

Analiza periodičnih signalov

Časovni potek periodičnega signala se začne po določenem času ponavljati:

$$x(t) = x(t + nT) \quad \forall t \in \mathcal{R}$$

pri tem je T perioda signala in n poljubno celo število. Perioda signala določa njegovo osnovno frekvenco f_0 in osnovno krožno frekvenco ω_0 :

$$f_0 = \frac{1}{T} \quad \omega_0 = 2\pi f_0 = \frac{2\pi}{T}$$

Periodični signal je v celoti določen s potekom znotraj ene periode. Analizo periodičnih signalov lahko zato omejimo na analizo ene periode.

2.1 Lastnosti periodičnih signalov

Periodičnemu signalu $x(t)$ lahko določimo: srednjo ali povprečno vrednost $\overline{x(t)}$, trenutno moč $p(t)$, povprečno moč $\overline{p(t)}$ in varianco ali povprečno moč izmenične komponente σ_x^2 :

$$\overline{x(t)} = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} x(t) dt = \frac{1}{T} \int_T x(t) dt \quad (2.1)$$

$$p(t) = x^2(t) \quad (2.2)$$

$$\overline{p(t)} = \frac{1}{T} \int_T x^2(t) dt \quad (2.3)$$

$$\sigma_x^2 = \overline{(x(t) - \overline{x(t)})^2} = \frac{1}{T} \int_T (x(t) - \overline{x(t)})^2 dt \quad (2.4)$$

2.2 Korelacija in korelacijska funkcija periodičnih signalov

Korelacija je merilo podobnosti med dvema signaloma. Korelacija dveh signalov s periodo T je definirana kot srednja vrednost njunega produkta:

$$R_{xy} = \overline{x(t)y(t)} = \frac{1}{T} \int_T x(t)y(t) dt \quad (2.5)$$

Če signala med seboj zamaknemo za spremenljiv čas τ , dobimo korelacijsko funkcijo, ki je odvisna od zamika τ .

$$R_{xy}(\tau) = \overline{x(t)y(t+\tau)} = \frac{1}{T} \int_T x(t)y(t+\tau) dt \quad (2.6)$$

Poseben primer korelacije je **avtokorelacija**. Pri avtokorelacji signal $x(t)$ primerjamo s samim seboj. Avtokorelacija je enaka povprečni moči signala:

$$R_{xx} = \overline{x(t)x(t)} = \frac{1}{T} \int_T x(t)x(t) dt = \frac{1}{T} \int_T x(t)^2 = \overline{p(t)} \quad (2.7)$$

Poseben primer korelacijske funkcije je **avtokorelacijska funkcija** pri kateri primerjamo signal $x(t)$ z njegovo zamknjeno različico $x(t+\tau)$

$$R_{xx}(\tau) = \overline{x(t)x(t+\tau)} = \frac{1}{T} \int_T x(t)x(t+\tau) dt \quad (2.8)$$

Avtokorelacijska funkcija ima naslednje lastnosti:

1. je periodična s periodo T ,
2. je soda funkcija,
3. maksimalno vrednost ima pri $\tau = 0$,
4. njena vrednost pri $\tau = 0$ je enaka povprečni moči signala.

Korelacija in avtokorelacija sta skalarja in ne signala. Korelacijska in avtokorelacijska funkcija pa sta funkciji odvisni od parametra τ in ravno tako ne predstavljata signala.

2.3 Razvoj periodičnega signala v Fourierovo vrsto

Vse periodične signale, ki zadostijo Dirichletovemu pogoju $\int_T |x(t)| dt < \infty$, lahko razvijemo v Fourierovo vrsto:

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(k\omega_0 t) + b_k \sin(k\omega_0 t)) \quad (2.9)$$

Pri tem so koeficienti a_k in b_k :

$$a_k = \frac{2}{T} \int_T x(t) \cos(k\omega_0 t) dt \quad (2.10)$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_T x(t) \sin(k\omega_0 t) dt \quad (2.11)$$

V kompleksni obliki Fourierovo vrsto in koeficiente zapišemo kot:

$$x(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} X[k] e^{jk\omega_0 t} \quad (2.12)$$

$$X[k] = \frac{1}{T} \int_T x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \quad (2.13)$$

Kompleksni Fourierovi koeficienti z negativnim in pozitivnim vrednostmi indeksa k so konjugirano kompleksne vrednosti $X[-k] = X^*[k]$. Povezave med kompleksnimi in realnimi Fourierovimi koeficienti so:

$$a_k = X[-k] + X[k] = X^*[k] + X[k] = 2\Re(X[k])$$

$$b_k = X[-k] - X[k] = X^*[k] - X[k] = -2\Im(X[k])$$

$$X[k] = \begin{cases} \frac{a_k - jb_k}{2} & k > 0 \\ \frac{a_k}{2} & k = 0 \\ \frac{a_k + jb_k}{2} & k < 0 \end{cases}$$

Kompleksne Fourierove koeficiente lahko zapišemo v polarni obliki:

$$X[k] = A_X[k] e^{j\Phi_X[k]}$$

$A_X[k]$ je amplitudni spekter, $\Phi_X[k]$ pa fazni spekter periodičnega signala.

$$A_X[k] = |X[k]| = \sqrt{\Re^2(X[k]) + \Im^2(X[k])}$$

$$\Phi_X[k] = \arg(X[k]) = \operatorname{atan} \frac{\Im(X[k])}{\Re(X[k])}$$

3 Analiza aperiodičnih signalov

V tem delu bomo obravnavali energijske aperiodične signale. To so vsi aperiodični signali, ki imajo končno energijo:

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt < \infty$$

3.1 Korelacija in korelacijska funkcija aperiodičnih signalov

Korelacija dveh aperiodičnih signalov je definirana kot integral njunega produkta:

$$R_{xy} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)y(t) dt \quad (3.1)$$

Če signala med seboj zamknemo za spremenljiv čas τ , dobimo **korelacijsko funkcijo**, ki je odvisna od zamika τ .

$$R_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)y(t + \tau) dt \quad (3.2)$$

Poseben primer korelacije je **avtokorelacija**. Pri avtokorelacji signal $x(t)$ primerjamamo s samim seboj. Avtokorelacija je enaka energiji signala:

$$R_{xx} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x(t) dt = \frac{1}{T} \int_T x(t)^2 = \overline{p(t)} \quad (3.3)$$

Poseben primer korelacijske funkcije je **avtokorelacijska funkcija** pri kateri primerjamamo signal $x(t)$ z njegovo zamaknjeno različico $x(t + \tau)$

$$R_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x(t + \tau) dt \quad (3.4)$$

Avtokorelacijska funkcija ima naslednje lastnosti:

1. je soda funkcija,
2. maksimalno vrednost ima pri $\tau = 0$,
3. njena vrednost pri $\tau = 0$ je enaka energiji signala.

