

OSNOVE TELEKOMUNIKACIJ I

3

Laboratorijske vaje

TK

Šolsko leto 2008 / 2009
Izvajalec Anton Umek

Avtor dokumenta Vesna Koderman
Skeniranje Simon Kovše



UREJANJE DOKUMENTA

VERZIJA	01.01
DATUM	17.01.2010

OPOMBE

--

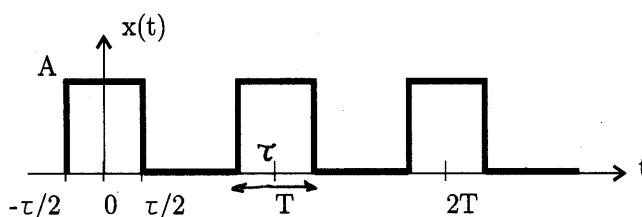
1 Analiza periodičnih signalov

Periodični signal $x(t)$ je vlak pravokotnih impulzov:

$$T = 1 \text{ ms}$$

$$\tau = \frac{T}{5}$$

$$V = 1$$



Slika 1 – Vlak pravokotnih impulzov.

Naloge:

1. Izračunajte in narišite potek amplitudnega spektra in potek močnostnega spektra signala!
2. Do katere frekvence se nahaja 95% moči signala? *0.95 P_x = filter = trividen*
3. Vlak pravokotnih impulzov $x(t)$ vodimo skozi nizko sito z mejno frekvenco $f_{zg} = \frac{5.5}{T}$. Narišite potek signala $y(t)$ na izhodu sita! (do 5. harmonike komponente)

Naloge ponovite tudi za primere:

$$\tau = \frac{T}{2}, \tau = \frac{T}{10} \text{ in } \tau = \frac{T}{20}$$

$\omega_0, 2\omega_0, 3\omega_0, 4\omega_0, 5\omega_0$

učinek filtriranja: sestajemo določeno št. harmoničnih komponent (+ upoštevamo popačenje)

Navodila: Izračunamo kompleksni spekter periodičnega signala $x(t)$:

$$X[n] = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

$$X[n] = V \frac{\tau \sin(n\omega_0 \frac{\tau}{2})}{n\omega_0 \frac{\tau}{2}}$$

1. Amplitudni spekter periodičnega signala je absolutna vrednost Fourierovih koeficientov,

$$A[n] = |X[n]|$$

kvadrate komponent amplitudnega spektra $|X[n]|^2$ pa imenujemo močnostni spekter.

2. Srednjo kvadratično vrednost signala imenujemo moč signala. Moč signala je vsota moči posameznih harmonskih komponent:

$$\overline{x(t)^2} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t)^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |X[n]|^2$$

Periodični signali imajo lahko neskončno število harmonskih komponent. Zanima nas število spektralnih komponent K s frekvencami $0, \omega_0, 2\omega_0, \dots, K\omega_0$, ki vsebuje 95% moči signala:

$$\sum_{n=-K}^K |X[n]|^2 = \frac{95}{100} \overline{x(t)^2}$$

3. Periodični signal $x(t)$ lahko izrazimo s spektralnimi komponentami $X[n]$, kar ustreza zapisu kompleksne Fourierove vrste:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X[n] e^{jn\omega_0 t}$$

Frekvenčno omejen signal dobimo s seštevanjem končnega števila N_1 spektralnih komponent:

$$y(t) = \sum_{n=-N_1}^{N_1} X[n] e^{jn\omega_0 t}$$

Rešitve: datoteka otk-vaja1.mcd

Analiza periodičnih signalov

1. Laboratorijska vaja: KOMPLEKSNI ZAPIS FOURIERJEVEGA TRANSFORMA:

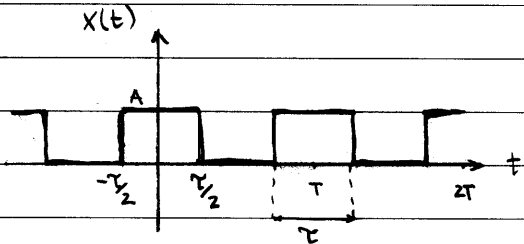
SIGNALI

aperiodični (aperiodični signali omejenega trajanja)

periodični:

$$T; f_0 = \frac{1}{T}, \omega = \frac{2\pi}{T}$$

Skica: vlak pravokotnih impulzov:



$$X[n] = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) e^{-j\omega_0 n t} dt \quad \text{dt ... Fourierjeva transformacija}$$

inverzna Fourierjeva formula:
$$x(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} X[n] e^{j\omega_0 n t}$$

Lasnosti:

→ Realni spekter je sodi parameter funkcije, imaginarni spekter pa je lihi parameter funkcije.

