanje $u(t)$ in ga skicirajte! Določite tudi stacionarno vrednost odziva!

Primer 1.15. Sistem s prenosno funkcijo

$$G_P(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$$

vzbujamo s signalom, ki je zapisan v naslednji obliki:

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t < t_a \\ A, & t_a \leq t \leq t_b \\ B, & t > t_b \end{cases}$$

Analitično določite odziv sistema na vzbujanje $u(t)$ in ga skicirajte! Določite tudi stacionarno vrednost odziva!

2. Predstavitve sistemov za analizo in načrtovanje vodenja

2.1 Diferencialne enačbe

Diferencialne enačbe so temeljno orodje pri predstavitvi oziroma zapisu linearnih in nelinearnih dinamičnih sistemov. Do njih pridemo s postopki eksperimentalnega ali teoretičnega modeliranja.

Laplaceova transformacija predstavlja pomembno orodje za reševanje linearnih, časovno nespremenljivih diferencialnih enačb. Z njeno pomočjo dobimo celotno rešitev, ki sestoji iz splošne rešitve in partikularnih rešitev (začetni pogoji so avtomatsko vključeni v rešitev).

Če so vsi začetni pogoji nič, izvedemo Laplaceovo transformacijo diferencialne enačbe tako, da $\frac{d}{dt}$ zamenjamo z Laplaceovim operatorjem s , $\frac{d^2}{dt^2}$ z s^2 itd. Za rešitev diferencialne enačbe potrebujem dva koraka:

- vsak člen diferencialne enačbe nadomestimo z ustreznim Laplaceovim transformom, kar pripelje do algebrajske enačbe spremenljivke s . Z ustrezno preureditvijo pridemo do Laplaceovega transformata odvisne spremenljivke $X(s)$
- rešitev diferencialne enačbe (časovni potek) dobimo z uporabo inverzne Laplaceove transformacije.

V tem poglavju bomo prikazali nekaj primerov analize sistemov zapisanih z linearnimi diferencialnimi enačbami. Splošna oblika linearne diferencialne enačbe s konstantnimi koeficienti je:

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 \dot{y} + a_0 y = b_n u^{(n)} + \dots + b_0 u \quad (2.1)$$

2.1.1 Reševanje v s pomočjo Laplaceove transformacije

Za reševanje diferencialnih enačb s pomočjo Laplaceove transformacije uporabljamo tabelo 1.1 in opisane lastnosti transformacije. Z uporabo lastnosti 1.5 in 1.6

preoblikujemo diferencialno enačbo v algebrasko enačbo, ki jo rešimo z uporabo pravil za reševanje le-teh. Ker je večina diferencialnih enačb, ki jih obravnavamo, odvisnih od časa t , lahko rečemo, da z Laplaceovo transformacijo dobimo algebrasko enačbo, ki je odvisna od kompleksne frekvence s , v splošnem pa s imenujemo Laplaceov operator. Rešitev enačbe je zato funkcija kompleksne frekvence s . Z uporabo inverzne Laplaceove transformacije pa nato dobimo rešitev v časovnem prostoru.

Primer 2.1. \triangle Podana je diferencialna enačba, ki opisuje delovanje nekega sistema z začetnimi pogoji in vhodno funkcijo.

$$\begin{aligned} \ddot{y}(t) + 3\dot{y}(t) + 2y(t) &= 4\dot{u}(t) & (2.2) \\ u(t) &= t \\ y(0) &= 0 \\ \dot{y}(0) &= 1 \end{aligned}$$

Rešitev

Z uporabo Laplaceove transformacije dobimo naslednji sistem algebrajskih enačb.

$$\begin{aligned} s^2Y(s) - sy(0) - \dot{y}(0) + 3(sY(s) - y(0)) + 2Y(s) &= 4(sU(s) - u(0)) & (2.3) \\ U(s) &= \frac{1}{s^2} \\ y(0) &= 0 \\ \dot{y}(0) &= 1 \end{aligned}$$

Če sedaj upoštevamo začetna stanja sistema in Laplaceov transform funkcije na vходу sistema, dobimo naslednjo enačbo.

$$s^2Y(s) - 1 + 3sY(s) + 2Y(s) = \frac{4}{s} \quad (2.4)$$

Rezultat v frekvenčnem s -prostoru se po preureditvi glasi.

$$Y(s) = \frac{s + 4}{s^3 + 3s^2 + 2s} \quad (2.5)$$

Da pridemo do rešitve v časovnem prostoru, je potrebno uporabiti še inverzno Laplaceovo transformacijo. V ta namen je potrebno razbiti zapis na vsoto enostavnih ulomkov.

$$Y(s) = \frac{2}{s} - \frac{3}{s+1} + \frac{1}{s+2} \quad (2.6)$$

Iz tabel za Laplaceovo transformacijo lahko sedaj določimo rešitev diferencialne enačbe v časovnem prostoru.

$$y(t) = 2 \cdot 1(t) - 3e^{-t} + e^{-2t} \quad (2.7)$$

2.1.2 Naloge

Primer 2.2. \triangle Določite časovni odziv sistema podanega z diferencialno enačbo:

$$\ddot{x} + 3\dot{x} + 2x = 0 \quad \dot{x}(0) = b \quad ; \quad x(0) = a$$

Rešitev

Celotno diferencialno enačbo transformiramo v Laplaceov prostor (vsak člen nadomestimo z Laplaceovim transformom):

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[x(t)] &= X(s) \\ \mathcal{L}[\dot{x}(t)] &= sX(s) - x(0) \\ \mathcal{L}[\ddot{x}(t)] &= s^2X(s) - sx(0) - \dot{x}(0) \end{aligned}$$

$$s^2X(s) - sx(0) - \dot{x}(0) + 3sX(s) - 3x(0) + 2X(s) = 0$$

$$X(s)(s^2 + 3s + 2) = sa + b + 3a$$

$$X(s) = \frac{sa + b + 3a}{(s + 1)(s + 2)} = \frac{K_1}{s + 1} + \frac{K_2}{s + 2}$$

$$K_1 = \left. \frac{sa + b + 3a}{(s + 2)} \right|_{s=-1} = 2a + b$$

$$K_2 = \left. \frac{sa + b + 3a}{(s + 1)} \right|_{s=-2} = -a - b$$

$$X(s) = \frac{2a + b}{s + 1} - \frac{a + b}{s + 2}$$

$$y(t) = (2a + b)e^{-t} - (a + b)e^{-2t} \quad za \quad t \geq 0$$

Primer 2.3. Določite časovni odziv sistema podanega z diferencialno enačbo:

$$\ddot{x} + 2\dot{x} + 5x = 3 \quad \dot{x}(0) = 0 \quad ; \quad x(0) = 0$$

Rešitev

$$X(s) = \frac{3}{s(s^2 + 2s + 5)} = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2s + K_3}{s^2 + 2s + 5}$$

$$K_1 = \frac{3}{5} \quad ; \quad K_2 = -\frac{3}{5} \quad ; \quad K_3 = -\frac{6}{5}$$

$$X(s) = \frac{3}{5s} - \frac{3}{5} \cdot \frac{s+2}{(s+1)^2+4} = \frac{3}{5s} - \frac{3}{5} \cdot \frac{s+1}{(s+1)^2+4} - \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{(s+1)^2+4}$$

$$x(t) = \frac{3}{5} - \frac{3}{5}e^{-t} \cos(2t) - \frac{3}{10}e^{-t} \sin(2t) \quad \text{za } t \geq 0$$

Primer 2.4. *S pomočjo Laplaceove transformacije rešite naslednje diferencialne enačbe:*

$$(1) \quad \ddot{y}(t) + 4\dot{y}(t) + 5y(t) = 3u(t)$$

$$u(t) = 1(t)$$

$$y(0) = 0$$

$$\dot{y}(0) = 0$$

$$(2) \quad \ddot{y}(t) + 9y(t) = 2u(t) + \dot{u}(t)$$

$$u(t) = 1(t)$$

$$y(0) = 0$$

$$\dot{y}(0) = 0$$

$$(3) \quad \ddot{y}(t) + 6\dot{y}(t) + 9y(t) = u(t)$$

$$u(t) = 2 \cdot 1(t)$$

$$y(0) = 0$$

$$\dot{y}(0) = 0$$

$$(4) \quad 2\ddot{y}(t) + 8\dot{y}(t) + 26y(t) = u(t)$$

$$u(t) = 3 \cdot 1(t)$$

$$y(0) = 0$$

$$\dot{y}(0) = 0$$

$$(5) \quad \ddot{y}(t) - 4\dot{y}(t) + 5y(t) = 3u(t)$$

$$u(t) = 1(t)$$

$$y(0) = 0$$

$$\dot{y}(0) = 0$$

$$(6) \quad \ddot{y}(t) - 6\dot{y}(t) + 9y(t) = u(t)$$

$$u(t) = 2 \cdot 1(t)$$

$$y(0) = 0$$

$$\dot{y}(0) = 0$$

$$(7) \quad \ddot{y}(t) + 4\dot{y}(t) + 5y(t) = 3u(t)$$

$$u(t) = 1(t)$$

$$y(0) = 0$$

$$\dot{y}(0) = 1$$

$$(8) \quad \ddot{y}(t) + 9y(t) = 2u(t) + \dot{u}(t)$$

$$u(t) = 1(t)$$

$$y(0) = 2$$

$$\dot{y}(0) = 0$$

$$(9) \quad \ddot{y}(t) + 6\dot{y}(t) + 9y(t) = u(t)$$

$$u(t) = 2 \cdot 1(t)$$

$$y(0) = 1$$

$$\dot{y}(0) = 1$$

$$(10) \quad 2\ddot{y}(t) + 8\dot{y}(t) + 26y(t) = u(t)$$

$$u(t) = 3 \cdot 1(t)$$

$$y(0) = 1$$

$$\dot{y}(0) = 2$$

$$(11) \quad \ddot{y}(t) - 4\dot{y}(t) + 5y(t) = 3u(t)$$

$$u(t) = 1(t)$$

$$y(0) = 3$$

$$\dot{y}(0) = 4$$

$$(12) \quad \ddot{y}(t) - 6\dot{y}(t) + 9y(t) = u(t)$$

$$u(t) = 2 \cdot 1(t)$$

$$y(0) = 2$$

$$\dot{y}(0) = 2$$

Rešitev

$$(1) \quad y(t) = -\frac{6}{5}e^{-2t} \sin(t) - \frac{3}{5}e^{-2t} \cos(t) + \frac{3}{5}$$

$$(2) \quad y(t) = \frac{1}{3} \sin(3t) - \frac{2}{9} \cos(3t) + \frac{2}{9}$$

$$(3) \quad y(t) = -\frac{2}{9}e^{-3t} - \frac{2}{3}te^{-3t} + \frac{2}{9}$$

$$(4) \quad y(t) = -\frac{1}{13}e^{-2t} \sin(3t) - \frac{3}{26}e^{-2t} \cos(3t) + \frac{3}{26}$$

$$(5) \quad y(t) = \frac{6}{5}e^{2t} \sin(t) - \frac{3}{5}e^{2t} \cos(t) + \frac{3}{5}$$

$$(6) \quad y(t) = -\frac{2}{9}e^{3t} + \frac{2}{3}te^{3t} + \frac{2}{9}$$

$$(7) \quad y(t) = -\frac{1}{5}e^{-2t}\sin(t) - \frac{3}{5}e^{-2t}\cos(t) + \frac{3}{5}$$

$$(8) \quad y(t) = \frac{1}{3}\sin(3t) + \frac{16}{9}\cos(3t) + \frac{2}{9}$$

$$(9) \quad y(t) = \frac{7}{9}e^{-3t} + \frac{10}{3}te^{-3t} + \frac{2}{9}$$

$$(10) \quad y(t) = \frac{49}{39}e^{-2t}\sin(3t) + \frac{23}{26}e^{-2t}\cos(3t) + \frac{3}{26}$$

$$(11) \quad y(t) = -\frac{4}{5}e^{2t}\sin(t) + \frac{12}{5}e^{2t}\cos(t) + \frac{3}{5}$$

$$(12) \quad y(t) = \frac{16}{9}e^{3t} - \frac{10}{3}te^{3t} + \frac{2}{9}$$

2.2 Prenosne funkcije

Z uporabo Laplaceove transformacije lahko diferencialne enačbe preoblikujemo v algebrajske enačbe, jih rešimo in nato rezultat z inverzno Laplaceovo transformacijo spet izrazimo v časovnem prostoru. Če imamo linearno diferencialno enačbo s konstantnimi koeficienti in ničelnimi začetnimi pogoji, jo z Laplaceovo transformacijo lahko preoblikujemo v prenosno funkcijo.

2.2.1 Definicija prenosne funkcije

Prenosna funkcija linearne, časovno nespremenljivega sistema je kvocient Laplaceove transformacije izhoda in vhoda sistema pri ničelnih začetnih pogojih. Dobimo jo lahko iz diferencialne enačbe sistema, ki jo v splošnem zapišemo kot:

$$\begin{aligned} a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1 y^{(1)}(t) + a_0 y(t) &= \\ = b_m u^{(m)}(t) + b_{m-1} u^{(m-1)}(t) + \dots + b_1 u^{(1)}(t) + b_0 u(t) \end{aligned} \quad (2.8)$$

Laplaceova transformacija diferencialne enačbe nam da naslednjo algebrajsko enačbo.

$$\begin{aligned} a_n \left(s^n y(s) - \sum_{i=1}^n s^{n-i} y^{(i-1)}(0) \right) + \dots + a_1 (s y(s) - y(0)) + a_0 y(s) &= \\ b_m \left(s^m u(s) - \sum_{i=1}^m s^{m-i} u^{(i-1)}(0) \right) + \dots + b_1 (s u(s) - u(0)) + b_0 u(s) \end{aligned} \quad (2.9)$$

ker pa so začetne vrednosti za prenosno funkcijo po definiciji enake 0, se izraz (2.9) poenostavi.

$$\begin{aligned} a_n s^n y(s) + a_{n-1} s^{n-1} y(s) + \cdots + a_1 s y(s) + a_0 y(s) = \\ b_m s^m u(s) + b_{m-1} s^{m-1} u(s) + \cdots + b_1 s u(s) + b_0 u(s) \end{aligned} \quad (2.10)$$

na levi strani enačbe 2.10 lahko izpostavimo $y(s)$ na desni pa $u(s)$ in dobimo naslednji izraz:

$$\begin{aligned} y(s) (a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0) = \\ u(s) (b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0) \end{aligned} \quad (2.11)$$

kvocient $y(s)$ in $u(s)$ torej zapišemo:

$$\frac{y(s)}{u(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0} = g(s) \quad (2.12)$$

Vidimo, da se v imenovalcu prenosne funkcije (2.12) pojavi karakteristična enačba diferencialne enačbe. Iz tega lahko sklepamo, da bo dinamika sistema odvisna od polov prenosne funkcije.

Primer 2.5. \triangle Podana je diferencialna enačba:

$$\ddot{y}(t) + 5\dot{y}(t) + 6y(t) = \dot{u}(t) + u(t) \quad (2.13)$$

Začetni pogoji naj bodo enaki 0, vhod v sistem pa naj bo $u(t) = 1(t)$. Kakšen je odziv sistema $y(t)$?

Rešitev

Uporaba Laplaceove transformacije nad diferencialno enačbo (2.13) privede do naslednje oblike.

$$s^2 + Y(s) - sy(0) - \dot{y}(0) + 5(sY(s) - y(0)) + 6Y(s) = sU(s) - u(0) + U(s) \quad (2.14)$$

Ker so začetni pogoji 0, se enačba (2.14) lahko poenostavi.

$$s^2 Y(s) + 5sY(s) + 6Y(s) = sU(s) + U(s)$$

Sedaj na levi strani izpostavimo $Y(s)$ in na desni $U(s)$.

$$Y(s)(s^2 + 5s + 6) = U(s)(s + 1)$$

Od tod dobimo prenosno funkcijo.

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s+1}{s^2+5s+6} = \frac{s+1}{(s+2)(s+3)}$$

Iz tabel vidimo, da je $U(s) = \frac{1}{s}$ in iz definicije prenosne funkcije sledi, da je $Y(s) = G(s)U(s)$.

$$Y(s) = \frac{s+1}{(s+2)(s+3)s}$$

Z metodo razstavljanja na delne ulomke dobimo naslednji izraz.

$$Y(s) = \frac{A}{s+2} + \frac{B}{s+3} + \frac{C}{s}$$

Sedaj je potrebno določiti konstante A , B in C .

$$A = [Y(s)(s+2)]_{s=-2} = \left[\frac{s+1}{(s+3)s} \right]_{s=-2} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$$

$$B = [Y(s)(s+3)]_{s=-3} = \left[\frac{s+1}{(s+2)s} \right]_{s=-3} = \frac{-2}{3} = -\frac{2}{3}$$

$$C = [sY(s)]_{s=0} = \left[\frac{s+1}{(s+2)(s+3)} \right]_{s=0} = \frac{1}{6}$$

V prostoru kompleksne frekvence s odziv sistema zapišemo kot:

$$Y(s) = \frac{1}{2} \frac{1}{s+2} - \frac{2}{3} \frac{1}{s+3} + \frac{1}{6} \frac{1}{s}$$

S pomočjo tabel lahko sedaj izvedemo inverzno Laplaceovo transformacijo.

$$y(t) = \frac{1}{2}e^{-2t} - \frac{2}{3}e^{-3t} + \frac{1}{6}1(t)$$

2.2.2 Naloge

Primer 2.6. \triangle Določite prenosno funkcijo sistema na sliki 2.1. Izračunajte odziv sistema na vhodni signal (vsiljeni) in odziv na začetno stanje (lastni odziv).



Slika 2.1: Bločni diagram iz primera 2.6

$$\frac{d^3y}{dt^3} + 6\frac{d^2y}{dt^2} + 11\frac{dy}{dt} + 6y(t) = u(t)$$

$$\dot{y}(0) = 1 \quad ; \quad \dot{y}(0) = 0 \quad ; \quad y(0) = 1 \quad ; \quad u(t) = e^{-t} \quad \text{za} \quad t \geq 0$$

Rešitev

$$\begin{aligned}
 s^3 Y(s) + 6s^2 Y(s) + 11s Y(s) + 6Y(s) &= U(s) \\
 Y(s)(s^3 + 6s^2 + 11s + 6) &= U(s) \\
 G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} &= \frac{1}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6} = \frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)}
 \end{aligned}$$

Korene zgornje enačbe lahko dobimo z Matlab-ovim ukazom `roots([1 6 11 6])`.

(a) Odziv na vhodni signal:

$$\begin{aligned}
 U(s) &= \frac{1}{s+1} \\
 Y_1(s) = G(s) \cdot U(s) &= \frac{1}{(s+1)^2(s+2)(s+3)} = \frac{K_1}{s+2} + \frac{K_2}{s+3} + \frac{K_3}{s+1} + \frac{K_4}{(s+1)^2} \\
 K_1 = 1 \quad ; \quad K_2 &= -\frac{1}{4} \quad ; \quad K_3 = -\frac{3}{4} \quad ; \quad K_4 = \frac{1}{2} \\
 y_1(t) &= e^{-2t} - \frac{1}{4}e^{-3t} - \frac{3}{4}e^{-t} + \frac{1}{2}te^{-t}
 \end{aligned}$$

(b) Odziv na začetno stanje:

$$\begin{aligned}
 s^3 Y_2(s) - s^2 - 1 + 6s^2 Y_2(s) - 6s + 11s Y_2(s) - 11 + 6Y_2(s) &= 0 \\
 (s^3 + 6s^2 + 11s + s)Y_2(s) &= s^2 + 6s + 12 \\
 Y_2(s) = \frac{s^2 + 6s + 12}{(s+1)(s+2)(s+3)} &= \frac{K_1}{s+1} + \frac{K_2}{s+2} + \frac{K_3}{s+3} \\
 K_1 = \frac{7}{2} \quad ; \quad K_2 &= -4 \quad ; \quad K_3 = \frac{3}{2} \\
 y_2(t) &= \frac{7}{2}e^{-t} - 4e^{-2t} + \frac{3}{2}e^{-3t}
 \end{aligned}$$

(c) Skupni odziv:

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t) = \frac{11}{4}e^{-t} - 3e^{-2t} + \frac{5}{4}e^{-3t} + \frac{1}{2}te^{-t}$$

Primer 2.7. \triangle Za zgornji primer izračunajte še stacionarno vrednost izhoda za dane vhodne signale:

(1) $\ddot{y}(0) = 0 \quad ; \quad \dot{y}(0) = 0 \quad ; \quad y(0) = 1 \quad ; \quad u(t) = 1$

(2) $\ddot{y}(0) = 0 \quad ; \quad \dot{y}(0) = 0 \quad ; \quad y(0) = 0 \quad ; \quad u(t) = 1$

(3) $\ddot{y}(0) = 0 \quad ; \quad \dot{y}(0) = 0 \quad ; \quad y(0) = 1 \quad ; \quad u(t) = 0$

Rešitev

(1)

$$s^3Y(s) - s^2 + 6s^2Y(s) - 6s + 11sY(s) - 11 + 6Y(s) = \frac{1}{s}$$

$$Y(s) \cdot (s^3 + 6s^2 + 11s + 6) = \frac{1}{s} + s^2 + 6s + 11$$

$$Y(s) = \frac{s^3 + 6s^2 + 11s + 1}{s(s^3 + 6s^2 + 11s + 6)}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sY(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^3 + 6s^2 + 11s + 1}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6} = \frac{1}{6}$$

(2)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \frac{1}{6}$$

(3)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$$

Primer 2.8. \triangle Za dano funkcijo, za katero poznamo njen Laplaceov transform, izračunajte začetno in končne vrednosti v časovnem prostoru ($t = 0$ in $t \rightarrow \infty$)

$$F(s) = \frac{1}{s + 3}$$

Rešitev

$$f(0) = \lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s}{s + 3} = 1$$

$$f(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{s + 3} = 0$$

Primer 2.9. Pretvorite naslednje diferencialne enačbe v prenosne funkcije. Označi y in u pomenita časovno odvisni funkciji.

$$(1) \frac{d^4y}{dt^4} + 12\frac{d^2y}{dt^2} + 4\frac{dy}{dt} + 300y = 4\frac{d^3u}{dt^3} + \frac{d^2u}{dt^2} + 13\dot{u} + u$$

$$(2) 32\frac{d^6y}{dt^6} + 14\frac{d^4y}{dt^4} + 3\frac{dy}{dt} + 23y = \frac{d^2u}{dt^2} + 5\frac{d^2u}{dt^2} + 11\dot{u} + 33u$$

$$(3) \frac{d^3 y}{dt^3} + 2 \frac{d^2 y}{dt^2} + 6 \frac{dy}{dt} + 30y = 21 \frac{d^3 u}{dt^3} + 34 \frac{d^2 u}{dt^2} + 3\dot{u} + 111u$$

$$(4) 5 \frac{d^4 y}{dt^4} + 16 \frac{d^3 y}{dt^3} + 12 \frac{d^2 y}{dt^2} + 14 \frac{dy}{dt} + 37y = 4 \frac{d^3 u}{dt^3} + \frac{d^2 u}{dt^2} + 13\dot{u} + 25u$$

$$(5) \frac{d^5 y}{dt^5} + 13 \frac{d^4 y}{dt^4} + 35 \frac{d^3 y}{dt^3} + 12 \frac{d^2 y}{dt^2} + 4 \frac{dy}{dt} + 300y = 15 \frac{d^4 u}{dt^4} + 4 \frac{d^3 u}{dt^3} + \frac{d^2 u}{dt^2} + 13\dot{u} + u$$

Rešitev

$$(1) G(s) = \frac{4s^3 + s^2 + 13s + 1}{s^4 + 12s^2 + 4s + 300}$$

$$(2) G(s) = \frac{6s^2 + 11s + 33}{32s^6 + 14s^4 + 3s + 23}$$

$$(3) G(s) = \frac{21s^3 + 34s^2 + 3s + 111}{s^3 + 2s^2 + 6s + 30}$$

$$(4) G(s) = \frac{4s^3 + s^2 + 13s + 25}{5s^4 + 16s^3 + 12s^2 + 14s + 37}$$

$$(5) G(s) = \frac{15s^4 + 4s^3 + s^2 + 13s + 1}{s^5 + 13s^4 + 35s^3 + 12s^2 + 4s + 300}$$

Primer 2.10. Izračunajte odziv naslednjih sistemov na dane vhodne signale. Če so sistemi podani v obliki diferencialne enačbe, jih prej pretvorite v prenosno funkcijo. Odziv sistema podajte v časovnem prostoru.

$$(1) \ddot{y}(t) + 4\dot{y}(t) + 5y(t) = 3u(t)$$

$$u(t) = 1(t)$$

$$y(0) = 0$$

$$\dot{y}(0) = 0$$

$$(2) \ddot{y}(t) + 9y(t) = 2u(t) + \dot{u}(t)$$

$$u(t) = 1(t)$$

$$y(0) = 0$$

$$\dot{y}(0) = 0$$

$$(3) \ddot{y}(t) + 6\dot{y}(t) + 9y(t) = u(t)$$

$$u(t) = 2 \cdot 1(t)$$

$$y(0) = 0$$

$$\dot{y}(0) = 0$$

$$(4) \quad \begin{aligned} 2\ddot{y}(t) + 8\dot{y}(t) + 26y(t) &= u(t) \\ u(t) &= 3 \cdot 1(t) \\ y(0) &= 0 \\ \dot{y}(0) &= 0 \end{aligned}$$

$$(5) \quad \begin{aligned} \ddot{y}(t) - 4\dot{y}(t) + 5y(t) &= 3u(t) \\ u(t) &= 1(t) \\ y(0) &= 0 \\ \dot{y}(0) &= 0 \end{aligned}$$

$$(6) \quad \begin{aligned} \ddot{y}(t) - 6\dot{y}(t) + 9y(t) &= u(t) \\ u(t) &= 2 \cdot 1(t) \\ y(0) &= 0 \\ \dot{y}(0) &= 0 \end{aligned}$$

$$(7) \quad \begin{aligned} G(s) &= \frac{s + 3}{(s + 1)(s^2 + 4s + 5)} \\ u(s) &= \frac{1}{s} \end{aligned}$$

$$(8) \quad \begin{aligned} G(s) &= \frac{s + 4}{(s + 3)(s + 2)s} \\ u(s) &= \frac{1}{s} \end{aligned}$$

$$(9) \quad \begin{aligned} G(s) &= \frac{s + 1}{(s^2 + 1)(s + 4)} \\ u(s) &= \frac{1}{s^2} \end{aligned}$$

$$(10) \quad \begin{aligned} G(s) &= \frac{3}{s + 2} \\ u(s) &= \frac{4}{s^2 + 16} \end{aligned}$$

$$(11) \quad \begin{aligned} G(s) &= \frac{s^2 + 2s + 4}{(s^2 + 5s + 6)(s^2 - 1)} \\ u(s) &= \frac{1}{s^2 + 2s + 4} \end{aligned}$$

$$(12) \quad \begin{aligned} G(s) &= \frac{13}{(s^2 + 3s + 2)} \\ u(s) &= \frac{1}{s + 2} \end{aligned}$$

$$(13) \quad G(s) = \frac{s+3}{(s^2+7s+12)(s^2+3s+2)}$$

$$u(s) = \frac{3}{s}$$

Rešitev

$$(1) \quad G(s) = \frac{3}{s^2+4s+5}$$

$$y(t) = -\frac{6}{5}e^{-2t}\sin(t) - \frac{3}{5}e^{-2t}\cos(t) + \frac{3}{5}$$

$$(2) \quad G(s) = \frac{s+2}{s^2+9}$$

$$y(t) = \frac{1}{3}\sin(3t) - \frac{2}{9}\cos(3t) + \frac{2}{9}$$

$$(3) \quad G(s) = \frac{1}{s^2+6s+9}$$

$$y(t) = -\frac{2}{9}e^{-3t} - \frac{2}{3}te^{-3t} + \frac{2}{9}$$

$$(4) \quad G(s) = \frac{1}{2s^2+8s+26}$$

$$y(t) = -\frac{1}{13}e^{-2t}\sin(3t) - \frac{3}{26}e^{-2t}\cos(3t) + \frac{3}{26}$$

$$(5) \quad G(s) = \frac{3}{s^2-4s+5}$$

$$y(t) = \frac{6}{5}e^{2t}\sin(t) - \frac{3}{5}e^{2t}\cos(t) + \frac{3}{5}$$

$$(6) \quad G(s) = \frac{1}{s^2-6s+9}$$

$$y(t) = -\frac{2}{9}e^{3t} + \frac{2}{3}te^{3t} + \frac{2}{9}$$

$$(7) \quad y(t) = \frac{3}{5} - e^{-t} + \frac{2}{5}e^{-2t}\cos(t) - \frac{1}{5}e^{-2t}\sin(t)$$

$$(8) \quad y(t) = -\frac{7}{18} + \frac{2}{3}t - \frac{1}{9}e^{-3t} + \frac{1}{2}e^{-2t}$$

$$(9) \quad y(t) = \frac{3}{16} + \frac{1}{4}t - \frac{3}{272}e^{-4t} - \frac{3}{17}\cos(t) - \frac{5}{17}\sin(t)$$

$$(10) \quad y(t) = \frac{3}{5}e^{-2t} - \frac{3}{5}\cos(4t) + \frac{3}{10}\sin(4t)$$

$$(11) y(t) = -\frac{1}{8}e^{-3t} + \frac{1}{3}e^{-2t} + \frac{1}{24}e^t - \frac{1}{4}e^{-t}$$

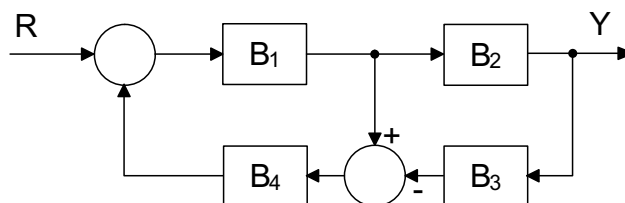
$$(12) y(t) = -13e^{-2t} - 13te^{-2t} + 13e^{-t}$$

$$(13) y(t) = \frac{3}{8} + \frac{3}{4}e^{-2t} - e^{-t} - \frac{1}{8}e^{-4t}$$

2.3 Bločni diagram

Bločni diagram je predstavitev elementov ali podsistemov nekega procesa z bloki in ustreznimi povezavami, ki predstavljajo masne, energijske ali informacijske tokove. Bločni diagram je sestavljen iz blokov, sumacijskih točk, razcepišč signalov in povezav. Po drugi strani pa lahko bločni diagram vidimo kot grafično predstavitev algebrskih enačb, ki jih dobimo z Laplaceovo transformacijo sistema diferencialnih enačb, ki predstavljajo matematični model obravnavanega procesa.

Primer bločnega diagrama je prikazan na sliki 2.2, kjer imamo dve razcepišči, dve sumacijski točki in štiri bloke v katerih si predstavljamo podsisteme za katere poznamo vhodno-izhodno obnašanje. Vhodno-izhodno obnašanje posameznih podsistemov zapišemo v obliki prenosnih funkcij $B_1(s)$, $B_2(s)$, $B_3(s)$ in $B_4(s)$.

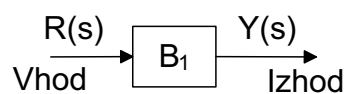


Slika 2.2: Primer bločnega diagrama

Blok predstavlja določen podsistem in je predstavljen s prenosno funkcijo med vhomom in izhodom iz tega podsistema

$$Y(s) = B_1(s) \cdot R(s),$$

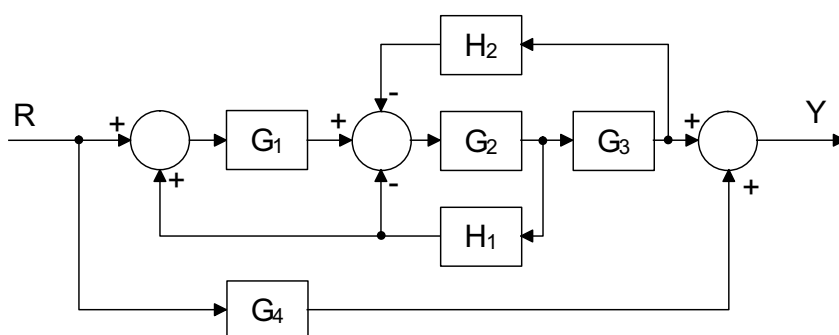
kar predstavlja slika 2.3. Kompleksni sistemi so sestavljeni iz množice medsebojno povezanih podsistemov za katere lahko razmeroma enostavno določimo karakteristike oziroma njihove dinamične lastnosti. Zato težimo k temu, da kompleksen sistem zapišemo s temi pod modeli. Torej poskušamo zapisati sistem *modularno*. Seveda pa nas zanima tudi delovanje celotnega sistema. To pomeni, da bo potrebno določiti prenosno funkcijo celotnega sistema. Tu naletimo na problem poenostavljanja bločnih diagramov s pomočjo bločne algebre.



Slika 2.3: Primer bloka

2.3.1 Naloge

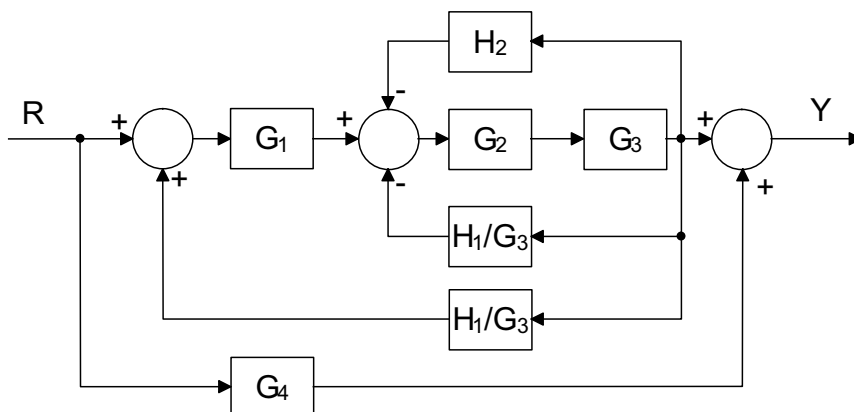
Primer 2.11. \triangle Za proces na sliki 2.4 določite prenosno funkcijo $G(s) = \frac{Y(s)}{R(s)}$



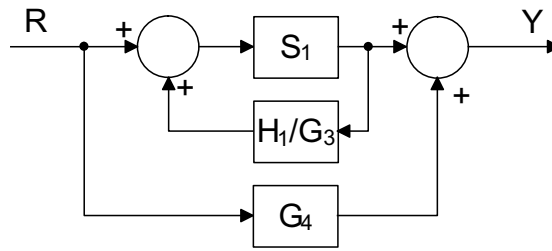
Slika 2.4: Bločni diagram iz primera 2.11

Rešitev

Poenostavitve bločnega diagrama so prikazane na slikah 2.5 in 2.6.



Slika 2.5: Prva poenostavitev primera 2.11

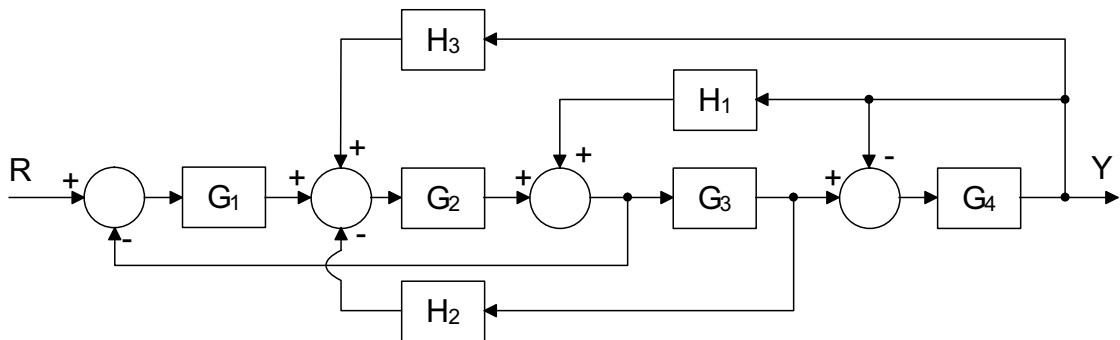


$$S_1 = G_1 \cdot \frac{G_2 G_3}{1 + G_2 G_3 \left(\frac{H_1}{G_3} + H_2 \right)}$$

Slika 2.6: Druga poenostavitev primera 2.11

$$G(s) = G_4 + \frac{\frac{G_1 G_2 G_3}{1 + G_2 H_1 + G_2 G_3 H_2}}{1 - \frac{G_1 G_2 G_3}{1 + G_2 H_1 + G_2 G_3 H_2} \cdot \frac{H_1}{G_3}} = G_4 + \frac{G_1 G_2 G_3}{1 + G_2 H_1 + G_2 G_3 H_2 - G_1 G_2 H_1}$$

Primer 2.12. $\triangle S$ pomočjo pravil bločne algebre določite prenosno funkcijo $G(s) = \frac{Y(s)}{R(s)}$ sistema na sliki 2.7.