Korelacija in avtokorelacija sta skalarja in ne signala. Korelacijska in avtokorelacijska funkcija pa sta funkciji odvisni od parametra τ in ravno tako ne predstavljata signala.

3.2 Konvolucija aperiodičnih signalov

Konvolucija je korelacija signala $x_1(\tau)$ in časovno obrnjenega signala $x_2(-\tau)$, ki je zamaknjen za čas t .

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau)x_2(t - \tau) d\tau \quad (3.5)$$

Rezultat konvolucije je časovni signal. Pomen konvolucije in primer z rešitvijo so podrobneje predstavljeni v poglavju o prenosu signalov.

V izrazu (3.5) je na videz zamenjan pomen spremenljivk t in τ saj je τ neodvisna integracijska spremenljivka (čas) in t parameter premika signala. V dosedanjih izrazih je bil τ vedno parameter (časovni premik). Ker pa je rezultat konvolucije časovni signal $y(t)$, smo se odločili za zamenjavo spremenljivk, da se rezultat že na prvi pogled loči od rezultatov korelacijskih funkcij, ki niso časovni signali ampak zgolj funkcije parametra τ .

3.3 Gostota spektra aperiodičnih signalov

Fourierov transform (FT) aperiodičnega signala $x(t)$ je podan z izrazom:

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt \quad (3.6)$$

Funkcijo $X(\omega)$ imenujemo spektralna gostota signala. Signal $x(t)$ lahko izračunamo iz signala $X(\omega)$ s pomočjo **inverznega Fourierovega transforma (IFT)**, ki je podan z izrazom:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{j\omega t} d\omega \quad (3.7)$$

Funkciji $x(t)$ in $X(\omega)$ sta Fourierov par, kar zapišemo kot $x(t) \leftrightarrow X(\omega)$.

S pomočjo FT in IFT lahko signal preslikamo iz časovnega v frekvenčni prostor in obratno. Zadosten pogoj za obstoj FT funkcije $x(t)$ je:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty$$

FT signala $x(t)$ je v splošnem kompleksna funkcija frekvence ω

$$X(\omega) = \Re[X(\omega)] + j\Im[X(\omega)]$$

ki jo lahko zapišemo tudi v polarni obliki:

$$X(\omega) = A_X(\omega)e^{j\Phi_X(\omega)}$$

kjer sta

$$A_X(\omega) = |X(\omega)| = \sqrt{\Re^2(X(\omega)) + \Im^2(X(\omega))}$$

$$\Phi_X(\omega) = \arg(X(\omega)) = \tan \frac{\Im(X(\omega))}{\Re(X(\omega))}$$

$A_X(\omega)$ imenujemo **gostota amplitudnega spektra**, $\phi_X(\omega)$ pa **gostota faznega spektra**.

3.4 Lastnosti Fourierovega transforma

Računanje Fourierovega transforma neposredno po izrazu (3.6) kaj hitro postane (pre)zahtevno. V veliko primerih lahko s pridom izkoristimo lastnosti Fourierovega transforma, ki nam pomagajo po lažji in hitrejši poti priti do rezultata.

Linearnost: za poljubni konstanti a in b velja:

$$\mathcal{F}[ax(t) + by(t)] = a\mathcal{F}[x(t)] + b\mathcal{F}[y(t)]$$

Teorem o spremembni merili: za realno konstant $a \neq 0$ in Fourierov par $x(t) \leftrightarrow X(\omega)$ velja:

$$x(at) \leftrightarrow \frac{1}{|a|}X\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

Teorem o konjugirano kompleksnih funkcijah: $x^*(t) \leftrightarrow X^*(-\omega)$

Teorem o časovnem premiku: $x(t - t_0) \leftrightarrow X(\omega)e^{-j\omega t_0}$

Teorem o frekvenčnem premiku: $x(t)e^{-j\omega_0 t} \leftrightarrow X(\omega - \omega_0)$

Teorem o modulaciji: $x(t)\cos(\omega_0 t) \leftrightarrow \frac{1}{2}[X(\omega - \omega_0) + X(\omega + \omega_0)]$

Teorem o odvodu po času: $\frac{dx(t)}{dt} \leftrightarrow j\omega X(\omega)$

Teorem o odvodu po frekvenci: $-jtx(t) \leftrightarrow \frac{dX(\omega)}{d\omega}$

Parsevalov izrek za aperiodične signale: govori o energiji signala W_x

$$W_x = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega$$

FT korelacijske funkcije: kjer sta $X(\omega)$ in $Y(\omega)$ FT signalov $x(t)$ in $y(t)$

$$R_{xy}(t) \leftrightarrow X^*(\omega)Y(\omega)$$

FT avtokorelacijske funkcije: $R_{xx}(t) \leftrightarrow X^*(\omega)X(\omega) = |X(\omega)|^2$

Teorem o časovni konvoluciji: $x(t) * y(t) \leftrightarrow X(\omega)Y(\omega)$

Teorem o frekvenčni konvoluciji: $x(t)y(t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi}X(\omega) * Y(\omega)$

FT realnih funkcij: če je $x(t) \in \Re$ velja $X(\omega) = X^*(-\omega)$ in tudi:

Realni del FT realnega signala je realna soda funkcija $\Re X(\omega) = \Re X(-\omega)$

Imaginarni del FT realnega signala je realna liha funkcija $\Im X(\omega) = -\Im X(-\omega)$

Gostota amplitudnega spektra je soda funkcija $A_X(\omega) = A_X(-\omega)$

Gostota faznega spektra je liha funkcija $\Phi_X(\omega) = -\Phi_X(-\omega)$

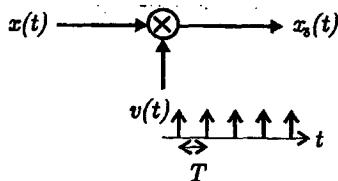
FT realnih sodih funkcij je realna soda funkcija.