→ $X[-n] = X^*[n]$

Rešitev:

$$1.) \quad X[n] = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cdot \cos(n\omega_0 t) dt + j \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \sin(n\omega_0 t) dt$$

= 0, ker je funkcija na simetričnem intervalu enaka 0!

$$\Rightarrow X[n] = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} A \cdot \cos(n\omega_0 t) dt = \frac{2A}{T} \int_0^{T/2} \cos(n\omega_0 t) dt =$$

$$= \frac{2A}{T} \left(\frac{\sin(n\omega_0 t)}{n\omega_0} \right) \Big|_0^{T/2} = \frac{2A}{T} \cdot \frac{\sin(n\omega_0 T/2)}{n\omega_0} \cdot \frac{T/2}{T/2} = A \cdot \frac{1}{T} \cdot \frac{\sin(n\omega_0 T/2)}{n\omega_0 T/2}$$

to sedaj lahko definiramo kot novo funkcijo S_x

MathCad:

$$S_x(x) = \text{if}(\text{pogoj}, \text{then}, \text{else}) = \text{if}(x=0, 1, \frac{\sin x}{x}) = \text{if}(x \neq 0, \frac{\sin x}{x}, 1)$$

2.) Povprečna moč signala:

$$\overline{x^2(t)} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x^2(t) dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |X[n]|^2$$

... da se moči sestavijo morajo biti

signali ORTOGONALNI ... PARSEVALOV TEOREM

$$\overline{x^2(t)} = \frac{2A^2 \cdot T/2}{T} = \underline{\underline{\frac{T}{T} A^2}} \quad \dots \text{posredna moč v našem primeru}$$

• SIGNAL le na OSNOVNI PERIODI:

$$x_a(t) = \text{if}(|t| < T/2, A, 0) \quad \dots \text{če je } |t| \leq T/2 \text{ ima } x(t) \text{ vrednost } A, \text{ sicer } x(t) = 0.$$

• Napotek za MathCAD: funkcija $m(t, T)$ daje ostatek pri deljenju:
 $x(t) = x_a(\text{mod}(t, T))$

?

• Diskretna funkcija: $X[n] = A^{T/T} \cdot \frac{\sin(n\omega_0 T/2)}{n\omega_0 T/2}$

$$S_x(x) = \text{if}(x=0, 1, \frac{\sin(x)}{x})$$

$$X(n) = A^{T/T} S_x(n\omega_0 T/2)$$

$$n = -10 \dots 10$$

... zanima nas realni del, imaginarni del in faza...

• Parametri: A, T, τ

• MathCAD:

$$A = 1 ; T = 1 ; \tau = T/5 ; \omega_0 = \frac{2\pi}{T} ;$$

$$S_x(x) := \text{if}(x \neq 0, \frac{\sin x}{x}, 1)$$

$$X(n) := A \cdot T/T \cdot S_x(n\omega_0 T/2)$$

$$(n := -10 \dots 10)$$

$$N_m := 20$$

$$n = -N_m \dots N_m \quad (\text{graf} \rightarrow \text{plot } x y)$$

$$P_x := A^2 T/T$$

$$N := 9$$

$$0.95 * P_x =$$

$$X_r(t, N) := \sum_{n=-N}^N X(n) \cdot e^{j\omega_0 n t}$$

$$(X(t) |_{N \rightarrow \infty} = x_r(t))$$

$$t := -T, -0.99T \dots 2T$$

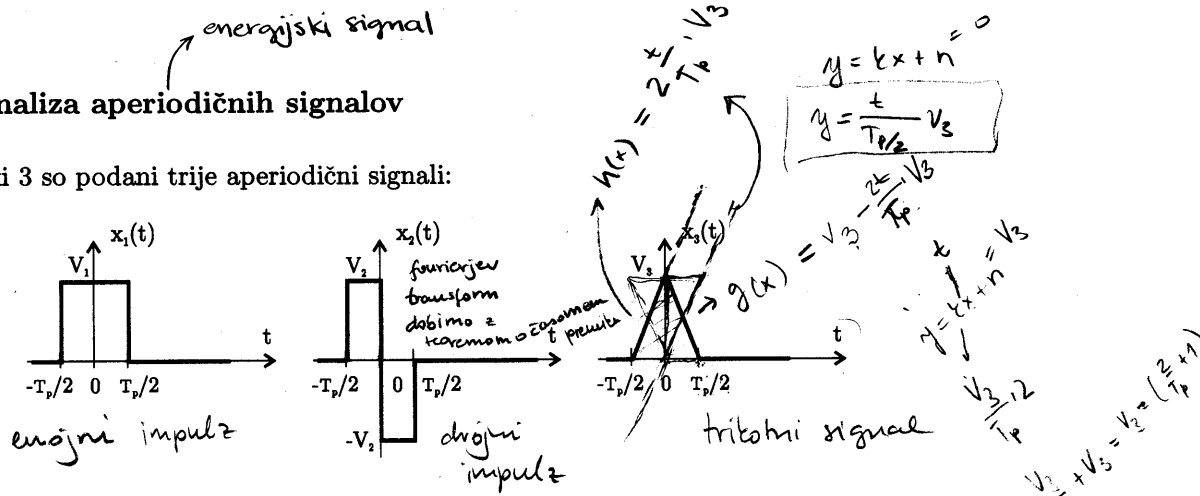
$$(\text{graf} \rightarrow \text{plot } x y)$$

... če τ zmanjšamo, se spekter razširi

$y = kx + n$
 $y = kx + n = 0$

3 Analiza aperiodičnih signalov

Na sliki 3 so podani trije aperiodični signali:



Slika 3 - Aperiodični signali

Širina impulza je pri vseh treh T_p

Naloge:

1. Konstante V_n določite tako, da bodo imeli vsi signali enako energijo $E_1 = E_2 = E_3 = 1$.
2. Izračunajte Fourierove transforme in narišite poteke gostote amplitudnih, faznih in energijskih spektrov signalov ! ✓
3. Primerjajte kumulativne energijske spektre signalov !
4. Izračunajte in narišite poteke križnih korelacij !
5. Izračunajte in narišite poteke avtokorelacijskih funkcij !

Navodila:

1. Energija aperiodičnega signala je enaka:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)^2 dt$$

2. Gostote amplitudnega, faznega in energijskega spektra določa Fourierov transform signala:

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt$$

3. Kumulativni energijski spekter predstavlja energijo signala v navzgor omejenem območju do izbrane mejne frekvence ω_{zg} :

$$S(\omega_{zg}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_{zg}}^{\omega_{zg}} |X(\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\omega_{zg}} |X(\omega)|^2 d\omega$$

$$S(\infty) = E$$

4. Funkcijo križne korelacije med dvema aperiodičnima signaloma iščemo po parametru časovnega zamika τ :

$$r_{1,2}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t)x_2(t + \tau)dt$$

5. Avtokorelacijska funkcija signala $x(t)$ je:

$$r(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x(t + \tau)dt$$

$$r(0) = E$$

Rešitev naloge: otk-vaja3.mcd

2. Laboratorijska vaja : ANALIZA APERIODIČNIH SIGNALOV

- 1.) Amplitude naj bodo take, da imajo vsi trije dani signali enako energijo. Ploščine grafa naj bo pri vseh treh signalih enake.
- 2.) Pogledali bomo protok kolaracijskih funkcij - gre za implementiranje podobnosti signalov. Naprava primerja signale tako, da računa kolaracije. Ta primerjava ne bo OK, če primerjamo signale z različno energijo. Enaka energija je pogoj za računanje kolaracij!