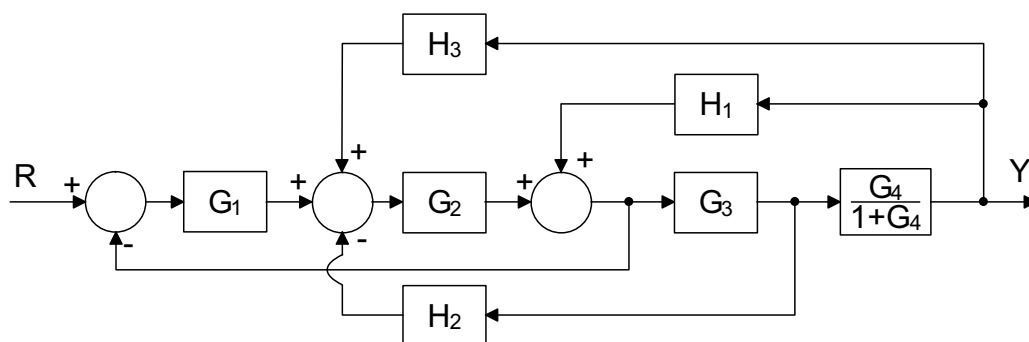


Slika 2.7: Bločni diagram iz primera 2.12

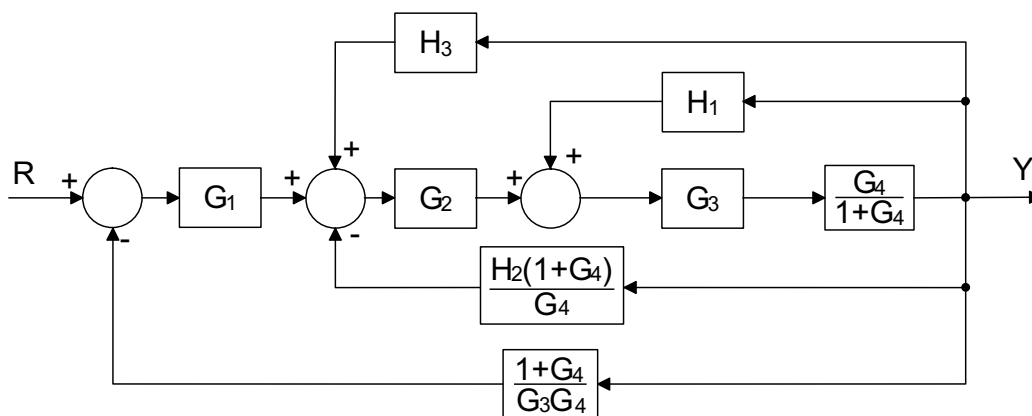
Rešitev

Poenostavitve bločnega diagrama so prikazane na slikah 2.8 do 2.11.

$$\frac{\frac{G_2 G_3 G_4}{1 + G_4 - H_1 G_3 G_4 - H_3 G_2 G_3 G_4}}{1 + \frac{G_2 G_3 G_4 H_2 (1 + G_4)}{(1 + G_4 - H_1 G_3 G_4 - H_3 G_2 G_3 G_4) G_4}} = \frac{G_2 G_3 G_4}{1 + G_4 - H_1 G_3 G_4 - H_3 G_2 G_3 G_4 + G_2 G_3 (1 + G_4) H_2}$$



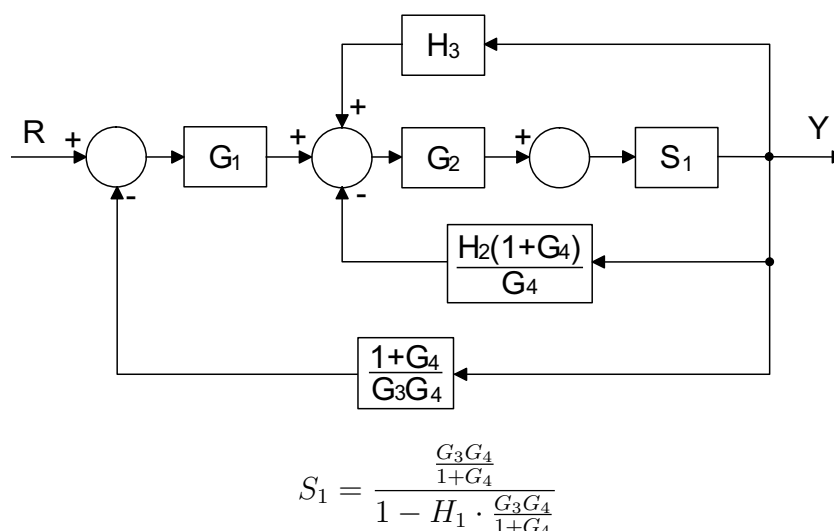
Slika 2.8: Prva poenostavitev primera 2.12



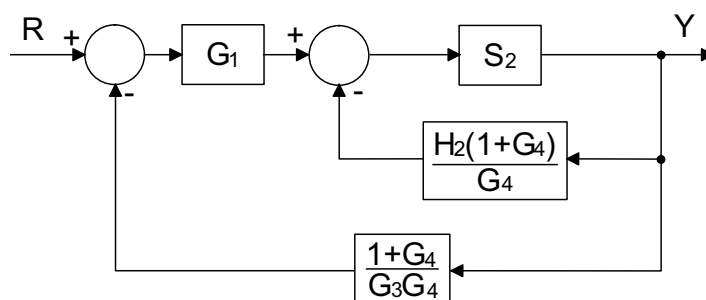
Slika 2.9: Druga poenostavitev primera 2.12

$$\begin{aligned}
 G &= \frac{\frac{G_1 G_2 G_3 G_4}{1+G_4 - H_1 G_3 G_4 - H_3 G_2 G_3 G_4 + G_2 G_3 (1+G_4) H_2}}{1 + \frac{1+G_4}{G_3 G_4} \frac{G_1 G_2 G_3 G_4}{1+G_4 - H_1 G_3 G_4 - H_3 G_2 G_3 G_4 + G_2 G_3 (1+G_4) H_2}} = \\
 &= \frac{G_1 G_2 G_3 G_4}{1 + G_4 - H_1 G_3 G_4 - H_3 G_2 G_3 G_4 + G_2 G_3 (1 + G_4) H_2 + G_1 G_2 (1 + G_4)}
 \end{aligned}$$

Primer 2.13. Δ Določite odziv sistema $Y(s)$, če sistem vzbujamo z vhodnim signalom $R(s)$, proces pa je moten s signaloma $N_1(s)$ in $N_2(s)$. Sistem prikazuje bločni diagram na sliki 2.12.



Slika 2.10: Tretja poenostavitev primera 2.12



$$S_2 = \frac{\frac{\frac{G_2G_3G_4}{1+G_4}}{1 - H_1 \cdot \frac{G_3G_4}{1+G_4}}}{1 - H_3 \frac{\frac{G_2G_3G_4}{1+G_4}}{1 - H_1 \cdot \frac{G_3G_4}{1+G_4}}} = \frac{G_2G_3G_4}{1 + G_4 - H_1G_3G_4 - H_3G_2G_3G_4}$$

Slika 2.11: Četrta poenostavitev primera 2.12

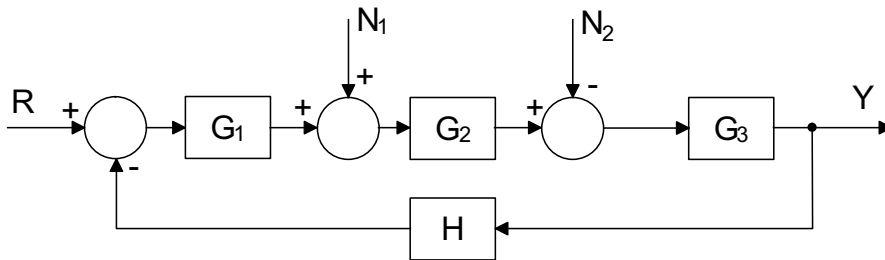
Rešitev

Odziv določimo s pomočjo **superpozicije**: $Y = Y_1 + Y_2 + Y_3$

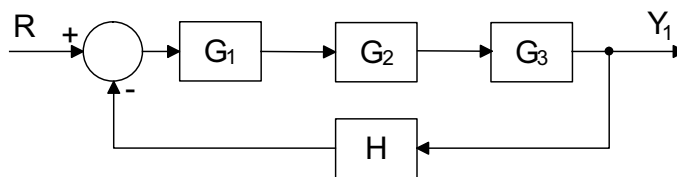
Y_1 dobimo tako, da upoštevamo samo vhod R , motnjo N_1 in N_2 pa izenačimo z nič (slika 2.13):

$$Y_1 = \frac{G_1G_2G_3}{1 + G_1G_2G_3H} \cdot R$$

Y_2 dobimo tako, da upoštevamo motnjo N_1 , motnjo N_2 in vhod R pa izenačimo

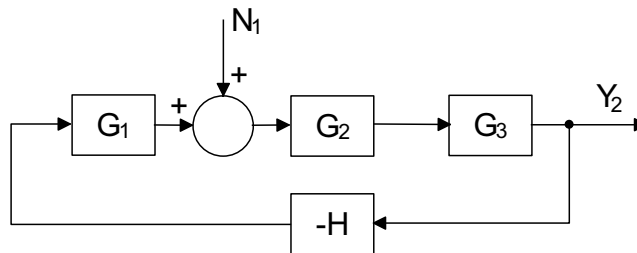


Slika 2.12: Bločni diagram iz primera 2.13

Slika 2.13: $Y_1 : R, N_1 = N_2 = 0$

z nič (slika 2.14):

$$Y_2 = \frac{G_2 G_3}{1 + G_1 G_2 G_3 H} \cdot N_1$$

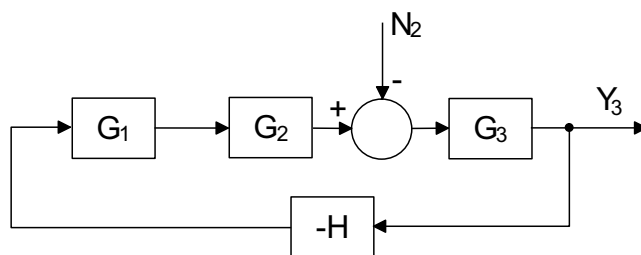
Slika 2.14: $Y_2 : N_1, R = N_2 = 0$

Y_3 dobimo tako, da upoštevamo motnjo N_2 , motnjo N_1 in vhod R pa izenačimo z nič (slika 2.15):

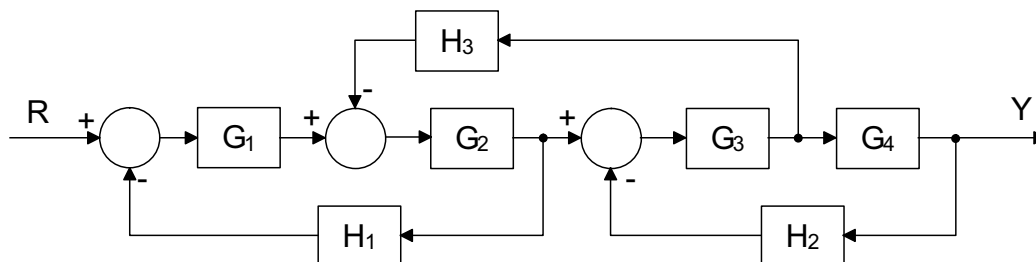
$$Y_3 = \frac{-G_3}{1 + G_1 G_2 G_3 H} \cdot N_2$$

Skupen odziv vhoda in obeh motenj je:

$$Y = Y_1 + Y_2 + Y_3 = \frac{G_1 G_2 G_3 R + G_2 G_3 N_1 - G_3 N_2}{1 + G_1 G_2 G_3 H}$$

Slika 2.15: $Y_2 : N_2, R = N_1 = 0$

Primer 2.14. S pomočjo pravil bločne algebre določite prenosno funkcijo $G(s) = \frac{Y(s)}{R(s)}$ sistema na sliki 2.16.



Slika 2.16: Bločni diagram iz primera 2.14

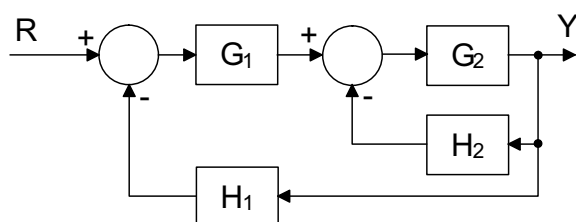
Rešitev

$$G = \frac{G_1 G_2 G_3 G_4}{1 + G_3 G_4 H_2 + G_2 G_3 H_3 + G_1 G_2 H_1 + G_1 G_2 G_3 G_4 H_1 H_2}$$

Primer 2.15. Za bločni diagram na sliki 2.17 poiščite prenosno funkcijo $G(s) = \frac{Y(s)}{R(s)}$.

Rešitev

$$G = \frac{G_1 G_2}{1 + G_1 G_2 H_1 + G_2 H_2}$$



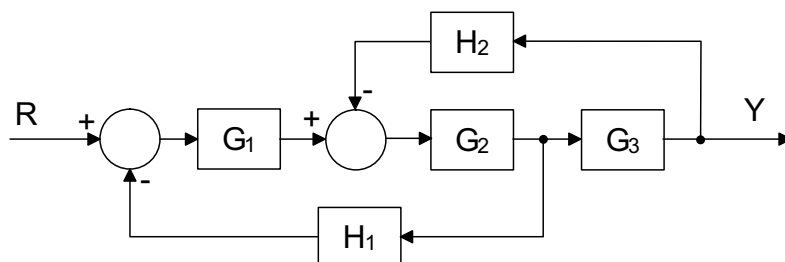
Slika 2.17: Bločni diagram iz primera 2.15

Primer 2.16. *Naslednji bločni diagram razrešite tako, da se bo v povratni zanki procesa nahajal samo:*

(a) blok H_1

(b) blok H_2

Določite tudi prenosno funkcijo $G(s) = \frac{Y(s)}{R(s)}$.



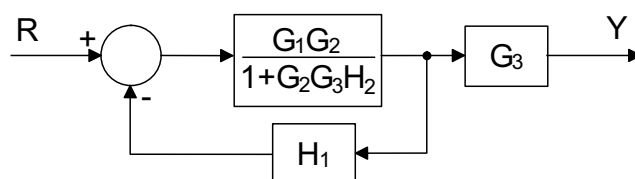
Slika 2.18: Bločni diagram iz primera 2.16

Rešitev

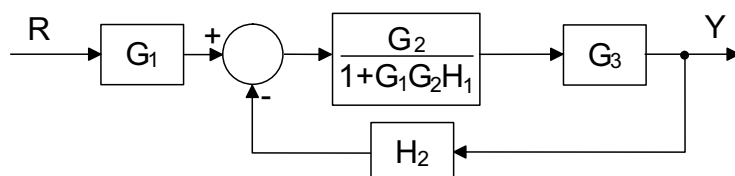
Bločna diagrama sta prikazana na slikah 2.19 in 2.20, prenosna funkcija pa je naslednja:

$$G = \frac{G_1 G_2 G_3}{1 + G_1 G_2 H_1 + G_2 G_3 H_2}$$

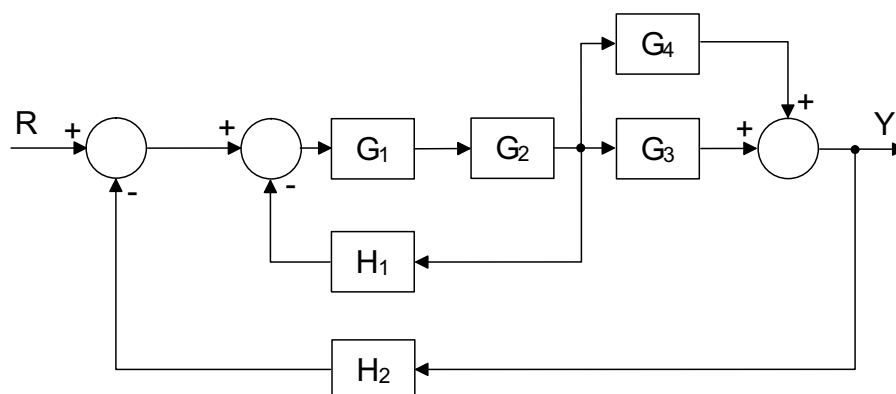
Primer 2.17. *S pomočjo pravil bločne algebre določite prenosno funkcijo $G = \frac{Y}{R}$ sistema na sliki 2.21.*



Slika 2.19: Rešitev primera 2.16 a



Slika 2.20: Rešitev primera 2.16 b



Slika 2.21: Bločni diagram iz primera 2.17

Rešitev

$$G = \frac{G_1 G_2 G_3 + G_1 G_2 G_4}{1 + G_1 G_2 H_1 + G_1 G_2 G_3 H_2 + G_1 G_2 G_4 H_2}$$

2.4 Diagram poteka signalov

Diagram poteka signalov je še ena od možnih grafičnih predstavitev sistema algebrajskih enačb, ki jih dobimo s transformacijo sistema diferencialnih enačb, ki predstavljajo matematični model obravnavanega procesa, v Laplaceov prostor.

Vhodne signale, spremenljivke stanj in izhodne signale predstavimo z vozlišči, ki jih med seboj povežemo z zankami, ki so usmerjene in imajo uteži. Uteži predstavljajo povezavo med dvema vozliščema oz. prenosno funkcijo. Glede na to kakšni signali definirajo vozlišča imamo: vhodna, izhodna in pa mešana vozlišča.

Diagram poteka signalov je zelo uporaben način predstavitve kompleksnih sistemov, ker lahko zelo enostavno izračunamo prenosne funkcije med posameznimi deli grafa. To nam omogoča Masonovo pravilo.

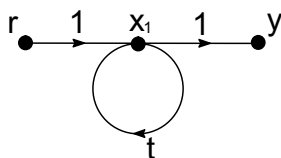
2.4.1 Naloge

Primer 2.18. \triangle S pomočjo pravil za poenostavljanje diagramov poteka signalov določite prenosno funkcijo sistema, ki ga opisuje naslednji matematični model.

$$\begin{aligned}x_1 &= r + t \cdot x_1 \\y &= x_1\end{aligned}$$

Rešitev

S pomočjo podanih enačb lahko narišemo sliko 2.22.



Slika 2.22: DPS iz primera 2.18

$$\begin{aligned}x_1 &= \frac{r}{1-t} \quad ; \quad y = \frac{r}{1-t} \\ \frac{y}{r} &= \frac{1}{1-t}\end{aligned}$$

Primer 2.19. \triangle S pomočjo pravil za poenostavljanje diagramov poteka signalov

določite prenosno funkcijo sistema, ki ga opisuje naslednji matematični model:

$$\begin{aligned} y_2 &= t_1 \cdot y_1 \\ y_3 &= t_2 \cdot y_2 + t_3 \cdot y_2 + t_5 \cdot y_4 \\ y_4 &= t_4 \cdot y_3 \\ y_5 &= t_6 \cdot y_4 + t_7 \cdot y_5 \\ y_6 &= t_8 \cdot y_5 \end{aligned}$$

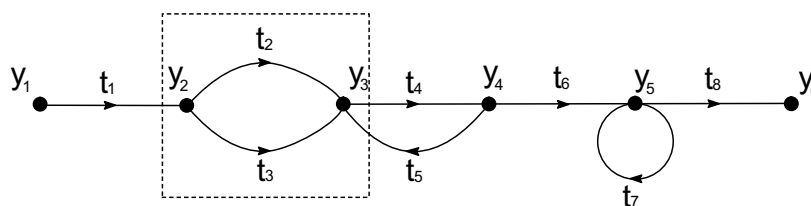
Določite tudi vse direktne poti in zanke ter njihova ojačenja in nedotikajoče se zanke.

Rešitev

S pomočjo slike 2.23 določimo direktne poti (P_i) in zanke (Z_i):

$$\begin{aligned} P_1 &: y_1 \xrightarrow{t_1} y_2 \xrightarrow{t_2} y_3 \xrightarrow{t_4} y_4 \xrightarrow{t_6} y_5 \xrightarrow{t_8} y_6 : P_1 = t_1 \cdot t_2 \cdot t_4 \cdot t_6 \cdot t_8 \\ P_2 &: y_1 \xrightarrow{t_1} y_2 \xrightarrow{t_3} y_3 \xrightarrow{t_4} y_4 \xrightarrow{t_6} y_5 \xrightarrow{t_8} y_6 : P_2 = t_1 \cdot t_3 \cdot t_4 \cdot t_6 \cdot t_8 \\ Z_1 &: y_3 \xrightarrow{t_4} y_4 \xrightarrow{t_5} y_3 : Z_1 = t_4 \cdot t_5 \\ Z_2 &: y_5 \xrightarrow{t_7} y_5 : Z_2 = t_7 \end{aligned}$$

Nedotikajoče zanke so tiste, ki nimajo skupnega vozlišča. V tem primeru sta zanki Z_1 in Z_2 .

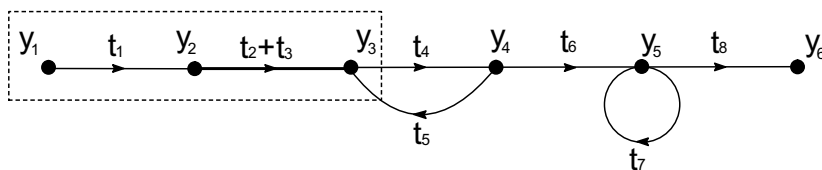


Slika 2.23: DPS iz primera 2.19

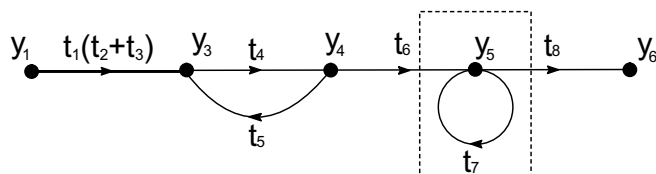
Diagram poteka signalov iz slike 2.23 lahko poenostavimo na več načinov. En način je prikazan v naslednjih korakih. Iščemo utežno prenosno funkcijo t tako, da bo:

$$y_6 = t \cdot y_1$$

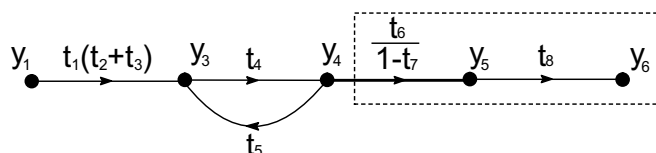
1. korak. Združimo paralelni poti, ki sta obkroženi na sliki 2.23 (slika 2.24).
2. korak. Združimo dve serijski poti (slika 2.25).



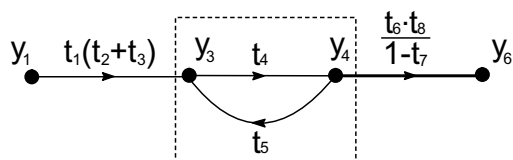
Slika 2.24: 1. korak iz primera 2.19



Slika 2.25: 2. korak iz primera 2.19



Slika 2.26: 3. korak iz primera 2.19



Slika 2.27: 4. korak iz primera 2.19

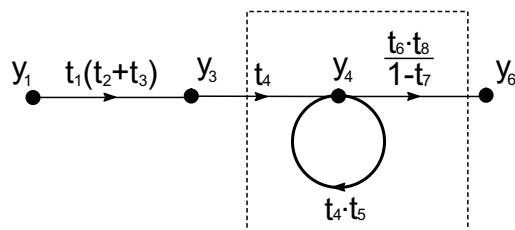
3. korak. Odstranitev lastne zanke (slika 2.26).

4. korak. Združimo dve serijski poti (slika 2.27).

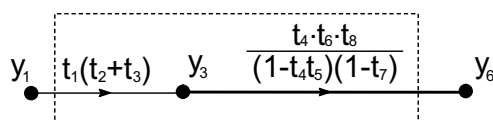
5. korak. V podanem primeru iz vozlišča y_3 , ne izhaja nobena druga zveza, razen tiste do y_4 , ni dodatnih podrejenih vozlišč in tako dobimo z odstranitvijo poti t_5 le lastno zanko v vozlišču y_4 z utežjo $t_5 \cdot t_4$ (slika 2.28).

6. korak. Odstranitev lastne zanke (slika 2.29).

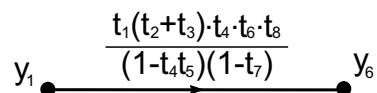
7. korak. Združitev serijskih poti (slika 2.30)



Slika 2.28: 5. Korak iz primera 2.19



Slika 2.29: 6. korak iz primera 2.19



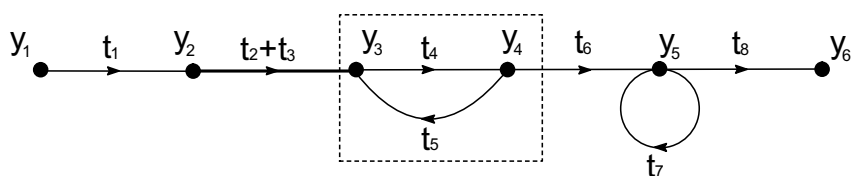
Slika 2.30: 7. korak iz primera 2.19

Prenosna funkcija je torej:

$$t = \frac{t_1 \cdot (t_2 + t_3) \cdot t_4 \cdot t_6 \cdot t_8}{(1 - t_4 \cdot t_5)(1 - t_7)}$$

Tudi pri diagramih poteka signalov velja, da lahko pričnemo poenostavljati na katerem koli delu diagrama, vedno moramo dobiti enak končni rezultat. Poglejmo si še eno možnost reševanja zgornjega sistema:

1. korak. Naj ostane enak kot prej (slika 2.31).

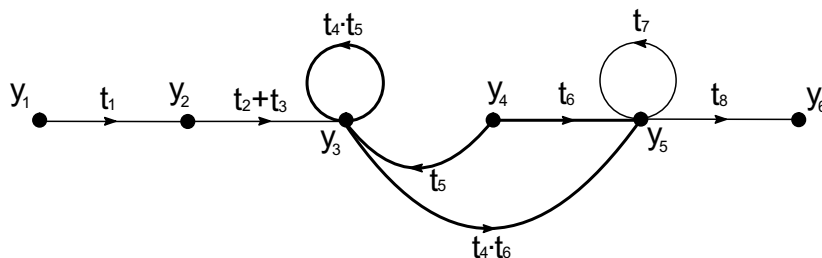


Slika 2.31: 1. korak iz primera 2.19

2. korak. Odstranitev povezave t_4 med y_3 in y_4 (slika 2.32).

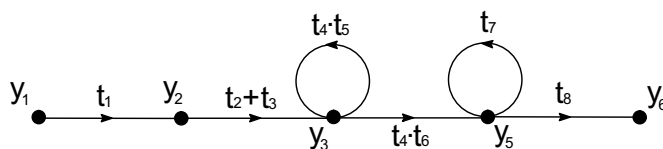
Do vseh vozlišč, ki so podrejena vozlišču y_4 potegnemo nove poti (v našem primeru sta takšni vozlišči y_3 in y_5).

Dobimo novi povezavi med vozlišči y_3 in y_5 z utežjo $t_4 \cdot t_6$ in lastno zanko z utežjo $t_4 \cdot t_5$ v vozlišču y_3 .



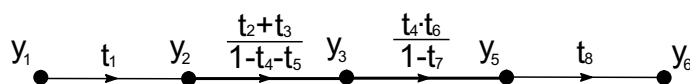
Slika 2.32: 2. korak iz primera 2.19

3. korak. Vidimo, da imamo v vozlišču y_4 samo poti, ki iz tega vozlišča izstopajo (vhodna vozlišča) in v takšnem primeru lahko vozlišče in vse izstopajoče veje iz diagrama poteka signalov enostavno odstranimo (slika 2.33).



Slika 2.33: 3. korak iz primera 2.19

4. korak. Sedaj eliminiramo obe lastni zanki (slika 2.34).



Slika 2.34: 4. korak iz primera 2.19

5. korak. Sedaj poenostavimo še serijske povezave poti in dobimo prenosno funkcijo, ki je enaka kot prej:

$$t = \frac{t_1 \cdot (t_2 + t_3) \cdot t_4 \cdot t_6 \cdot t_8}{(1 - t_4 \cdot t_5)(1 - t_7)}$$

Primer 2.20. S pomočjo pravil za poenostavljanje diagramov poteka signalov določite prenosno funkcijo sistema, ki ga opisuje naslednji matematični model:

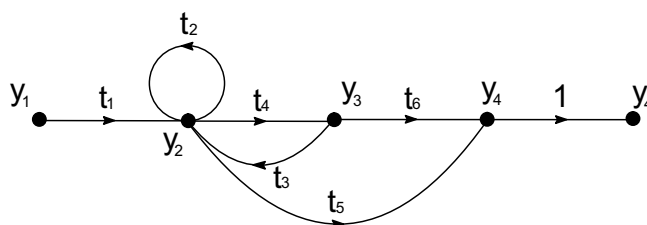
$$y_2 = t_1 \cdot y_1 + t_2 \cdot y_2 + t_3 \cdot y_3$$

$$y_3 = t_4 \cdot y_2$$

$$y_4 = t_5 \cdot y_2 + t_6 \cdot y_3$$

Rešitev

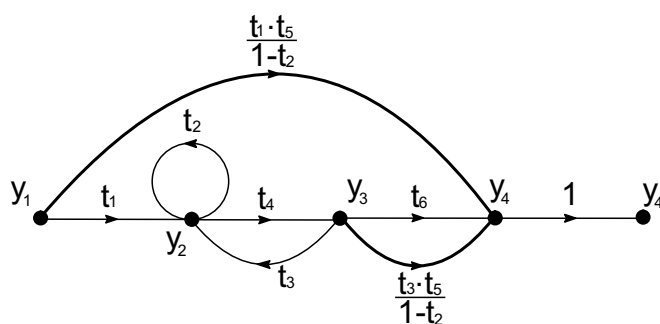
S pomočjo podanih enačb dobimo diagram poteka signalov, ki je prikazan na sliki 2.35. Diagram lahko poenostavimo na dva načina:



Slika 2.35: DPS iz primera 2.20

(a) Povezavo t_5 prestavimo iz y_2 v y_1 (slika 2.36).

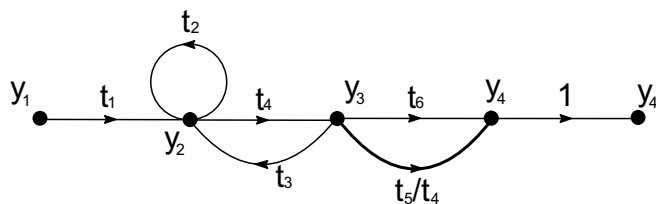
(b) Povezavo t_5 prestavimo iz y_2 v y_3 (slika 2.37).



Slika 2.36: Poenostavitev DPS iz primera (a) 2.20

Če diagrama potekov signalov iz slike 2.36 in slike 2.37 poenostavimo, dobimo prenosno funkcijo:

$$t = \frac{t_1 \cdot (t_5 + t_4 \cdot t_6)}{1 - t_2 - t_3 \cdot t_4}$$



Slika 2.37: Poenostavitev DPS iz primera (b) 2.20

Primer 2.21. S pomočjo pravil za poenostavljanje diagramov poteka signalov določite prenosno funkcijo sistema, ki ga opisuje naslednji matematični model.

$$x_2 = x_1 + t_1 \cdot x_2 + t_3 \cdot x_3$$

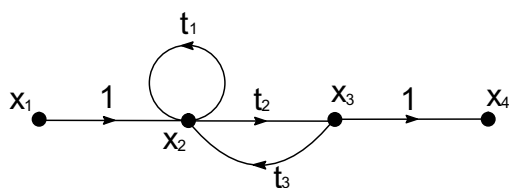
$$x_3 = x_2 + t_2$$

$$x_4 = x_3$$

Rešitev

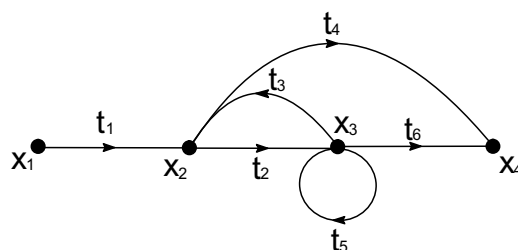
S pomočjo podanih enačb lahko narišemo sliko 2.38 in dobimo prenosno funkcijo:

$$\frac{x_4}{x_1} = \frac{t_2}{1 - t_1 - t_2 \cdot t_3}$$



Slika 2.38: DPS iz primera 2.21

Primer 2.22. S pomočjo pravil za poenostavljanje diagramov poteka signalov določite prenosno funkcijo sistema, ki je predstavljen z diagramom poteka signalov na sliki 2.39.

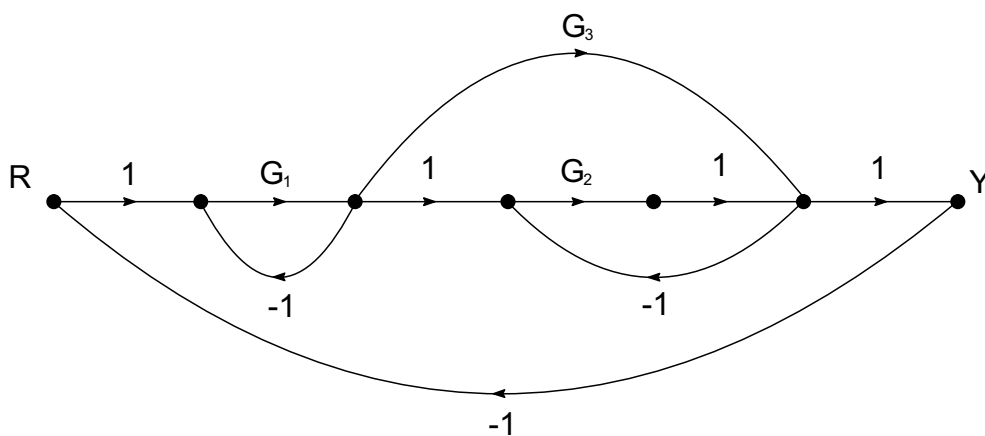


Slika 2.39: DPS iz primera 2.22

Rešitev

$$\frac{x_4}{x_1} = \frac{t_1 \cdot t_4 \cdot (1 - t_5) + t_1 \cdot t_2 \cdot t_6}{1 - (t_5 + t_2 \cdot t_3)}$$

Primer 2.23. S pomočjo pravil za poenostavljanje diagramov poteka signalov določite prenosno funkcijo sistema, ki je predstavljen z diagramom poteka signalov na sliki 2.40.



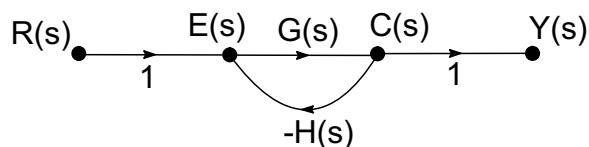
Slika 2.40: DPS iz primera 2.23

Rešitev

$$\frac{Y}{R} = \frac{G_1 \cdot G_2 + G_1 \cdot G_3}{1 + G_1 + G_2 + G_1 \cdot G_3 + 2 \cdot G_1 \cdot G_2}$$

2.4.2 Masonovo pravilo

Primer 2.24. Δ Ob uporabi Masonovega pravila določite prenosno funkcijo sistema, ki je predstavljen z diagramom poteka signalov na sliki 2.41.



Slika 2.41: DPS iz primera 2.24

Rešitev

$$T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{1}{\Delta} \sum_{i=1}^M P_i \cdot \Delta_i$$

Direktne poti: $R(s) \xrightarrow{1} E(s) \xrightarrow{G(s)} C(s) \xrightarrow{1} Y(s)$

$M = 1 \dots$ število direktnih poti med vhomom $R(s)$ in izhodom $Y(s)$.

$P_1 = 1 \cdot G(s) \cdot 1 = G(s) \dots$ ojačenje prve direktne poti.

Imamo samo eno zanko:

$$E(s) \xrightarrow{G(s)} C(s) \xrightarrow{-H(s)} E(s) \Rightarrow P_{11} = -G(s) \cdot H(s)$$

$\Delta = 1 - (\text{vsota produktov ojačenj individualnih povratnih zank}) =$

$$= 1 - P_{11} = 1 + G(s) \cdot H(s)$$

$\Delta_1 \dots$ vrednost Δ za del diagrama, ki se ne dotika prve direktne poti

$$\Delta_1 = 1 - 0 = 1$$

$$T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{P_1 \cdot \Delta_1}{\Delta} = \frac{G(s)}{1 + G(s) \cdot H(s)}$$

Primer 2.25. Δ Ob uporabi Masonovega pravila določite prenosno funkcijo sistema $\left(\frac{y_4}{y_1}\right)$, ki ga opisuje naslednji matematični model.

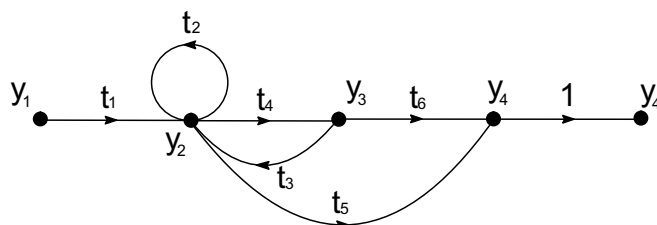
$$y_2 = t_1 \cdot y_1 + t_2 \cdot y_2 + t_3 \cdot y_3$$

$$y_3 = t_4 \cdot y_2$$

$$y_4 = t_5 \cdot y_2 + t_6 \cdot y_3$$

Rešitev

Diagram poteka signalov je prikazan na sliki 2.42.



Slika 2.42: DPS iz primera 2.25

$$T(s) = \frac{y_4}{y_1} = \frac{1}{\Delta} \sum_{i=1}^M P_i \cdot \Delta_i$$

Direktne poti: $M = 2$

$$P_1 = t_1 \cdot t_4 \cdot t_6$$

$$P_2 = t_1 \cdot t_5$$

Zanke:

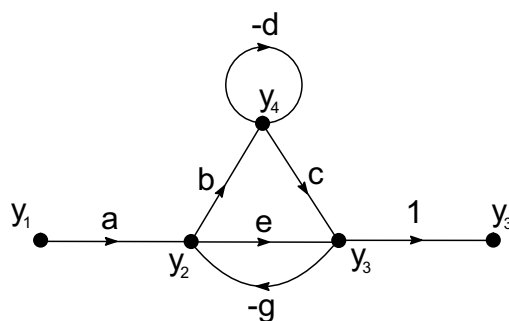
$$P_{11} = t_2$$

$$P_{21} = t_3 \cdot t_4$$

$$\Delta = 1 - (P_{11} + P_{21}) = 1 - (t_2 + t_3 \cdot t_4) = 1 - t_2 - t_3 \cdot t_4$$

Direktni poti se dotikata obeh povratnih zank $\Rightarrow \Delta_1 = 1$; $\Delta_2 = 1$

$$T = \frac{1}{\Delta} (P_1 \cdot \Delta_1 + P_2 \cdot \Delta_2) = \frac{t_1 \cdot t_4 \cdot t_6 + t_1 \cdot t_5}{1 - t_2 - t_3 \cdot t_4} = \frac{y_4}{y_1}$$



Slika 2.43: DPS iz primera 2.26

Primer 2.26. Matematični model sistema podaja diagram poteka signalov, ki je prikazan na sliki 2.43.