FT realnih lihih funkcij je imaginarna liha funkcija.

4 Vzorčenje signalov

4.1 Idealno vzorčenje

V idealnem primeru zajame vzorčevalnik samo vrednosti signala v ekvidistančnih časovnih trenutkih. Model vzorčenja signala ponazarja slika 4.1. Proses vzorčenja lahko pred-



Slika 4.1 – Vzorčenje signala.

stavimo kot množenje z vzorčevalno funkcijo $v_\delta(t)$, ki je sestavljena iz vsote ekvidistančnih neskončno ozkih impulzov :

$$v_\delta(t) = \sum_n \delta(t - nT) \quad (4.1)$$

$$x_\delta(t) = x(t)v_\delta(t) = \sum_n x(nT)\delta(t - nT) \quad (4.2)$$

4.2 Spekter vzorčenega signala

Vzorčevalno funkcijo $v_\delta(t)$ lahko s pomočjo Fourierove vrste predstavimo z neskončno vsoto harmoničnih signalov, ki imajo enako amplitudo:

$$v_\delta(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} e^{jk\omega_0 t} \quad (4.3)$$

Spekter idealno vzorčenega signala je zato vsota množice premaknjenih spektrov originalnega signala in ima periodičen potek:

$$X_\delta(\omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(\omega + k\omega_0) \quad (4.4)$$

Popolna rekonstrukcija signala na osnovi vzorcev je možna le v primeru, če je spekter signala pred vzorčenjem frekvenčno omejen: $\omega_{sg} \leq \frac{1}{2}\omega_0$. Natančno rekonstrukcijo signala dobimo, če vzorčeni signal vodimo skozi idealno nizko sito z mejno frekvenco $\frac{1}{2}\omega_0$.

5 Filtriranje signalov

Prenosni komunikacijski kanali se v mnogo primerih lahko obravnavajo kot linearni in časovno nespremenljivi sistemi. Linearni sistem z enim vhodom in enim izhodom imenujemo tudi filter ali sito. Zanima nas predvsem karakteristika prenosnega kanala



Slika 5.1 – Model linearnega prenosnega kanala

v eni smeri, kot ponazarja slika 5.1.

5.1 Sistemska funkcija

Povezavo med izhodom in vhodom linearnega sistema je popolnoma določena s sistemsko funkcijo $h(t)$. Sistemska funkcija $h(t)$ je odziv sistema na neskončno ozek impulz $\delta(t)$. Odziv časovno nespremenljivega linearnega sistema je enak konvoluciji signala na vhodu s sistemsko funkcijo $h(t)$ in ga lahko računamo na dva načina:

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t - \tau)d\tau \quad (5.1)$$

$$y(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t - \tau)d\tau \quad (5.2)$$

5.2 Prevajalna funkcija sistema

Lastnosti linearnega sistema v frekvenčnem prostoru popolnoma določa prevajalna funkcija $H(\omega)$, ki je Fourierov transform sistemske funkcije:

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-j\omega t}dt \quad (5.3)$$

Prevajalna funkcija opisuje filrske lastnosti sistema, saj podaja razmerja amplitud in faz posameznih frekvenčnih komponent med izhodom in vhodom linearnega sistema:

$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} \quad (5.4)$$

Amplitudni potek prêvajalne funkcije $A(\omega)$ določa ojačanje amplitud, fazni potek $\Phi(\omega)$ pa določa razliko faze med izhodom in vhodom pri izbrani frekvenci:

$$A(\omega) = |H(\omega)| = \frac{|Y(\omega)|}{|X(\omega)|} \quad (5.5)$$

$$\Phi(\omega) = \arg(H(\omega)) = \arg(Y(\omega)) - \arg(X(\omega)) \quad (5.6)$$

Prevajalno funkcijo prenosnega telekomunikacijskega kanala imenujemo tudi prenosna funkcija. Prenosni kanali slabijo signal, zato namesto amplitudnega poteka pogosto podajamo logaritemski potek slabljenja prenosne karakteristike:

$$a(\omega)[\text{dB}] = -20 \log |H(\omega)| \quad (5.7)$$

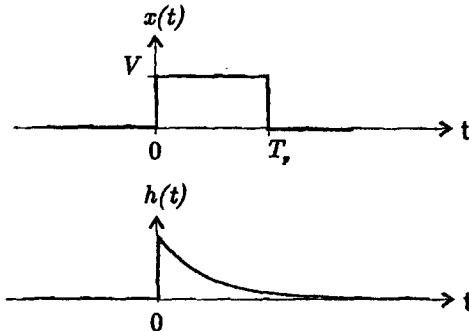
5.3 Računanje odziva linearnega sistema

Primer: Podana sta signal na vhodu $x(t)$ in sistemsko funkcijo sita $h(t)$:

$$x(t) = V(U(t) - U(t - T_p)) \quad (5.8)$$

$$h(t) = U(t)\omega_0 e^{-\omega_0 t} \quad (5.9)$$

Razmere podaja slika 5.2.



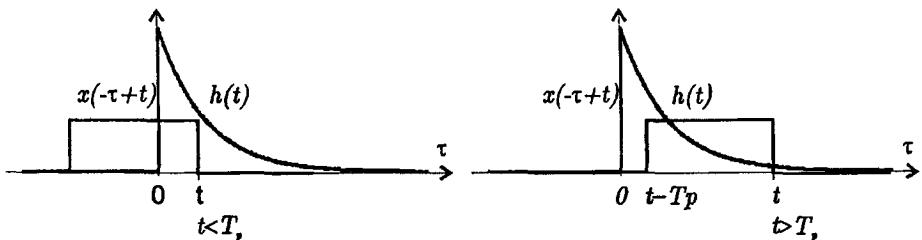
Slika 5.2 – Signal na vhodu sita in sistemsko funkcijo sita.