- Najprej določimo amplitude tako, da izračunamo energije $E_1 = E_2 = E_3$

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt \Rightarrow$$

$$E_1 = V_1^2 T_p, \quad E_2 = V_2^2 T_p, \quad E_3 = 2 \int_0^{T_p/2} \left(\frac{2V_3}{T_p} t \right)^2 dt =$$

$$= 2 \cdot 4 V_3^2 \frac{1}{T_p^2} \frac{t^3}{3} \Big|_0^{T_p/2} = 8 V_3^2 \frac{1}{T_p^2} \frac{1}{3} \frac{T_p^3}{8} =$$

$$= \underline{\underline{V_3^2 \cdot T_p \cdot \frac{1}{3}}}$$

Normiramo signal po energiji (jim damo vrednost 1) :

$$E_1 = E_2 = E_3 = E = 1$$

$$\Rightarrow V_1 = \sqrt{\frac{E}{T_p}}; \quad V_2 = \sqrt{\frac{E}{T_p}}; \quad V_3 = \sqrt{\frac{3E}{T_p}}$$

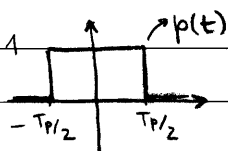
$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

1. SIGNAL:

$$\Rightarrow X_1(\omega) = 2 \int_0^{T_p/2} V_1 \cos(\omega t) dt = 2V_1 \cdot \frac{\sin(\omega t)}{\omega} \Big|_0^{T_p/2} = 2V_1 \cdot \frac{\sin \omega \frac{T_p}{2}}{\omega} \Big|_0^{T_p/2} =$$

$$= 2V_1 \frac{T_p}{2} \cdot \frac{\sin \omega T_p/2}{\omega T_p/2} = \underline{\underline{V_1 \cdot T_p \cdot \frac{\sin(\omega \cdot T_p/2)}{\omega \cdot T_p/2}}}$$

zapišemo:



$$\Rightarrow P(\omega) = T_p \cdot \frac{\sin(\omega T_p/2)}{\omega T_p/2}; \quad V_1 = 1$$

MathCad: $p(t, T_p) := |t| < T_p/2$

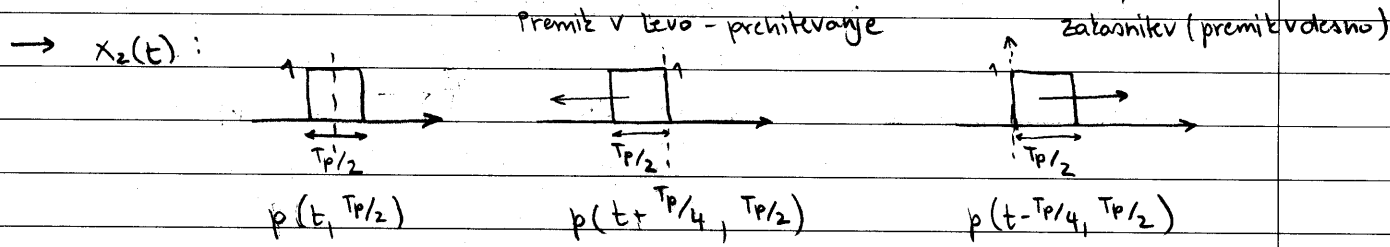
www.stromar.si

$$P(\omega) := T_p \cdot \frac{\sin(\omega T_p/2)}{\omega T_p/2}$$

SPEKTER: $X_1(\omega) = V_1 \cdot P(\omega, T_p)$

$x_2(t)$:

2. SIGNAL: Naredimo premik v levo (prehitvanje signala), da signal osrediščimo. Signal razdelimo na dva dela: prvi del premaknemo v levo, drugega pa v desno (za $T_p/4$) in potem naredimo superpozicijo teh dveh.



SUPERPOZICIJA: $x_2(t) = V_2 \cdot p(t + T_p/4, T_p/2) - V_2 \cdot p(t - T_p/4, T_p/2)$

~ Zanima nas $\mathcal{F}[x_2(t)]$... da to rešimo moramo spoznati lastnost časovnega premika v FT:

ČASOVNI PREMİK: $p(t) \leftrightarrow P(\omega)$
 signal premaknjen za: $p(t - t_0) \leftrightarrow P(\omega) e^{-j\omega t_0}$ (premik v desno)
 $p(t + t_0) \leftrightarrow P(\omega) e^{j\omega t_0}$ (premik v levo)

⇒ $\mathcal{F}[x_2(t)] = X_2(\omega) = V_2 \cdot P(\omega, T_p/2) e^{j\omega T_p/4} - V_2 P(\omega, T_p/2) e^{-j\omega T_p/4}$