- (1) Napišite matematični model sistema.
- (2) Določite prenosno funkcijo med vhomom y_1 in izhodom y_3 .
- (3) Določite prenosno funkcijo med vhomom y_1 in izhodom y_2 .

Rešitev

(1)

$$\begin{aligned} y_2 &= a \cdot y_1 - g \cdot y_3 \\ y_3 &= e \cdot y_2 + c \cdot y_4 \\ y_4 &= b \cdot y_2 - d \cdot y_4 \end{aligned}$$

(2) Direktne poti: $P_1 = a \cdot e$; $P_2 = a \cdot b \cdot c \Rightarrow M = 2$

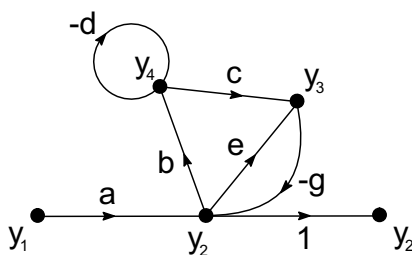
$$\text{Zanke: } P_{11} = -d \quad ; \quad P_{21} = b \cdot c \cdot (-g) \quad ; \quad P_{31} = e \cdot (-g)$$

Zanki P_{11} in P_{31} sta nedotikajoči.

$$\Delta = 1 - (P_{11} + P_{21} + P_{31}) + (P_{11} \cdot P_{31}) = 1 + d + b \cdot c \cdot g + e \cdot g + d \cdot e \cdot g$$

$$\Delta_1 = 1 + d \quad ; \quad \Delta_2 = 1$$

$$T = \frac{y_3}{y_1} = \frac{P_1 \Delta_1 + P_2 \Delta_2}{\Delta} = \frac{a \cdot e \cdot (1 + d) + a \cdot b \cdot c}{1 + d + b \cdot c \cdot g + e \cdot g + d \cdot e \cdot g}$$



Slika 2.44: DPS iz primera 2.26(3)

(3) Preurejen diagram poteka signalov je prikazan na sliki 2.44.

Direktne poti: $P_1 = a \Rightarrow M = 1$

Zanke: $P_{11} = -d$; $P_{21} = b \cdot c \cdot (-g)$; $P_{31} = e \cdot (-g)$

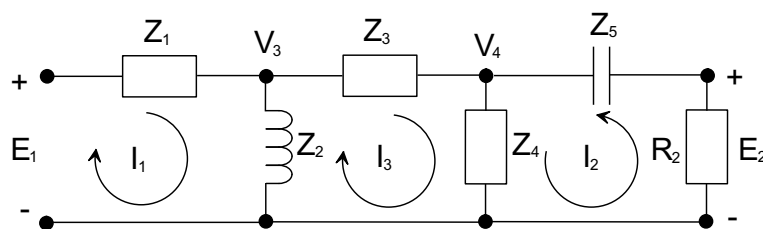
Zanki P_{11} in P_{31} sta nedotikajoči.

$$\Delta = 1 - (P_{11} + P_{21} + P_{31}) + (P_{11} \cdot P_{31}) = 1 + d + b \cdot c \cdot g + e \cdot g + d \cdot e \cdot g$$

$$\Delta_1 = 1 + d$$

$$T = \frac{y_2}{y_1} = \frac{P_1 \Delta_1}{\Delta} = \frac{a \cdot (1 + d)}{1 + d + b \cdot c \cdot g + e \cdot g + d \cdot e \cdot g}$$

Primer 2.27. Dano je električno vezje na sliki 2.45.



Slika 2.45: Električno vezje iz primera 2.27

(a) Za dano električno vezje narišite diagram poteka signalov, če so vrednosti elementov:

$$Z_1 = Z_3 = Z_4 = R_2 = 1$$

$$Z_2 = sL_2 = s$$

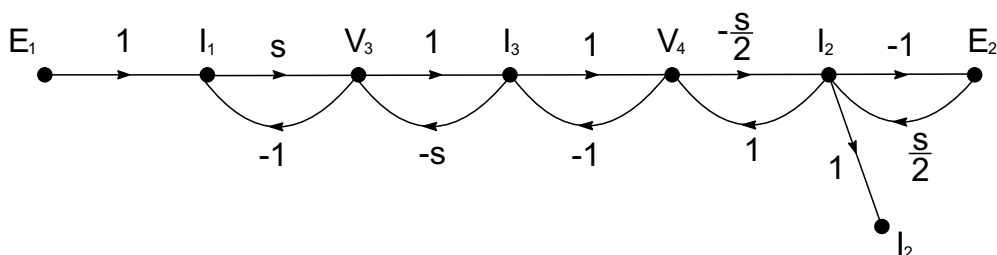
$$Z_5 = \frac{1}{sC_5} = \frac{2}{s}$$

- (b) Določite prenosno funkcijo $\frac{I_2}{E_1}$ s pomočjo poenostavitve diagrama poteka signalov.
- (c) Določite prenosno funkcijo $\frac{I_2}{E_1}$ s pomočjo Masonovega pravila.
- (d) Določite prenosno funkcijo $\frac{I_2}{E_1}$ s pomočjo poenostavitve diagrama poteka signalov, če velja da je $E_2 = 0$.
- (e) Določite prenosno funkcijo $\frac{I_2}{E_1}$ s pomočjo Masonovega pravila, če velja da je $E_2 = 0$.

Rešitev

- (a) S pomočjo naslednjih enačb narišemo diagram poteka signalov na sliki 2.46.

$$\begin{aligned} E_1 &= Z_1 I_1 + V_3 \Rightarrow I_1 = \frac{1}{Z_1} E_1 - \frac{V_3}{Z_1} \\ V_3 &= (I_1 - I_3) Z_2 = I_1 Z_2 - I_3 Z_2 \\ V_4 &= I_3 Z_4 + I_2 Z_4 \\ I_2 &= \frac{E_2}{Z_5} - \frac{V_4}{Z_5} \\ E_2 &= -I_2 R_2 \\ I_3 &= \frac{1}{Z_3} (V_3 - V_4) \end{aligned}$$



Slika 2.46: DPS iz primera 2.27

- (b)

$$\frac{I_2}{E_1} = \frac{-s^2}{5s^2 + 9s + 4}$$

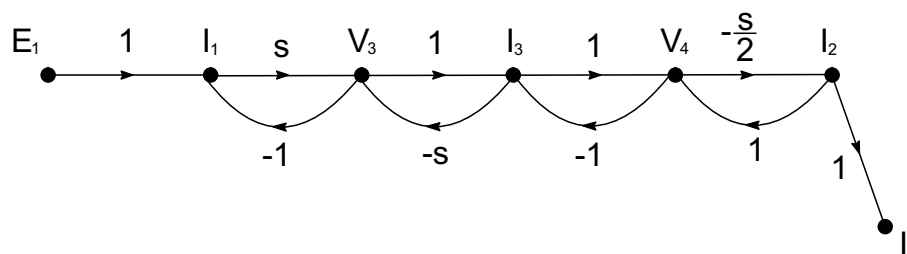
(c)

$$P_1 = -\frac{s^2}{2}$$

$$P_{11} = -s ; P_{12} = -s ; P_{13} = -1 ; P_{14} = -\frac{s}{2} ; P_{15} = -\frac{s}{2}$$

$$P_{21} = s ; P_{22} = \frac{s^2}{2} ; P_{23} = \frac{s^2}{2} ; P_{24} = \frac{s^2}{2} ; P_{25} = \frac{s^2}{2} ; P_{26} = \frac{s}{2} ; P_{31} = -\frac{s^2}{2}$$

$$\frac{I_2}{E_1} = \frac{-s^2}{5s^2 + 9s + 4}$$

(d) Diagram poteka signalov za $E_2 = 0$ je prikazan na sliki 2.47

Slika 2.47: DPS iz primera 2.27

$$\frac{I_2}{E_1} = \frac{-s^2}{2s^2 + 7s + 4}$$

(e)

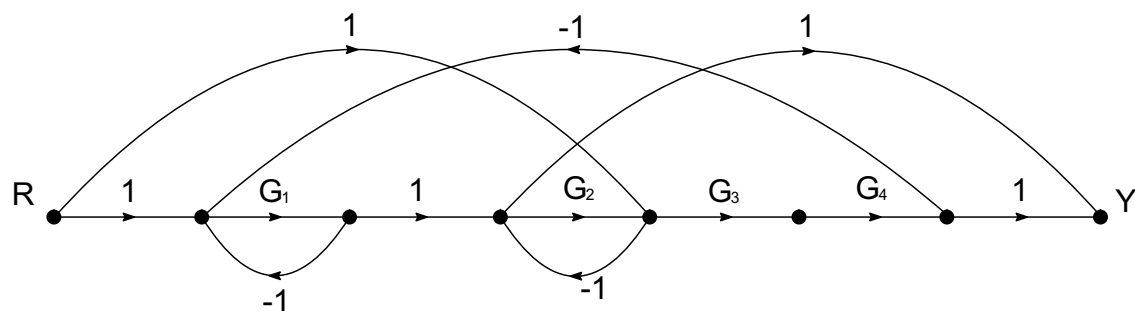
$$P_1 = -\frac{s^2}{2}$$

$$P_{11} = -s ; P_{12} = -s ; P_{13} = -1 ; P_{14} = -\frac{s}{2}$$

$$P_{21} = s ; P_{22} = \frac{s^2}{2} ; P_{23} = \frac{s^2}{2}$$

$$\frac{I_2}{E_1} = \frac{-s^2}{2s^2 + 7s + 4}$$

Primer 2.28. Ob uporabi Masonovega pravila določite prenosno funkcijo sistema, ki je predstavljen z diagramom poteka signalov na sliki 2.50.



Slika 2.48: DPS iz primera 2.28

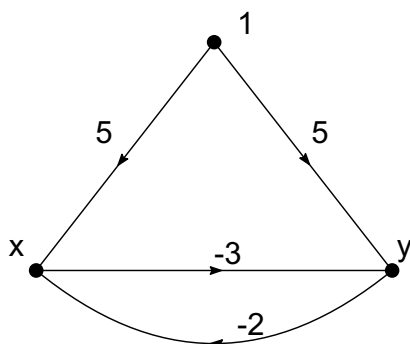
Rešitev

$$T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{-1 + G_1 G_2 G_3 G_4 + G_3 G_4}{1 + G_1 + G_2 + G_1 G_2 + G_1 G_2 G_3 G_4}$$

Primer 2.29. Z uporabo diagrama poteka signalov in Masonovega pravila rešite sistem algebrajskih enačb:

$$\begin{aligned} 3x + y &= 5 \\ x + 2y &= 5 \end{aligned} \quad (2.15)$$

Rešitev



Slika 2.49: DPS za primer 2.29

Zanke: $P_{11} = 6$, $\Delta = 1 - P_{11} = -5$

Direktne poti in poddeterminante za x :

$$P_{x1} = 5, \quad \Delta_{x1} = 1, \quad P_{x2} = -10, \quad \Delta_{x2} = 1$$

$$x = \frac{P_{x1}\Delta_{x1} + P_{x2}\Delta_{x2}}{\Delta} = 1$$

Direktne poti in poddeterminante za y :

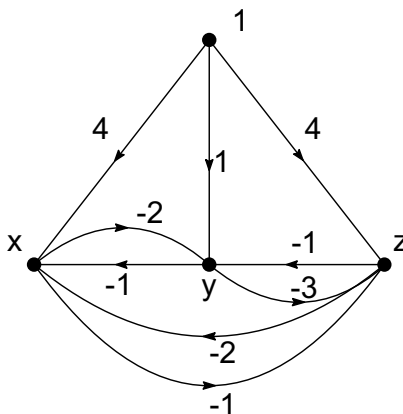
$$P_{y1} = 5, \quad \Delta_{y1} = 1, \quad P_{y2} = -15, \quad \Delta_{y2} = 1$$

$$y = \frac{P_{y1}\Delta_{y1} + P_{y2}\Delta_{y2}}{\Delta} = 2$$

Primer 2.30. Z uporabo diagrama poteka signalov in Masonovega pravila rešite sistem algebrajskih enačb:

$$\begin{aligned} 2x + y + z &= 1 \\ x + y + 2z &= 4 \\ x + 3y + z &= 4 \end{aligned} \tag{2.16}$$

Rešitev



Slika 2.50: DPS za primer 2.30

Zanke: $P_{11} = 2, \quad P_{12} = 3, \quad P_{13} = -12, \quad P_{14} = -1, \quad P_{15} = 2, \quad \Delta = 7$

Direktne poti in poddeterminante za x :

$$P_{x1} = 4, \quad P_{x2} = -1, \quad P_{x3} = 6, \quad P_{x4} = 4, \quad P_{x5} = -8,$$

$$\Delta_{x1} = -2, \Delta_{x2} = 1, \quad \Delta_{x3} = 1, \quad \Delta_{x4} = 1, \quad \Delta_{x5} = 1$$

$$x = \sum_{i=1}^5 \frac{P_{xi} \Delta_{xi}}{\Delta} = -1$$

Direktne poti in poddeterminante za y:

$$P_{y1} = 1, \quad P_{y2} = -4, \quad P_{y3} = 16, \quad P_{y4} = -8, \quad P_{y5} = 4,$$

$$\Delta_{y1} = -1, \quad \Delta_{y2} = 1, \quad \Delta_{y3} = 1, \quad \Delta_{y4} = 1, \quad \Delta_{y5} = 1$$

$$y = \sum_{i=1}^5 \frac{P_{yi} \Delta_{yi}}{\Delta} = 1$$

Direktne poti in poddeterminante za z:

$$P_{z1} = 4, \quad P_{z2} = -3, \quad P_{z3} = 1, \quad P_{z4} = 24, \quad P_{z5} = -4,$$

$$\Delta_{z1} = -1, \quad \Delta_{z2} = 1, \quad \Delta_{z3} = 1, \quad \Delta_{z4} = 1, \quad \Delta_{z5} = 1$$

$$z = \sum_{i=1}^5 \frac{P_{zi} \Delta_{zi}}{\Delta} = 2$$

Primer 2.31. *Narišite bločni in diagram poteka signalov za sistem, ki je podan v obliki algebrajskih enačb v s-prostoru. Z uporabo bločne algebre in z uporabo diagrama poteka signalov in Masonovega pravila določite prenosno funkcijo $T = \frac{Y}{R}$*

$$\begin{aligned} X_1 + H_1 X_5 + Y - R &= 0 \\ X_2 + X_3 + X_5 - Y &= 0 \\ -G_2 X_2 + X_3 + X_5 &= 0 \\ -X_3 + X_4 - X_5 &= 0 \\ -G_3 X_4 + X_5 &= 0 \\ G_1 X_1 - Y &= 0 \end{aligned} \tag{2.17}$$

Rešitev

Zanke:

$$P_{11} = -G_1, P_{12} = -G_2, P_{13} = G_3,$$

$$P_{14} = -G_3, P_{15} = -G_2G_3, P_{16} = -G_1G_2G_3H_1$$

Produkti uteži dveh nedotikajočih zank:

$$P_{21} = G_1G_2, P_{22} = -G_2G_3, P_{23} = -G_1G_3, P_{24} = G_1G_3, P_{25} = G_1G_2G_3$$

Produkti uteži treh nedotikajočih zank:

$$P_{31} = G_1G_2G_3$$

Sistemska determinanta:

$$\Delta = 1 - \sum_i P_{1i} + \sum_j P_{2j} - \sum_k P_{3k} = 1 + G_1 + G_2 + G_1G_2 + G_1G_2G_3H_1$$

Direktna pot med $R(s)$ in $Y(s)$:

$$P_1 = G_1, \quad \Delta_1 = 1 + G_2$$

$$T(s) = \frac{P_1\Delta_1}{\Delta} = \frac{G_1(1+G_2)}{1+G_1+G_2+G_1G_2+G_1G_2G_3H_1}$$

2.5 Povezava med bločnimi diagrami in diagrami poteka signalov

V nadaljevanju si bomo pogledali povezavo med med bločnimi diagrami in diagrami poteka signalov. Nekaj pogostih algebrskih enačb in njihovih pripadajočih bločnih in diagramov poteka signalov vidimo v tabeli 2.51.

2.5.1 Naloge

Primer 2.32. \triangle Za dani bločni diagram (slika 2.52) narišite pripadajoči diagram poteka signalov in z uporabo Masonovega pravila določite prenosno funkcijo $\frac{Y(s)}{R(s)}$. Rezultat preverite tako, da z uporabo pravil bločne algebre poenostavite diagram.

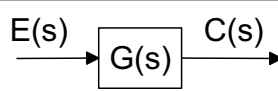
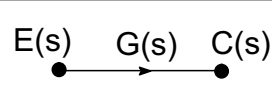
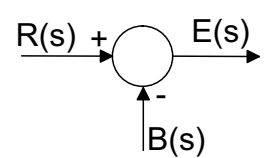
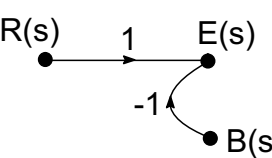
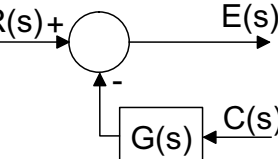
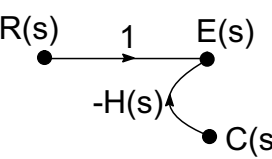
Rešitev

Diagram poteka signalov je prikazan na sliki 2.53

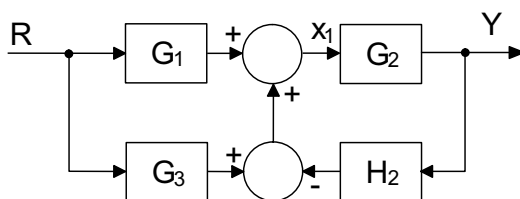
Masonovo pravilo:

$$P_1 = G_1 \cdot G_2 \quad ; \quad P_2 = G_2 \cdot G_3 \quad \Rightarrow \quad M = 2$$

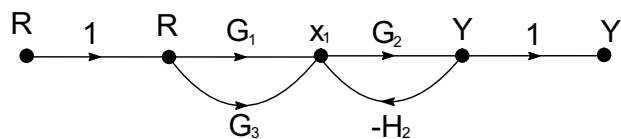
$$P_{11} = -G_2 \cdot H_2 \quad ; \quad \Delta = 1 + G_2 \cdot H_2$$

Bločni diagram	Opis	DPS
	$C(s) = G(s) \cdot E(s)$	
	$E(s) = R(s) - B(s)$	
	$E(s) = R(s) - H(s) \cdot C(s)$	

Slika 2.51: Nekaj pogostih primerov



Slika 2.52: Bločni diagram iz primera 2.32

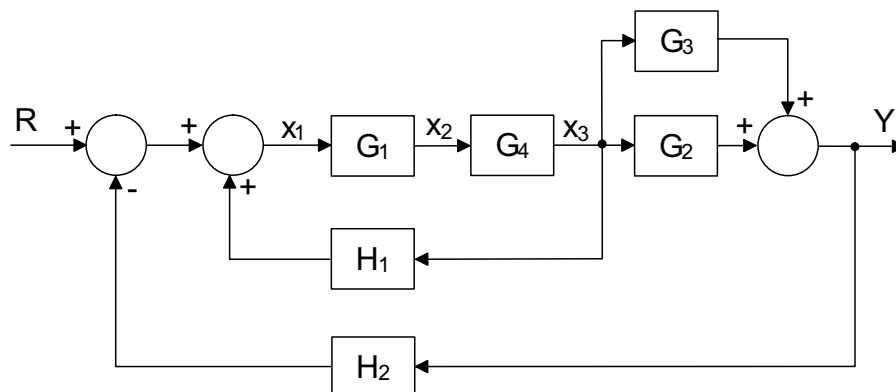


Slika 2.53: DPS iz primera 2.32

$$\Delta_1 = 1 \quad ; \quad \Delta_2 = 1$$

$$T = \frac{Y}{R} = \frac{G_1 \cdot G_2 + G_3 \cdot G_2}{1 + G_2 \cdot H_2}$$

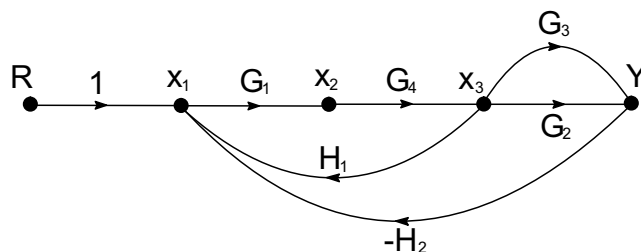
Primer 2.33. \triangle Dani bločni bločnega diagram (slika 2.54) zapišite v obliki diagrama poteka signalov in z uporabo Masonovega pravila določite prenosno funkcijo sistema $\left(\frac{Y(s)}{R(s)}\right)$.



Slika 2.54: Bločni diagram iz primera 2.33

Rešitev

Diagram poteka signalov je prikazan na sliki 2.55



Slika 2.55: DPS iz primera 2.33

Masonovo pravilo:

$$P_1 = G_1 \cdot G_4 \cdot G_2 \quad ; \quad P_2 = G_1 \cdot G_4 \cdot G_3 \quad \Rightarrow \quad M = 2$$

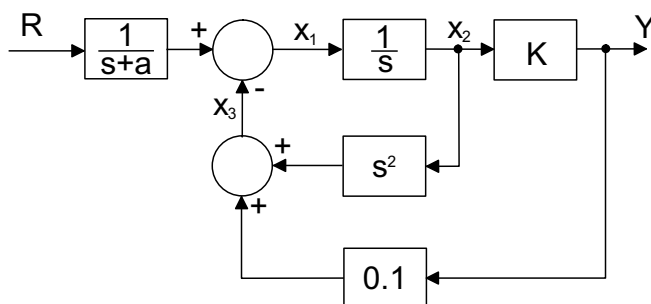
$$P_{11} = G_1 \cdot G_4 \cdot H_1 \quad ; \quad P_{12} = G_1 \cdot G_4 \cdot G_2 \cdot (-H_2) \quad ; \quad P_{13} = G_1 \cdot G_4 \cdot G_3 \cdot (-H_2)$$

$$\Delta = 1 - G_1 \cdot G_4 \cdot H_1 + G_1 \cdot G_4 \cdot H_2 \cdot (G_2 + G_3)$$

$$\Delta_1 = 1 \quad ; \quad \Delta_2 = 1$$

$$T = \frac{Y}{R} = \frac{G_1 \cdot G_4 \cdot (G_2 + G_3)}{1 + G_1 \cdot G_4 (H_2 \cdot (G_2 + G_3) - H_1)}$$

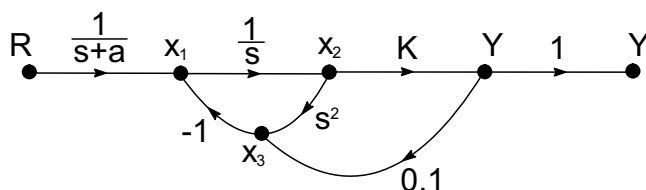
Primer 2.34. Dani bločni diagram (slika 2.56) pretvorite v diagram poteka signalov in z uporabo Masonovega pravila določite prenosno funkcijo sistema ($\frac{Y(s)}{R(s)}$). Rezultat preverite z uporabo pravil za poenostavljanje bločnih diagramov. Podajte matematični model sistema v časovnem prostoru. Kakšen je red sistema?



Slika 2.56: Bločni diagram iz primera 2.34

Rešitev

Diagram poteka signalov je prikazan na sliki 2.57



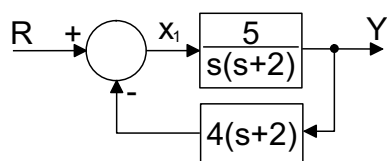
Slika 2.57: DPS iz primera 2.34

$$T = \frac{Y}{R} = \frac{K}{s^3 + (a+1)s^2 + (a+0,1 \cdot K)s + 0,1 \cdot K \cdot a}$$

$$Kr(t) = \ddot{y}(t) + (a+1) \cdot \dot{y}(t) + (a+0,1 \cdot K) \cdot y(t) + 0,1 \cdot K \cdot a \cdot y(t)$$

Sistem je 3. reda.

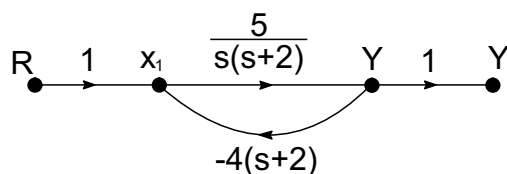
Primer 2.35. Dani bločni diagram (slika 2.58) pretvorite v diagram poteka signalov in z uporabo Masonovega pravila določite prenosno funkcijo sistema ($\frac{Y(s)}{R(s)}$).



Slika 2.58: Bločni diagram iz primera 2.35

Rešitev

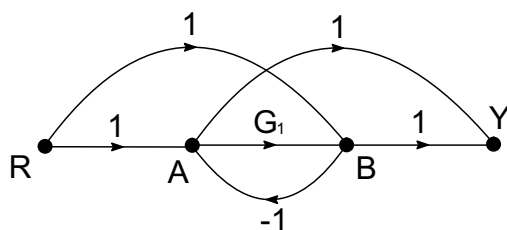
Diagram poteka signalov je prikazan na sliki 2.59



Slika 2.59: DPS iz primera 2.35

$$T = \frac{Y}{R} = \frac{5}{s^2 + 22s + 40}$$

Primer 2.36. Sistem je predstavljen z diagramom poteka signalov, ki je prikazan na sliki 2.60.



Slika 2.60: DPS iz primera 2.36

- (a) S pomočjo Masonovega pravila določite prenosno funkcijo sistema, ki ga prikazuje diagram poteka signalov na sliki 2.60.

- (b) S pomočjo pravil za poenostavljanje diagramov poteka signalov določite prenosno funkcijo sistema, ki ga prikazuje diagram poteka signalov na sliki 2.60.
- (c) Diagram poteka signalov na sliki 2.60 pretvorite v bločni diagram. S poenostavitvijo bločnega diagrama določite prenosno funkcijo.
- (d) Za sistem, ki ga prikazuje diagram poteka signalov na sliki 2.60, določite zapis v protoru stanj.

Rešitev

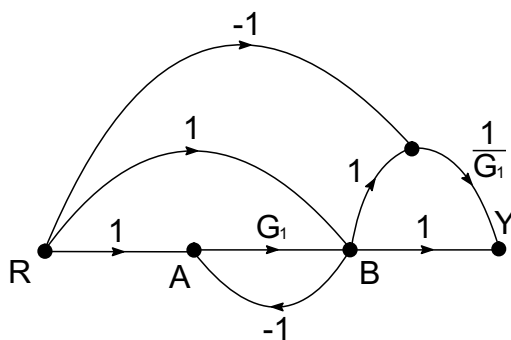
- (a) Prenosna funkcija:

$$\frac{Y}{R} = \frac{G_1 - 1 + 1 + 1}{1 + G_1} = 1$$

- (b) Za točko B na sliki 2.60 lahko zapišemo enačbo:

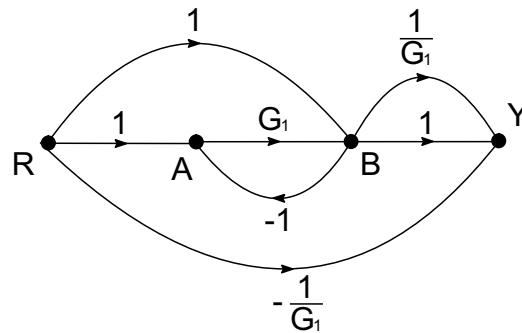
$$B = G_1 A + R \Rightarrow A = \frac{1}{G_1} (B - R)$$

Povezavo med A in Y lahko sedaj nadomestimo, kot je prikazano na sliki 2.61. Na sliki 2.62 je prikazan nekoliko preurejen diagram poteka signalov iz prejšnje slike. Slednjega lahko še dodatno poenostavimo in dobimo enako prenosno funkcijo, kot s pomočjo Masonovega pravila.

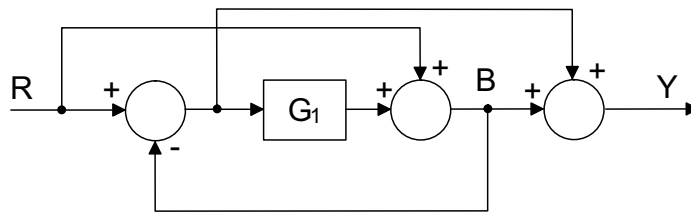


Slika 2.61: DPS iz primera 2.36

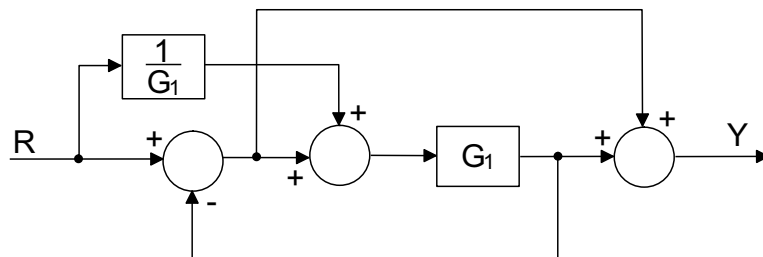
- (c) Bločni diagram je prikazan na sliki 2.63. Potek poenostavitev pa na slikah od 2.64 do 2.66.



Slika 2.62: DPS iz primera 2.36



Slika 2.63: Bodejev diagram iz primera 2.36



Slika 2.64: Prva poenostavitev bločnega diagrama

(d) Iz diagrama poteka signalov na sliki 2.60 lahko zapišemo:

$$B = R + G_1 \cdot A$$

$$Y = B + A$$

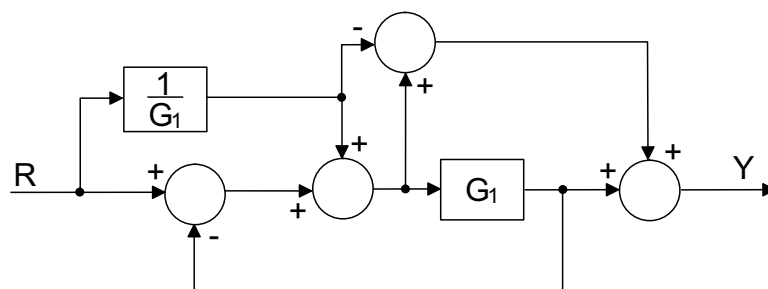
$$A = R - B$$

Če jih nekoliko preoblikujemo, dobimo naslednje zveze:

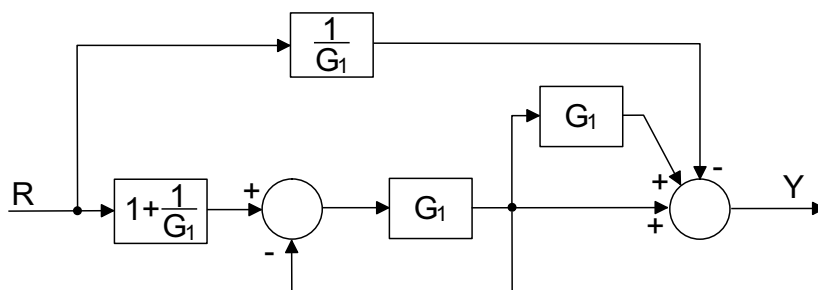
$$-G_1 A + B + 0 \cdot Y = R$$

$$A + B + (-1) \cdot Y = 0$$

$$A + B + 0 \cdot Y = R$$



Slika 2.65: DPS iz primera 2.36



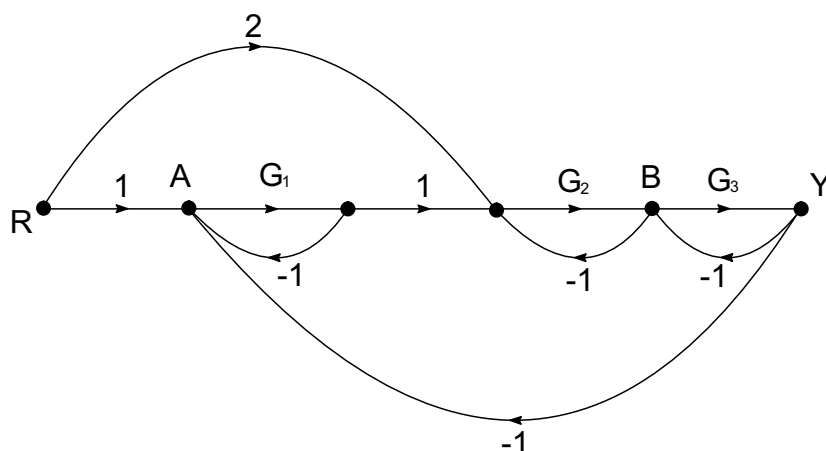
Slika 2.66: DPS iz primera 2.36

$$\Delta = \begin{bmatrix} -G_1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = -(-1) \cdot (-G_1 \cdot 1 - 1) = -G_1 - 1$$

$$\Delta_Y = \begin{bmatrix} -G_1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 1 \cdot 0 + 1 \cdot (-G_1 - 1) = -G_1 - 1$$

$$\frac{Y}{R} = \frac{\Delta_Y}{\Delta} = 1$$

Primer 2.37. Za sistem, ki ga prikazuje diagram poteka signalov na sliki 2.67, določite prenosno funkcijo med $\frac{Y(s)}{R(s)}$.



Slika 2.67: DPS iz primera 2.37

Rešitev

$$A = R - G_1 \cdot A - Y$$

$$B = 2 \cdot G_2 \cdot R + G_1 \cdot G_2 \cdot A - G_2 \cdot B - Y$$

$$Y = G_3 \cdot B$$

$$\Delta = \begin{bmatrix} 1 + G_1 & 0 & 1 \\ -G_1 G_2 & 1 + G_2 & 1 \\ 0 & -G_3 & 1 \end{bmatrix} = G_3 \cdot (1 + G_1 + G_1 \cdot G_2) + (1 + G_1)(1 + G_2)$$

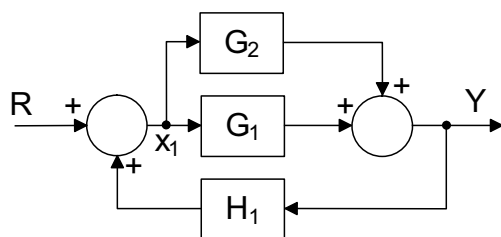
$$\Delta_Y = \begin{bmatrix} 1 + G_1 & 0 & 1 \\ -G_1 G_2 & 1 + G_2 & 2G_2 \\ 0 & -G_3 & 0 \end{bmatrix} = 2 \cdot G_2 \cdot G_3 + 2 \cdot G_1 \cdot G_2 \cdot G_3 + G_1 \cdot G_2 \cdot G_3$$

$$\frac{Y}{R} = \frac{\Delta_Y}{\Delta} = \frac{G_1 \cdot G_2 \cdot G_3 + 2 \cdot G_2 \cdot G_3(1 + G_1)}{1 + G_1 + G_2 + G_3 + G_1 \cdot G_2 \cdot G_3 + G_1 \cdot G_2 + G_1 \cdot G_3}$$

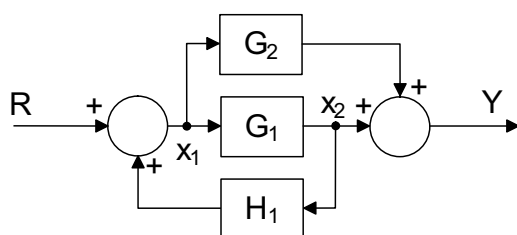
Primer 2.38. S pomočjo pretvorbe bločnega diagrama v diagram poteka signalov in z uporabo Masonove formule določite:

(a) Prenosno funkcijo $T_a = \frac{Y}{R}$ za sistem na sliki 2.68.

(b) Prenosno funkcijo $T_b = \frac{Y}{R}$ za sistem na sliki 2.69.



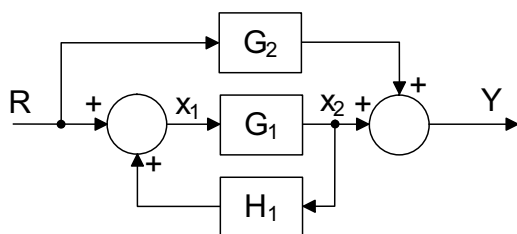
Slika 2.68: Bločni diagram iz primera 2.38a



Slika 2.69: Bločni diagram iz primera 2.38b

(c) Prenosno funkcijo $T_c = \frac{Y}{R}$ za sistem na sliki 2.70.

Rezultate preverite z uporabo pravil za poenostavljanje bločnih diagramov.

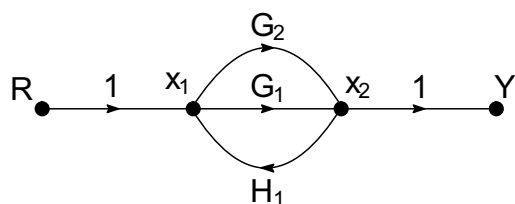


Slika 2.70: Bločni diagram iz primera 2.38c

Rešitev

(a) Diagram poteka signalov prikazuje slika 2.71

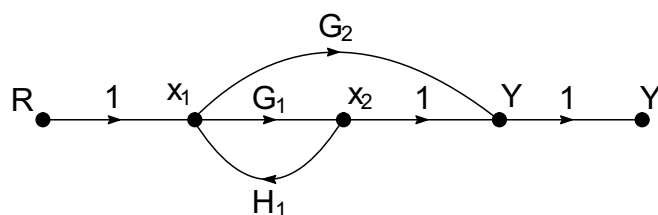
$$T_a = \frac{Y}{R} = \frac{G_1 + G_2}{1 - H_1(G_1 + G_2)}$$



Slika 2.71: DPS iz primera 2.38a

(b) Diagram poteka signalov prikazuje slika 2.72

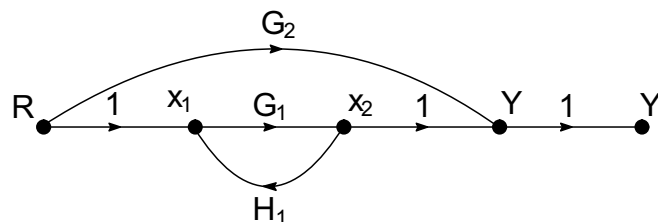
$$T_b = \frac{Y}{R} = \frac{G_1 + G_2}{1 - H_1 G_1}$$



Slika 2.72: DPS iz primera 2.38b

(c) Diagram poteka signalov prikazuje slika 2.73

$$T_c = \frac{Y}{R} = \frac{G_1 + G_2(1 - G_1 H_1)}{1 - H_1 G_1}$$



Slika 2.73: DPS iz primera 2.38c

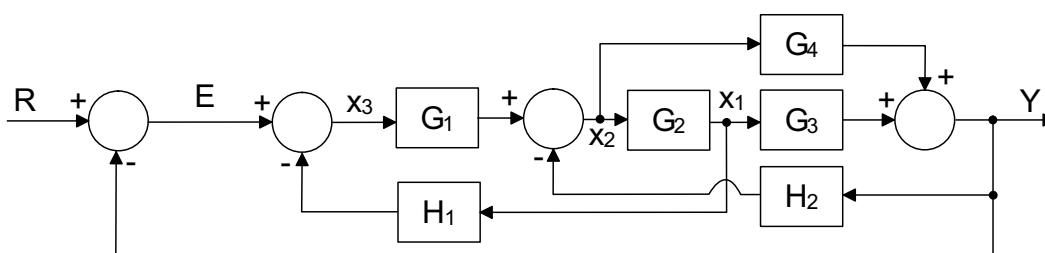
Primer 2.39. S pomočjo pretvorbe bločnega diagrama (slika 2.74) v diagram poteka signalov in z uporabo Masonove formule določite:

(a) Prenosno funkcijo $T_a = \frac{Y}{R}$.