Rešitev: Odziv sita za signal na vhodu $x(t)$ izračunamo s konvolucijo:

$$y(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t - \tau)h(\tau)d\tau \quad (5.10)$$

Rezultat konvolucije ima tri segmentne. V prvem segmentu, ki ga določa območje vrednosti $t < 0$, je vrednost odziva enaka nič. Na levi sliki 5.3 je prikazan potek obeh funkcij v enačbi 5.10 za primer $0 < t < T_p$, desno pa za primer $t > T_p$. Produkt sistemsko funkcije in premaknjene zrcaljenega poteka vhodnega signala ima v drugem segmentu od nič različno vrednost le v območju med $\tau = 0$ in $\tau = t$, kar upoštevamo v mejah integracije:

$$y(t) = \int_0^t Vh(\tau)d\tau = V(1 - e^{-\omega_0 t}). \quad (5.11)$$



Slika 5.3 – Prekrivanje signalov pri računanju konvolucije.

V tretjem segmentu upoštevamo premik vhodnega signala v spremenjenih mejah integracije:

$$y(t) = \int_{t-T_p}^t Vh(\tau)d\tau = V(e^{-\omega_0(t-T_p)} - e^{-\omega_0 t}) \quad (5.12)$$

Rešitev: Nalogo lahko rešimo tudi s pomočjo teorema o superpoziciji. Signal (5.8) je sestavljen iz dveh stopničastih signalov $U(t)$. Ker je sistem linearen, lahko tudi signal na izhodu sestavimo iz odzivov stopničastih signalov $s(t)$. Če označimo z $s(t)$ odziv sistema na enotino stopnico, potem je signal na izhodu enak:

$$y(t) = V(s(t) - s(t - T_p)) \quad (5.13)$$

Odziv sistema na enotino stopnico računamo s konvolucijo:

$$s(t) = h(t) * U(t) = \int_0^t h(\tau)d\tau = U(t)(1 - e^{-\omega_0 t}) \quad (5.14)$$

Potek signala na izhodu sita podaja slika 5.4.



Slika 5.4 – Potek signala na izhodu sita.

6 Verjetnostne porazdelitve signalov

Iz časovnega poteka signala lahko poleg spektra ugotavljamo tudi lastnost verjetnostne porazdelitve po vrednosti. Verjetnostno porazdelitev nas največkrat zanimajo za naključne signale, včasih pa tudi za periodične signale. Porazdelitev verjetnosti je diskretna ali pa zvezna, odvisno od zaloge vrednosti signala.

6.1 Diskrete porazdelitve

Porazdelitev verjetnosti je diskretna, če je zaloga vrednosti sestavljena iz množice točk. Signali z omejenim številom vrednosti imajo diskretno verjetnostno porazdelitev:

$$P(x = x_i) = P_x[i] \quad (6.1)$$

Iz verjetnostne porazdelitve lahko izračunamo različne statistične parametre. Pričakovana vrednost signala je enaka srednji ali povprečni vrednosti:

$$\bar{x} = \sum_i x_i P_x[i], \quad (6.2)$$

Pričakovana ali srednja vrednost kvadrata signala je enaka povprečni moči signala:

$$\overline{x^2} = \sum_i x_i^2 P_x[i] \quad (6.3)$$

Varianca signala je srednje kvadratično odstopanje od srednje vrednosti signala:

$$\sigma_x^2 = \sum_i (x_i - \bar{x})^2 P_x[i] \quad (6.4)$$

Primer Periodični niz pravokotnih impulzov, ki ga podaja slika 2.1, ima samo dve različni vrednosti: 0 in A. Porazdelitev verjetnosti je določena s relativnim časom trajanja impulza:

$$P_x[0] = P(x = 0) = \frac{T - \tau}{T} \quad (6.5)$$

$$P_x[1] = P(x = A) = \frac{\tau}{T} \quad (6.6)$$

Diskretno porazdelitev ima tudi naključni stopničasti signal, ki ga ponazarja slika 7.2.

6.2 Zvezne porazdelitve

Kadar je v zalogi vrednosti neskončno vrednosti na določenem intervalu, je porazdelitev zvezna. Zvezna porazdelitev je predstavljena s funkcijo gostote verjetnosti $p_x(x)$. Funkcija gostote verjetnosti je vedno pozitivna funkcija s ploščino 1:

$$\int_{-\infty}^{\infty} p_x(x)dx = 1 \quad (6.7)$$

Verjetnost nastopanja vrednosti signala na določenem intervalu je določena z integralom funkcije gostote verjetnosti:

$$P(x_1 < x < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} p_x(x)dx \quad (6.8)$$

Največkrat nas zanima kumulativna verjetnost, ki predstavlja verjetnost, da je vrednost signala manjša od določene mejne vrednosti $x = x_m$:

$$F_x(x_m) = P(x < x_m) = \int_{-\infty}^{x_m} p_x(x)dx \quad (6.9)$$

S pomočjo funkcije porazdelitve gostote verjetnosti $p_x(x)$ lahko izrazimo srednjo vrednost signala \bar{x} , povprečno moč signala \bar{x}^2 in varianco signala σ_x^2 :

$$\bar{x} = \int_{-\infty}^{\infty} xp_x(x)dx \quad (6.10)$$

$$\bar{x}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p_x(x)dx \quad (6.11)$$

$$\sigma_x^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \bar{x})^2 p_x(x)dx \quad (6.12)$$

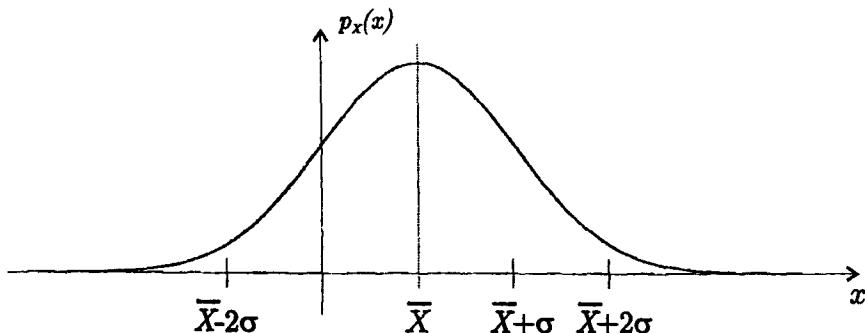
Primer Iz časovnega poteka trikotnega signala, ki prehaja po vrednosti med $x = -A$ in $x = A$ lahko ugotovimo enakomerno porazdelitev verjetnosti $p_x(x) = \frac{1}{2A}$. Moč trikotnega signala lahko izračunamo na osnovi funkcije gostote verjetnostne porazdelitve po enačbi 6.11:

$$\bar{x}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p_x(x)dx = \frac{1}{2A} \int_{-A}^A x^2 dx = \frac{1}{3} A^2 \quad (6.13)$$