Bolj eksplicitno to zapišemo:

$$X_2(\omega) = V_2 (P(\omega, T_p/2) \cdot 2j \sin(\omega T_p/4)) =$$

$$= V_2 \cdot \frac{T_p}{2} \cdot \frac{\sin(\omega \cdot T_p/4)}{\omega \cdot T_p/4} \cdot 2j \cdot \sin(\omega T_p/4) =$$

$$= \underline{\underline{j V_2 \cdot T_p \cdot \frac{\sin^2(\omega \cdot T_p/4)}{\omega \cdot T_p/4}}}$$

(Druga pot: $X_2(\omega) = \int_{-T_p/2}^{T_p/2} x_2(t) \cdot j \sin(\omega t) dt = 2j \int_0^{T_p/2} V_2 \cdot \sin(\omega t) dt = \dots$)

3. SIGNAL $\rightarrow x_2(t)$

$$X_3(\omega) = 2 \int_0^{T_p/2} V_3 (1 - 2t/T_p) \cdot \cos(\omega t) dt = \dots \text{DN}$$

... $X_3(\omega)$ se da lepo rešit, če uporabimo lastnost integracije v frekvenčnem prostoru...

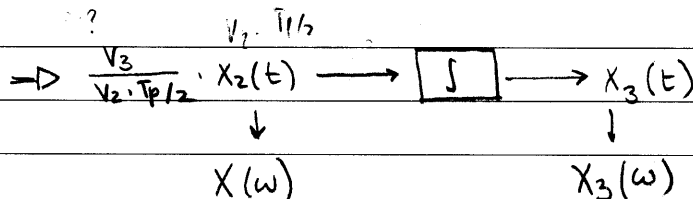
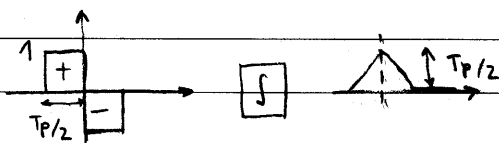
$$x(t) \longleftrightarrow X(\omega) \quad ; \quad \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \longleftrightarrow \frac{X(\omega)}{j\omega}$$

$$x(t) \rightarrow \boxed{\int} \rightarrow ?$$

... gre za izločanje visokofrekvenčnih impulzov

- povprečuje ... pordavi mitte frekvence ...

... Višja kot je frekvenca manjša je vrednost na izhodu integratorja...



$$\frac{X_2(\omega)}{j\omega} \cdot \frac{V_3}{V_2 \cdot T_p/2} \Rightarrow X_3(\omega) = \frac{V_3}{V_2 \cdot T_p/2} \cdot \frac{1}{j\omega} \cdot X_2(\omega)$$

$$X_2(\omega) = j V_2 \cdot T_p \frac{\sin(\frac{\omega T_p}{4})}{\omega T_p/4} \cdot \sin(\frac{\omega T_p}{4})$$

$$\Rightarrow X_3(\omega) = \frac{V_3}{V_2 \cdot T_p/2} \cdot \frac{1}{j\omega} \cdot j V_2 \cdot T_p \cdot \frac{\sin^2(\frac{\omega T_p}{4})}{\omega T_p/4} = \frac{T_p \cdot V_3}{2} \left(\frac{\sin(\frac{\omega T_p}{4})}{\omega T_p/4} \right)^2$$

... Dobilni smo vse tri spektre: $X_1(\omega)$, $X_2(\omega)$, $X_3(\omega)$

MathCAD ... naredimo 6 korakov:

1.) $E = 1$; $T_p = 1$; $t := -2T_p, -1.99 \cdot T_p, \dots, 2 \cdot T_p$

2.) $V_1 = \sqrt{E/T_p}$; $V_2 = \sqrt{E/T_p}$; $V_3 = \sqrt{3E/T_p}$

3.) $p(t, T_p) := |t| < T_p/2$

4.) $X_1(t) = V_1 \cdot p(t, T_p)$

$X_2(t) = V_2 (p(t + T_p/4, T_p/2) - p(t - T_p/4, T_p/2))$

5.) $\left(P(\omega, T_p) := T_p \cdot \frac{\sin(\omega T_p/2)}{\omega T_p/2} \right)$ $S_x(x) = \text{if}(x \neq 0, \frac{\sin x}{x}, 1)$