(b) Prenosno funkcijo $T_b = \frac{E}{R}$.

(c) Prenosno funkcijo $T_c = \frac{x_3}{R}$.

Rezultate preverite z uporabo pravil za poenostavljanje bločnih diagramov.

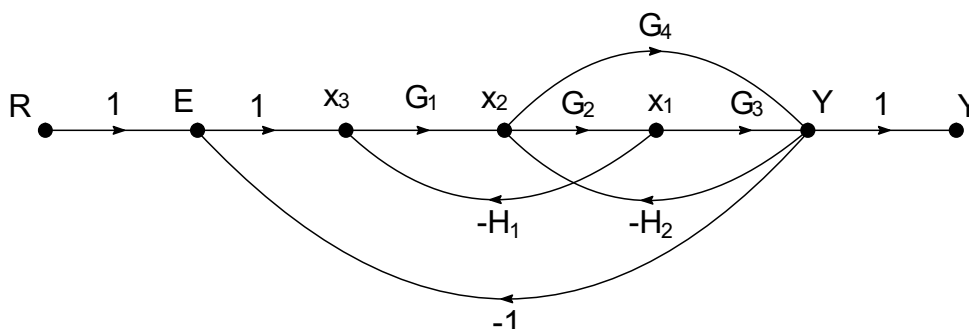


Slika 2.74: Bločni diagram iz primera 2.39

Rešitev

(a) Diagram poteka signalov prikazuje slika 2.75

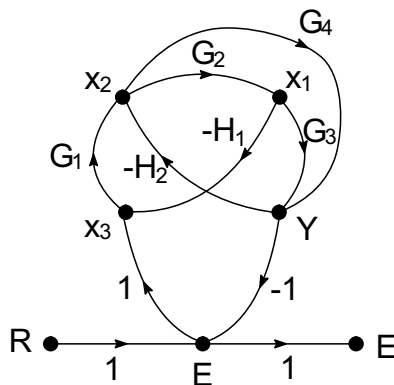
$$T_a = \frac{Y}{R} = \frac{G_1 G_2 G_3 + G_1 G_4}{1 + G_1 G_2 G_3 + G_1 G_2 H_1 + G_2 G_3 H_2 + G_4 H_2 + G_1 G_4}$$



Slika 2.75: DPS iz primera 2.39a

(b) Diagram poteka signalov prikazuje slika 2.76

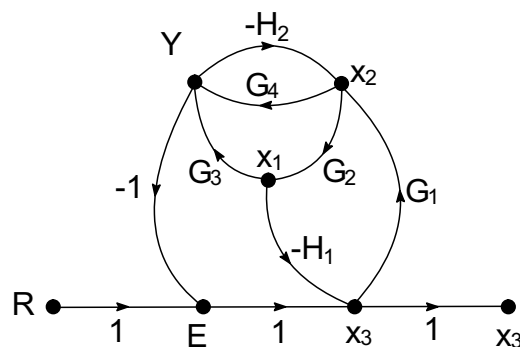
$$T_b = \frac{E}{R} = \frac{1 + G_1G_2H_1 + G_2G_3H_2 + G_4H_2}{1 + G_1G_2G_3 + G_1G_2H_1 + G_2G_3H_2 + G_4H_2 + G_1G_4}$$



Slika 2.76: DPS iz primera 2.39b

(c) Diagram poteka signalov prikazuje slika 2.77

$$T_c = \frac{x_3}{R} = \frac{1 + G_2G_3H_2 + G_4H_2}{1 + G_1G_2G_3 + G_1G_2H_1 + G_2G_3H_2 + G_4H_2 + G_1G_4}$$



Slika 2.77: DPS iz primera 2.39c

2.6 Prostor stanj

Zapis sistema v prostoru stanj omogoča obravnavo tako univariabilnih kot tudi multivariabilnih sistemov in hkrati podaja informacijo o notranjih spremenljivkah sistema.

Osnovna ideja zapisa v prostoru stanj je v tem, da poskušamo diferencialno enačbo s katero zapišemo matematični model sistema, zapisati v obliki sistema diferencialnih enačb prvega reda. Vsaka enačba prvega reda definira eno spremenljivko sistema, ki jo imenujemo stanje sistema. Vsako stanje navadno predstavimo v prostoru stanj s svojo koordinatno osjo.

Za opis sistema v prostoru stanj potrebujemo dve vektorski enačbi. Matematični model v prostoru stanj ima obliko:

$$\begin{array}{ll} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{B} u(t) & \mathbf{A} \dots \textit{sistemska matrika ali matrika stanj} \\ y = \mathbf{C} \mathbf{x} + \mathbf{D} u(t) & \mathbf{B} \dots \textit{vhodna matrika} \\ & \mathbf{C} \dots \textit{izhodna matrika} \\ & \mathbf{D} \dots \textit{vhodno - izhodna matrika} \end{array}$$

Enačbi imenujemo enačba stanj in izhodna enačba.

2.6.1 Prehod iz matematičnega modela v obliki diferencialne enačbe v zapis v prostoru stanj

Prehod iz diferencialne enačbe v prostor stanj poteka odvisno od tega, ali je v diferencialni enačbi prisoten samo vhodni signal ali tudi njegovi odvodi. Če obravnavamo diferencialno enačbo, v kateri ne nastopajo odvodi vhodnega signala u , izberemo spremenljivke stanj na naslednji način.

$$\begin{array}{ll} x_1 & = y \\ x_2 & = y^{(1)} \\ & \vdots \\ x_n & = y^{(n-1)} \end{array} \quad (2.18)$$

Diferencialno enačbo tako preoblikujemo v n diferencialnih enačb 1. reda.

$$\begin{array}{ll} \dot{x}_1 & = x_2 \\ \dot{x}_2 & = x_3 \\ & \vdots \\ \dot{x}_{n-1} & = x_n \\ \dot{x}_n & = -a_n x_1 - a_{n-1} x_2 - \dots - a_1 x_n + u \end{array} \quad (2.19)$$

To sedaj lahko preoblikujemo v vektorsko-matrično obliko.

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \quad (2.20)$$

Kjer so \mathbf{x} , \mathbf{A} in \mathbf{B} definirani kot:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

Izhodni signal pa določimo iz enačbe $y = x_1$.

$$y = \mathbf{C}\mathbf{x} \quad (2.22)$$

Kjer je vektor \mathbf{C} določen kot:

$$\mathbf{C} = [1 \ 0 \ \cdots \ 0 \ 0] \quad (2.23)$$

Oglejmo si primer.

Primer 2.40. \triangle Imamo diferencialno enačbo za katero želimo določiti zapis v prostoru stanj.

Rešitev

$$\frac{d^4 y}{dt^4} + 4 \frac{d^3 y}{dt^3} - 3 \frac{d^2 y}{dt^2} + 10 \frac{dy}{dt} + y = u \quad (2.24)$$

Spremenljivke stanj izberemo takole.

$$\begin{aligned} x_1 &= y \\ x_2 &= \frac{dy}{dt} \\ x_3 &= \frac{d^2 y}{dt^2} \\ x_4 &= \frac{d^3 y}{dt^3} \end{aligned} \quad (2.25)$$

Prve tri enačbe stanj dobimo iz enačb (2.25), zadnjo pa iz diferencialne enačbe, kjer zamenjamo y in njegove odvode s spremenljivkami stanj.

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ \dot{x}_3 &= x_4 \\ \dot{x}_4 &= -x_1 - 10x_2 + 3x_3 - 4x_4 + u\end{aligned}\tag{2.26}$$

Prva enačba sistema (2.25) pa je kar izhodna enačba. Sistem je v vektorsko-matrični obliki definiran kot:

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -10 & 3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y &= [1 \ 0 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + 0u\end{aligned}\tag{2.27}$$

Če so v diferencialni enačbi poleg vhodnega signala prisotni tudi njegovi odvodi, pa izbire spremenljivk stanj ne smemo vzeti po enačbi (2.18), pač pa tako, da z njimi eliminiramo tudi odvode vhodnega signala. Najlažje to dosežemo tako, da diferencialno enačbo najprej prevedemo v prenosno funkcijo, nato pa uvedemo pomožno funkcijo kompleksne spremenljivke $W(s)$ tako, da nam prenosna funkcija razpade v dve prenosni funkciji.

Primer 2.41. \triangle

$$d\ddot{y} + e\dot{y} + fy = a\ddot{u} + b\dot{u} + cu\tag{2.28}$$

Rešitev

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{Y(s)W(s)}{U(s)W(s)} = \frac{as^2 + bs + c}{ds^2 + es + f}\tag{2.29}$$

$$G_1(s) = \frac{W(s)}{U(s)} = \frac{1}{ds^2 + es + f}\tag{2.30}$$

$$G_2(s) = \frac{Y(s)}{W(s)} = as^2 + bs + c\tag{2.31}$$

Obe prenosni funkciji nato prevedemo v diferencialni enačbi in vidimo, da prva diferencialna enačba nima odvodov vhodnega signala in jo uporabimo za določitev stanj, druga enačba pa določa povezavo med spremenljivkami stanja in izhodom sistema.

$$d\ddot{w} + e\dot{w} + fw = u \quad (2.32)$$

$$y = a\ddot{w} + b\dot{w} + cw \quad (2.33)$$

$$x_1 = w \quad (2.34)$$

$$x_2 = \dot{w}$$

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (2.35)$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{e}{d}x_2 - \frac{f}{d}x_1 + \frac{1}{d}u$$

$$\begin{aligned} y &= a\left(-\frac{e}{d}x_2 - \frac{f}{d}x_1 + \frac{1}{d}u\right) + bx_2 + cx_1 = \\ &= \left(b - \frac{ae}{d}\right)x_2 + \left(c - \frac{af}{d}\right)x_1 + \frac{a}{d}u \end{aligned} \quad (2.36)$$

Poglejmo si še en primer prehoda, kadar v diferencialni enačbi nastopajo tudi odvodi vhodnega signala.

Primer 2.42. \triangle Sistem opisuje diferencialna enačba:

$$\ddot{y} + 11\dot{y} - 10y + 5y = 4\dot{u} + u \quad (2.37)$$

Rešitev

Enačbo preuredimo tako, da na levo stran izpostavimo najvišji odvod izhodnega signala y , vse ostale odvode signala y in originalni signal ter odvode in originalni signal u pa prenesemo na desno stran enačbe in uredimo po stopnjah odvoda

$$\ddot{y} = -11\dot{y} + 10y + 4\dot{u} - 5y + u \quad (2.38)$$

Enačbo je potrebno trikrat integrirati, da dobimo rešitev y , ker pa v enačbi nastopajo tudi prvi in višji odvodi signalov vhoda in izhoda, lahko integrale vgnezdimo in dobimo naslednjo obliko:

$$y = \int \left(-11y + \int \left(10y + 4u + \int (-5y + u) dt \right) dt \right) dt \quad (2.39)$$

Sedaj pa izberemo spremenljivke stanj tako, da najprej določimo $y = x_1$, nato pa vsebino notranjega integrala določimo da je \dot{x}_3 , vsebina naslednjega višjega

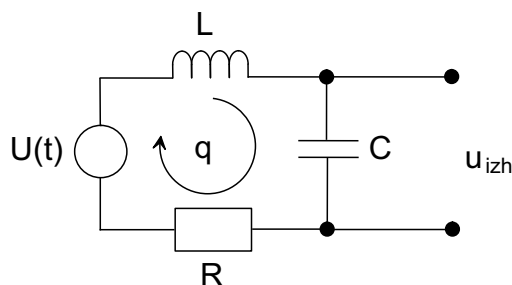
integrala naj bo \dot{x}_2 in vsebina najvišjega integrala pa je glede na začetno izbiro enaka \dot{x}_1 . Ob taki izbiri zapišemo enačbe v prostoru stanj takole:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -11x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 &= 10x_1 + x_3 + 4u \\ \dot{x}_3 &= -5x_1 + u\end{aligned}\quad (2.40)$$

Izhodno enačbo pa smo postavili že na začetku:

$$y = x_1 \quad (2.41)$$

Primer 2.43. \triangle Dano je R-L-C vezje, kot ga prikazuje slika 2.78.

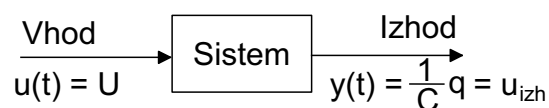


Slika 2.78: Vezje iz primera 2.43

Matematični model sistema ima naslednjo obliko:

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{1}{C}q = U$$

Predpostavimo, da nas zanima napetost na kondenzatorju, ki bo torej izhodna spremenljivka našega procesa (slika 2.79).



Slika 2.79: Bločni diagram iz primera 2.43

- Dano električno vezje pretvorite v zapis v prostoru stanj.
- Danemu električnemu vezju določite analogno mehansko shemo, ter njen zapis v prostoru stanj.
- Danemu električnemu vezju določite analogno rotacijsko shemo, ter njen zapis v prostoru stanj.

Rešitev

(a) Ker je sistem 2. reda, bomo za ustrezen zapis v prostoru stanj morali določiti dve spremenljivki. Izberimo:

$$\begin{aligned}x_1 &= q \\ \dot{x}_1 &= \dot{q} = x_2 \\ \dot{x}_2 &= \ddot{q} = \frac{1}{L}(U - R\dot{q} - \frac{1}{C}q) \\ &= \frac{1}{L}(u(t) - Rx_2 - \frac{1}{C}x_1)\end{aligned}$$

Zadnji enačbi nekoliko preuredimo:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{1}{LC}x_1 - \frac{R}{L}x_2 + \frac{1}{L}u(t) \\ \text{in} \\ y &= \frac{1}{C}q = \frac{1}{C}x_1\end{aligned}$$

iz česar vidimo:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{LC} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix}}^{\mathbf{A}} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \overbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix}}^{\mathbf{B}} u(t) \\ y &= \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \underbrace{[0]}_{\mathbf{D}} u(t)\end{aligned}$$

Spremenljivki stanj bi lahko izbrali tudi za spoznanje drugače. Prvo stanje sistema naj bo napetost na kondenzatorju:

$$x_1 = \frac{1}{C}q$$

drugo stanje sistema pa naj bo tok skozi dušilko:

$$x_2 = \dot{q}$$

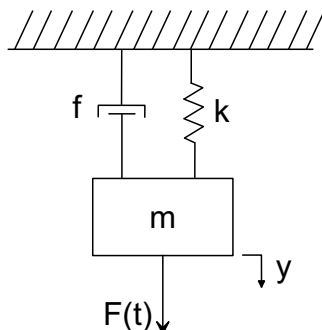
V tem primeru dobimo:

$$\begin{aligned}x_1 &= \frac{1}{C}q \\ \dot{x}_1 &= \frac{1}{C}\dot{q} = \frac{1}{C}x_2 \\ x_2 &= \dot{q} \\ \dot{x}_2 &= \ddot{q} = -\frac{1}{LC}q - \frac{R}{L}\dot{q} + \frac{1}{L}U = \\ &= -\frac{1}{L}x_1 - \frac{R}{L}x_2 + \frac{1}{L}u(t) \\ y &= x_1\end{aligned}$$

Model v prostoru stanj ima tako obliko:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} \cdot u(t) \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{x}\end{aligned}$$

(b) Mehanski sistem je prikazan na sliki 2.80.



Slika 2.80: Mehanski sistem iz primera 2.43

Ob upoštevanju analogij lahko takoj zapišemo ustrezne enačbe stanj. Če upoštevamo zadnji zapis električnega vezja v prostoru stanj, sledi:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} 0 & k \\ -\frac{1}{m} & -\frac{f}{m} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} \cdot u(t) \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{x}\end{aligned}$$

Analogije v tem sistemu so:

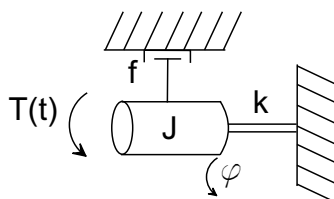
$$u(t) = F(t) \dots \text{ sila vzbujanja}$$

$$x_1 = k \cdot y \dots \text{ sila vzmeti}$$

$$x_2 = \dot{y} \dots \text{ hitrost gibanja mase}$$

$$y = x_2$$

(c) Rotacijski sistem je prikazan na sliki 2.81.



Slika 2.81: Rotacijski sistem iz primera 2.43

Zapis v prostoru stanj pa je sledeč:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & k \\ -\frac{1}{J} & -\frac{f}{J} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{J} \end{bmatrix} \cdot u(t)$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{x}$$

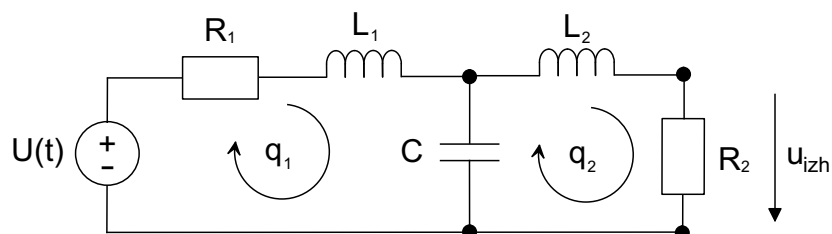
Analogije v tem sistemu so:

$$u(t) = T(t) \dots \text{ rotacijski moment}$$

$$x_1 = k \cdot \varphi \dots \text{ moment torzijske vzmeti}$$

$$x_2 = \dot{\varphi} \dots \text{ kotna hitrost vrtenja vztrajnika}$$

Primer 2.44. \triangle Za električno vezje na sliki 2.82 zapišite matematični model sistema v prostoru stanj.



Slika 2.82: Vezje iz primera 2.44

Rešitev

Če sistem zapišemo z enačbami, dobimo:

$$L_1 \frac{di_1}{dt} + R_1 i_1 + \frac{1}{C} \int (i_1 - i_2) dt = U(t) \quad ; \quad L_1 \ddot{q}_1 + R_1 \dot{q}_1 + \frac{1}{C} (q_1 - q_2) = U(t)$$

$$L_2 \frac{di_2}{dt} + R_2 i_2 + \frac{1}{C} \int (i_2 - i_1) dt = 0 \quad ; \quad L_2 \ddot{q}_2 + R_2 \dot{q}_2 + \frac{1}{C} (q_2 - q_1) = 0$$

Preuredimo zgornje enačbe:

$$\ddot{q}_1 = \frac{1}{L_1} \left(U(t) - R_1 \dot{q}_1 - \frac{1}{C} (q_1 - q_2) \right)$$

$$\ddot{q}_2 = \frac{1}{L_2} \left(-R_2 \dot{q}_2 - \frac{1}{C} (q_2 - q_1) \right)$$

Naj bo prvo stanje sistema tok skozi tuljavo L_1 in drugo tok skozi tuljavo L_2 . Ker imamo 2 diferencialni enačbi 2. reda in če bi ustavili eno v drugo (kot se bomo prepričali kasneje) bi dobili eno enačbo 4. reda, torej potrebujemo za opis sistema 4 stanja.

$$x_1 = q_1 \Rightarrow \dot{x}_1 = \dot{q}_1 = x_3$$

$$x_2 = q_2 \Rightarrow \dot{x}_2 = \dot{q}_2 = x_4$$

Pri tako izbranih stanjih sistema lahko zapišemo:

$$\dot{x}_1 = \dot{q}_1 = x_3$$

$$\dot{x}_2 = \dot{q}_2 = x_4$$

$$\dot{x}_3 = \ddot{q}_1 = -\frac{1}{L_1 C} x_1 + \frac{1}{L_1 C} x_2 - \frac{R_1}{L_1} x_3 + \frac{1}{L_1} U(t)$$

$$\dot{x}_4 = \ddot{q}_2 = \frac{1}{L_2 C} x_1 - \frac{1}{L_2 C} x_2 - \frac{R_2}{L_2} x_4$$

in od tod takoj sledi prva enačba zapisa v prostoru stanj:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{L_1 C} & \frac{1}{L_1 C} & -\frac{R_1}{L_1} & 0 \\ \frac{1}{L_2 C} & -\frac{1}{L_2 C} & 0 & -\frac{R_2}{L_2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{L_1} \\ 0 \end{bmatrix} \cdot U(t)$$

Izhod sistema je v našem primeru napetost na upor R_2 :

$$y(t) = R_2 \dot{q}_2 = R_2 x_4$$

torej se druga enačba sistema v prostoru stanj glasi:

$$y(t) = [0 \ 0 \ 0 \ R_2] \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

Pokažimo še, da je naš sistem dveh enačb 2. reda mogoče ekvivalentno predstaviti z eno enačbo 4. reda. Zaradi enostavnosti izpeljave najprej nad obema enačbama izvedimo Laplaceovo transformacijo in dobimo:

$$s^2 L_1 q_1(s) + s R_1 q_1(s) + \frac{1}{C} q_1(s) - \frac{1}{C} q_2(s) = U(s)$$

$$s^2 L_2 q_2(s) + s R_2 q_2(s) + \frac{1}{C} q_2(s) - \frac{1}{C} q_1(s) = 0$$

Iz prve enačbe izrazimo q_1 :

$$q_1 = \frac{U(s) + \frac{1}{C} q_2(s)}{s^2 L_1 + s R_1 + \frac{1}{C}}$$

in ga vstavimo v drugo:

$$s^4 (L_1 L_2) q_2 + s^3 (L_1 R_2 + R_1 L_2) q_2 + s^2 \left(\frac{L_1}{C} + R_1 R_2 + \frac{L_2}{C} \right) q_2 + s \left(\frac{R_1}{C} + \frac{R_2}{C} \right) q_2 = \frac{1}{C} U(s)$$

Če sedaj nad zgornjo enačbo izvedemo inverzno Laplaceovo transformacijo, dobimo:

$$L_1 L_2 q_2^{(4)} + (L_1 R_2 + R_1 L_2) q_2^{(3)} + \left(\frac{L_1}{C} + R_1 R_2 + \frac{L_2}{C} \right) \ddot{q}_2 + \left(\frac{R_1}{C} + \frac{R_2}{C} \right) \dot{q}_2 = \frac{1}{C} U(t)$$

Tudi v tem primeru bi lahko izbrali enake spremenljivke stanj kot v prejšnjem, vendar je pri takšnem zapisu običajnejši pristop takšen, kot smo ga nakazali pri prvem primeru. Za katero od možnosti se končno odločimo, pa je odvisno od lastnosti samega sistema kot tudi od tega, kakšne namene imamo s sistemom (izbira možnih merilnih mest, izbira takšnih spremenljivk, da je sistem vodljiv oziroma spoznaven, kako smo prišli do matematičnega modela: teoretično modeliranje \longleftrightarrow indentifikacija, itd.) če bi izhajali direktno iz zgornje enačbe, ki jo še nekoliko preoblikujemo, bi dobili:

$$q_2^{(4)} = \frac{1}{L_1 L_2} \left(- (L_1 R_2 + R_1 L_2) \underbrace{q_2^{(3)}}_{x_4} - \left(\frac{L_1}{C} + R_1 R_2 + \frac{L_2}{C} \right) \underbrace{\ddot{q}_2}_{x_3} - \left(\frac{R_1}{C} + \frac{R_2}{C} \right) \underbrace{\dot{q}_2}_{x_2} + \frac{1}{C} U(t) \right)$$

$$\begin{aligned} q_2 = x_1 \quad ; \quad \dot{x}_1 &= \dot{q}_2 = x_2 \\ \dot{x}_2 &= \ddot{q}_2 = x_3 \\ \dot{x}_3 &= \underbrace{q_2^{(3)}}_{x_4} = x_4 \\ \dot{x}_4 &= \underbrace{q_2^{(4)}}_{x_4} \end{aligned}$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{R_1+R_2}{L_1L_2C} & -\frac{1}{L_2C} - \frac{R_1R_2}{L_1L_2} - \frac{1}{L_1C} & -\frac{R_2}{L_2} - \frac{R_1}{L_1} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{L_1L_2C} \end{bmatrix} \cdot U(t)$$

$$u_{izh}(t) = R_2\dot{q}_2 = R_2x_2$$

$$y(t) = [0 \ R_2 \ 0 \ 0] \cdot x(t)$$

Isti sistem smo predstavili na dva različna načina v prostoru stanj. Predstavitvi sta seveda ekvivalentni. Kot bomo videli kasneje, v obeh primerih vodita v isto prenosno funkcijo.

2.6.2 Prehod med zapisom v prostoru stanj in prenosno funkcijo in realizacija z bločnim diagramom

Prehodi med prenosno funkcijo in prostorom stanj so v smeri iz prenosne funkcije v prostor stanj problematični, ker prenosna funkcija ne nosi informacije o notranjih stanjih sistema. Edina pot je preko diferencialne enačbe. Pri prehodu iz prostora stanj v prenosno funkcijo pa ni problemov.

Z uporabo Laplaceove transformacije nad enačbama zapisa v prostoru stanj dobimo:

$$\begin{aligned} s\mathbf{X}(s) - \mathbf{x}(0) &= \mathbf{A}\mathbf{X}(s) + \mathbf{B}U(s) \\ Y(s) &= \mathbf{C}\mathbf{X}(s) + dU(s) \end{aligned} \quad (2.42)$$

Ob ničelnih začetnih pogojih, kot to zahteva definicija prenosne funkcije, dobimo:

$$\begin{aligned} s\mathbf{X}(s) &= \mathbf{A}\mathbf{X}(s) + \mathbf{B}U(s) \\ Y(s) &= \mathbf{C}\mathbf{X}(s) + \mathbf{D}U(s) \end{aligned} \quad (2.43)$$

Iz enačbe stanj izrazimo $\mathbf{X}(s)$.

$$\begin{aligned} s\mathbf{X}(s) - \mathbf{A}\mathbf{X}(s) &= \mathbf{B}U(s) \\ (s\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{X}(s) &= \mathbf{B}U(s) \\ \mathbf{X}(s) &= (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}U(s) \end{aligned} \quad (2.44)$$

Če sedaj vstavimo tako določen $\mathbf{X}(s)$ v izhodno enačbo, dobimo zvezo med $Y(s)$ in $U(s)$ ter s tem prenosno funkcijo $G(s)$.

$$\begin{aligned} Y(s) &= (\mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D})U(s) \\ G(s) &= \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D} \end{aligned} \quad (2.45)$$

Primer 2.45. \triangle Imamo sistem v prostoru stanj.

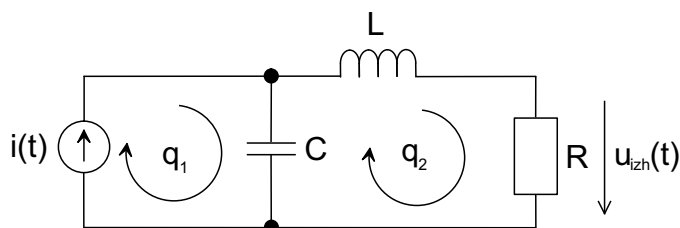
$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} u \\ y &= [1 \quad -2] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + 0u \end{aligned} \quad (2.46)$$

Rešitev

Enačba za prehod v prenosno funkcijo je definirana z izrazom (2.45).

$$\begin{aligned} G(s) &= [1 \quad -2] \left(s \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + 0 = \\ &= [1 \quad -2] \begin{bmatrix} s & -1 \\ 1 & s+3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \\ &= \frac{1}{s^2 + 3s + 1} [1 \quad -2] \begin{bmatrix} s+3 & -1 \\ 1 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \\ &= \frac{1}{s^2 + 3s + 1} [s+1 \quad -2s-1] \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \\ &= \frac{1}{s^2 + 3s + 1} (3s + 2) = \\ &= \frac{3s + 2}{s^2 + 3s + 1} \end{aligned} \quad (2.47)$$

Primer 2.46. Za električno vezje na sliki 2.83 narišite razgrajen bločni diagram (z integratorji, sumacijskimi točkami in ojačevalnimi bloki) za predstavitev v prostoru stanj ter iz zapisa v prostoru stanj določite prenosno funkcijo sistema. Rezultate preverite z izračunom prenosne funkcije direktno iz matematičnega modela sistema!



Slika 2.83: Vezje iz primera 2.46

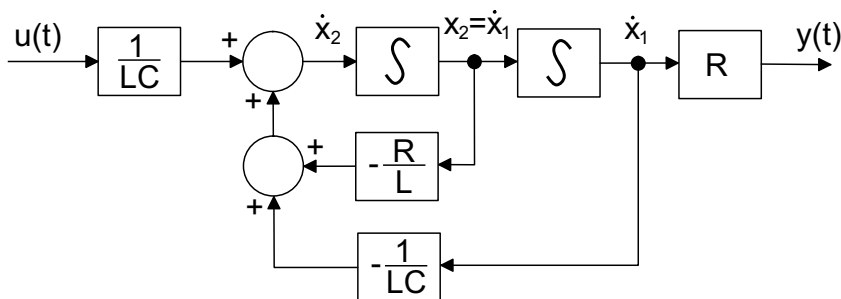
Rešitev

Dobimo zapis v prostoru stanj:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{LC} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{LC} \end{bmatrix} \cdot u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} R & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Bločni diagram je prikazan na sliki 2.84.



Slika 2.84: Bločni diagram iz primera 2.46

Če na enačbah v prostoru stanj izvedemo Laplaceovo transformacijo, dobimo:

$$G(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{B} \cdot U$$

$$G(s) = \begin{bmatrix} R & 0 \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{LC} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \right)^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{LC} \end{bmatrix}$$

$$G(s) = \frac{R}{LCs^2 + RCs + 1}$$

Preverimo pravilnost rešitve še z uporabo Laplaceove transformacije na matematičnem modelu sistema:

$$L\ddot{q}_2 + R\dot{q}_2 + \frac{1}{C}q_2 = \frac{1}{C}q_1 \quad / \quad \frac{d}{dt}$$

$$L\ddot{i}_2 + R\dot{i}_2 + \frac{1}{C}i_2 = \frac{1}{C}i(t) \quad / \quad \mathcal{L}$$

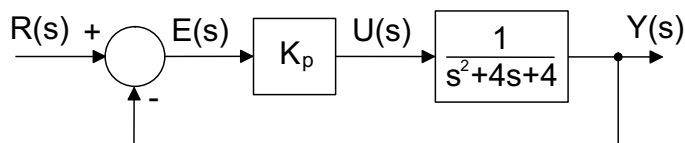
$$(s^2L + Rs + \frac{1}{C})I_2(s) = \frac{1}{C}I(s)$$

$$\frac{RI_2(s)}{I(s)} = \frac{R}{LCs^2 + RCs + 1} = \frac{I(s)}{U(s)} = G(s)$$

2.6.3 Prehod med prenosno funkcijo in zapisom v prostoru stanj in realizacija z bločnim diagramom

Ta prehod je možen posredno, ob izbiri novih spremenljivk, ki jih imenujemo stanja sistema, podobno kot pri diferencialni enačbi.

Primer 2.47. Bločni diagram na sliki 2.85 prikazuje realizacijo reguliranja sistema drugega reda.



Slika 2.85: Bločni diagram iz primera 2.47

- Določite prenosno funkcijo zaprtozančnega sistema.
- Določite matematični model zaprtozančnega sistema v časovnem prostoru.
- Iz dobljenih relacij določite zapis reguliranega sistema v prostoru stanj.
- S pomočjo ustreznega bločnega diagrama realizirajte dobljene enačbe v časovnem prostoru.

Rešitev

(a)

$$G(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{K_p}{s^2 + 4s + 4 + K_p}$$

(b)

$$\ddot{y}(t) + 4\dot{y}(t) + (4 + K_p)y(t) = K_p \cdot r(t)$$

(c)

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -(4 + K_p) & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ K_p \end{bmatrix} \cdot r(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

(d) V enačbo iz točke (b) vstavimo:

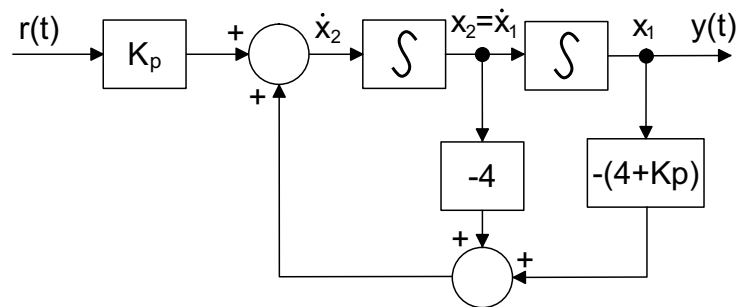
$$x_1 = y \quad ; \quad x_2 = \dot{y}$$

in dobimo

$$\dot{x}_1 = \dot{y} = x_2$$

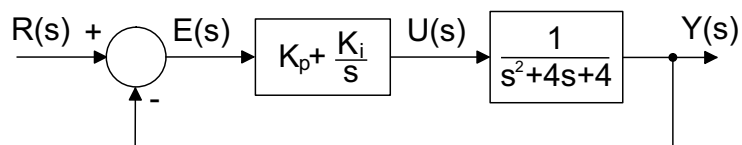
$$\dot{x}_2 = \ddot{y} = -4x_2 - (4 + K_p)x_1 + K_p r(t)$$

Bločni diagram je prikazan na sliki 2.86



Slika 2.86: Bločni diagram iz primera 2.47

Primer 2.48. \triangle Bločni diagram na sliki 2.87 prikazuje realizacijo reguliranja sistema drugega reda.



Slika 2.87: Bločni diagram iz primera 2.48

- Določite prenosno funkcijo zaprtozančnega sistema.
- Določite matematični model zaprtozančnega sistema v časovnem prostoru.
- Iz dobljenih relacij določite zapis reguliranega sistema v prostoru stanj.
- S pomočjo ustreznega bločnega diagrama realizirajte dobljene enačbe v časovnem prostoru.

Rešitev

(a)

$$G(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{K_p s + K_i}{s^3 + 4s^2 + s(4 + K_p) + K_i} = \frac{b_0 s^3 + b_1 s^2 + b_2 s + b_3}{s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3}$$

(b)

$$\ddot{y}(t) + 4\dot{y}(t) + (4 + K_p)y(t) + K_i y(t) = K_p \dot{r}(t) + K_i r(t)$$

(c,d) Vidimo, da v tem primeru na desni strani enačbe nastopajo odvodi referenčne veličine. V tem primeru ne moremo postopati čisto tako kot v prejšnjem primeru. V takšnih primerih izberemo spremenljivke stanj na več možnih načinov:

1. realizacija.

$$\begin{aligned} x_1 &= y - \beta_0 r && ; && y \dots \text{izhod} ; r \dots \text{vhod} \\ x_2 &= \dot{y} - \beta_0 \dot{r} - \beta_1 r = \dot{x}_1 - \beta_1 r \\ x_3 &= \ddot{y} - \beta_0 \ddot{r} - \beta_1 \dot{r} - \beta_2 r = \dot{x}_2 - \beta_2 r \\ &\vdots \\ x_n &= y^{(n-1)} - \beta_0 r^{(n-1)} - \beta_1 r^{(n-2)} - \dots - \beta_{n-1} r = \dot{x}_{n-1} - \beta_{n-1} r \end{aligned}$$

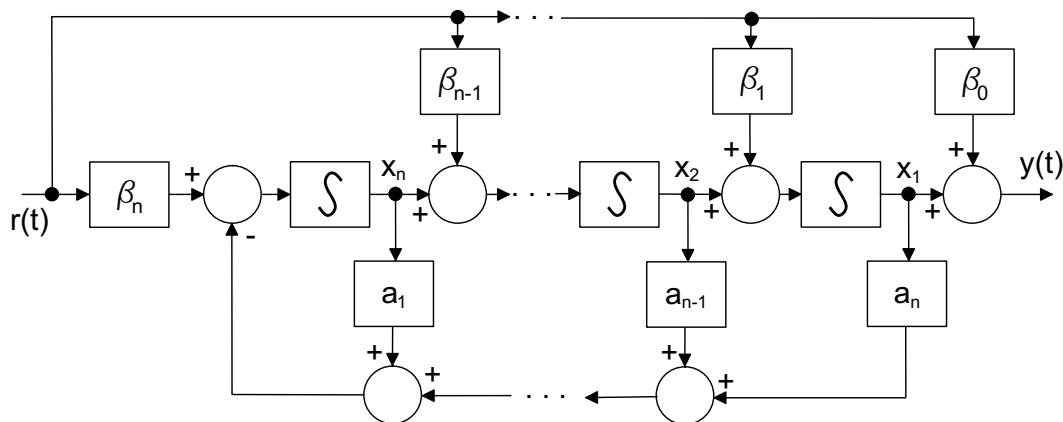
Koeficienti β_i so določeni z naslednjimi enačbami:

$$\begin{aligned} \beta_0 &= b_0 \\ \beta_1 &= b_1 - a_1 \beta_0 \\ \beta_2 &= b_2 - a_1 \beta_1 - a_2 \beta_0 \\ \beta_3 &= b_3 - a_1 \beta_2 - a_2 \beta_1 - a_n \beta_0 \\ &\vdots \\ \beta_n &= b_n - a_1 \beta_{n-1} - \dots - a_{n-1} \beta_1 - a_n \beta_0 \end{aligned}$$

Takšna izbira spremenljivk nam zagotavlja, da obstaja enoumna rešitev zapisa sistema v prostoru stanj v naslednji obliki:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_{n-1} \\ \beta_n \end{bmatrix} \cdot r(t)$$

$$y(t) = [1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0] \mathbf{x}(t) + \beta_0 r(t)$$



Slika 2.88: Bločni diagram iz primera 2.48

Iz zgornjih enačb vidimo da je $\mathbf{D} = \beta_0 = b_0$. Takšen izbor nam daje splošni bločni diagram sistema v prostoru stanj v obliki na sliki 2.88:

Oglejmo si realizacijo za naš primer.