6.2.1 Gaussova porazdelitev

Nekateri motilni signali v komunikacijah imajo porazdelitev gostote verjetnosti zelo podobno Gaussovemu porazdelitvi. Razlog za to je potrebno pripisati dejству, da so takšni signali pridobljeni s seštevanjem velikega števila neodvisnih komponent. Termični šum je posledica izjemno velikega števila izvorov (elektronov), zato ima Gaussovovo porazdelitev amplitudo. Gaussova ali normalna porazdelitev je podana z eksponentnim potekom:

$$p_x(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}} e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{\sigma_x^2}} \quad (6.14)$$



Slika 6.1 – Gaussova ali normalna porazdelitev gostote verjetnosti

Potek Gaussove porazdelitve je prikazan na sliki 6.1. Določata ga srédnja vrednost \bar{x} in varianca σ_x^2 .

Verjetnost, da signal x zavzame vrednost na simetričnem intervalu okoli srednje vrednosti med $\bar{x} - k\sigma_x$ in $\bar{x} + k\sigma_x$ lahko izrazimo po parametru k s pomočjo dveh sorodnih funkcij:

$$P(\bar{x} - k\sigma_x < x < \bar{x} + k\sigma_x) = \Phi(k) = \operatorname{erf}\left(\frac{k}{\sqrt{2}}\right) \quad (6.15)$$

Funkcijo $\Phi(k)$ imenujemo verjetnostni integral, $\operatorname{erf}(k)$ pa je funkcija napake. Parameter k podaja normirani odmik mejne vrednosti x_m od srednje vrednosti \bar{x} :

$$k = \frac{x_m - \bar{x}}{\sigma_x} \quad (6.16)$$

Gaussov verjetnostni integral je izračunljiv numerično. Njegove vrednosti za nekatere konstante k so podane v tabeli.

k	$\Phi(k)$
0,5	0,3829
1,0	0,6827
1,5	0,8664
2,0	0,9545
2,5	0,9876
3,0	0,9973
3,5	0,99953
4,0	0,99994

7 Analiza naključnih signalov

Periodični in aperiodični signali imajo določen časovni potek. Pri naključnih signalih časovni potek ni določen, poznamo pa nekatere statistične lastnosti.

7.1 Avtokorelacijska funkcija naključnega signala

Povprečna moč naključnega signala je definirana z izrazom:

$$\overline{x(t)^2} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x^2(t) dt. \quad (7.1)$$

Naključni signal ima definirano tudi avtokorelacijsko funkcijo:

$$r_{xx}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)x(t+\tau) dt. \quad (7.2)$$

Avtokorelacijska funkcija je podobno kot pri periodičnih signalih soda funkcija in vrednost avtokorelacijske funkcije pri odmiku $\tau = 0$ je enaka moči signala:

$$r_{xx}(0) = \overline{x(t)^2}. \quad (7.3)$$

7.2 Močnostni spekter naključnega signala

Močnostni spekter naključnega signala je Fourierov transform avtokorelacijske funkcije. Ker je avtokorelacijska funkcija realna in soda funkcija časa, je močnostni spekter soda in realna funkcija frekvence:

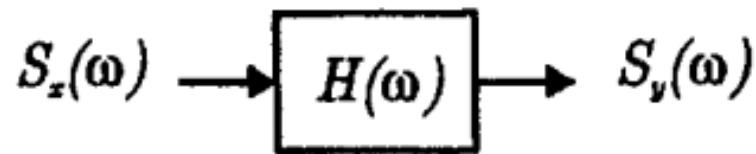
$$S_x(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} r_{xx}(t) e^{-j\omega t} dt = 2 \int_0^{\infty} r_{xx}(t) \cos(\omega t) dt \quad (7.4)$$

Tudi za naključne signale velja Parsevalov izrek, ki določa povprečno moč v frekvenčnem prostoru:

$$\overline{x(t)^2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) d\omega \quad (7.5)$$

7.3 Filtriranje naključnega signala

Močnostni spekter naključnega signala se po prehodu signala skozi linearни sistem spremeni, kot ponazarja slika 7.1. Spekter naključnega signala na izhodu linearnega signala



Slika 7.1 – Filtriranje naključnega signala

s prevajalno funkcijo $H(\omega)$ je enak:

$$S_y(\omega) = S_x(\omega)|H(\omega)|^2. \quad (7.6)$$

Močnostni spekter naključnega signala se po prevajanju skozi linearни sistem množi s kvadratom absolutne vrednosti prevajalne funkcije.

8 Prenos diskretnih signalov

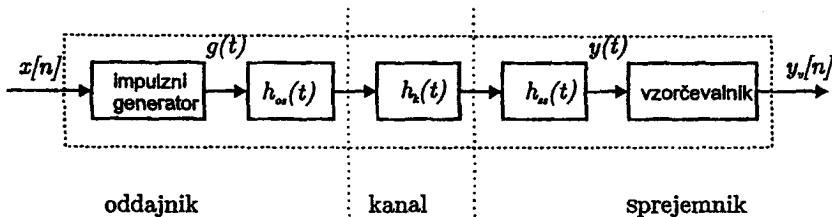
8.1 Simbolna frekvenca

V digitalnih komunikacijah prenašamo zaporedja simbolov, ki si sledijo v enakomernem časovnem razmiku T_s . Simboli so izbrani signali impulzne oblike z omejenim časom trajanja. Frekvenco oddajanja simbolov imenujemo simbolna frekvenca:

$$f_s = \frac{1}{T_s} \quad (8.1)$$

8.2 Intersimbolna interferenca

Po prehodu simbolov preko kanala se signali popačijo. Zaradi razprtitev signala ali raztega po časovni osi nastopi prekrivanje signalov v sprejemniku. Posledica je motnja med simboli, ki jo imenujemo intersimbolna interferenca. Za analizo učinka prekrivanja impulzov uporabimo model prenosnega sistema, ki ga podaja slika 8.1.