$P(\omega, T_p) := T_p \cdot S_x(\omega T_p/2)$

$X_1(\omega) := V_1 \cdot P(\omega, T_p)$

$X_2(\omega) := j \cdot V_2 \cdot T_p \cdot S_x(\omega \frac{T_p}{4}) \cdot \sin(\frac{\omega T_p}{4})$

$X_3(\omega) := \frac{V_3}{2} \cdot T_p \cdot (S_x(\omega \frac{T_p}{4}))^2$

$\omega_1 = \frac{2\pi}{T_p}$

$\omega = 0, \frac{\omega_1}{100}, \dots, 4\omega_1$

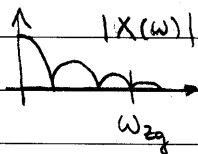
6.) GRAF : plot XY

• Primerjanje kumulativnih energijskih spektrov signalov:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega$$

$$S_x(\omega = \infty) = E$$

$$S_x(\omega_{zg}) = 2 \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{\omega_{zg}} |X(\omega)|^2 d\omega \quad \omega_{zg} \dots \omega_{zganjji}$$



MathCAD:
$$S1(\omega_{zg}) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\omega_{zg}} (|X1(\omega)|)^2 d\omega$$

$$\omega_{zg} = 0, \frac{\omega_1}{100} \dots \omega_1 \quad \dots \text{graf} \dots \text{xy plot}$$

• Potek križnih koleracij:

$$r_{12}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t) \cdot x_2(t+\tau) dt \quad \dots \text{koleracija}$$

$$r_n(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t) \cdot x_1(t+\tau) dt \quad \dots \text{avtokoleracija}$$

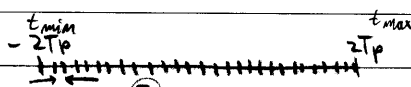
KOLERACIJA: parameter funkcije r_{12} je τ (premit), 1. funkcijo primerjamo z 2. funkcijo premaknjeno za τ !

AVTOKOLERACIJA: primerjamo funkcijo samo s sabo, vendar premaknjeno za τ ...

$$r_n(\tau=0) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt = E \quad \dots \text{povezana z energijo} \dots$$

... Namesto da računamo integral, računamo vsoto ... uporaba numerične integracije ...

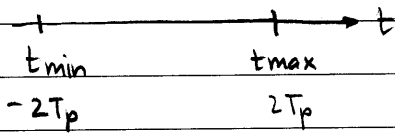
$$\int_{i\Delta t} f(t) dt \approx f(i\Delta t) \Delta t$$



$$\text{www.stromar.si} \Delta t = 4 \tau_p / N$$

$$N = 100$$

... v tem primeru nadomestimo integral z vsoto



$$\rightarrow \Delta t = \frac{t_{\max} - t_{\min}}{N}$$

$N = 100$

$$\rightarrow r_{12}(\tau) = \int_{t_{\min}}^{t_{\max}} x_1(t) \cdot x_2(t + \tau) dt \quad \dots \text{ namesto tega naredimo:}$$

$$\rightarrow r_{12}(\tau) = \Delta t \sum_{n_{\min} = -\frac{N}{2}}^{n_{\max} = \frac{N}{2} - 1} x_1(n\Delta t) \cdot x_2(n\Delta t + \tau) \quad ; \quad \text{graf (xy plot)}$$

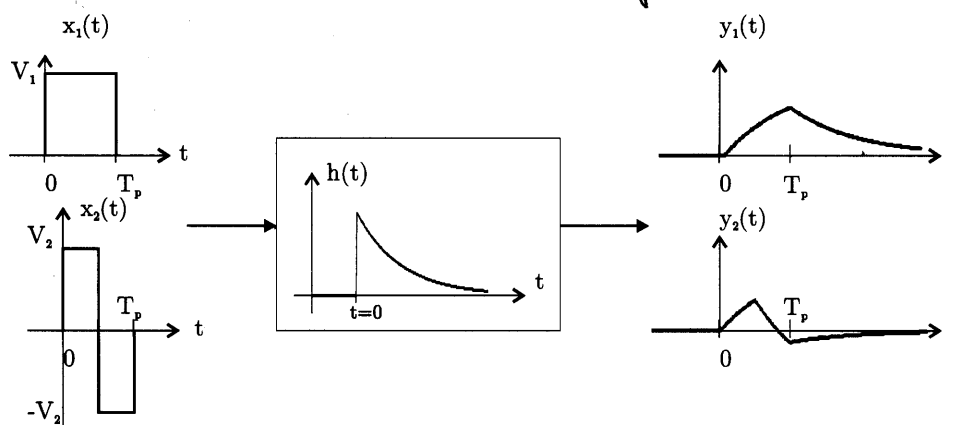
na enak način naredimo tudi za $r_{11}(\tau)$ in $r_{13}(\tau)$!