Prenosna funkcija v našem primeru:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{K_p s + K_i}{s^3 + 4s^2 + s(4 + K_p) + K_i} = \frac{b_0 s^3 + b_1 s^2 + b_2 s + b_3}{s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3}$$

$$\beta_0 = b_0 = 0 \quad (\mathbf{D} = 0)$$

$$\beta_1 = b_1 - a_1 \beta_0 = 0$$

$$\beta_2 = b_2 - a_1 \beta_1 - a_2 \beta_0 = K_p$$

$$\beta_3 = b_3 - a_1 \beta_2 - a_2 \beta_1 - a_3 \beta_0 = K_i - 4K_p$$

$$x_1 = y - \beta_0 r = y$$

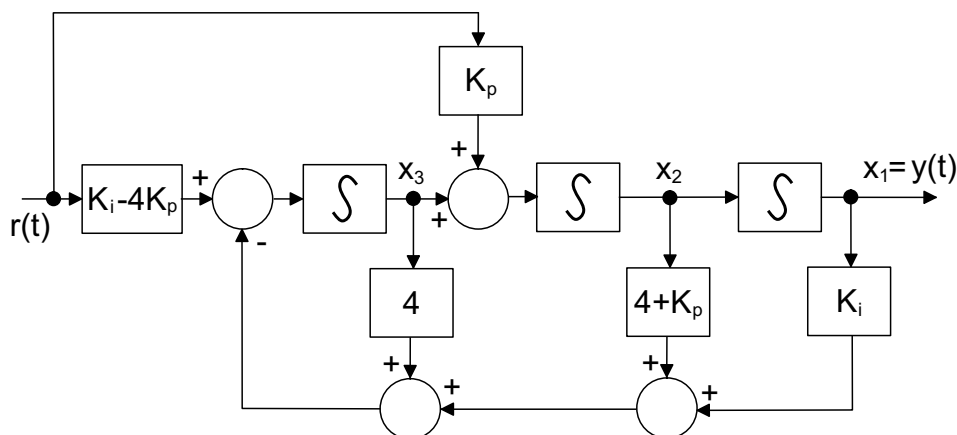
$$x_2 = \dot{y} - \beta_0 \dot{r} - \beta_1 r = \dot{x}_1 = \dot{y}$$

$$x_3 = \ddot{y} - \beta_0 \ddot{r} - \beta_1 \dot{r} - \beta_2 r = \dot{x}_2 - K_p r = \ddot{y} - K_p r$$

Zapis v prostoru stanj:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -K_i & -(4 + K_p) & -4 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ K_p \\ K_i - 4K_p \end{bmatrix} \cdot r(t)$$

$$y(t) = [1 \ 0 \ 0] \mathbf{x}(t)$$



Slika 2.89: Bločni diagram iz primera 2.48 d

$$\beta_0 = \mathbf{D} = 0$$

Realizacija sistema z bločnim diagramom v prostoru stanj je prikazna na sliki 2.89.

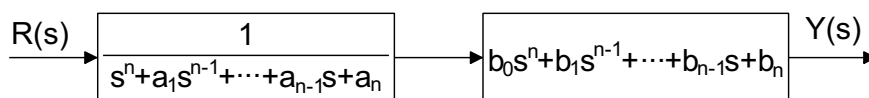
Dani način realizacije pa seveda ni edini možni način. Če bi npr. podani bločni diagram preoblikovali ob uporabi pravil bločne algebre, bi dobili tudi druge možnosti, pri čemer pa bi bili z vhodno-izhodnega stališča vsi sistemi enaki.

Poleg nakazanega 'algoritmiziranega' načina pa obstajajo še drugi postopki, ki vodijo v realizacijo sistema, kjer so matrike sistema v posebnih oblikah. Takšne oblike se izkažejo kot posebno primerne pri nekaterih postopkih analize in sinteze sistemov, zato si na danem primeru oglejmo še nekaj možnosti. (Katero izmed danih možnosti izberemo je odvisno od namena uporabe modela.)

2. realizacija. V splošnem lahko prenosno funkcijo:

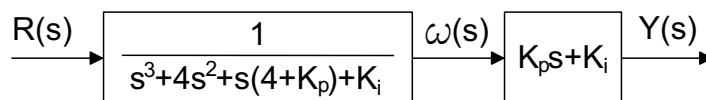
$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \dots + b_{n-1} s + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n}$$

realiziramo z bločnim diagramom, ki je prikazan na sliki 2.90.



Slika 2.90: Bločni diagram iz primera 2.48

Obravnavan primer lahko predstavimo z bločnim diagramom na sliki 2.91.



Slika 2.91: Bločni diagram iz primera 2.48

$$\begin{aligned}
 x_1 &= \omega(t) \\
 x_2 &= \dot{\omega}(t) \\
 x_3 &= \ddot{\omega}(t) \\
 \dot{x}_3 &= \ddot{\omega}(t) = -4\ddot{\omega}(t) - (4 + K_p)\dot{\omega}(t) - K_i\omega(t) + r(t)
 \end{aligned}$$

Tako dobimo:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -K_i & -(4 + K_p) & -4 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot r(t)$$

Iz drugega dela bločnega diagrama na sliki 2.91 pa sledi:

$$\begin{aligned}
 b_0 &= 0 \\
 b_1 &= 0 \Rightarrow \gamma_3 = 0 \\
 b_2 &= K_p \Rightarrow \gamma_2 = b_2 = K_p \\
 b_3 &= K_i \Rightarrow \gamma_1 = b_3 = K_i
 \end{aligned}$$

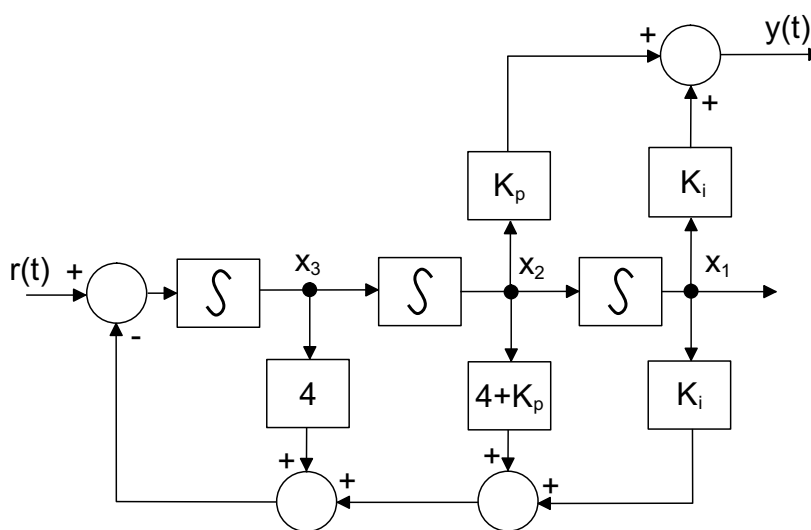
Iz zgornjega sledi:

$$\begin{aligned}
 y(t) &= [K_i \quad K_p \quad 0] \mathbf{x}(t) \\
 \beta_0 &= \mathbf{D} = 0
 \end{aligned}$$

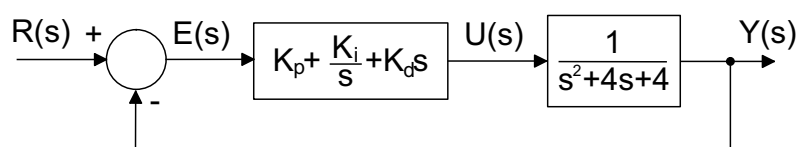
Bločni diagram za slednji sistem je prikazan na sliki 2.92.

Primer 2.49. Bločni diagram na sliki 2.93 prikazuje realizacijo reguliranja sistema drugega reda s PID-regulatorjem.

- Določite prenosno funkcijo zaprtozančnega sistema.
- Določite matematični model zaprtozančnega sistema v časovnem prostoru.
- Na dva načina (1.realizacija, 2.realizacija) določite zapis reguliranega sistema v prostoru stanj.
- Za oba zapisa narišite pripadajoča bločna diagrama.



Slika 2.92: Bločni diagram iz primera 2.48 d



Slika 2.93: Bločni diagram iz primera 2.49

Rešitev

(a)

$$G(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{K_d s^2 + K_p s + K_i}{s^3 + s^2(4 + K_d) + s(4 + K_p) + K_i}$$

(b)

$$\ddot{y}(t) + (4 + K_d)\dot{y}(t) + (4 + K_p)y(t) + K_i y(t) = K_d \ddot{r}(t) + K_p \dot{r}(t) + K_i r(t)$$

(c) 1. realizacija.

$$\beta_0 = 0$$

$$\beta_1 = K_d$$

$$\beta_2 = K_p - (4 + K_d)K_d$$

$$\beta_3 = K_i - (4 + K_d)(K_p - (4 + K_d)K_d) - (4 + K_p)K_d$$

$$\begin{aligned}x_1 &= y \\x_2 &= \dot{y} - \beta_1 r \\x_3 &= \ddot{y} - \beta_1 \dot{r} - \beta_2 r\end{aligned}$$

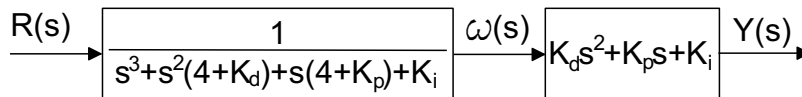
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -K_i & -(4 + K_p) & -(4 + K_d) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} K_d \\ K_p - (4 + K_d)K_d \\ K_i - (4 + K_d)(K_p - (4 + K_d)K_d) - (4 + K_p)K_d \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = [1 \ 0 \ 0]$$

$$\mathbf{D} = 0$$

2. realizacija. Razgrajeni bločni diagram je prikazan na sliki 2.94.



Slika 2.94: Bločni diagram iz primera 2.49 (c)

$$\begin{aligned}x_1 &= \omega(t) \\x_2 &= \dot{\omega}(t) \\x_3 &= \ddot{\omega}(t)\end{aligned}$$

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -K_i & -(4 + K_p) & -(4 + K_d) \end{bmatrix} \cdot \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot r(t)$$

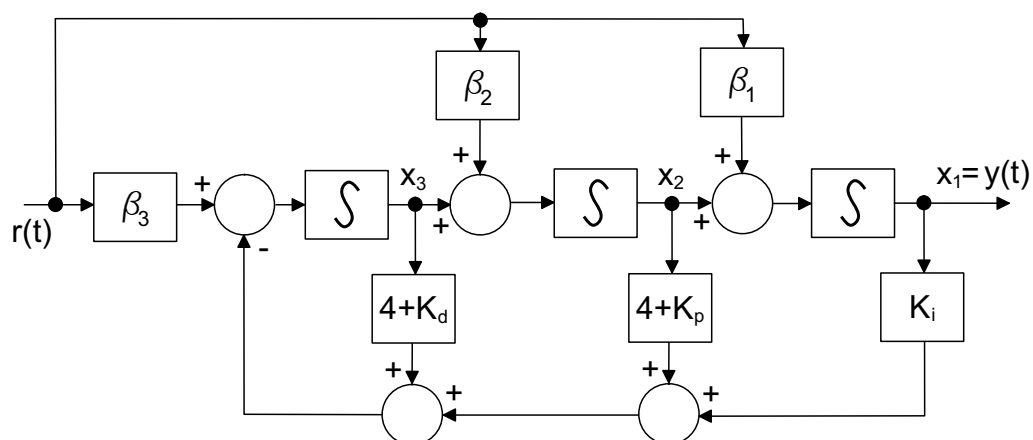
Iz drugega dela bločnega diagrama na sliki 2.94 pa vidimo:

$$y(t) = [K_i \ K_p \ K_d] \mathbf{x}(t)$$

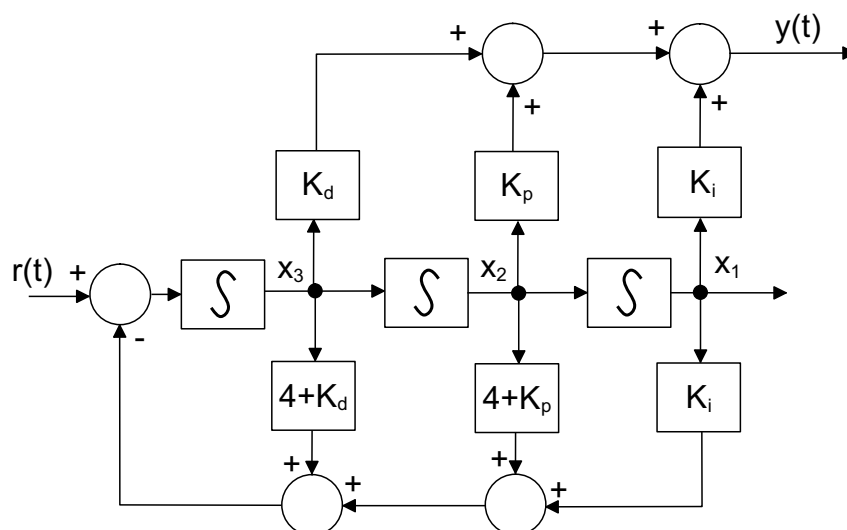
(d) 1. realizacija. Bločni diagram je prikazan na sliki 2.95.

2. realizacija. Bločni diagram je prikazan na sliki 2.96.

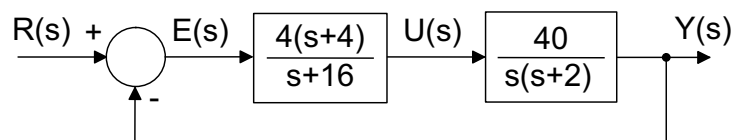
Primer 2.50. Delovanje zaprtozančnega sistema podaja bločni diagram na sliki 2.97. Na tri različne načine določite zapis sistema v prostoru stanj! Narišite tudi bločne diagrame ustreznih predstavitev!



Slika 2.95: Bločni diagram (1. realizacija) iz primera 2.49 (d)



Slika 2.96: Bločni diagram (2. realizacija) iz primera 2.49 (d)



Slika 2.97: Bločni diagram iz primera 2.50

Rešitev

1. realizacija. Zaprtozančna prenosna funkcija sistema je dana z:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{160s + 640}{s^3 + 18s^2 + 192s + 640} = \frac{b_0s^3 + b_1s^2 + b_2s + b_3}{s^3 + a_1s^2 + a_2s + a_3}$$

$$\begin{aligned}
\beta_0 &= b_0 = 0 \\
\beta_1 &= b_1 - a_1\beta_0 = 0 \\
\beta_2 &= b_2 - a_1\beta_1 - a_2\beta_0 = 160 \\
\beta_3 &= b_3 - a_1\beta_2 - a_2\beta_1 - a_3\beta_0 = -2240
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_1 &= y - \beta_0 r = y \\
x_2 &= \dot{y} - \beta_0 \dot{r} - \beta_1 r = \dot{y} \\
x_3 &= \ddot{y} - \beta_0 \ddot{r} - \beta_1 \dot{r} - \beta_2 r = \dot{x}_2 - 160r
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix} \cdot r(t) \\
y(t) &= [1 \ 0 \ 0] \mathbf{x}(t) + \beta_0 r(t)
\end{aligned}$$

Sistem zapisan v prostoru stanj je torej:

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -640 & -192 & -18 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 160 \\ -2240 \end{bmatrix} \cdot r(t) \\
y(t) &= [1 \ 0 \ 0] \mathbf{x}(t)
\end{aligned}$$

Pripadajoči bločni diagram je prikazan na sliki 2.98.

2. realizacija. Sistem lahko razstavimo kot je prikazano na sliki 2.99.

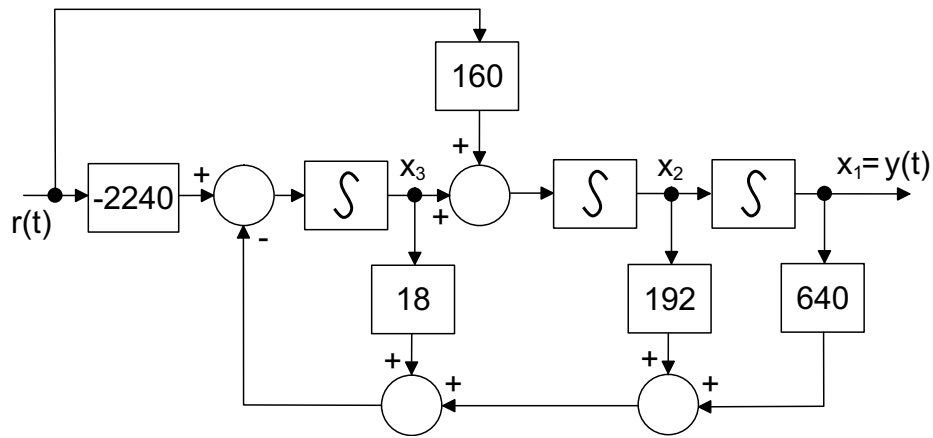
$$\ddot{\omega}(t) + 18\dot{\omega}(t) + 192\omega(t) + 640\omega(t) = r(t)$$

$$\begin{aligned}
x_1 &= \omega(t) \\
x_2 &= \dot{\omega}(t) \\
x_3 &= \ddot{\omega}(t)
\end{aligned}$$

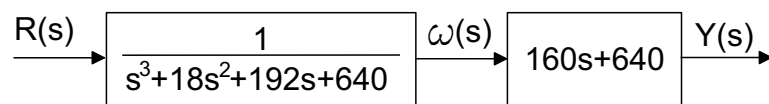
$$y(t) = 160\dot{\omega} + 640\omega = 160x_2 + 640x_1$$

Tako dobimo:

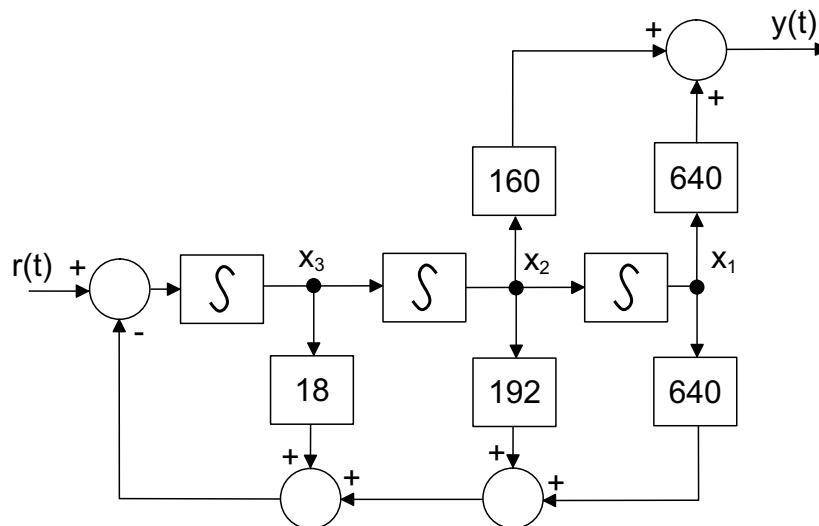
$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -640 & -192 & -18 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot r(t)$$



Slika 2.98: Bločni diagram (1. realizacija) iz primera 2.50



Slika 2.99: Bločni diagram iz primera 2.50

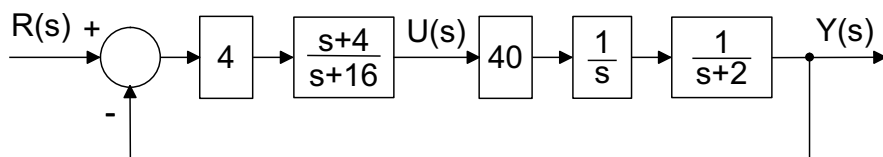


Slika 2.100: Bločni diagram iz primera 2.50 2.realizacija

$$y(t) = [640 \ 160 \ 0] \mathbf{x}(t)$$

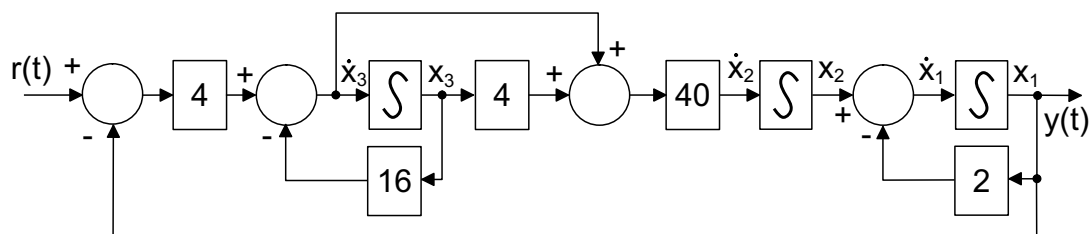
Pripadajoči bločni diagram za 2. realizacijo je prikazan na sliki 2.100.

3. realizacija. Izhodiščni bločni diagram lahko podamo tudi na naslednji ekvivalentni način (slika 2.101):



Slika 2.101: Bločni diagram iz primera 2.50

Na ta način smo predstavili sistem s podsistemi 1.reda. Realizacija vsakega od podsistemov v prostoru stanj je sedaj relativno enostavna. Tako razstavljen sistem je prikazan na sliki 2.102.



Slika 2.102: Bločni diagram iz primera 2.50 3.realizacija

Izhode iz integratorjev izberemo za spremenljivke stanj in zapišemo enačbe stanj direktno iz diagrama.

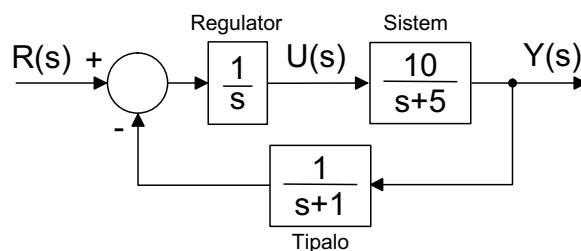
$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -2x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 &= 40(\dot{x}_3 + 4x_3) = 40\dot{x}_3 + 160x_3 \\ \dot{x}_3 &= 4(r - x_1) - 16x_3 = -4x_1 - 16x_3 + 4r \end{aligned}$$

$$\dot{x}_2 = -160x_1 - 480x_3 + 160r$$

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -160 & 0 & -480 \\ -4 & 0 & -16 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 160 \\ 4 \end{bmatrix} \cdot r(t)$$

$$y(t) = [1 \ 0 \ 0] \mathbf{x}(t)$$

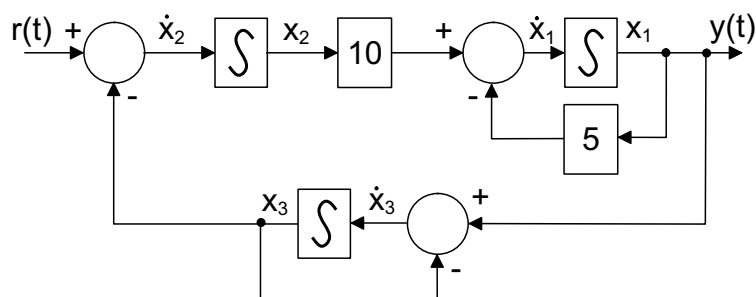
Primer 2.51. Za sistem, ki je podan na sliki 2.103 napišite matematični model v prostoru stanj ter narišite pripadajoči razstavljeni (razgrajeni) bločni diagram.



Slika 2.103: Bločni diagram iz primera 2.51

Rešitev

S pomočjo razstavljenega bločnega diagrama na sliki 2.104, lahko zapišemo sistem v prostoru stanj.



Slika 2.104: Razstavljeni bločni diagram iz primera 2.51

$$\dot{x}_1 = -5x_1 + 10x_2$$

$$\dot{x}_2 = r(t) - x_3$$

$$\dot{x}_3 = x_1 - x_3$$

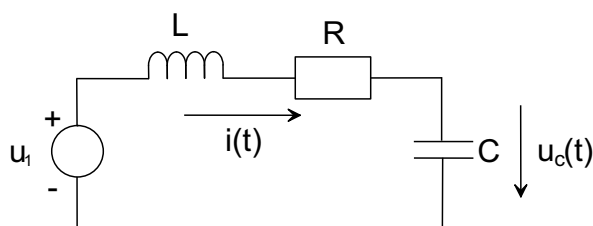
$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} -5 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot r(t)$$

$$y(t) = [1 \ 0 \ 0] \mathbf{x}(t)$$

2.6.4 Uporaba diagrama poteka signalov za zapis sistema v prostoru stanj

V tem delu si bomo ogledali pretvorbo matematičnega modela zapisanega z diferencialno enačbo višjega reda, v s-prostor in ga predstavili z diagramom poteka signalov.

Primer 2.52. \triangle Obravnavamo primer RLC-kroga, kot ga prikazuje slika 2.105:



Slika 2.105: Vezje iz primera 2.52

- Določite diagram poteka signalov, pri čemer je vhodna spremenljivka $u_1(t)$, izhodna pa $u_c(t)$.
- Določite razmerje med $I(s)$ ter vsemi tremi vhodi $U_1(s)$, $i(0)$ in $u_c(0)$.
- Določite razmerje med $U_c(s)$ ter vsemi tremi vhodi $U_1(s)$, $i(0)$ in $u_c(0)$.

Rešitev

- Definirajmo tok $i(t)$ in napetost $u_c(t)$ kot odvisni spremenljivki. Diferencialni enačbi, ki opisujeta takšen sistem sta:

$$L \frac{di}{dt} + Ri + u_c = u_1(t)$$

$$C \frac{du_c}{dt} = i(t)$$

Enačbi ne moremo direktno uporabiti za risanje digrama poteka signalov, ker sta to diferencialni, ne pa algebrajski enačbi. Uporabimo Laplaceovo transformacijo in enačbi preuredimo:

$$sI(s) = i(0) + \frac{1}{L}U_1(s) - \frac{R}{L}I(s) - \frac{1}{L}U_c(s)$$

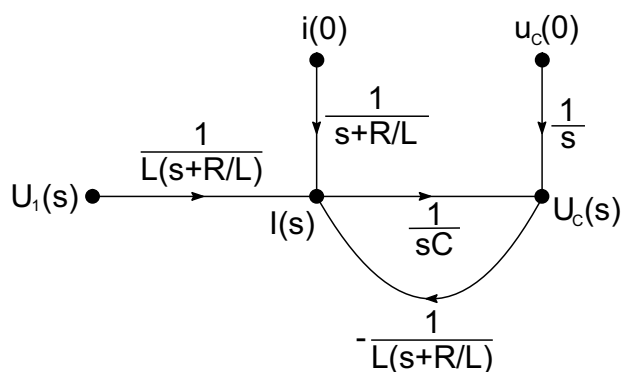
$$sU_c(s) = u_c(0) + \frac{1}{C}I(s)$$

kjer sta $i(0)$ in $u_c(0)$ začetni vrednosti toka in napetosti na kondenzatorju. V teh zadnjih dveh enačbah so $u_c(0)$, $i(0)$ in $U_1(s)$ vhodne spremenljivke. Obstaja več možnosti za konstruiranje diagrama poteka signalov tega sistema. Ena možnost je, da prvo enačbo rešimo na $I(s)$, drugo pa na $U_c(s)$ in dobimo:

$$I(s) = \frac{1}{s + \frac{R}{L}} i(0) + \frac{1}{L(s + \frac{R}{L})} U_1(s) - \frac{1}{L(s + \frac{R}{L})} U_c(s)$$

$$U_c(s) = \frac{1}{s} u_c(0) + \frac{1}{sC} I(s)$$

Diagram poteka signalov za ti dve enačbi je prikazan na sliki 2.106. Alternativna pot je direktna uporaba enačb:



Slika 2.106: DPS iz primera 2.52 a

$$sI(s) = i(0) + \frac{1}{L}U_1(s) - \frac{R}{L}I(s) - \frac{1}{L}U_c(s)$$

$$sU_c(s) = u_c(0) + \frac{1}{C}I(s)$$

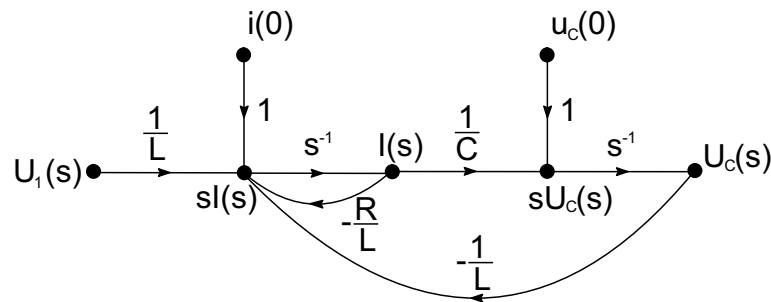
pri čemer definiramo $I(s)$, $U_c(s)$, $sI(s)$ in $sU_c(s)$ kot mešana vozlišča sistema. Te štiri spremenljivke so povezane z enačbami:

$$I(s) = s^{-1}[sI(s)]$$

$$U_c(s) = s^{-1}[sU_c(s)]$$

Tako dobimo diagram poteka signalov na sliki 2.107.

V tem diagramu poteka signalov se Laplaceov operator pojavlja samo v obliki s^{-1} . Zato je ta oblika diagrama signalov primerna za analogno ali digitalno računalniško reševanje problema (diagram stanj).



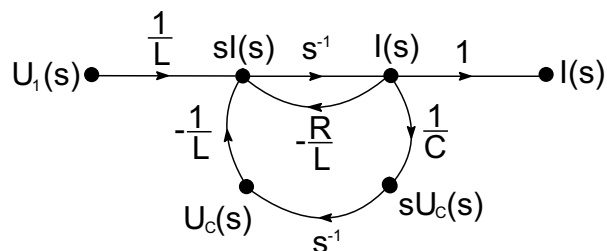
Slika 2.107: DPS iz primera 2.52 a

- (b) Iz diagrama poteka signalov na sliki 2.107 želimo poiskati razmerje med $I(s)$ ter vsemi tremi vhodi $U_1(s)$, $i(0)$ in $u_c(0)$. Podobno želimo narediti nato tudi za $U_c(s)$. Ker je sistem linearen, lahko uporabimo princip superpozicije. Ojačenje med enim vhodom in enim izhodom je določeno z uporabo Masonovega pravila za dve obravnavani spremenljivki, medtem ko ostale vhode v sistem postavimo na nič.

Obravnavajmo najprej primer, ko za izhodno spremenljivko sistema izberemo $I(s)$. Vhodi v sistem pa so $U_1(s)$, $i(0)$ in $u_c(0)$. Po principu superpozicije določimo:

1. $I(s)$... izhod ; $U_1(s)$... vhod ; $i(0) = u_c(0) = 0$

Diagram poteka signalov za ta primer je prikazan na sliki 2.108.



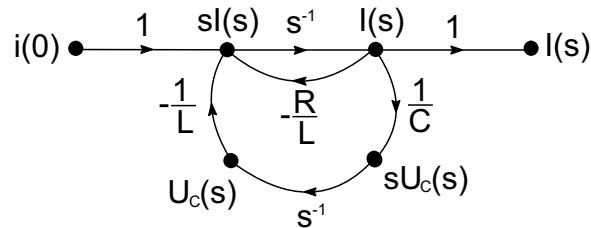
Slika 2.108: DPS iz primera 2.52 b

Z uporabo Masonovega pravila dobimo prenosno funkcijo:

$$\frac{I(s)}{U_1(s)} = \frac{sC}{s^2LC + sRC + 1}$$

2. $I(s)$... izhod ; $i(0)$... vhod ; $U_1(s) = u_c(0) = 0$

Diagram poteka signalov za ta primer je prikazan na sliki 2.109.



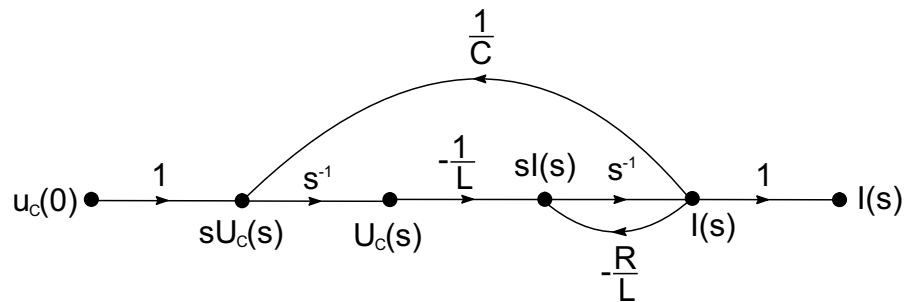
Slika 2.109: DPS iz primera 2.52 b

Z uporabo Masonovega pravila dobimo prenosno funkcijo:

$$\frac{I(s)}{i(0)} = \frac{sCL}{s^2LC + sRC + 1}$$

3. $I(s)$... izhod ; $i(0)$... vhod ; $U_1(s) = u_c(0) = 0$

Diagram poteka signalov za ta primer je prikazan na sliki 2.110.



Slika 2.110: DPS iz primera 2.52 b

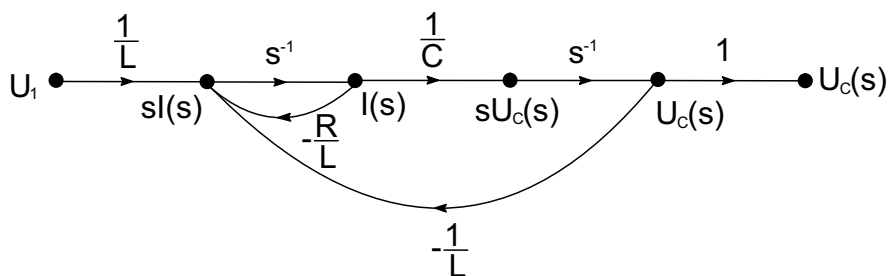
Z uporabo Masonovega pravila dobimo prenosno funkcijo:

$$\frac{I(s)}{u_c(0)} = -\frac{C}{s^2LC + sRC + 1}$$

Če so vsi vhodi v sistem različni od nič, lahko po principu superpozicije zapišemo:

$$I(s) = \frac{1}{s^2LC + sRC + 1} \cdot [sCU_1(s) + sCLi(0) - Cu_c(0)]$$

(c) Obravnavajmo sedaj isto vezje za primer, ko za izhodni signal izberemo $U_c(s)$, vhodi pa so ponovno $U_1(s)$, $i(0)$ in $u_c(0)$.

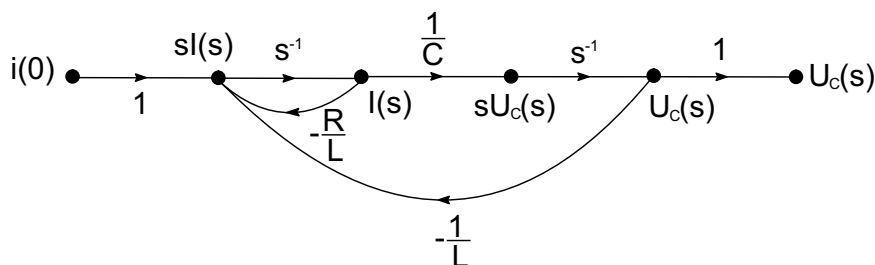


Slika 2.111: DPS iz primera 2.52 c

1. $U_c(s) \dots$ izhod ; $U_1(s) \dots$ vhod ; $i(0) = u_c(0) = 0$
 Diagram poteka signalov za ta primer je prikazan na sliki 2.111.
 Z uporabo Masonovega pravila dobimo prenosno funkcijo:

$$\frac{U_c(s)}{U_1(s)} = \frac{1}{s^2 LC + sRC + 1}$$

2. $U_c(s) \dots$ izhod ; $i(0) \dots$ vhod ; $U_1(s) = u_c(0) = 0$
 Diagram poteka signalov za ta primer je prikazan na sliki 2.112.