Slika 8.1 – Prenos diskretnih signalov

V oddajniku se na osnovi diskretnega niza števil $x[n]$ generira uteženi niz δ impulzov:

$$g(t) = \sum_n x[n] \delta(t - nT_s) \quad (8.2)$$

Obliko impulzov določa sistemski funkcija oddajnega sita $h_{os}(t)$, vpliv kanala pa določa sistemski funkcija kanala $h_k(t)$. Vsak sprejemnik mora zaradi šuma na kanalu imeti na vhodu tudi sprejemno sito z določeno sistemsko funkcijo $h_{ss}(t)$. Signal prehaja skozi vsa tri sita, zato velikost intersimbolne interference izrazimo na podlagi skupne sistemski funkcije oddajnega sita, kanala in sprejemnega sita:

$$h(t) = h_{os}(t) * h_k(t) * h_{ss}(t) \quad (8.3)$$

Signal pred vzorčevalnikom v sprejemniku izrazimo s skupno sistemsko funkcijo:

$$y(t) = \sum_n x[n]h(t - nT_s) \quad (8.4)$$

Na izhodu vzorčevalnika dobimo niz vzorcev $y_v[m]$:

$$y_v[m] = y(mT_s + t_0) = \sum_n x[n]h((m-n)T_s + t_0) = \sum_n x[m-n]h(nT_s + t_0) \quad (8.5)$$

Zakasnitev t_0 prilagodimo tako, da zajamemo maksimalne vrednosti odziva. Vrednost vzorca $y_v[m]$ ni odvisna samo od želenega simbola $x[n = m]$, pač pa tudi od vseh sosednih simbolov:

$$y_v[m] = x[m]h(t_0) + \sum_{n \neq 0} x[m-n]h(nT_s + t_0) \quad (8.6)$$

Drugi člen v enačbi 8.6 je motnja, ki jo imenujemo intersimbolna interferenca.

8.3 Nyquistov kriterij za prenos brez ISI

Intersimbolne interference ne bo le v primeru, če je drugi člen v enačbi 8.6 vedno enak nič. Pogoj imenujemo Nyquistov kriterij za prenos brez intersimbolne interference:

$$h(nT_s + t_0) = K\delta[n] \quad (8.7)$$

V frekvenčnem prostoru lahko izrazimo isti pogoj za vzorčeno skupno prevajalno funkcijo $H_\delta(\omega)$, ki je Fourierov par vzorčenemu impulznemu odzivu $h_\delta(t) = K\delta(t)$. Vzorčena skupna prevajalna funkcija sistema, ki ne vnaša intersimbolne interference mora biti konstanta:

$$H_\delta(\omega) = \frac{1}{T} \sum_k H(\omega - k\omega_s) = K \quad (8.8)$$

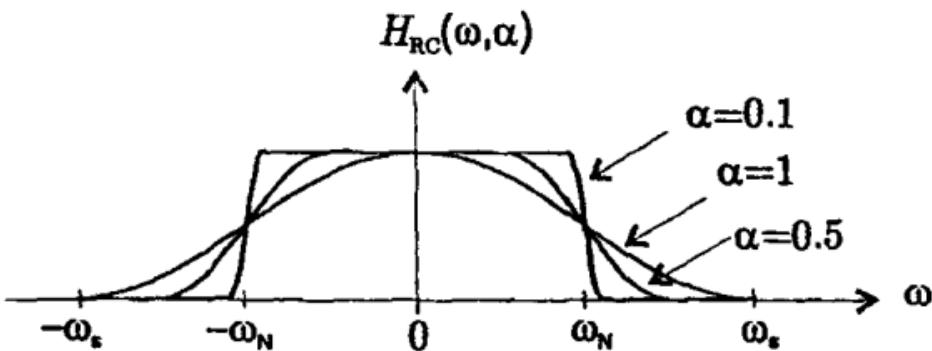
8.3.1 Minimalni frekvenčni pas

Obstaja neskončno mnogo prevajalnih funkcij $H(\omega)$, ki izpolnjujejo kriterij 8.8. Najožji frekvenčni pas ima funkcija idealnega nizkega sita z mejno frekvenco $\omega_{zg} = \frac{1}{2}\omega_s$. Za prenos znakov f_s znakov v sekundi teoretično potrebujemo najmanj $f_{zg} = \frac{1}{2}f_s$, širok frekvenčni pas. Polovico simbolne frekvence zato imenujemo tudi Nyquistova frekvenca: $f_N = \frac{1}{2}f_s$.

8.3.2 Načrtovanje skupne prevajalne funkcije

Pri načrtovanju oddajnega in sprejemnega sita se pogosto uporablja družino funkcij dvignjenega kosinusa, ki izpolnjujejo pogoj za prenos brez intersimbolne interference.

$$H_{RC}(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{za } 0 \leq |\omega| < \omega_N(1 - \alpha) \\ \frac{1}{2}(1 + \cos(\frac{\pi}{2\alpha}(|\frac{\omega}{\omega_N}| - (1 - \alpha)))), & \text{za } \omega_N(1 - \alpha) \leq |\omega| \leq \omega_N(1 + \alpha) \\ 0, & \text{za } |\omega| > \omega_N(1 + \alpha) \end{cases} \quad (8.9)$$



Slika 8.2 – Prevajalne funkcije dvignjenega kosinusa

Poteke funkcij dvignjenega kosinusa 8.9 podaja slika 8.2. Parameter α določa frekvenčno širino skupne prevajalne funkcije in se lahko nahaja v območju med 0 in 1. Idealno nizko sito je poseben primer funkcije 8.9 pri vrednosti $\alpha = 0$. Fourierovi transformi prevajalnih funkcij 8.9 izpolnjujejo pogoj 8.7, zato jih imenujemo tudi Nyquistovi impulzi:

$$h_{RC}(t) = \frac{\sin(\omega_N t)}{\omega_N t} \frac{\cos(\alpha \omega_N t)}{1 - \left(\frac{2\alpha \omega_N t}{\pi}\right)^2} \quad (8.10)$$

9 Kodiranje informacij

9.1 Dogodek in informacija

Izhajamo iz definicije za mero informacije, ki jo je prvi podal C.E. Shannon:

$$I(\alpha) = \log_2 \frac{1}{P(\alpha)} \quad (9.1)$$

Definicija 9.1 izhaja iz temeljnih ugotovitev: informacija o dogodku α je obratno sorazmerna verjetnosti dogodka in informacije o neodvisnih dogodkih se seštevajo.