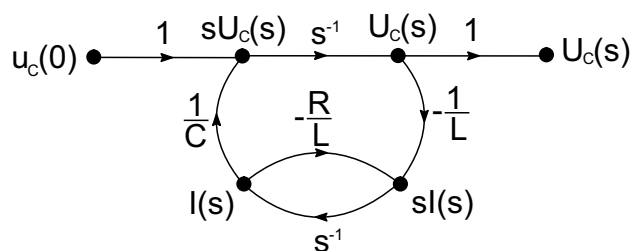
Slika 2.112: DPS iz primera 2.52 c

Z uporabo Masonovega pravila dobimo prenosno funkcijo:

$$\frac{U_c(s)}{i(0)} = \frac{L}{s^2 LC + sRC + 1}$$

3. $U_c(s) \dots$ izhod ; $i(0) \dots$ vhod ; $U_1(s) = u_c(0) = 0$
 Diagram poteka signalov za ta primer je prikazan na sliki 2.113.
 Z uporabo Masonovega pravila dobimo prenosno funkcijo:

$$\frac{U_c(s)}{u_c(0)} = -\frac{sCL + RC}{s^2 LC + sRC + 1}$$

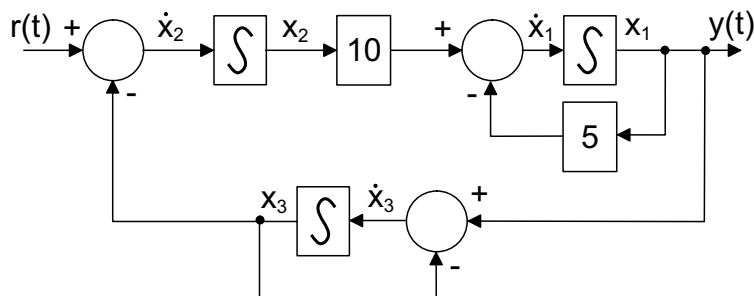


Slika 2.113: DPS iz primera 2.52 c

Če so vsi vhodi v sistem različni od nič, lahko po principu superpozicije zapišemo:

$$U_c(s) = \frac{1}{s^2LC + sRC + 1} \cdot [U_1(s) + Li(0) + (sCL + RC)u_c(0)]$$

Primer 2.53. \triangle Za sistem, ki je podan z bločnim diagramom na sliki 2.114, narišite pripadajoči diagram poteka signalov s pomočjo katerega določite zapis v



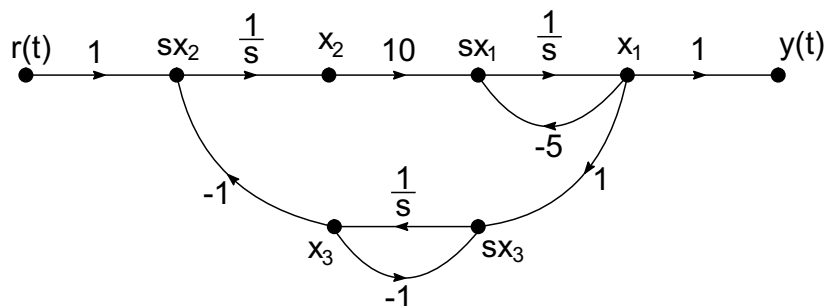
Slika 2.114: Razstavljen bločni diagram iz primera 2.53

prostoru stanj!

Rešitev

Pri uporabi diagrama poteka signalov za določitev zapisa sistema mora biti sistem razgrajen na predstavitev z integratorji, čemur je v našem primeru že zadoščeno (sistem na sliki 2.114 je že razgrajen). Tako lahko narišemo ustrezeni diagram poteka signalov, ki je predstavljen na sliki 2.115.

Enačbe v prostoru stanj:



Slika 2.115: Razstavljeni bločni diagram iz primera 2.53

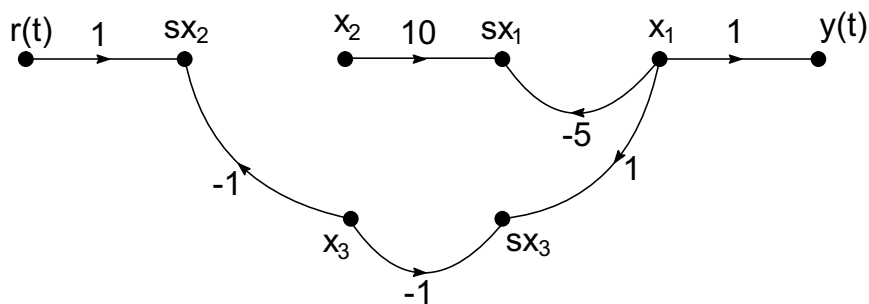
$$sx_1 = -5x_1 + 10x_2$$

$$sx_2 = r(t) - x_3$$

$$sx_3 = x_1 - x_3$$

Postopek je naslednji :

Leva stran enačb v prostoru stanj vsebuje prve odvode spremenljivk stanj, desna stran pa spremenljivke stanj in vhodne signale. Torej v enačbah stanj ne nastopajo začetni pogoji in Laplaceov operator s . Zato je priporočljivo, da v postopku pretvorbe diagrama potega signalov v zapis v prostoru stanj iz diagrama izločimo vse veje, ki vsebujejo utež $\frac{1}{s}$ in vse veje, ki v sistem vnašajo začetne pogoje. Predhodno pa moramo izbrati spremenljivke stanj, ki so navadno izhodi integratorja v shemi (to smo že označili). Tak diagram poteka signalov je prikazan na sliki 2.116.



Slika 2.116: Razstavljeni bločni diagram iz primera 2.53

Nato izračunamo relacije med odvodi spremenljivk stanj ter spremenljivkami stanj in vhodnimi spremenljivkami s pomočjo Masonovega pravila. Enako določimo tudi relacijo med izhodom ter stanji.

Enačbe stanj:

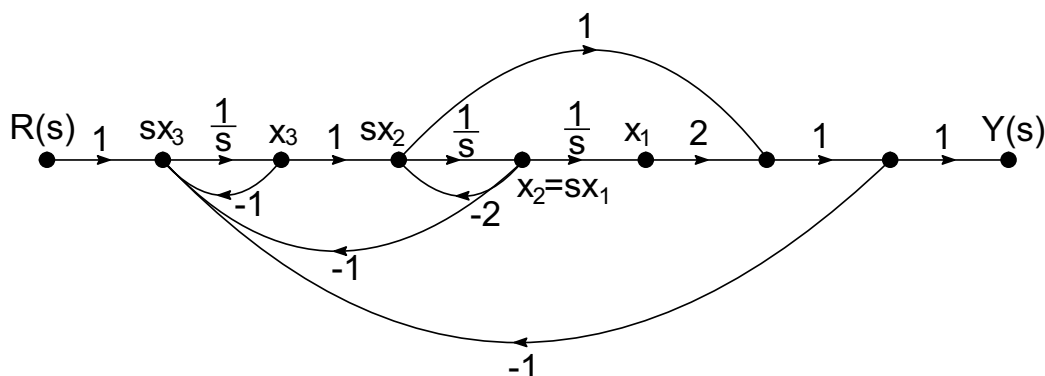
$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= -5x_1 + 10x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} &= -x_3 + r \\ \frac{dx_3}{dt} &= -x_3 + x_1\end{aligned}$$

Izhodna enačba:

$$y = x_1$$

V našem preprostem primeru uporaba Masonovega pravila sploh ni bila potrebna, saj so relacije kar eksplicitno razvidne iz diagrama.

Primer 2.54. Delovanje zaprtozančnega sistema opisuje diagram poteka signalov na sliki 2.117.

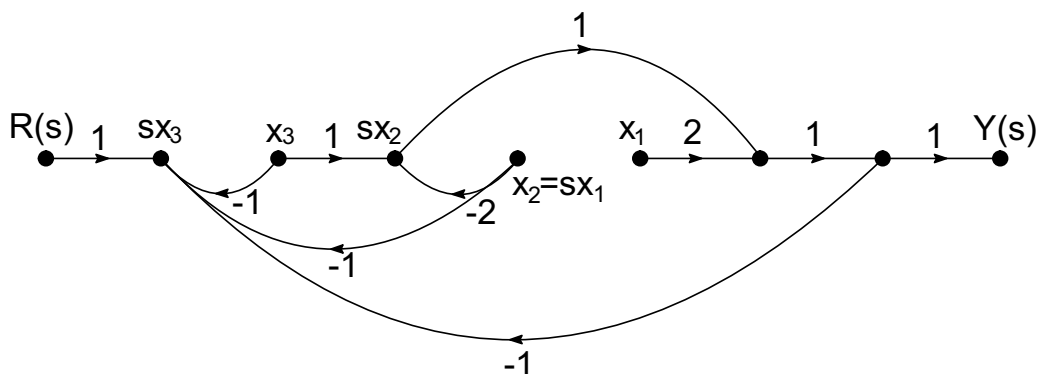


Slika 2.117: DPS iz primera 2.54

- S pomočjo danega diagrama poteka signalov določite zapis sistema v prostoru stanj.
- Iz zapisa v prostoru stanj določite prenosno funkcijo sistema $\frac{Y(s)}{R(s)}$.
- Rezultat preverite z uporabo Masonovega pravila.
- Narišite pripadajoči bočni diagram sistema, ter z njegovo poenostavitvijo preverite rezultat.

Rešitev

(a) Sliko 2.118 dobimo tako, da izberemo stanja sistema in izločimo veje z utežjo $\frac{1}{s}$.



Slika 2.118: Preurejen DPS iz primera 2.54

sx_1 , sx_2 ter sx_3 so v splošnem odvodi od x_1 , x_2 , x_3 in R , zato moramo za enačbo stanj $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}r$ določiti razmerja:

$$T_{11} = \frac{sx_1}{x_1} \quad ; \quad T_{12} = \frac{sx_1}{x_2} \quad ; \quad T_{13} = \frac{sx_1}{x_3} \quad ; \quad T_{14} = \frac{sx_1}{R}$$

$$T_{21} = \frac{sx_2}{x_1} \quad ; \quad T_{22} = \frac{sx_2}{x_2} \quad ; \quad T_{23} = \frac{sx_2}{x_3} \quad ; \quad T_{24} = \frac{sx_2}{R}$$

$$T_{31} = \frac{sx_3}{x_1} \quad ; \quad T_{32} = \frac{sx_3}{x_2} \quad ; \quad T_{33} = \frac{sx_3}{x_3} \quad ; \quad T_{34} = \frac{sx_3}{R}$$

Ker v diagramu poteka signalov nimamo povratnih zank, določimo samo direktne poti.

$$T_{11} : \text{direktne poti od } x_1 \text{ do } sx_1: 0 \Rightarrow T_{11} = 0$$

$$T_{12} : \text{direktne poti od } x_2 \text{ do } sx_1: P_1 = 1 \Rightarrow T_{12} = 1$$

$$T_{13} : \text{direktne poti od } x_3 \text{ do } sx_1: 0 \Rightarrow T_{13} = 0$$

$$T_{14} : \text{direktne poti od } R \text{ do } sx_1: 0 \Rightarrow T_{14} = 0$$

$$1. \text{ enačba stanj: } \frac{dx_1}{dt} = x_2$$

$$T_{21} : \text{direktne poti od } x_1 \text{ do } sx_2: 0 \Rightarrow T_{21} = 0$$

$$T_{22} : \text{direktne poti od } x_2 \text{ do } sx_2: P_1 = -2 \Rightarrow T_{22} = -2$$

$$T_{23} : \text{direktne poti od } x_3 \text{ do } sx_2: P_1 = 1 \Rightarrow T_{23} = 1$$

T_{24} : direktne poti od R do sx_2 : $0 \Rightarrow T_{24} = 0$

$$2. \text{ enačba stanj: } \frac{dx_2}{dt} = -2x_2 + x_3$$

T_{31} : direktne poti od x_1 do sx_3 : $P_1 = 2 \cdot 1 \cdot (-1) \Rightarrow T_{31} = -2$

T_{32} : direktne poti od x_2 do sx_3 : $P_1 = -1$; $P_2 = 2 \Rightarrow T_{32} = 1$

T_{33} : direktne poti od x_3 do sx_3 : $P_1 = -1$; $P_2 = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot (-1) = -1 \Rightarrow T_{33} = -2$

T_{34} : direktne poti od R do sx_3 : $P_1 = 1 \Rightarrow T_{34} = 1$

$$3. \text{ enačba stanj: } \frac{dx_3}{dt} = -2x_1 + x_2 - 2x_3 + R$$

Določiti moramo še enačbo: $y = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}r$

Iz slike 2.118 vidimo, da nimamo direktne povezave med $R(s)$ in $Y(s)$ (zato je $D=0$). Zanimajo pa nas še naslednje prenosne funkcije:

$$T_{41} = \frac{y}{x_1} \quad ; \quad T_{42} = \frac{y}{x_2} \quad ; \quad T_{43} = \frac{y}{x_3}$$

T_{41} : direktne poti od x_1 do Y : $P_1 = 2 \Rightarrow T_{41} = 2$

T_{42} : direktne poti od x_2 do Y : $P_1 = -2 \Rightarrow T_{42} = -2$

T_{43} : direktne poti od x_3 do Y : $P_1 = 1 \Rightarrow T_{43} = 1$

$$\text{izhodna enačba: } Y(s) = 2x_1 - 2x_2 + 1x_3$$

Zapis v prostoru stanj je torej:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot r(t)$$

$$y(t) = [2 \quad -2 \quad 1] \mathbf{x}(t)$$

(b)

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}$$

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{s^3 + 4s^2 + 3s + 2} \begin{bmatrix} (s+2)^2 - 1 & s+2 & 1 \\ -2 & s(s+2) & s \\ -2(s+2) & s-2 & s(s+2) \end{bmatrix}$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{s^2 + 2}{s^3 + 4s^2 + 3s + 2}$$

(c) *Direktne poti:*

$$P_1 = \frac{1}{s} \quad ; \quad P_2 = \frac{2}{s^3}$$

Povratne zanke:

$$P_{11} = -\frac{1}{s}$$

$$P_{12} = -\frac{2}{s}$$

$$P_{13} = -\frac{1}{s^2}$$

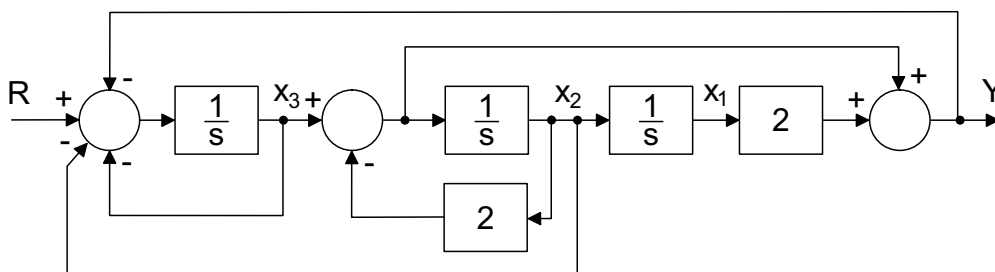
$$P_{14} = -\frac{2}{s^3}$$

$$P_{15} = -\frac{1}{s}$$

$$\Delta_1 = 1 \quad ; \quad \Delta_2 = 1 \quad ; \quad \Delta = \frac{s^3 + 4s^2 + 3s + 2}{s^3}$$

$$G(s) = \frac{s^2 + 2}{s^3 + 4s^2 + 3s + 2}$$

(d) *Bločni diagram je prikazan na sliki 2.119.*



Slika 2.119: Bločni diagram iz primera 2.54

Če bločni diagram poenostavimo, dobimo prenosno funkcijo:

$$G(s) = \frac{s^2 + 2}{s^3 + 4s^2 + 3s + 2}$$

2.6.5 Prehod med prostorom stanj in zapisom z diferencialno enačbo

Prehodi med prostorom stanj in diferencialno enačbo so vedno možni. Nekoliko bolj zahteven je le prehod iz diferencialne enačbe v prostor stanj, kadar imamo v diferencialni enačbi prisotne odvode vhoda.

Ta prehod je možno izvesti na več načinov. Ena od možnosti je, da iz enačb, ki jih določa vektorsko-matrična enačba stanj in iz izhodne enačbe eliminiramo vse spremenljivke, razen izhodnega in vhodnega signala.

Do enakega rezultata pridemo, če si izberemo eno od enačb stanj in jo toliko časa odvajamo, dokler ni v izrazu samo še ena spremenljivka stanj in vhod v sistem. Pri tem pa v vmesnih korakih sproti zamenjujemo ostale spremenljivke stanj s preostalimi enačbami stanj. Nazadnje pa zamenjamo preostalo spremenljivko stanj z ustrezno povezavo do izhoda sistema.

Primer 2.55. \triangle Imejmo sistem zapisan v prostoru stanj, ki ga bomo zapisali v obliki diferencialne enačbe.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y &= [1 \quad -1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + 0u \end{aligned} \quad (2.48)$$

Rešitev

Iz vektorsko-matrične enačbe (2.48) lahko zapišemo naslednji sistem enačb.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 + 2x_3 + u \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ \dot{x}_3 &= -x_1 - 3x_2 + x_3 + u \\ y &= x_1 - x_2 \end{aligned} \quad (2.49)$$

Iz enačb najprej izločimo x_3 .

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 + 2\dot{x}_2 + u \\ \ddot{x}_2 &= -x_1 - 3x_2 + \dot{x}_2 + u \\ y &= x_1 - x_2 \end{aligned} \quad (2.50)$$

V naslednjem koraku izločimo x_1 ob upoštevanju enačbe; $x_1 = y + x_2$, $\dot{x}_1 = \dot{y} + \dot{x}_2$

$$\begin{aligned} \dot{y} &= \dot{x}_2 + x_2 + u \\ y &= -\ddot{x}_2 + \dot{x}_2 - 4x_2 + u \end{aligned} \quad (2.51)$$

Sedaj moramo preostalo spremenljivko stanj x_2 izraziti z y in njegovimi odvodi. Zato se moramo znebiti iz enačb vseh odvodov x_2 . V sistem lahko pridobimo še

eno enačbo tako, da prvo enačbo odvajamo.

$$\begin{aligned}\ddot{y} &= \ddot{x}_2 + \dot{x}_2 + \dot{u} \\ \dot{y} &= \dot{x}_2 + x_2 + u \\ y &= -\ddot{x}_2 + \dot{x}_2 - 4x_2 + u\end{aligned}\tag{2.52}$$

Prvo in zadnjo enačbo seštejemo in se znebimo \ddot{x}_2 , drugo enačbo pa množimo z 2, da se bomo nato lahko znebili še \dot{x}_2 .

$$\begin{aligned}2\dot{y} &= 2\dot{x}_2 + 2x_2 + 2u \\ \ddot{y} + y &= 2\dot{x}_2 - 4x_2 + u + \dot{u}\end{aligned}\tag{2.53}$$

Od spodnje enačbe odštejemo zgornjo in dobimo.

$$\begin{aligned}\ddot{y} - 2\dot{y} + y &= -6x_2 - u - \dot{u} \\ x_2 &= \frac{-\ddot{y} + 2\dot{y} - y + \dot{u} - u}{6} \\ \dot{x}_2 &= \frac{-\ddot{\dot{y}} + 2\dot{\dot{y}} - \dot{y} + \ddot{u} - \dot{u}}{6}\end{aligned}\tag{2.54}$$

Tako izražena x_2 in \dot{x}_2 lahko vstavimo v katerokoli enačbo sistema (2.51) in dobimo diferencialno enačbo, ki opisuje vhodno-izhodno relacijo. Tu pa velja pripomniti, da če vstavimo x_2 in njegove odvode v drugo enačbo sistema (2.51), dobimo enačbo previsokega reda. To ugotovimo tako, da jo pretvorimo v prenosno funkcijo in ugotovimo, da lahko pol in ničlo krajšamo. To samo po sebi ne bi bilo dovolj, ker vemo, da nosi prenosna funkcija manj informacije o sistemu kot diferencialna enačba, vendar imamo opravka s sistemom treh diferencialnih enačb prvega reda, kar ne more dati diferencialne enačbe več kot tretjega reda.

Rešitev v obliki zapisa z diferencialno enačbo se torej glasi.

$$\ddot{\dot{y}} - \dot{\dot{y}} + 5\dot{y} + y = \ddot{u} + 5u\tag{2.55}$$

3. Analiza regulacijskih sistemov v časovnem prostoru in s-prostoru

Lastnosti vsakega dinamičnega sistema lahko zapišemo tako kvantitativno kot tudi opisno (kvalitativno). Najpomembnejši parametri, ki govorijo o lastnostih dinamičnega sistema so: lega polov in ničel, vrsta in red sistema, časovne konstante (τ), koeficient dušenja (ζ), frekvenca nihanja (f), krožna frekvenca (ω) in ojačenje (K_s). Določimo jih lahko iz modela sistema. O dinamičnih lastnostih sistemov pa lahko sklepamo tudi iz odzivov sistema na testni signal (stopnica, impulz, sinus, ...). Pomembna lastnost je tudi stabilnost sistema, ki jo prav tako lahko določimo iz modela ali odziva sistema na testne signale. Ker obstaja več kriterijev stabilnosti, se bomo tu omejili na kriterij, po katerem so sistemi stabilni, kadar ležijo njihovi poli v levi polravnini, so mejno stabilni, kadar njihovi poli ležijo na imaginarni osi in so nestabilni, kadar imajo vsaj en pol v desni polravnini prostora kompleksne frekvence s . Pri ugotavljanju stabilnosti si lahko pomagamo z Routh-Hurwitzovim kriterijem, ki bo prikazan kasneje.

3.1 Določanje dinamičnih lastnosti iz modela sistema

Kot smo videli, lahko iz vseh zapisov sistema preidemo v prenosno funkcijo, zato si bomo določanje dinamičnih lastnosti pogledali kar na primeru prenosne funkcije, kjer je to tudi najbolj pregledno. Ničle sistema določimo kot korene števec, pole pa kot korene imenovalca prenosne funkcije. Grafično pa predstavimo v s ravnini pole kot križce, ničle pa kot krožce. Red sistema določa najvišja potenca imenovalca, vrsto pa število polov v koordinatnem izhodišču. Kadar ima sistem enega ali več polov v koordinatnem izhodišču, govorimo o integrirnih sistemih, diferencialni sistemi pa imajo v koordinatnem izhodišču eno ali več ničel. Če prenosna funkcija sistema v koordinatnem izhodišču sistem nima niti polov niti ničel in če ležijo vsi poli sistema v levi polravnini, govorimo o proporcionalnem sistemu. Časovne konstante določimo iz imenovalca prenosne funkcije. Določene so z naslednjim izrazom.

$$\tau_i = \frac{1}{\operatorname{Re}\{s_i\}}$$

Pri čemer so s_i poli prenosne funkcije. Koeficiente dušenja lahko določimo samo za prispevke konjugirano kompleksnih polov, kot je definirano s primerjavo naslednjih izrazov:

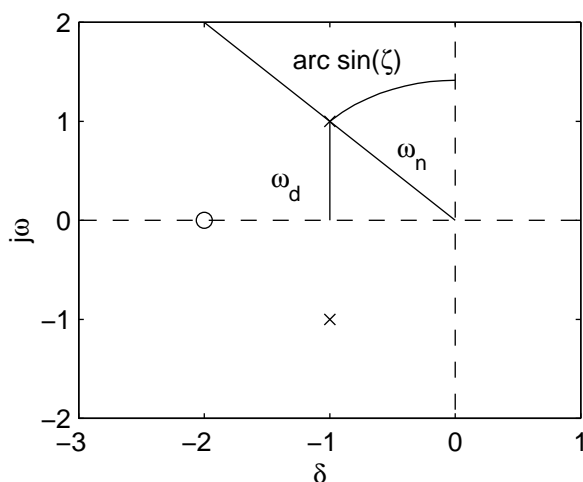
$$as^2 + bs + c = a(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)$$

Pri čemer so a , b in c koeficienti polinoma v imenovalcu prenosne funkcije. Od tod dobimo:

$$\zeta = \frac{b}{2\sqrt{ac}}$$

Še lažje pa določimo ζ iz polov sistema, kot je prikazano tudi na sliki 3.1, kjer sta pola prenosne funkcije definirana kot:

$$s_{1,2} = -\zeta\omega \pm j\omega\sqrt{1 - \zeta^2}$$



Slika 3.1: Koeficient dušenja ζ , lastne frekvence nedušenega nihanja ω_n in dušenega nihanja ω_d .

$$\zeta = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{Im\{s_i\}}{Re\{s_i\}}\right)^2}}$$

Enako velja tudi za dejansko frekvenco nihanja f_d in krožno frekvenco ω_d , ki sta določeni kot

$$f_d = \frac{1}{2\pi} Im\{s_i\}, \quad \omega_d = Im\{s_i\}$$

oz. za naravno krožno frekvenco, ki jo imenujemo tudi lastna frekvenca nedušenega nihanja.

$$\omega_n = \frac{\omega_d}{\sqrt{1 - \zeta^2}} = \sqrt{(Re\{s_i\})^2 + (Im\{s_i\})^2}.$$

Ojačenje K_s pa določimo kot

$$K_s = \lim_{s \rightarrow 0} G(s),$$

če limita obstaja, kar z drugimi besedami pomeni kvocient spremembe izhodnega signala proti spremembi vhodnega signala v ustaljenem stanju. Ojačenje sistema v določeni delovni točki lahko definiramo tudi kot smerni koeficient tangente na funkcijo, ki predstavlja statično karakteristiko sistema.

Primer 3.1. \triangle Imamo prenosno funkcijo

$$G(s) = \frac{s^2 + 3s + 1}{(s^2 + 2s + 12)(s^2 + 3s + 12)}$$

iz katere moramo izračunati dinamične lastnosti sistema, ki ga le-ta opisuje.

Rešitev

Najprej določimo ničle iz enačbe:

$$s^2 + 3s + 1 = 0$$

$$N : n_1 = -2,62$$

$$n_2 = -0,38$$

Pole določimo iz karakteristične enačbe sistema.

$$(s^2 + 2s + 12)(s^2 + 3s + 12) = 0$$

$$P : p_1 = -1 + 3,32j$$

$$p_2 = -1 - 3,32j$$

$$p_3 = -1,5 + 3,12j$$

$$p_4 = -1,5 - 3,12j$$

(3.1)

Opravka imamo s sistemom četrtega reda, ničelne vrste, ki mu lahko rečemo tudi proporcionalni sistem četrtega reda. Sistem ima dve različni lastni frekvenci in njima pripadajoča faktorja dušenja ter dve različni časovni konstanti.

Časovne konstante:

$$\tau_{1,2} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\tau_{3,4} = \frac{1}{1,5} = 0,67$$

Faktorja dušenja:

$$\zeta_1 = \frac{1}{3,32} = 0,30$$

$$\zeta_2 = \frac{1,5}{3,12} = 0,48$$

Lastne frekvence:

$$f_{d1} = 0,53$$

$$\omega_{d1} = |Im\{p_1\}| = |Im\{p_2\}| = 3,32$$

$$f_{n1} = 0,55$$

$$\omega_{n1} = 3,48$$

$$f_{d2} = 0,50$$

$$\omega_{d2} = 3,12$$

$$f_{n2} = 0,57$$

$$\omega_{n2} = 3,56$$

Ojačenje sistema:

$$K_s = \lim_{s \rightarrow 0} G(s)$$

$$= \frac{1}{12 \cdot 12}$$

$$= \frac{1}{144}$$

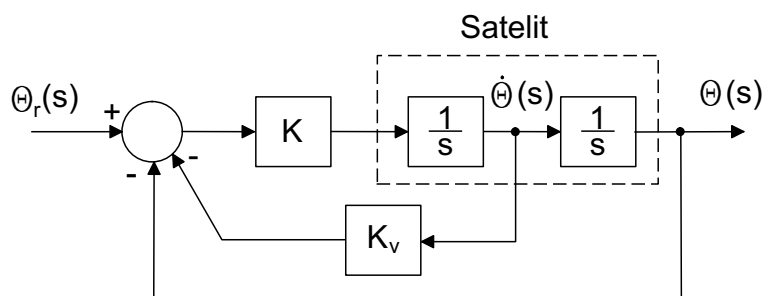
3.2 Naloge

Primer 3.2. \triangle Določite $K_v = f(K)$ tako, da bo odziv zaprtozančnega sistema na stopnico najhitrejši in brez prenihaja. Bločni diagram sistema je prikazan na sliki 3.2.

Rešitev

Zaprtozančna prenosna funkcija je:

$$G_z = \frac{K}{s^2 + K K_v s + K} \iff \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$



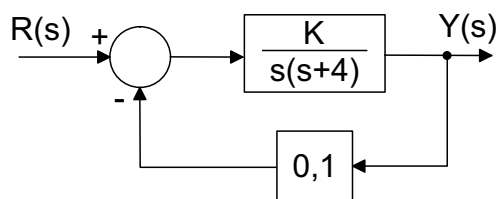
Slika 3.2: Bločni diagram iz primera 3.2

Če želimo da bo sistem najhitrejši in brez prenehaja, mora biti kritično dušen ($\zeta = 1$).

$$\omega_n^2 = K \quad ; \quad 2\zeta\omega_n = KK_v \implies K_v = \frac{2}{\sqrt{K}}$$

Primer 3.3. Določite območje parametra K za katerega bo sistem prikazan na sliki 3.3:

- (a) podkritično dušen
- (c) kritično dušen
- (b) nadkritično dušen



Slika 3.3: Bločni diagram iz primera 3.3

Rešitev

Zaprtozančna prenosna funkcija je:

$$G_z = \frac{K}{s^2 + 4s + 0,1K}$$

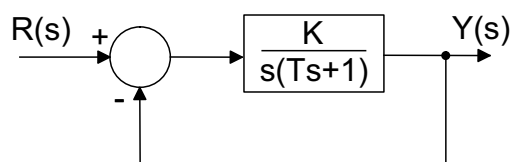
$$\omega_n^2 = 0,1K \quad ; \quad 2\zeta\omega_n = 4 \implies K = \frac{40}{\zeta^2}$$

(a) $\zeta < 1 \implies K > 40$

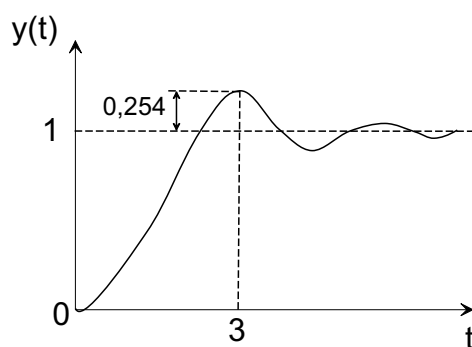
(c) $\zeta = 1 \implies K = 40$

(b) $\zeta > 1 \implies K < 40$

Primer 3.4. \triangle Sistem, ki ga prikazuje bločni diagram na sliki 3.4, vzbujamo z enotino stopnico. Njegov odziv je prikazan na sliki 3.5.



Slika 3.4: Bločni diagram iz primera 3.4



Slika 3.5: Odziv sistema iz primera 3.4

Določite vrednosti konstant K in T obravnavanega sistema.

Rešitev

Maksimalni prevzpon:

$$M_p = e^{-\zeta \frac{\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} = 0,254 \implies \zeta = 0,4$$

Čas maksimalnega prevzpona:

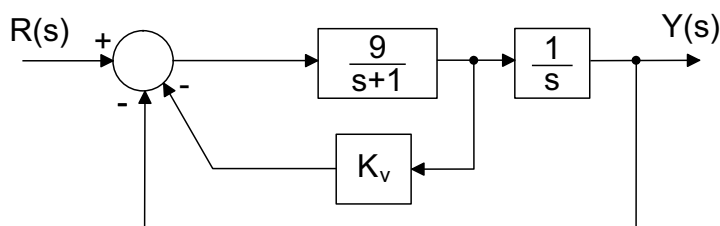
$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}} = 3 \implies \omega_n = 1,1425$$

Prenosna funkcija sistema je:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\frac{K}{T}}{s^2 + \frac{s}{T} + \frac{K}{T}} \Leftrightarrow \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$\omega_n^2 = \frac{K}{T} \quad ; \quad 2\zeta\omega_n = \frac{1}{T} \implies K = 1,425 \quad ; \quad T = 1,09$$

Primer 3.5. Podan imamo sistem, ki ga prikazuje bločni diagram na sliki 3.6.



Slika 3.6: Bločni diagram iz primera 3.5

- Določite zaprtozankno prenosno funkcijo sistema.
- Določite K_v tako, da bo sistem kritično dušen.
- Določite K_v tako, da bo $\zeta = 0,707$.
- Določite K_v tako, da bo ojačenje sistema enako 1.

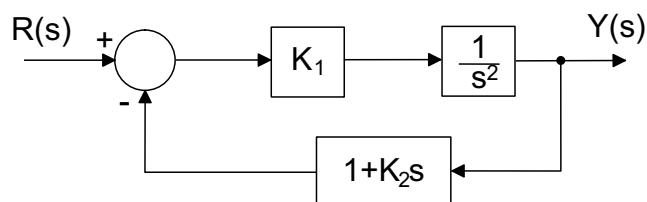
Rešitev

$$(a) G_z(s) = \frac{9}{s^2 + (1+9K_v)s + 9}$$

$$(b) \omega_n = \sqrt{9} \quad ; \quad \zeta = 1 \quad ; \quad 2\zeta\omega_n = 9K_v + 1 \implies K_v = \frac{5}{9}$$

$$(c) \zeta = 0,707 \quad ; \quad 2\zeta\omega_n = 4,24 = 9K_v + 1 \implies K_v = 0,36$$

(d) Ojačenje sistema je vedno enako 1 in je neodvisno od K_v .



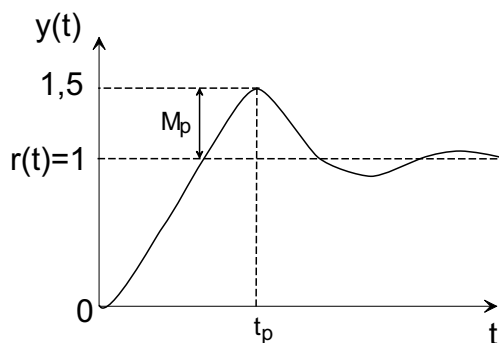
Slika 3.7: Bločni diagram iz primera 3.6

Primer 3.6. \triangle Slika 3.7 prikazuje bločni diagram servomehanizma.

Določite vrednosti konstant K_1 in K_2 tako, da bo maksimalen prevzpon pri odzivu na enotno stopnico 50% in bo nastopil 5 sekund po nastopu vzbujanja!

Rešitev

Časovni odziv je prikazan na sliki 3.8



Slika 3.8: Odziv iz primera 3.6

$$M_p[\%] = e^{-\zeta \frac{\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} = 0,5 \Rightarrow \zeta = 0,2154$$

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} = 5 \Rightarrow \omega_n = 0,6434$$

Zaprtozančna prenosna funkcija je:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{K_1}{s^2 + K_1 K_2 s + K_1}$$

$$\omega_n^2 = K_1 ; 2\zeta\omega_n = K_1 K_2$$

$$\omega_n = \sqrt{K_1} \Rightarrow K_1 = 0,414$$

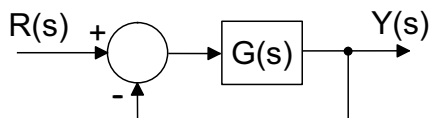
$$\zeta = \frac{K_1 K_2}{2\sqrt{K_1}} \Rightarrow K_2 = 0,6695$$

Primer 3.7. Prenosna funkcija odprtozančnega sistema je podana z:

$$G(s) = \frac{3}{s+1}$$

- (a) Določite odziv sistema na enotino stopnico in ga skicirajte!
- (b) Ali je odprtozančni sistem stabilen?
- (c) Če je, določite vrednost odziva v stacionarnem stanju!
- (d) Kdaj doseže odprtozančni odziv tolerančni pas dveh procentov ($\Delta y = 0.02y_\infty$) in kdaj petih ($\Delta y = 0.05y_\infty$)?
- (e) Kolikšna sta red in vrsta sistema?
- (f) Kakšna je narava sistema?

Sistem zapremo z enotino negativno povratno zanko tako, da dobimo sledilni način delovanja kot prikazuje slika 3.11.



Slika 3.9: Bločni diagram iz primera 3.7

- (g) Ali je zaprtozančni sistem stabilen?
- (h) Če je, določite vrednost izhodnega signala in signala pogreška v stacionarnem stanju pri vzbujanju z enotino stopnico.
- (i) Ali smo z realizacijo enotine povratne zanke vplivali na red sistema?
- (j) Določite konstanti položajnega (pozicijskega) pogreška in hitrostnega pogreška.

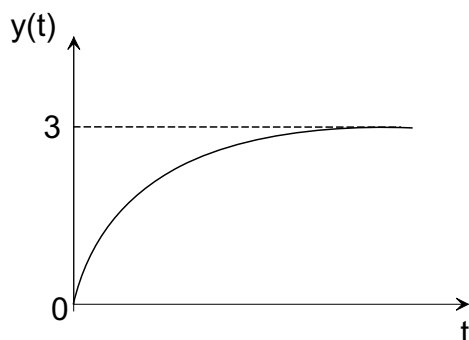
Rešitev

(a)

$$Y(s) = \frac{3}{s+1} \cdot \frac{1}{s} = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{s+1}$$

$$K_1 = 3; K_2 = -3; \quad y(t) = 3(1 - e^{-t})$$

Odziv sistema je prikazan na sliki 3.10



Slika 3.10: Odziv iz primera 3.7

(b) Pol sistema: $s = -1 \Rightarrow$ sistem je stabilen.

(c) $y(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 3$

(d) $\tau_{tp2} = 4; \tau_{tp5} = 3$.

(e) Red sistema je 1, vrsta sistema pa je 0.

(f) Proporcionalni sistem.

(g)

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)} = \frac{3}{s+4}$$

Pol zaprtzančnega sistema je: $s = -4 \Rightarrow$ sistem je stabilen

(h) Vrednost izhodnega signala:

$$Y(s) = \frac{3}{s+4} \cdot \frac{1}{s}$$

$$y_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} (s \cdot Y(s)) = \frac{3}{4}$$

Vrednost signala pograška:

$$E(s) = R(s) - Y(s) = R(s) - G(s)E(s) \Rightarrow E(s) = \frac{R(s)}{1 + G(s)}$$

$$E(s) = \frac{s+1}{s+4} \cdot \frac{1}{s}$$

$$e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \frac{1}{4}$$

- (i) Z realizacijo enotine povratne zanke nismo vplivali na red sistema.
 (j) Konstanta položajnega (pozicijskega) pogreška.

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G(s)H(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{3}{s+1} = 3$$

Konstanta hitrostnega pogreška:

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s)H(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{3}{s+1} = 0$$

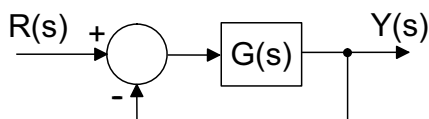
Primer 3.8. Prenosna funkcija odprtozančnega sistema je podana z:

$$G(s) = \frac{2}{s^2 + s + 2}$$

- (a) Določite odziv sistema na enotino stopnico in ga skicirajte!
 (b) Ali je odprtozančni sistem stabilen?
 (c) Če je, določite vrednost odziva v stacionarnem stanju!
 (d) Kdaj doseže odprtozančni odziv tolerančni pas dveh procentov ($\Delta y = 0.02y_\infty$) in kdaj petih ($\Delta y = 0.05y_\infty$)?
 (e) Kolikšna sta red in vrsta sistema?
 (f) Kakšna je narava sistema?

Sistem zapremo z enotino negativno povratno zanko tako, da dobimo sledilni način delovanja kot prikazuje slika 3.11.

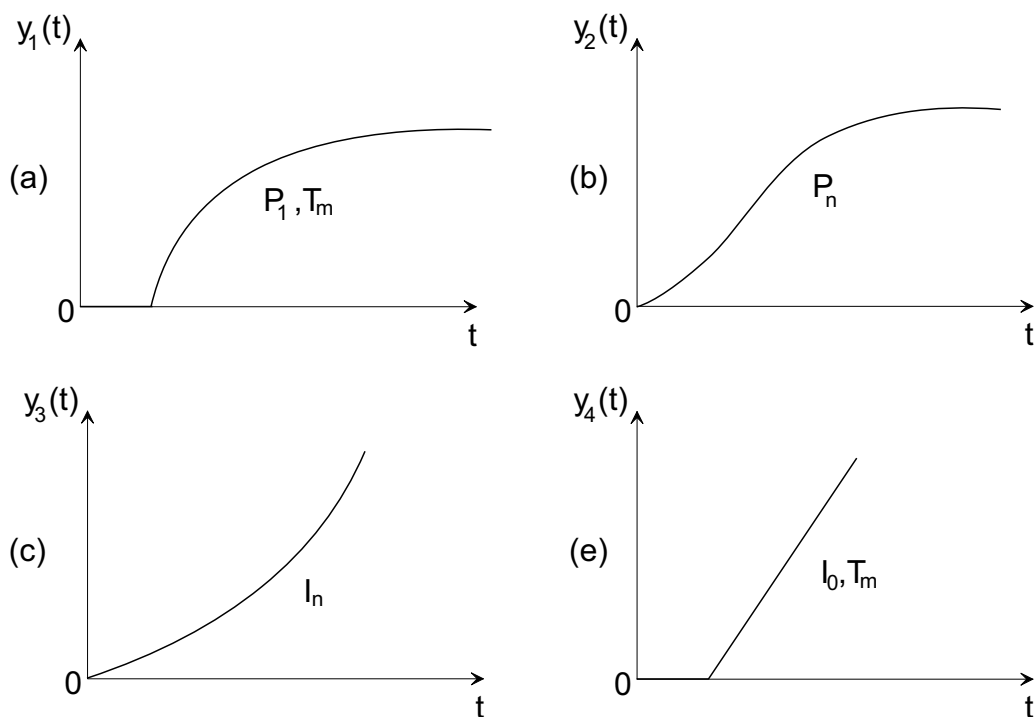
- (g) Ali je zaprtozančni sistem stabilen?



Slika 3.11: Bločni diagram iz primera 3.8

- (h) Če je, določite vrednost izhodnega signala in signala pogreška v stacionarnem stanju pri vzbujanju z enotno stopnico.
- (i) Ali smo z realizacijo enotine povratne zanke vplivali na red sistema?
- (j) Določite konstanti položajnega (pozicijskega) pogreška in hitrostnega pogreška.

Primer 3.9. Štiri različne sisteme smo vzbujali s stopničastim vhodnim signalom in pri tem posneli odzive, ki so prikazani na sliki 3.12. Za kakšne procese gre?

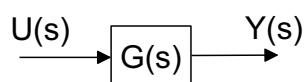


Slika 3.12: Odzivi iz primera 3.9

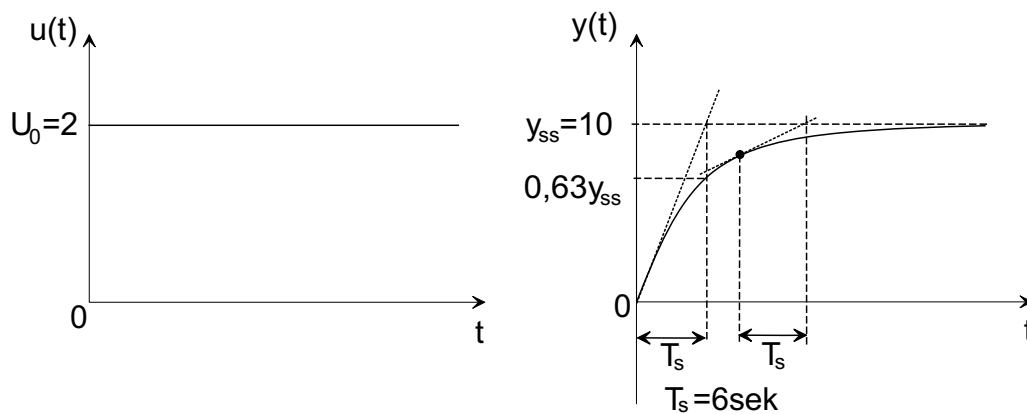
Rešitev

- (a) Proporcionalni proces prvega reda z mrtvim časom.
 (b) Proporcionalni proces višjega reda.
 (c) Integrirni proces z zakasnitvijo višjega reda.
 (d) Integrirni proces brez zakasnitve z mrtvim časom.

Primer 3.10. Δ Sistem na sliki 3.13 vzbujamo s stopničastim vhodnim signalom in opazujemo odziv sistema. Izmerili smo odvisnost signalov, ki je prikazana na sliki 3.14. Ocenite prenosno funkcijo sistema.



Slika 3.13: Bločni diagram iz primera 3.10



Slika 3.14: Odziv iz primera 3.10

Rešitev

P_1 -proces:

- (1) $\dot{y}(t=0) \neq 0$

(2) Odziv nima prevojnne točke.

(3) V poljubni točki narišemo tangento na krivuljo in pogledamo kje seče y_{ss} .
V primeru da so odseki vsi enaki, je velika verjetnost, da gre za P_1 proces.

Torej imamo sistem 1. reda, za katerega zapišemo prenosno funkcijo v obliki:

$$G(s) = \frac{K_p}{sT_s + 1}$$

T_s ... časovna konstanta

K_p ... ojačenje

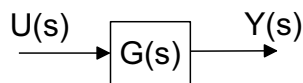
$$Y(s) = \frac{K_p}{sT_s + 1} \cdot \frac{U_0}{s}$$

$$y_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} sY(s) = K_p U_0 = 10 \implies K_p = \frac{y_{ss}}{U_0} = 5$$

T_s določimo iz grafa. Dobimo prenosno funkcijo procesa:

$$G(s) = \frac{5}{6s + 1}$$

Primer 3.11. Sistem na sliki 3.15 smo vzbujali s stopničastim vhodnim signalom amplitude 1 in pri tem posneli odziv, ki je prikazan na sliki 3.16. Ocenite prenosno funkcijo sistema.



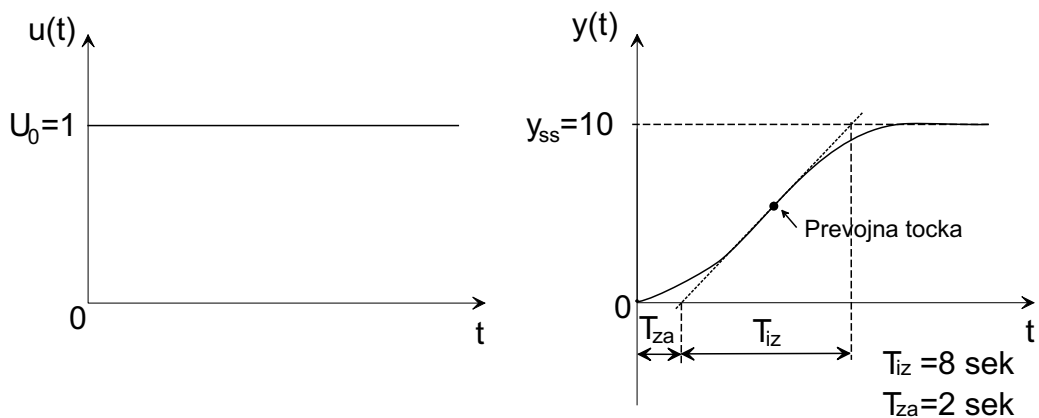
Slika 3.15: Bločni diagram iz primera 3.11

Rešitev

Predpostavimo obliko:

$$G(s) = \frac{K_s}{(sT_s + 1)} e^{-sT_d}$$

$$y_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} sY(s) = s \cdot \frac{K_s}{(sT_s + 1)} e^{-sT_d} \cdot \frac{U_0}{s} = K_s U_0 = 10 ; U_0 = 1 \implies K_s = 10$$



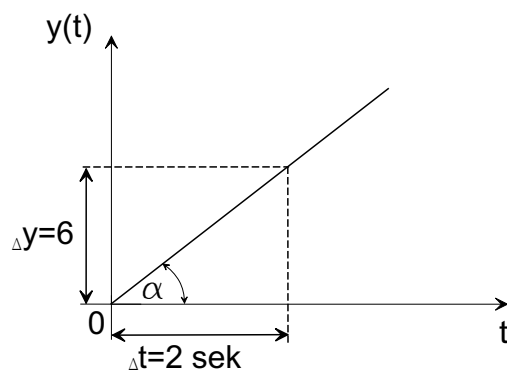
Slika 3.16: Odziv iz primera 3.11

$$T_s = T_{iz} = 8$$

$$T_d = T_{za} = 2$$

$$G(s) = \frac{10}{(2,5s + 1)} e^{-2s}$$

Primer 3.12. Sistem smo vzbujali s stopničastim vhodnim signalom amplitude 1 in pri tem posneli odziv, ki je prikazan na sliki 3.17. Ocenite prenosno funkcijo sistema.



Slika 3.17: Odziv iz primera 3.12

Rešitev

Proces je integrirnega značaja brez zakasnitve:

$$G(s) = \frac{K_s}{s}$$

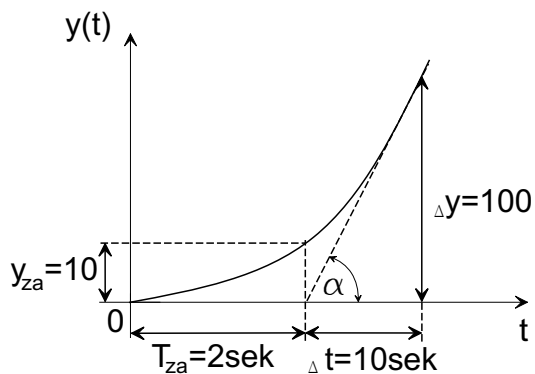
$$y(t) = K_s \int u(t) dt ; u(t) = U_0 \implies y(t) = K_s U_0 t$$

Iz slike 3.17 vidimo:

$$\Delta y = K_s U_0 \Delta t \implies \frac{\Delta y}{\Delta t} = K_s U_0 = \tan \alpha \implies K_s = \frac{\Delta y}{\Delta t U_0} = 3$$

$$G(s) = \frac{3}{s}$$

Primer 3.13. Sistem smo vzbujali s stopničastim vhodnim signalom amplitude 1 in pri tem posneli odziv, ki je prikazan na sliki 3.18. Ocenite prenosno funkcijo sistema.



Slika 3.18: Odziv iz primera 3.13

Rešitev

Sistem bomo modelirali s prenosno funkcijo oblike

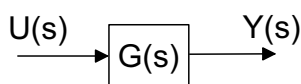
$$G(s) = \frac{K_s}{s(1 + sT_s)}$$

$$K_s = \frac{\Delta y}{\Delta t U_0} = 10$$

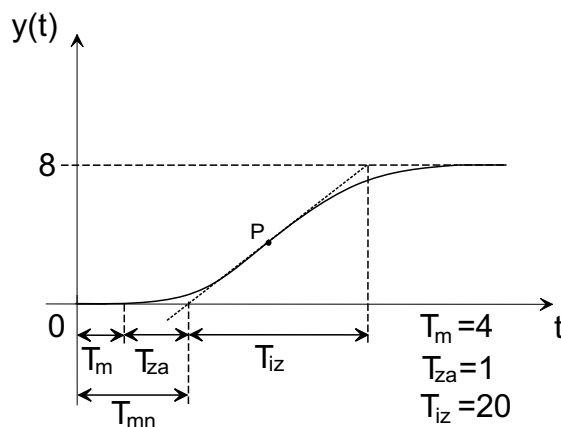
$$T_s = T_{za}$$

$$G(s) = \frac{10}{s(1+2s)}$$

Primer 3.14. \triangle Sistem na sliki 3.19 smo vzbujali s stopničastim vhodnim signalom amplitude 1 in pri tem posneli odziv, ki je prikazan na sliki 3.20.



Slika 3.19: Bločni diagram iz primera 3.14



Slika 3.20: Odziv iz primera 3.14

Ocenite prenosno funkcijo sistema! Ugotovite tudi, kakšna je vodljivost sistema ter ali gre za težko ali dobro vodljiv sistem.

Rešitev

Sistem bomo modelirali s prenosno funkcijo

$$G_1(s) = \frac{K_s}{(1+sT_s)} \cdot e^{-T_{mn}s}$$

Iz slike vidimo, da je $K_s = 8$.

$$T_s = T_{iz} = 20$$

$$T_{mn} = T_{za} + T_m = 5$$

$$G(s) = \frac{8}{(1 + 20s)} \cdot e^{-5s}$$

Vodljivost sistema zavisi predvsem od:

- (1) Časovne konstante sistema (T_s)
- (2) Časa izravnave (T_{iz})
- (3) Mrtvega časa (T_m) oziroma nadomestnega mrtvega časa (T_{mn})

$$\begin{aligned} \frac{T_{iz}}{T_{mn}} &\geq 10 \Rightarrow \text{dobro vodljiv proces} \\ \frac{T_{iz}}{T_{mn}} &= 6 \Rightarrow \text{srednje vodljiv proces} \\ \frac{T_{iz}}{T_{mn}} &\leq 3 \Rightarrow \text{slabo vodljiv proces} \end{aligned}$$

V našem primeru:

$$\frac{T_{iz}}{T_{mn}} = \frac{T_{iz}}{T_m + T_{za}} = \frac{20}{4 + 1} = 4$$

Proces je težko vodljiv.

Primer 3.15. Iz prenosne funkcije določite enosmerno ojačenje (K_s , K_i), časovne konstante (τ), lastne frekvence nedušenega nihanja (ω_n), faktorje dušenja (ζ), pole, ničle, red vrsto in tip sistema. Pole in ničle tudi narišite v s ravnini.

1. $G(s) = \frac{1}{s + 1}$

$$2. G(s) = \frac{2}{s^2 + s + 2}$$

$$3. G(s) = \frac{3}{s^2 + 2s + 1}$$

$$4. G(s) = \frac{5}{s^2 + 3s + 2}$$

$$5. G(s) = \frac{s + 1}{s^2 + 3s + 2}$$

$$6. G(s) = \frac{s - 3}{s^2 + 5s + 1}$$

$$7. G(s) = \frac{s}{s^2 + 3s + 3}$$

$$8. G(s) = \frac{1}{s(s^2 + 4s + 4)}$$

$$9. G(s) = \frac{s + 3}{s(s^2 + 2s + 2)}$$

$$10. G(s) = \frac{s + 3}{s^3(s^2 + 5s + 12)}$$

$$11. G(s) = \frac{s^2 + 3s + 3}{s^2(s^2 + 4s + 12)}$$

$$12. G(s) = \frac{s(s^2 + 3s + 3)}{s^2(s^2 + 4s + 12)}$$

$$13. G(s) = \frac{3}{s - 2}$$

$$14. G(s) = \frac{4}{s^2 - 3s + 1}$$

$$15. G(s) = \frac{12}{(s + 3)(s^2 + 5s + 7)}$$

$$16. G(s) = \frac{(s + 2)(s^2 + 3s + 10)}{(s^2 + 4s + 3)(s^2 + 2s)}$$

$$17. G(s) = \frac{s + 5}{s^2 + 5s + 2}$$

$$18. G(s) = \frac{s^2 + s + 2}{s(s^2 + 2s + 1)}$$

$$19. G(s) = \frac{6}{s^2 + 7s + 13}$$

$$20. G(s) = \frac{7}{8s^2 + 4s + 12}$$

Rešitev

1. *proporcionalni sistem 1. reda*

ničle: ni končnih ničel

pol: $s = -1$

časovna konstanta: $\tau = 1$

lastne frekvence: $\omega_d^1 = 0$ $f_d^1 = 0$

$\omega_n^1 = 0$ $f_n^1 = 0$

koeficient dušenja: $\zeta = 1$

enosmerno ojačenje: $K_s = 1$

2. *proporcionalni sistem 2. reda*

ničle: ni končnih ničel

pola: $s_{1,2} = -0,5 \pm 1,32j$

časovni konstanti: $\tau_{1,2} = 2$

lastne frekvence:

$\omega_d^{1,2} = 1,32$ $f_d^{1,2} = 0,21$

$\omega_n^{1,2} = 1,41$ $f_n^{1,2} = 0,22$

koeficienta dušenja: $\zeta_{1,2} = 0,35$

enosmerno ojačenje: $K_s = 1$

3. *proporcionalni sistem 2. reda*

ničle: ni končnih ničel

pola: $s_{1,2} = -1$

časovni konstanti: $\tau_{1,2} = 1$

lastne frekvence:

$\omega_d^{1,2} = 0$ $f_d^{1,2} = 0$

$\omega_n^{1,2} = 0$ $f_n^{1,2} = 0$

koeficienta dušenja: $\zeta_{1,2} = 1$

enosmerno ojačenje: $K_s = 3$

4. *proporcionalni sistem 2. reda*

ničle: ni končnih ničel

pola: $s_1 = -1$ $s_2 = -2$

časovni konstanti: $\tau_1 = 1$ $\tau_2 = 0,5$

lastne frekvence:

$$\omega_d^{1,2} = 0 \quad f_d^{1,2} = 0$$

$$\omega_n^{1,2} = 0 \quad f_n^{1,2} = 0$$

koefficienta dušenja: $\zeta_{1,2} = 1$

enosmerno ojačenje: $K_s = 2,5$

5. *proporcionalni sistem 1. reda*

ničle: ni končnih ničel

pol: $s = -2$

časovna konstanta: $\tau = 0,5$

lastne frekvence:

$$\omega_d^1 = 0 \quad f_d^1 = 0$$

$$\omega_n^1 = 0 \quad f_n^1 = 0$$

koefficient dušenja: $\zeta = 1$

enosmerno ojačenje: $K_s = 0,5$

6. *proporcionalni sistem 2. reda*

ničla: $s = 3$

pola: $s_1 = -4,79 \quad s_2 = -0,2$

časovni konstanti: $\tau_1 = 0,21 \quad \tau_2 = 5$

lastne frekvence:

$$\omega_d^{1,2} = 0 \quad f_d^{1,2} = 0$$

$$\omega_n^{1,2} = 0 \quad f_n^{1,2} = 0$$

koefficienta dušenja: $\zeta_{1,2} = 1$

enosmerno ojačenje: $K_s = 3$

7. *diferencirni sistem 1. vrste, 2. reda*

ničla: $s = 0$

pola: $s_{1,2} = -1,5 \pm 0,87j$

časovni konstanti: $\tau_{1,2} = 0,67$

lastne frekvence:

$$\omega_d^{1,2} = 0,87 \quad f_d^{1,2} = 0,14$$

$$\omega_n^{1,2} = 1,76 \quad f_n^{1,2} = 0,28$$

koefficienta dušenja: $\zeta_{1,2} = 0,87$

enosmerno ojačenje: $K_s = 0$

8. *integrirni sistem 1. vrste, 3. reda*

ničle: ni končnih ničel

poli: $s_1 = 0 \quad s_{2,3} = -2$

časovne konstante: $\tau_1 = \infty, \tau_{2,3} = 0,5$

lastne frekvence:

$$\omega_d^{1,2,3} = 0 \quad f_d^{1,2,3} = 0$$

$$\omega_n^{1,2,3} = 0 \quad f_n^{1,2,3} = 0$$

koeficienti dušenja: $\zeta_1 = 0, \zeta_{2,3} = 1$

enosmerno ojačenje: $K_s = \infty$

integrirno ojačenje: $K_i = 1,5$

9. integrirni sistem 1. vrste, 3. reda

ničla: $s = -3$

poli: $s_1 = 0 \quad s_{2,3} = -1 \pm j$

časovne konstante: $\tau_1 = \infty, \tau_{2,3} = 1$

lastne frekvence:

$$\omega_d^1 = 0 \quad f_d^1 = 0$$

$$\omega_n^1 = 0 \quad f_n^1 = 0$$

$$\omega_d^{2,3} = 1 \quad f_d^{2,3} = 0,16$$

$$\omega_n^{2,3} = 1,42 \quad f_n^{2,3} = 0,23$$

koeficienti dušenja: $\zeta_1 = 1, \zeta_{2,3} = 0,71$

enosmerno ojačenje: $K_s = \infty$

integrirno ojačenje: $K_i = 1,5$

10. integrirni sistem 3. vrste 5. reda

ničla: $s = -3$

poli: $s_{1,2,3} = 0 \quad s_{4,5} = -2,5 \pm 2,4j$

časovne konstante: $\tau_{1,2,3} = \infty, \tau_{4,5} = 0,4$

lastne frekvence:

$$\omega_d^{1,2,3} = 0 \quad f_d^{1,2,3} = 0$$

$$\omega_n^{1,2,3} = 0 \quad f_n^{1,2,3} = 0$$

$$\omega_d^{4,5} = 2,4 \quad f_d^{4,5} = 0,38$$

$$\omega_n^{4,5} = 3,46 \quad f_n^{4,5} = 0,55$$

koeficienti dušenja: $\zeta_{1,2,3} = 1, \zeta_{4,5} = 0,72$

enosmerno ojačenje: $K_s = \infty$

integrirno ojačenje: $K_i = \infty$

11. integrirni sistem 2. vrste 4. reda

ničli: $s_{1,2} = -1,5 \pm 0,87j$

poli: $s_{3,4} = -2 \pm 2,83j$

časovne konstante: $\tau_{1,2} = \infty, \tau_{3,4} = 0,5$

lastne frekvence:

$$\omega_d^{1,2} = 0 \quad f_d^{1,2} = 0$$

$$\begin{aligned}\omega_n^{1,2} &= 0 \quad f_n^{1,2} = 0 \\ \omega_d^{3,4} &= 2,83 \quad f_d^{3,4} = 0,45 \\ \omega_n^{3,4} &= 3,47 \quad f_n^{3,4} = 0,55 \\ \text{koeficienti dušenja: } &\zeta_{1,2} = 1, \quad \zeta_{3,4} = 0,58 \\ \text{enosmerno ojačenje: } &K_s = \infty \\ \text{integrirno ojačenje: } &K_i = \infty\end{aligned}$$

12. integrirni sistem 1. vrste 3. reda

$$\begin{aligned}\text{ničli: } &s_{1,2} = -1,5 \pm 0,87j \\ \text{poli: } &s_1 = 0 \quad s_{2,3} = -2 \pm 2,83j \\ \text{časovne konstante: } &\tau_1 = \infty, \quad \tau_{2,3} = 0,5 \\ \text{lastne frekvence:} \\ \omega_d^1 &= 0 \quad f_d^1 = 0 \\ \omega_n^1 &= 0 \quad f_n^1 = 0 \\ \omega_d^{2,3} &= 2,83 \quad f_d^{2,3} = 0,45 \\ \omega_n^{2,3} &= 3,47 \quad f_n^{2,3} = 0,55 \\ \text{koeficienti dušenja: } &\zeta_1 = 1, \quad \zeta_{2,3} = 0,58 \\ \text{enosmerno ojačenje: } &K_s = \infty \\ \text{integrirno ojačenje: } &K_i = 0,25\end{aligned}$$

13. nestabilni proporcionalni sistem 1. reda

$$\begin{aligned}\text{ničle: } &\text{ni končnih ničel} \\ \text{pol: } &s = 2 \\ \text{časovna konstanta: } &\tau = -0,5 \\ \text{lastne frekvence:} \\ \omega_d &= 0 \quad f_d = 0 \\ \omega_n &= 0 \quad f_n = 0 \\ \text{koeficient dušenja: } &\zeta = -1 \\ \text{enosmerno ojačanje: } &K_s = \infty\end{aligned}$$

14. nestabilni proporcionalni sistem 2. reda

$$\begin{aligned}\text{ničle: } &\text{ni končnih ničel} \\ \text{pola: } &s_1 = 2,62 \quad s_2 = 0,38 \\ \text{časovne konstante: } &\tau_1 = -0,38 \quad \tau_2 = -2,63 \\ \text{lastne frekvence:} \\ \omega_d^{1,2} &= 0 \quad f_d^{1,2} = 0 \\ \omega_n^{1,2} &= 0 \quad f_n^{1,2} = 0 \\ \text{koeficienta dušenja: } &\zeta_{1,2} = -1 \\ \text{enosmerno ojačenje: } &K_s = \infty\end{aligned}$$

15. *proporcionalni sistem 3. reda*

ničle: ni končnih ničel

poli: $s_1 = -3$ $s_{2,3} = -2,5 \pm 0,87j$

časovne konstante: $\tau_1 = 0,33$ $\tau_{2,3} = 0,4$

lastne frekvence:

$$\omega_d^1 = 0 \quad f_d^1 = 0$$

$$\omega_n^1 = 0 \quad f_n^1 = 0$$

$$\omega_d^{2,3} = 0,87 \quad f_d^{2,3} = 0,14$$

$$\omega_n^{2,3} = 2,55 \quad f_n^{2,3} = 0,41$$

koeficient dušenja: $\zeta_1 = 1$, $\zeta_{2,3} = 0,94$

enosmerno ojačenje: $K_s = 1,71$

16. *integrirni sistem 1. vrste 3. reda*

ničli: $s_{1,2} = -1,5 \pm 2,78j$

poli: $s_1 = 0$ $s_2 = -3$ $s_3 = -1$

časovne konstante: $\tau_1 = \infty$ $\tau_2 = 0,33$ $\tau_3 = 1$

lastne frekvence:

$$\omega_d^{1,2,3} = 0 \quad f_d^{1,2,3} = 0$$

$$\omega_n^{1,2,3} = 0 \quad f_n^{1,2,3} = 0$$

koeficienti dušenja: $\zeta_{1,2,3} = 1$

enosmerno ojačenje: $K_s = \infty$

integrirno ojačenje: $K_i = 3,33$

17. *proporcionalni sistem 2. reda*

ničla: $s = -5$

pola: $s_1 = -4,56$ $s_2 = 0,44$

časovni konstanti: $\tau_1 = 0,22$ $\tau_2 = 2,27$

lastne frekvence:

$$\omega_d^{1,2} = 0 \quad f_d^{1,2} = 0$$

$$\omega_n^{1,2} = 0 \quad f_n^{1,2} = 0$$

koeficienta dušenja: $\zeta_{1,2} = 1$

enosmerno ojačenje: $K_s = 2,5$

18. *integrirni sistem 1. vrste 3. reda*

ničli: $s_{1,2} = -0,5 \pm 1,32j$

poli: $s_1 = 0$ $s_{2,3} = -1$

časovne konstante: $\tau_1 = \infty$ $\tau_{2,3} = 1$

lastne frekvence:

$$\omega_d^{1,2,3} = 0 \quad f_d^{1,2,3} = 0$$

$$\omega_n^{1,2,3} = 0 \quad f_n^{1,2,3} = 0$$

koeficienti dušenja: $\zeta_1 = \infty$ $\zeta_{2,3} = 1$

proporcionalno ojačenje: $K_s = \infty$ integrirno ojačenje: $K_i = 2$

19. proporcionalni sistem 2. reda

ničle: ni končnih ničel

pola: $s_{1,2} = -3,5 \pm 0,87j$

časovni konstanti: $\tau_{1,2} = 0,29$

lastne frekvence:

$\omega_d^{1,2} = 0,87$ $f_d^{1,2} = 0,14$

$\omega_n^{1,2} = 3,58$ $f_n^{1,2} = 0,57$

koeficienta dušenja: $\zeta_{1,2} = 0,97$

enosmerno ojačenje: $K_s = 0,46$

20. proporcionalni sistem 2. reda

ničle: ni končnih ničel

pola: $s_{1,2} = -0,25 \pm 1,2j$

časovni konstanti: $\tau_{1,2} = 4$

lastne frekvence:

$\omega_d^{1,2} = 1,2$ $f_d^{1,2} = 0,19$

$\omega_n^{1,2} = 1,22$ $f_n^{1,2} = 0,19$

koeficienta dušenja: $\zeta_{1,2} = 0,20$

enosmerno ojačenje: $K_s = 0,58$

3.3 Stabilnost regulacijskih sistemov

Pri načrtovanju regulacijskih sistemov je najpomembnejše zagotavljanje njegovega stabilnega delovanja. Zato je analiza stabilnosti najpomembnejši del načrtovanja regulacijskega sistema.

Stabilnost definiramo v našem primeru v smislu BIBO (*bounded-input bounded-output*) stabilnosti. To pomeni, da je izhodni signal sistema omejen, če sistem vzbujamo s katerimkoli omejenim vhodnim signalom. To mora veljati za vsak časovni trenutek. Za linearne časovno-nespremenljive sisteme to pomeni, da morajo poli zaprtizančnega sistema ležati na levi strani s-ravnine. Pri analizi stabilnosti moramo ugotoviti, če kateri od polov leži na desni strani s-ravnine. Spomnimo na to, da je sistem *mejno stabilen*, če ima pole na imaginarni os in ostale v levi polovici s-ravnine.

Algebrajska metoda določevanja stabilnosti, ki jo bomo obravnavali v tem poglavju se imenuje Routh-Hurwitzov stabilnostni kriterij. S pomočjo tega kri-

terija lahko določimo število polov, ki ležijo na desni strani s -ravnine. Ne moremo pa določiti natančne vrednosti polov. Stabilnost linearnih-časovno invariantnih sistemov lahko določimo tudi z uporabo Nyquistovega ali diagrama lege korenov.

3.3.1 Routh-Hurwitzov stabilnostni kriterij

Routh-Hurwitzov stabilnostni kriterij (krajše Routhov stabilnostni kriterij) bomo uporabili za ugotavljanje stabilnosti polinoma, ki ga zapišemo kot

$$P(s) = p_n s^n + p_{n-1} s^{n-1} + \dots + p_1 s + p_0 \quad (3.2)$$

V nadaljevanju bomo predpostavili, da velja $p_0 \neq 0$ in zapisali Routhovo tabelo

$$\begin{array}{c|cccc} s^n & p_n & p_{n-2} & p_{n-4} & \dots \\ s^{n-1} & p_{n-1} & p_{n-3} & p_{n-5} & \dots \\ s^{n-2} & b_1 & b_2 & b_3 & \dots \\ s^{n-3} & c_1 & c_2 & c_3 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ s^2 & k_1 & k_2 & & \\ s^1 & l_1 & & & \\ s^0 & m_1 & & & \end{array} \quad (3.3)$$

Vrsta z elementi b se izračuna iz dveh vrstic nad njo na naslednji način:

$$b_1 = -\frac{1}{p_{n-1}} \begin{vmatrix} p_n & p_{n-2} \\ p_{n-1} & p_{n-3} \end{vmatrix} \quad (3.4)$$

$$b_2 = -\frac{1}{p_{n-1}} \begin{vmatrix} p_n & p_{n-4} \\ p_{n-1} & p_{n-5} \end{vmatrix} \quad (3.5)$$

vrsta c pa spet

$$c_1 = -\frac{1}{b_1} \begin{vmatrix} p_{n-1} & p_{n-3} \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \quad (3.6)$$

$$c_2 = -\frac{1}{b_1} \begin{vmatrix} p_{n-1} & p_{n-5} \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \quad (3.7)$$

itd.

Routh-Hurwitzov stabilnostni kriterij se tako glasi: *Če formiramo Routhovo tabelo na način kot smo to opisali zgoraj, potem je število korenov polinoma $P(s)$ na desni strani enako številu sprememb predznaka v prvem stolpcu Routhove tabele.*

Primer 3.16. \triangle Karakteristična enačba sistema ima obliko:

$$s^3 + 4s^2 + 100s + 500 = 0$$

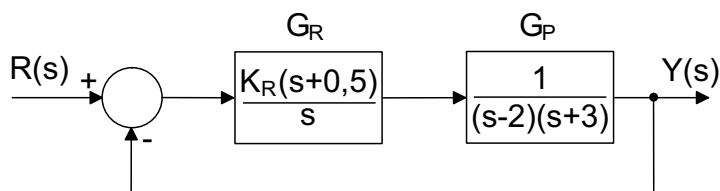
S pomočjo Routhovega kriterija preverite ali je sistem stabilen.

Rešitev

s^3	1	100
s^2	4	500
s^1	-25	0
s^0	500	0

Ker se je predznak v prvem stolpcu Routhove tabele dvakrat menjal ($4 \rightarrow -25$) in ($-25 \rightarrow 500$), imamo dva nestabilna pola. Sistem je torej nestabilen.

Primer 3.17. \triangle Ugotovite za kakšne vrednosti K_R je odziv zaprtozančnega sistema $Y(s)$ omejen (stabilen), če sistem vzbujamo z enotino stopnico? Sistem je podan z bločnim diagramom na sliki 3.21.



Slika 3.21: Bločni diagram iz primera 3.17

Rešitev

Karakteristični polinom dobimo na naslednji način:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G_R \cdot G_P}{1 + G_R \cdot G_P} = \frac{K_R(s + \frac{1}{2})}{s(s-2)(s+3) + K_R(s + \frac{1}{2})} = \frac{Q(s)}{P(s)}$$

$$\text{kar.pol.} = P(s) = s^3 + s^2 + (K_R - 6)s + \frac{1}{2}K_R$$

s^3	1	$K_R - 6$
s^2	1	$\frac{1}{2}K_R$
s^1	$\frac{1}{2}K_R - 6$	0
s^0	$2K_R$	0

1. pogoj:

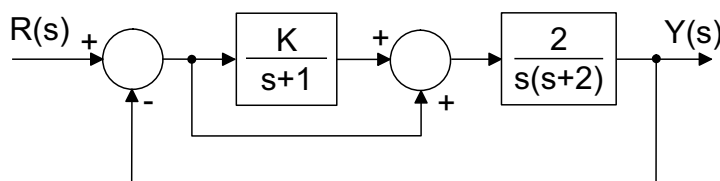
$$\frac{1}{2}K_R - 6 > 0 \Rightarrow K_R > 12$$

2. pogoj:

$$2K_R > 0 \Rightarrow K_R > 0$$

Iz zgornjih dveh pogojev vidimo, da mora biti $K_R > 12$.

Primer 3.18. S pomočjo Routhovega kriterija, določite ojačenje K tako, da bo zaprtozančni sistem na sliki 3.22 stabilen.



Slika 3.22: Bločni diagram iz primera 3.18

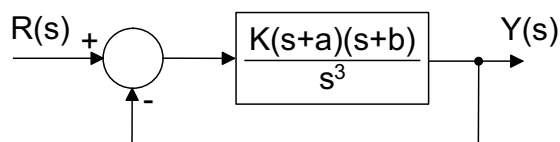
Rešitev

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{2s + 2(1 + K)}{s^3 + 3s^2 + 4s + 2(1 + K)}$$

s^3	1	4
s^2	3	$2(1 + K)$
s^1	$\frac{10-2K}{3}$	0
s^0	$2(1 + K)$	0

Sistem je stabilen, če je ojačenje v območju: $-1 < K < 5$.

Primer 3.19. S pomočjo Routhovega kriterija določite ojačenje K tako, da bo zaprtizančni sistem na sliki 3.23 stabilen ($a, b > 0$).



Slika 3.23: Bločni diagram iz primera 3.19

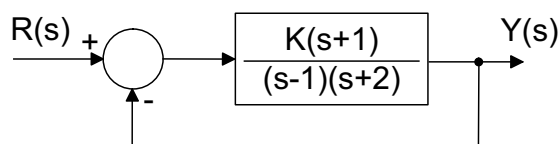
Rešitev

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{K(s+a)(s+b)}{s^3 + K(s+a)(s+b)}$$

s^3	1	$K(a+b)$
s^2	K	Kab
s^1	$K(a+b) - ab$	0
s^0	Kab	0

Sistem je stabilen, če je ojačenje $K > \frac{ab}{a+b}$.

Primer 3.20. S pomočjo Routhovega kriterija določite ojačenje K tako, da bo zaprtizančni sistem na sliki 3.24 stabilen.



Slika 3.24: Bločni diagram iz primera 3.20

Rešitev

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{K(s+1)}{s^2 + s(K+1) + (K-2)}$$

s^2	1	$K-2$
s^1	$K+1$	0
s^0	$K-2$	0

Sistem je stabilen, če je ojačenje $K > 2$.

Primer 3.21. Za odprtozančni sistem s prenosno funkcijo $G_P(s) = \frac{2}{s^3+4s^2+5s+2}$ določite, s pomočjo Routhovega kriterija, proporcionalni regulator $G_C(s) = K$ (v klasičnem negativno-povratnozančnem sistemu), ki bo zagotavljal najmanjši stacionarni pogrešek pri odzivu na stopničast signal reference.

Rešitev

$$e_{ss} = \frac{1}{1 + K_P}$$

kjer je $K_P = \lim_{s \rightarrow 0} G_C(s)G_P(s) = K$. Pomeni, da moramo izbrati K čim večji, da s tem zagotovimo najmanjši možni pogrešek.

s^3	1	5
s^2	4	$2 + 2K$
s^1	$\frac{18-2K}{4}$	
s^0	$2 + 2K$	

Iz zadnje vrstice sledi pogoj stabilnosti za $K > -1$, iz predzadnje pa $K < 9$. To pomeni, da moramo za zagotavljanje stabilnosti izbrati $K < 9$.

Primer 3.22. Za odprtozančni sistem s prenosno funkcijo $G_P(s) = \frac{2}{s^3+4s^2+5s+2}$ določite, s pomočjo Routhovega kriterija, PI regulator $G_C(s) = K_P + \frac{K_I}{s}$ (v klasičnem negativno-povratnozančnem sistemu), ki bo zagotavljal stabilno delovanje zaprtozančnega sistema.