Za primer vzemimo metanje kocke: vsak met kocke tako nosi $\log_2(6)$ bitov informacije in zaporedje N metov kocke, ki ga lahko predstavimo kot naključni niz N števil $\in (1..6)$. Zaporedje metov kocke nosi $N \log_2(6) \doteq 2.58N$ bitov informacije.

9.2 Entropija izvora

Komunikacijski izvor oddaja zaporedje neodvisnih simbolov, ki imajo različno verjetnost nastopanja, zato so tudi informacije o simbolih med seboj različne. Zanima nas predvsem povprečna informacija, ki jo imenujemo entropija izvora:

$$H = \overline{I(\alpha_i)} = \sum_i P(\alpha_i) \log_2 \frac{1}{P(\alpha_i)} \quad (9.2)$$

Za primer procesa metanja poštene kocke je povprečna informacija o metu enaka posamičnim informacijam: $H = 2.58$ bit.

9.3 Izvorno kodiranje in redundanca

Teorem o izvornem kodiraju določa minimalno dolžino zapisa informacije na izvoru. Vsako zaporedje znakov je mogoče brez izgube informacije kodirati v novo zaporedje bitov tako, da povprečno število bitov ni manjše od entropije niza znakov. Povprečna dolžina kode na izhodu kodirnika je torej lahko večja ali enaka entropiji izvora. Razliko med povprečno dolžino kode in entropijo imenujemo tudi redundanca R :

$$R = 1 - \frac{H}{H_{max}} \quad (9.3)$$

Če na primer vsak met kocke namesto z $\log_2 6$ kodiramo s tremi biti, je redundanca na izhodu kodirnika približno 13.8 odstotka. Entropijsko kodiranje uporablja princip dodeljevanja dolžine kode simbolov v sorazmerju z informacijo, ki jo simbol nosi. Primer entropijskega kodiranja je Huffmanovo kodiranje.

9.4 Huffmanova koda

Ideja: Simbolu z največjo informacijo (najmanjšo verjetnostjo) priredimo najdaljšo kodo in obratno. Postopek dodeljevanja kod je sledeč:

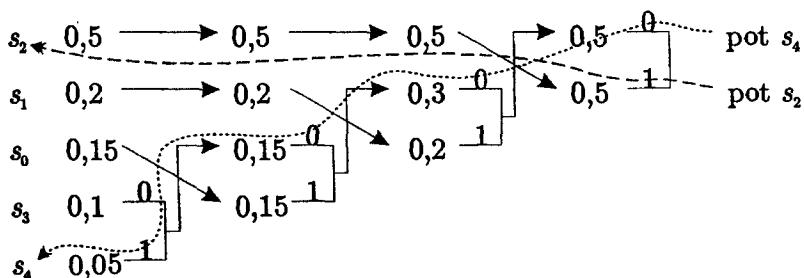
1. Simbole uredimo glede na njihovo pogostnost (verjetnost),
2. simboloma z najmanjšo verjetnostjo pripisemo vrednosti 0 in 1,
3. ta dva simbola združimo v nov simbol z verjetnostjo, ki je vsota verjetnosti združenih simbolov,
4. postopek ponavljamo, dokler nam ne ostaneta le še dva simbola.

Kodo za vsak simbol dobimo, tako da v obratnem vrstnem redu preberemo zaporedje bitnih vrednosti, ki smo mu jih dodeljevali v postopku združevanja. Postopek je najlaže ponazoriti na primeru.

Primer: Določi Huffmanovo kodo, izračunaj povprečno dolžino Huffmanove kode in entropijo izvora.

Simbol	Verjetnost
s_0	0,15
s_1	0,2
s_2	0,5
s_3	0,1
s_4	0,05

Simbole najprej uredimo glede na njihovo verjetnost, od simbola z največjo verjetnostjo, do simbola z najmanjšo verjetnostjo. Sledimo zgoraj opisanemu postopku združevanja simbolov, ki je prikazan na sliki 9.1. Na koncu preberemo kode simbolov in jih zapišemo v tabelo. Dobimo:

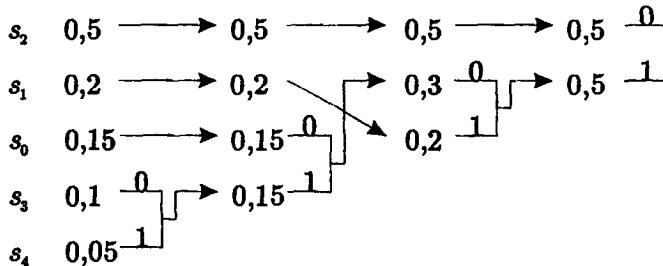


Slika 9.1 – Postopek določanja Huffmanove kode

Simbol	Verjetnost	Koda
s_0	0,15	001
s_1	0,2	01
s_2	0,5	1
s_3	0,1	0000
s_4	0,05	0001

Na sliki 9.1 je prikazano tudi določanje kode dveh simbolov. Če sledimo poti simbolov s_2 in s_4 , vidimo da preberemo kodo posameznega simbola od zadaj naprej (v smeri puščice).

Huffmanova koda ima dve variaciji, ki se med seboj ločita glede na to kako uredimo združene simbole z enako verjetnostjo. V zgornjem primeru smo združeno verjetnost vedno uvrstili nad preneseno verjetnost nezdruženega simbola. Na primer, ko smo združili simbola s_3 in s_4 , smo združeno verjetnost 0,15 uvrstili nad simbol s_0 z enako verjetnostjo. V spodnjem primeru pa naredimo ravno obratno. Slika 9.2 prikazuje drugo variacijo, tabela pod njo pa pripadajoče Huffmanove kode. Obe variaciji sta si enakovredni.