Rešitev

Karakteristična enačba je enaka

$$1 + G_C(s)G_P(s) = s^4 + 4s^3 + 5s^2 + (2 + 2K_P)s + 2K_I = 0$$

ali

$$Q(s) = s^4 + 4s^3 + 5s^2 + (2 + 2K_P)s + 2K_I = 0.$$

Routhova tabela je potem

s^4	1	5	$2K_I$
s^3	4	$2 + 2K_P$	
s^2	$\frac{18-2K_P}{4}$	$2K_I$	
s^1	c_1		
s^0	$2K_I$		

in je

$$c_1 = \frac{-4}{18 - 2K_P} \left(8K_I - \frac{(2 + 2K_P)(18 - 2K_P)}{4} \right)$$

Iz vrstice s^2 sledi, da mora veljati $K_P < 9$, da bo sistem stabilen. Hkrati mora veljati $c_1 > 0$ in $K_I > 0$. Iz pogoja za c_1 lahko pri določeni izbiri K_P določimo tudi potrebni K_I , da bo zaprtozančni sistem s PI regulatorjem stabilen. Torej, sistem bo stabilen, če velja: $K_P < 9$, $K_I > 0$ in $9 + 8K_P - K_P^2 > 8K_I$.

Primer 3.23. Z uporabo Routh-Hurwitzovega stabilnostnega kriterija določite za naslednje karakteristične enačbe število korenov na levi strani s -ravnine, desni in na imaginarni osi.

1. $s^4 + s^3 + 5s^2 + 2s + 4 = 0$
2. $s^4 + 2s^2 + 1 = 0$
3. $s^5 + 2s^4 + 5s^3 + 4s^2 + 6s = 0$
4. $s^4 + s^3 + s + 0.5 = 0$
5. $s^4 + s^3 + 5s^2 + 5s + 2 = 0$
6. $s^4 + 2s^3 + 3s^2 + 2s + 5 = 0$

Rešitev

1. 4 koreni v l.p.r. (levi polravnini s)
2. 4 koreni na imaginarni osi
3. 2 korena v l.p.r. , 3 na imaginarni osi
4. 2 korena v l.p.r. in 2 v d.p.r.
5. 2 korena v l.p.r. in 2 v d.p.r.
6. 2 korena v l.p.r. in 2 v d.p.r.

Primer 3.24. Z uporabo Routh-Hurwitzovega stabilnostnega kriterija določite pogoj za parameter α tako, da bodo vsi koreni naslednjih karakterističnih enačb na levi strani s -ravnine.

1. $s^3 + s^2 + s + \alpha = 0$
2. $s^3 + s^2 + \alpha s + 1 = 0$
3. $s^3 + \alpha s^2 + s + 1 = 0$
4. $\alpha s^3 + s^2 + s + 1 = 0$

Rešitev

1. $0 < \alpha < 1$
2. $\alpha > 1$
3. $\alpha > 1$
4. $0 < \alpha < 1$

Primer 3.25. Za odprtozančni sistem s prenosno funkcijo $G_P(s) = \frac{K}{s^3 + 5s^2 + 2s - 8}$ določite K tako, da bo zaprtozančni sistem z enotino povratno zanko mejno stabilen. S pomočjo Routh-Hurwitzovega kriterija določite tudi lego polov.

Rešitev

1. $K = 8$, poli so: $s = 0, \frac{-5+\sqrt{17}}{2}, \frac{-5-\sqrt{17}}{2}$

2. $K = 18$, poli so: $s = -5, -j\sqrt{2}, +j\sqrt{2}$

4. Načrtovanje regulacijskih sistemov

V tem poglavju si bomo ogledali nekaj enostavnih postopkov načrtovanja sistemov vodenja. Predstavljeni bodo: postopki, ki temeljijo na ocenjevanju parametrov procesa pri odzivu na stopničast signal vzbujanja, postopek nihajnega preizkusa, Graham-Lathropova metoda optimiranja zaprtozančnega odziva glede na ITAE cenilko in metoda kompenzacijskega regulatorja.

4.1 Naloge

Primer 4.1. \triangle Ziegler in Nichols sta podala eksperimentalno dobljeno tabelo za nastavljanje PID regulatorjev, ki jo uporabljamo pri sistemih s proporcionalnim značajem višjega reda. Na osnovi ocene časa zakasnitve in izravnave ter ojačanja K_s , lahko iz tabele izračunamo parametre regulatorja. Parametre procesa ocenimo iz odziva na enotino stopnico, ki je na sliki 4.1.

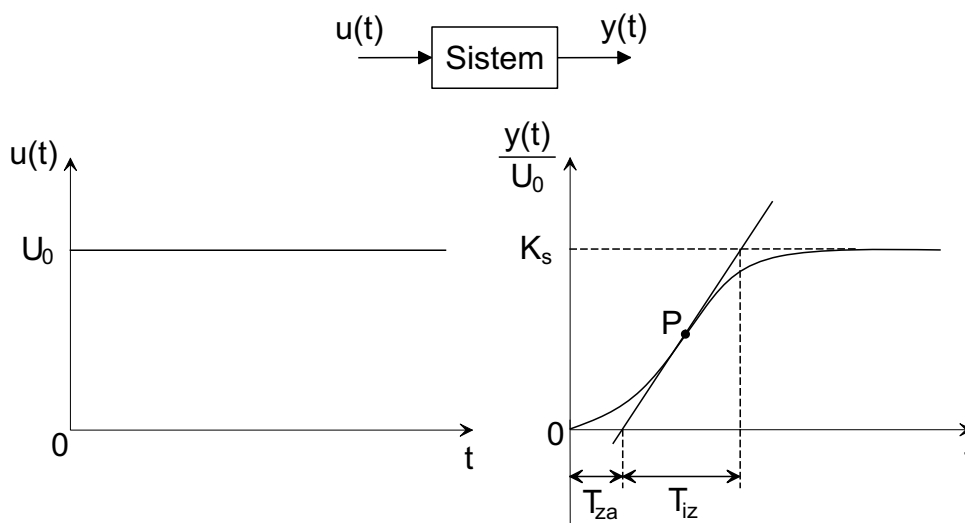
	K_p	T_i	T_d
P	$\frac{T_{iz}}{K_s T_{za}}$	/	/
PI	$0,9 \frac{T_{iz}}{K_s T_{za}}$	$3,3 T_{za}$	/
PID	$1,2 \frac{T_{iz}}{K_s T_{za}}$	$2 T_{za}$	$0,5 T_{za}$

Če modela procesa ne poznamo, izvedemo eksperiment na procesu, če pa je model poznan, lahko iskane parametre določimo tudi analitično.

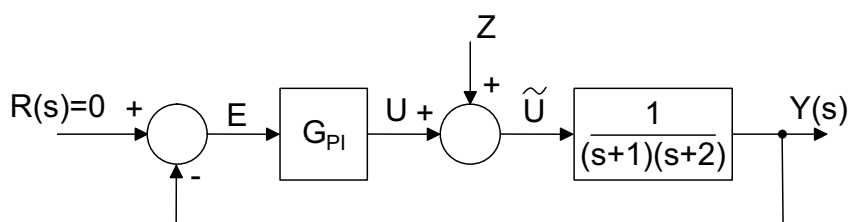
Zaprtozančni sistem podaja bločni diagram na sliki 4.2.

S pomočjo tabele določite parametre PI-regulatorja!

Kolikšno ojačanje P -regulatorja bi bilo potrebno, da bi sistem pri motnji na vhodu v obliki enotine stopnice, ne imel pogreška v stacionarnem stanju, ki bi bil večji od 5% stacionarne vrednosti odprtozančnega odziva sistema na enotino stopnico? Primerjajte rezultat s tistim, ki ga dobite s pomočjo tabele.



Slika 4.1: Odziv sistema - primer 4.1



Slika 4.2: Bločni diagram iz primera 4.1

Rešitev

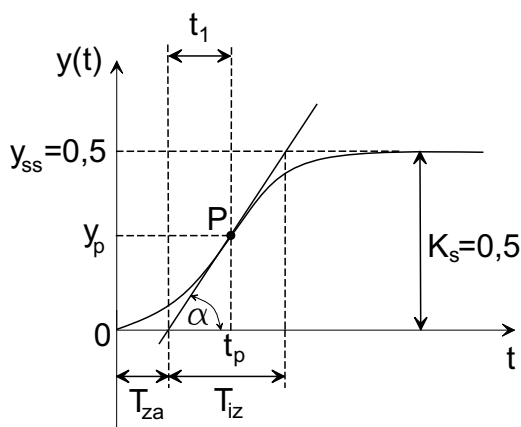
$$Y(s) = U(s)G(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+2)} = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{s+1} + \frac{K_3}{s+2}$$

$$K_1 = 0,5 \quad ; \quad K_2 = -1 \quad ; \quad K_3 = 0,5$$

$$Y(s) = \frac{1}{2s} - \frac{1}{s+1} + \frac{1}{2(s+2)}$$

$$y(t) = \frac{1}{2} - e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-2t}$$

Odziv sistema je prikazan na sliki 4.3, iz katere lahko izračunamo želene parametre.



Slika 4.3: Odziv iz primera 4.1

Prevojno točko (P) določimo iz relacije:

$$\left. \frac{dy(t)}{dt} \right|_{t=t_p} = e^{-t} - e^{-2t}$$

$$\left. \frac{d^2y(t)}{dt^2} \right|_{t=t_p} = -e^{-t} + 2e^{-2t} = 0 \Rightarrow t_p = 0,693$$

$$y_p = y(t)|_{t=t_p} = \frac{1}{2} - e^{-t_p} + \frac{1}{2}e^{-2t_p} = 0,125$$

Naklon tangente v prevojni točki P :

$$\tan \alpha = \left. \frac{dy(t)}{dt} \right|_{t=t_p} = e^{-t_p} - e^{-2t_p} = 0,25 \Rightarrow \alpha = 14^\circ$$

Iz slike 4.3 tudi vidimo:

$$\frac{y_{ss}}{T_{iz}} = \tan \alpha \Rightarrow T_{iz} = \frac{y_{ss}}{\tan \alpha} = 2$$

Iz slike 4.3 nadalje vidimo:

$$\tan \alpha = \frac{y_p}{t_1} \Rightarrow t_1 = \frac{y_p}{\tan \alpha}$$

$$t_p - t_1 = T_{za} = t_p - \frac{y_p}{\tan \alpha} = 0,193 \Rightarrow T_{za} = 0,193$$

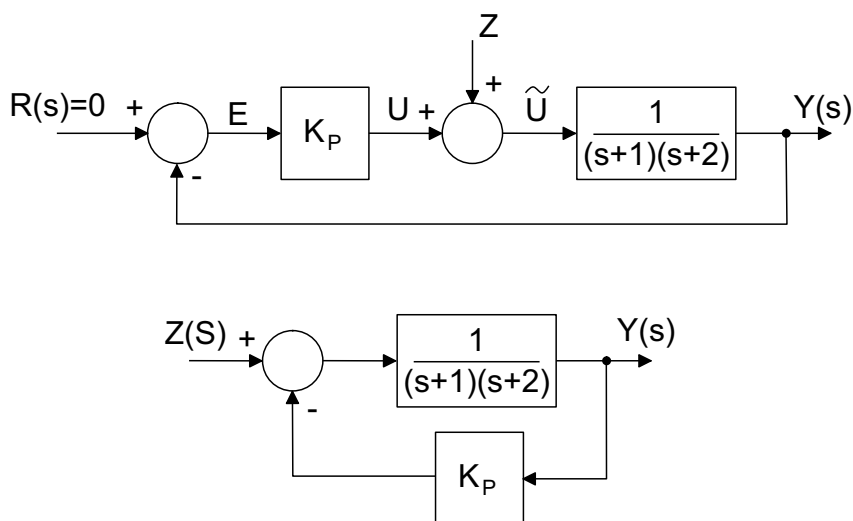
Ob uporabi tabele tako dobimo:

$$K_p = 0,9 \frac{T_{iz}}{K_s T_{za}} = 18,653$$

$$T_i = 3, 3T_{za} = 0,637$$

$$G_{PI}(s) = 18,53 \left(1 + \frac{1}{0,637s} \right)$$

Bločni diagram z uporabo P-regulatorja je na sliki 4.4:



Slika 4.4: Bločni diagram iz primera 4.1

$$\frac{Y}{Z} = \frac{G}{1 + K_p G} = \frac{1}{s^2 + 3s + 2 + K_p}$$

$$Y(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s^2 + 3s + 2 + K_p}$$

$$y_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} sy(s) = \frac{1}{2 + K_p}$$

Odrtozančni odziv ima v stacionarnem stanju (pri odzivu na enotino stopnico) vrednost $y_{os2} = 0,5$. Želimo pa si ($R = 0$), da pogrešek sistema na sliki 4.4 v stacionarnem stanju pri nastopu enotine motnje ne preseže vrednosti $5\% \cdot y_{oss} = 0,025$, oziroma:

$$\frac{1}{2 + K_p} \leq 0,025 \implies K_p \geq 38$$

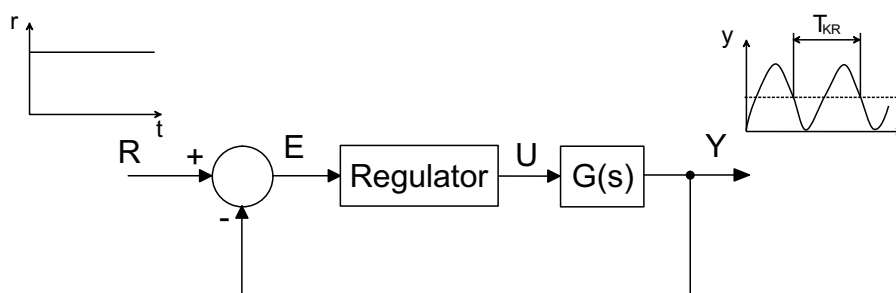
Če uporabimo tabele, dobimo naslednje vrednosti:

$$K_p = \frac{T_{iz}}{K_s T_{za}} = 20,725$$

V tem primeru bo pogrešek v ustaljenem stanju:

$$\frac{1}{2 + K_p} = 0,044 = 8,8\% \cdot y_{oss}$$

Primer 4.2. \triangle Z metodo nihajnega preizkusa določite parametre PID-regulatorja. Bločni diagram sistema je prikazan na sliki 4.5.



Slika 4.5: Bločni diagram iz primera 4.2

Prenosna funkcija sistema je dana z:

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)(s+3)(s+4)}$$

Z uporabo nihajnega preizkusa določite parametre regulatorja, če želimo sistem regulirati z:

- (a) P-regulatorjem
- (b) PI-regulatorjem
- (c) PID-regulatorjem

Rešitev

Ziegler in Nichols sta predlagala naslednjo nastavitvev parametrov:

	K_p	T_i	T_d
P	$0,5 K_{kr}$	/	/
PI	$0,45 K_{kr}$	$0,83 T_{kr}$	/
PID	$0,6 K_{kr}$	$0,5 T_{kr}$	$0,125 T_{kr}$

Če modela sistema ne poznamo, moramo izvesti poskus na realnem procesu, če pa je model sistema poznan, lahko potrebna parametra K_{kr} in T_{kr} določimo tudi analitično. Metoda je uporabna za sisteme, ki jih lahko zanihamo.

Prenosna funkcija zaprtozančnega sistema pri vodenju s P -regulatorjem je naslednja:

$$\frac{Y}{R} = \frac{K_p G(s)}{1 + K_p G(s)} = \frac{K_p}{s^3 + 8s^2 + 19s + 12 + K_p}$$

Karakteristična enačba zaprtozančnega sistema se glasi:

$$s^3 + 8s^2 + 19s + 12 + K_p = 0$$

s^3	1	19
s^2	8	$12 + K_p$
s^1	$19 - \frac{12+K_p}{8}$	0
s^0	$12 + K_p$	0

Sistem bo stabilen takrat, ko bodo vse vrednosti v prvem stolpcu Routhove tabele istega predznaka (pri kritičnem ojačanju pa je vrednost enaka 0):

$$12 + K_p = 0 \Rightarrow K_p = -12$$

$$19 - \frac{12 + K_p}{8} = 0 \Rightarrow K_p = 140$$

Za kritično ojačanje ne izbiramo negativnih ojačanj, zato je $K_{kr} = 140$.

Če želimo določiti lego polov pri kritičnem ojačanju, uporabimo pomožno enačbo iz vrstice pri s^2 :

$$8s^2 + 12 + K_{kr} = 0 \Rightarrow s_{1,2} = \pm j\sqrt{19} \Rightarrow \omega_{kr} = \sqrt{19}$$

Pri $K_p = K_{kr}$ sistem niha s frekvenco

$$\omega_{kr} = 2\pi f_{kr} = \frac{2\pi}{T_{kr}} \quad \text{in} \quad T_{kr} = \frac{2\pi}{\omega_{kr}} = 1,44$$

T_{kr} je perioda nihanja.

(a) P -regulator:

$$K_{p1} = 0,5K_{kr} = 70$$

Vrednost pogreška v ustaljenem stanju je:

$$E = R - Y = R - G \cdot K_{p1} \cdot E$$

Če zgornjo enačbo malo preoblikujemo, dobimo:

$$E = \frac{1}{1 + G K_{p1}} R = \frac{s^3 + 8s^2 + 19s + 12}{s^3 + 8s^2 + 19s + 82} R \quad ; \quad R(s) = \frac{1}{s}$$

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \frac{12}{82}$$

(b) PI-regulator:

$$K_{p2} = 0,45K_{kr} = 63$$

$$T_{i2} = 0,83T_{kr} = 1,1952$$

$$G_{PI} = K_{p2} \left(1 + \frac{1}{sT_{i2}}\right) = 63 + \frac{52,71}{s}$$

Vrednost pogreška v ustaljenem stanju je:

$$E = \frac{1}{1 + G G_{PI}} R = \frac{s^4 + 8s^3 + 19s^2 + 12s}{s^4 + 8s^3 + 19s^2 + 75s + 52,71} \cdot R \quad ; \quad R(s) = \frac{1}{s}$$

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = 0$$

(c) PID-regulator:

$$K_{p3} = 0,6K_{kr} = 84$$

$$T_{i3} = 0,5T_{kr} = 0,72$$

$$T_{d3} = 0,125T_{kr} = 0,18$$

$$G_{PID} = K_{p3} \left(1 + \frac{1}{T_{i3}s} + T_{d3}s\right) = 84 + \frac{116,67}{s} + 15,12s$$

Vrednost pogreška v ustaljenem stanju pri idealnem regulatorju:

$$E = \frac{1}{1 + G G_{PID}} R = \frac{s^4 + 8s^3 + 19s^2 + 12s}{s^4 + 8s^3 + 34,12s^2 + 96s + 116,67} \cdot R \quad ; \quad R(s) = \frac{1}{s}$$

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = 0$$

Vrednost pogreška v ustaljenem stanju pri realnem regulatorju (realni D-člen: $D = \frac{T_{d3}s}{T's+1}$ $T' = (0,1 \text{ do } 0,3)T_d$):

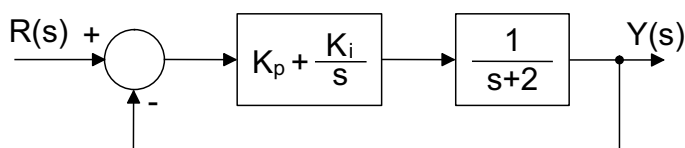
$$G_{PID} = 84 + \frac{116,67}{s} + \frac{15,12s}{0,018s + 1}$$

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = 0$$

Primer 4.3. \triangle *Graham in Lathrop sta za sledilni način delovanja sistemov razvila pravila nastavljanja po ITAE cenilki, pri čemer imenovalc zaprtozančne prenosne funkcije $(1 + G_0(s))$ izenačimo z ustreznim polinomom.*

	imenovalc zaprtozančne prenosne funkcije
1.red	$s + \omega_n$
2.red	$s^2 + 1,4\omega_n s + \omega_n^2$
3.red	$s^3 + 1,75\omega_n s^2 + 2,15\omega_n^2 s + \omega_n^3$
4.red	$s^4 + 2,1\omega_n s^3 + 3,4\omega_n^2 s^2 + 2,7\omega_n^3 s + \omega_n^4$
5.red	$s^5 + 2,8\omega_n s^4 + 5,0\omega_n^2 s^3 + 5,5\omega_n^3 s^2 + 3,4\omega_n^4 s + \omega_n^5$
6.red	$s^6 + 3,25\omega_n s^5 + 6,60\omega_n^2 s^4 + 8,60\omega_n^3 s^3 + 7,45\omega_n^4 s^2 + 3,95\omega_n^5 s + \omega_n^6$

Če je mogoče imenovalc prenosne funkcije nadomestiti s podanim polinomom, potem dobimo optimalno delovanje regulatorja. Podana pravila so optimalna le pri stopničasti spremembi reference in v primeru, da zaprtozančni sistem nima ničle ali pa ta nima pomembnejšega vpliva na zaprtozančni odziv. S pomočjo opisane metode določite regulator za sistem prikazan na sliki 4.6



Slika 4.6: Bločni diagram iz primera 4.3

Rešitev

Zaprtozančna prenosna funkcija je:

$$\frac{Y}{R} = \frac{K_p s + K_i}{s^2 + s(2 + K_p) + K_i}$$

Če imenovalc zgornje prenosne funkcije enačimo s polinomom v drugi vrstici tabele (2. red), dobimo:

$$\begin{aligned} s^0 &\longrightarrow \omega_n^2 = K_i \\ s^1 &\longrightarrow 1,4\omega_n = 2 + K_p \end{aligned}$$

Vidimo, da imamo dve enačbi in tri neznanke, zato lahko eno vrednost poljubno izberemo. Če K_p poljubno izbiramo, dobimo:

$$\begin{aligned} K_{p1} = 2 &\longrightarrow \omega_{n1} = \frac{2 + K_p}{1,4} = 2,857 \quad ; \quad K_{i1} = \omega_n^2 = 8,16 \\ K_{p2} = 4 &\longrightarrow \omega_{n2} = 4,286 \quad ; \quad K_{i2} = 18,367 \\ K_{p3} = 6 &\longrightarrow \omega_{n3} = 5,714 \quad ; \quad K_{i3} = 32,653 \\ K_{p4} = 0,1 &\longrightarrow \omega_{n4} = 1,5 \quad ; \quad K_{i4} = 2,25 \end{aligned}$$

Za izbrane vrednosti parametrov regulatorjev bodo prenosne funkcije zaprtozančnih sistemov enake:

$$G_{zap}(s) = \frac{K_p s + K_i}{s^2 + 1,4\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{A(s)}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

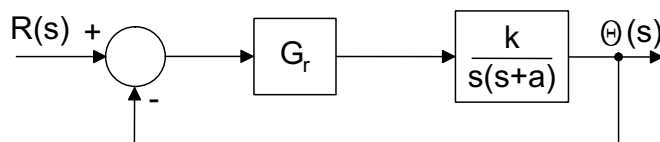
$$\omega_n^2 = \omega_n^2 \quad ; \quad 2\zeta\omega_n = 1,4\omega_n$$

Iz zgornje enačbe vidimo, da je $\zeta = 0,7$ in je neodvisen od parametra K_p .

$$\begin{aligned} K_{p1} = 2 & : G_{zap1}(s) = \frac{2s + 8,16}{s^2 + 4s + 8,16} \longrightarrow \omega_n = 2,857 \quad ; \quad \zeta = 0,7 \\ K_{p2} = 4 & : G_{zap2}(s) = \frac{4s + 18,367}{s^2 + 6s + 18,367} \longrightarrow \omega_n = 4,286 \quad ; \quad \zeta = 0,7 \\ K_{p3} = 6 & : G_{zap3}(s) = \frac{6s + 32,653}{s^2 + 8s + 32,653} \longrightarrow \omega_n = 5,714 \quad ; \quad \zeta = 0,7 \\ K_{p4} = 0,1 & : G_{zap4}(s) = \frac{0,1s + 2,25}{s^2 + 2,1s + 2,25} \longrightarrow \omega_n = 1,5 \quad ; \quad \zeta = 0,7 \end{aligned}$$

Če želimo, da bo odziv optimalen v smislu ITAE, moramo izbrati parametre tako, da zaprtozančna ničla nima večjega vpliva ($\frac{K_i}{K_p} \gg 1$)

Primer 4.4. Načrtajte P in PI regulator za regulacijo kota Θ po metodi Graham-Lathrop. Bločni diagram sistema je prikazan na sliki 4.7.



Slika 4.7: Bločni diagram iz primera 4.4

Rešitev

1. *P-regulator*: $G_r = K_r$

$$\frac{\Theta}{R} = \frac{K_r K}{s^2 + as + K_r K} \iff \frac{\omega_n^2}{s^2 + 1,4\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$\omega_n^2 = K_r K \quad ; \quad 1,4\omega_n = a \implies K_r = \frac{a^2}{1,96K}$$

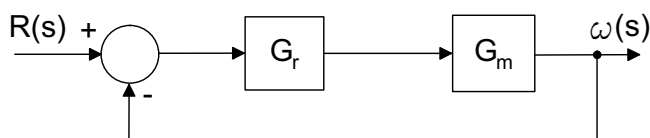
2. *PI-regulator*: $G_r = K_r(1 + \frac{1}{T_i s})$

$$\frac{\Theta}{R} = \frac{Ks + \frac{KK_r}{T_i}}{s^3 + as^2 + KK_r s + \frac{KK_r}{T_i}}$$

$$s^3 + 1,75\omega_n s^2 + 2,15\omega_n^2 s + \omega_n^3 = s^3 + as^2 + KK_r s + \frac{KK_r}{T_i}$$

$$\omega_n = \frac{a}{1,75} \quad ; \quad K_r = 2,15 \frac{\omega_n^2}{K} \quad ; \quad T_i = \frac{2,15}{\omega_n}$$

Primer 4.5. \triangle *S pomočjo principa kompenzacije določite regulator tako, da bo zaprtozanka prenosna funkcija sistema enaka $G_z = \frac{1}{\frac{T}{2}s+1}$. Bločni diagram sistema je prikazan na sliki 4.8, pri čemer je $G_m = \frac{K}{Ts+1}$.*



Slika 4.8: Bločni diagram iz primera 4.5

Rešitev

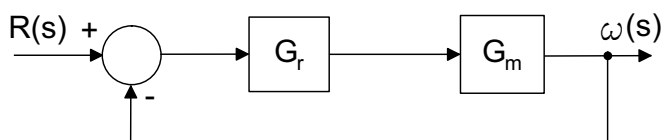
Iz slike 4.8 lahko izpeljemo:

$$G_z = \frac{G_r G_m}{1 + G_r G_m} \implies G_r = \frac{1}{G_m} \cdot \frac{G_z}{1 - G_z}$$

Če v zgornjo enačbo vstavimo naše vrednosti, dobimo *PI-regulator*:

$$G_r = \frac{2}{K} + \frac{2}{KTs}$$

Primer 4.6. S pomočjo principa kompenzacije določite regulator tako, da bo zaprtozančna prenosna funkcija sistema enaka $G_z = \frac{1}{T_s s + 1}$. Bločni diagram sistema je prikazan na sliki 4.9, pri čemer je $G_m = \frac{K}{s(T_s s + 1)}$.

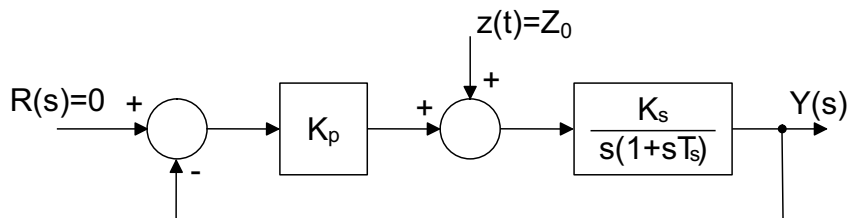


Slika 4.9: Bločni diagram iz primera 4.6

Rešitev

$$G_r = \frac{2s}{K} + \frac{2}{KT}$$

Primer 4.7. \triangle Optimirajte delovanje sistema prikazanega na sliki 4.10. Odziv



Slika 4.10: Bločni diagram iz primera 4.7

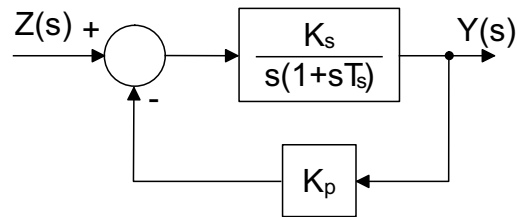
sistema naj bo aperiodičen ($\zeta \geq 1$), pri čemer predpostavimo stopničasto motnjo na vходу procesa. Cenilka naj bo linearna regulacijska ploskev.

Rešitev

Zaprtozančni sistem sestavljata integrirni proces z zakasnitvijo prvega reda in proporcionalni regulator. Sistem vzbujamo samo z motnjo, torej lahko bločni diagram predstavimo tudi tako, kot je prikazano na sliki 4.11.

Prenosna funkcija zaprtozančnega sistema je torej:

$$G_{zap}(s) = \frac{Y}{Z} = \frac{G_s(s)}{1 + G_s(s)K_p} = \frac{\frac{K_s}{T_s}}{s^2 + s\frac{1}{T_s} + \frac{K_s K_p}{T_s}}$$



Slika 4.11: Bločni diagram iz primera 4.7

V časovnem prostoru lahko zapišemo:

$$\ddot{y}(t) + \frac{1}{T_s}\dot{y}(t) + \frac{K_s K_p}{T_s}y(t) = \frac{K_s}{T_s}z(t)$$

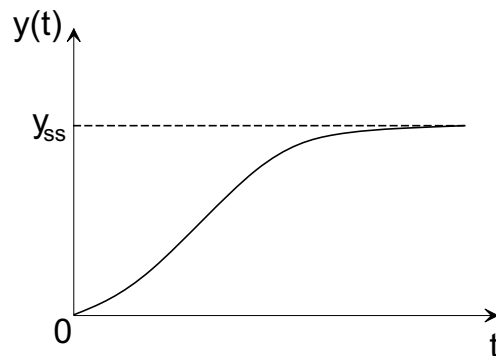
Korena karakteristične enačbe sta:

$$s_{1,2} = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{T_s} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{T_s}\right)^2 - 4\frac{K_s K_p}{T_s}} \right)$$

Za aperiodični odziv mora veljati $\zeta \geq 1$ ali izraz pod korenem večji ali enak nič:

$$\left(\frac{1}{T_s}\right)^2 \geq 4\frac{K_p K_s}{T_s} \quad \text{oz.} \quad K_p \leq \frac{1}{4K_s T_s} \longrightarrow K_{pmax} = \frac{1}{4K_s T_s}$$

Ker je sistem 2. reda, bo imel aperiodični odziv obliko, kot jo prikazuje slika 4.12.



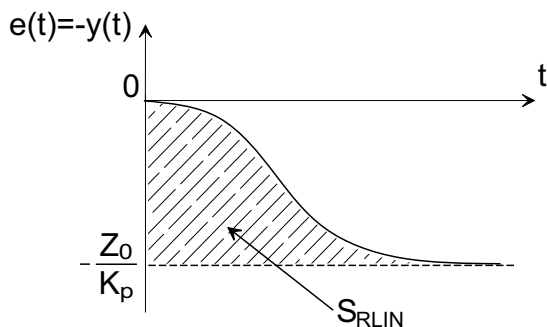
Slika 4.12: Odziv

Če ga vzbujamo z motnjo stopnice z_0 , dobimo napako v ustaljenem stanju:

$$y_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} sY(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{Z_0}{s} \cdot \frac{\frac{K_s}{T_s}}{s^2 + s\frac{1}{T_s} + \frac{K_s K_p}{T_s}} = \frac{Z_0}{K_p}$$

$$e = r - y \xrightarrow{r=0} e = -y$$

Potek pogreška $e(t)$ je prikazan na sliki 4.13



Slika 4.13: Pogrešek

Ne glede na integrirno naravo procesa, dobimo pri proporcionalnem regulatorju pogrešek v ustaljenem stanju $e(\infty)$. Linearno regulacijsko ploskev dobimo tako, da od njega odštejemo $e(t)$:

$$S_{RLIN} = \int_0^{\infty} [e(\infty) - e(t)] dt \quad ; \quad e(t) = -y(t)$$

$$S_{RLIN} = \int_0^{\infty} [y(\infty) - y(t)] dt \quad ; \quad y(\infty) = \frac{Z_0}{K_p}$$

Če želimo izračunati cenilko, moramo določiti še $y(t)$.

$$\begin{aligned} y(s) &= G_{zap}(s) \cdot \frac{Z_0}{s} = \frac{Z_0}{s} \cdot \frac{\frac{K_s}{T_s}}{s^2 + s\frac{1}{T_s} + \frac{K_s K_p}{T_s}} = \\ &= \frac{Z_0}{s} \cdot \frac{\frac{K_s}{T_s}}{(s - s_1)(s - s_2)} = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{s - s_1} + \frac{K_3}{s - s_2} \end{aligned}$$

$$K_1 = \frac{Z_0}{K_p} \quad ; \quad K_2 = \frac{Z_0}{s_1} \cdot \frac{\frac{K_s}{T_s}}{s_1 - s_2} \quad ; \quad K_3 = \frac{Z_0}{s_2} \cdot \frac{\frac{K_s}{T_s}}{s_2 - s_1}$$

$$y(t) = \frac{Z_0}{K_p} + \frac{Z_0}{s_1} \cdot \frac{\frac{K_s}{T_s}}{s_1 - s_2} e^{-s_1 t} + \frac{Z_0}{s_2} \cdot \frac{\frac{K_s}{T_s}}{s_2 - s_1} e^{-s_2 t}$$

Sedaj lahko izračunamo cenilko:

$$\begin{aligned} S_{RLIN} &= \int_0^{\infty} \left[-\frac{Z_0}{K_p} + \frac{Z_0}{K_p} + \frac{Z_0}{s_1} \cdot \frac{\frac{K_s}{T_s}}{s_1 - s_2} e^{-s_1 t} + \frac{Z_0}{s_2} \cdot \frac{\frac{K_s}{T_s}}{s_2 - s_1} e^{-s_2 t} \right] \\ &= -\frac{Z_0 K_p}{s_1^2 s_2^2 T_s} (s_1 + s_2) \end{aligned}$$

$$\frac{1}{K_p} = \frac{K_s}{T_s s_1 s_2} \quad ; \quad e(\infty) = -\frac{Z_0}{K_p} = -\frac{Z_0 K_s}{s_1 s_2 T_s}$$

$$s_1^2 s_2^2 = \frac{K_s^2 K_p^2}{T_s^2} \quad ; \quad s_1 + s_2 = -\frac{1}{T_s}$$

$$S_{RLIN} = \frac{Z_0}{K_s K_p^2}$$

K_p naj bo čim večji, da bo S_{RLIN} čim manjša. Zaradi pogoja $\zeta \geq 1$, pa je dovoljen $K_p = K_{pmax}$. Optimalna vrednost cenilke S_{RLIN} je enaka:

$$S_{RLINmin} = \frac{Z_0}{K_s K_{pmax}^2} = 16 Z_0 K_s T_s^2$$

Literatura

- [1] Borrie, J.A. (1986): *Modern Control Systems: A Manual of Design Methods*, Prentice Hall, Inc., London, UK
- [2] D'Azzo, J.J., C.H. Houpis (1975): *Linear Control System Analysis and Design – Conventional and Modern*, McGraw-Hill, Inc., New York, USA
- [3] DiStefano, J.J., Stubberud, I.J. Williams (1976): *Feedback and Control Systems*, Schaum's Outline Series, McGraw-Hill Book Company, New York, USA
- [4] Franklin, G.F., J.D. Powell, A.E. Naeini (1986): *Feedback Control of Dynamic Systems*, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Reading, Massachusetts, USA
- [5] Kuljača, L., Z. Vukić (1985): *Automatsko upravljanje sistemima – analiza linearnih sistema*, Školska knjiga, Zagreb, HR
- [6] Kuo, B.C. (1991): *Automatic Control Systems*, Sixth edition, Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, USA
- [7] McMillan, G.K. (1990): *Tuning and Control Loop Performance – A Practitioner's Guide (2nd ed.)*, Instrument Society of America, NC., USA
- [8] Ogata, K. (1990): *Modern Control Engineering*, Second edition, Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, USA
- [9] Phillips, C., Harbor, R. (1996): *Feedback Control Systems (3rd ed.)*, Prentice Hall International, Inc., USA
- [10] *Problem Solver in Automatic Control Systems/Robotics*, Staff of Research and Education Association, New York, USA (1982)
- [11] Shinnars, S.M. (1978): *Modern Control System Theory and Applications*, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Reading, Massachusetts, USA
- [12] Shinnars, S.M. (1992): *Modern Control System Theory and Design*, John Willey & Sons, New York, USA

- [13] Shinskey, F.G. (1988): *Process Control Systems – Application, Design and Adjustment*, McGraw-Hill, New York, USA
- [14] Stojić, M.R. (1973): *Kontinualni sistemi automatskog upravljanja*, Građevinska knjiga, Beograd, YU
- [15] Šurina, T. (1981): *Automatska regulacija*, Školska knjiga, Zagreb, HR
- [16] Zupančič, B. (1996): *Zvezni regulacijski sistemi, I.del*, Fakulteta za elektrotehniko in računalništvo, Univerza v Ljubljani, SLO

Učbenik **Regulacije I – zbirka primerov in nalog** dopolnjuje in nadgrajuje tematiko učbenika Zvezni regulacijski sistemi - II. del in je namenjen vsem, ki bi radi osvojili temeljna znanja s področja regulacij, v prvi vrsti pa seveda študentom 3. letnika Avtomatike na Fakulteti za elektrotehniko. Tematika je razdeljena na štiri poglavja. Prvo poglavje obravnava Laplaceovo transformacijo, kot osnovno orodje za obravnavo regulacijskih sistemov. Drugo poglavje obravnava možne predstavitve sistemov za analizo in sintezo sistemov vodenja. V tretjem poglavju analiziramo regulacijske sisteme v časovnem in s -prostoru. Četrto poglavje pa opisuje metode načrtovanja enostavnih sistemov vodenja.

Avtor

Igor Škrjanc je izredni profesor na Fakulteti za elektrotehniko v Ljubljani. Predava predmet Regulacijska tehnika (dodiplomski študij) in predmeta Izbrana poglavja iz teorije avtomatskega vodenja in Izbrana poglavja iz prediktivnega in adaptivnega vodenja (podiplomski študij). Vodi tudi vaje pri predmetih Regulacije I, Regulacije II, Simulacije, Regulacijska tehnika in seminarja Vodenje sistemov I in II. Njegova raziskovalna dejavnost pa je usmerjena na področje inteligentnih, prediktivnih in adaptivnih sistemov vodenja.