Slika 9.2 – Postopek določanja Huffmanove kode - variacija 2

Simbol	Verjetnost	Koda
s_0	0,15	100
s_1	0,2	11
s_2	0,5	0
s_3	0,1	1010
s_4	0,05	1011

Povprečna dolžina kode je podana z izrazom:

$$\bar{L} = \sum_i P(s_i)L_i$$

kjer je $P(s_i)$ verjetnost pojavljanja simbola s_i in L_i njegova dolžina v bitih. Za naš primer je $\bar{L} = 1,95$ bitov. Izračunajmo še entropijo izvora, ki je podana kot:

$$H = \sum_i P(s_i) \log_2 \left(\frac{1}{P(s_i)} \right)$$

in je za naš primer $H = 1,92$. Vidimo, da je povprečna dolžina Huffmanove kode zgolj za 0,03 ali 1,6 % večja od entropije izvora.

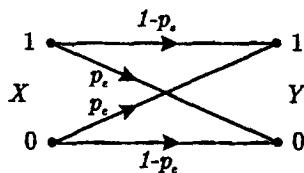
10 Prenos informacij

10.1 Kapaciteta komunikacijskega kanala

Kapaciteta komunikacijskega kanala je maksimalna povprečna vzajemna informacija med izhodom in vhodom, kar ustreza količini informacije, ki jo je kanal sposoben prenesti brez izgub.

10.1.1 Binarni simetrični kanal

Najbolj preprost model informacijskega kanala je binarni simetrični kanal (BSK), ki ga podaja graf na sliki 10.1. Kapaciteto kanala ugotavljamo z analizo vzajemne informacije



Slika 10.1 – Model binarnega simetričnega kanala

med izhodom in vhodom kanala. Povzemimo le rezultat analize, ki je podana v učbeniku Osnove telekomunikacij.

$$C(p_e) = (1 - p_e) \log_2(2(1 - p_e)) + p_e \log_2(2p_e) \quad (10.1)$$

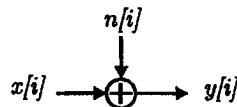
Kapaciteta BSK podaja teoretično maksimalno preneseno informacijo za primer maksimalne entropije na vhodu kanala. Binarna spremenljivka na vhodu mora torej imeti enakomerno porazdelitev verjetnosti obeh simbolov. Največja kapaciteta BSK je en bit za vsak oddani znak.

Primer: Pri prenosu niza binarnih znakov nastopajo napake z verjetnostjo $p_e = \frac{1}{100}$. Predpostavimo, da je model prenosnega kanala BSK z enakomerno porazdelitvijo vhodne spremenljivke. Koliko informacije dobimo na izhodu kanala po prenosu vsakih $N=1000$ znakov ?

Rešitev: Vsak znak na vhodu nosi povprečno en bit informacije. Na vsakih 1000 znakov je povprečno 10 znakov prenesenih z napako. Po enačbi 10.1 izračunamo kapaciteto BSK kanala za dani primer verjetnosti napak: $C(p_e) = 0.919$ bit. Zaporedje 1000 znakov prenese po kanalu povprečno največ 919 bitov informacije.

10.1.2 Gaussov kanal

Pri obravnavi lastnosti fizikalnega komunikacijskega kanala je šum na kanalu zvezna spremenljivka. Najbolj pogost model zveznega kanala, ki omogoča analizo vpliva šuma je Gaussov komunikacijski kanal, ki ga ponazarja slika 10.2. Signalu oddajnika x se na



Slika 10.2 – Model Gaussovega kanala

kanalu prišteva šum z Gaussovo verjetnostno porazdelitvijo. Izračun vzajemne informacije temelji na poznavanju verjetnostnih porazdelitev spremenljivk na vhodu in na izhodu kanala, ter pogojne verjetnosti $p_{y|x}(x, y)$, ki imajo vse Gaussovo porazdelitev. Maksimalna vzajemna informacija je dosežena pri pogoju maksimalne entropije na vhodu in ravno Gaussova naključna spremenljivka največje razmerje med entropijo in močjo. Kapaciteta Gaussovega kanala je določena z razmerjem moči signala σ_x^2 in moči šuma σ_n^2 :

$$C = \frac{1}{2} \log_2 \left(1 + \frac{\sigma_x^2}{\sigma_n^2} \right) \quad (10.2)$$

Na danem kanalu se pri pogoju $\sigma_x^2 \gg \sigma_n^2$ kapaciteta povečuje logaritemsko z močjo signala oddajnika. Če želimo povečati kapaciteto za en bit, moramo štirikrat povečati moč oddajnika.

Primer: Kakšen mora biti signal na vhodu Gaussovega kanala z varianco šuma $\sigma_n^2 = 1$, če želimo, da je kapaciteta kanala $C = 2$ bit.

Rešitev: Kapaciteta kanala je odvisna od moči vhodnega signala. Vhodni signal mora imeti Gaussovo porazdelitev, potrebno moč pa lahko izrazimo iz povezave po enačbi 10.2:

$$\sigma_x^2 = \sigma_n^2 (2^{2C} - 1) = 15 \sigma_n^2 \quad (10.3)$$

Ugotovimo lahko, da mora biti za dani primer moč vhodnega signala petnajstkrat večja od moči šuma, poleg tega pa mora vhodni signal imeti normalno porazdelitev verjetnosti.

10.2 Maksimalni informacijski pretok

Kapaciteta kanala po enačbi 10.2 podaja maksimalno število bitov, ki jih je preko kanala mogoče prenesti povprečno z enim znakom. Maksimalni informacijski pretok je produkt kapacitete kanala in maksimalne simbolne hitrosti:

$$r = C f_{smax} \quad (10.4)$$

Če želimo dodati časovno dimenzijo pri ocenjevanju zmogljivosti kanala pri prenosu v osnovnem pasu, moramo upoštevati še omejitev za prenos brez intersimbolne interference. V skladu z Nyquistovim kriterijem simbolna hitrost ne more biti večja od dvakratne pasovne širine kanala B :

$$f_{smax} = 2B \quad (10.5)$$

Maksimalni informacijski pretok po kanalu dobimo z upoštevanjem 10.2 in 10.5 v enačbi 10.4:

$$r = B \log_2 \left(1 + \frac{\sigma_x^2}{\sigma_n^2} \right) \quad (10.6)$$

Rezultat velja ob upoštevanju pogoja, da je razmerje med gostoto signala in gostoto šuma konstantno:

$$\frac{S(\omega)}{N(\omega)} = \frac{\sigma_x^2}{\sigma_n^2} \quad (10.7)$$