4 Prevajanje signalov skozi linearne sisteme

Izračunajte odzive linearnega sistema za različne aperioidične signale na vходу. Prenosne lastnosti linearnega sistema določa impulzni odziv:

$$h(t) = U(t)\omega_0 e^{-\omega_0 t} \quad (1)$$

↳ delta impulz!



Slika 4 – Filtriranje signalov

Naloge:

1. Oba odziva $y_1(t)$ in $y_2(t)$ izračunajte najprej s konvolucijo:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau \quad (2)$$

2. Numerično izračunajte približek konvolucije nizov:

$$y(n\Delta t) \approx \Delta t \sum_k x(k\Delta t)h((n-k)\Delta t) \quad (3)$$

3. Izračunajte spekter signala na vходу $X(\omega)$, prevajalno funkcijo linearnega sistema $H(\omega)$ in spekter signala na izhodu:

$$Y(\omega) = X(\omega)H(\omega) \quad (4)$$

4. Signal na izhodu $y(t)$ izračunajte s transformacijo spektra $Y(\omega)$:

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Y(\omega)e^{j\omega t} d\omega \quad (5)$$

Uporabite približek pri računanju integrala:

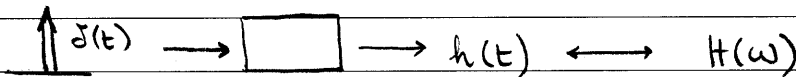
$$y(t) \approx \Delta\omega \sum_k Y(k\Delta\omega)e^{jk\Delta\omega t} \quad (6)$$

Rešitev naloge: otk-vaja4.mcd

3. Lab. vaja: pretekanje signalov skozi linearne sisteme

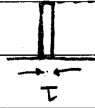
a) $x(t) \rightarrow [h(t)] \rightarrow y(t) = x(t) * h(t)$

diraktor impulz...
 $h(t) = U(t) \cdot \omega_0 e^{-\omega_0 t}$



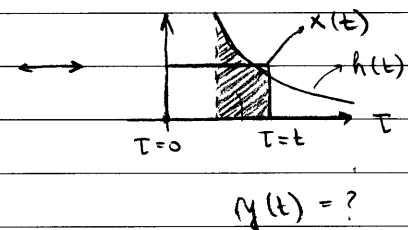
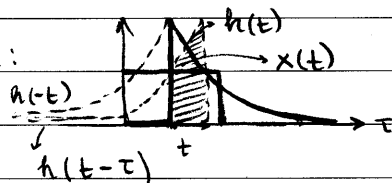
$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$

↳ konstruiramo v frekvenčnem prostoru (omejitve postavljamo v frekv. prostoru)

Npr. i  $\lambda = 1/T \rightarrow$ Če ta impulz ožamo, se odnete širine (T) naprej, odziv pa bistveno ne spreminja.

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) x(t-\tau) d\tau$$

→ Dva različna načina:



$$x_1(t) = \begin{cases} v_1 & 0 < t < T_p \\ 0 & \text{sicer} \end{cases}$$

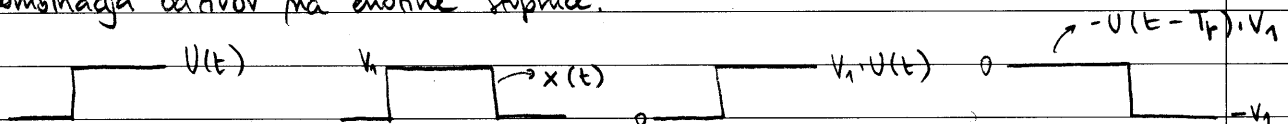
1) $y_1(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) x(t-\tau) d\tau = v_1 \int_0^t h(\tau) d\tau$

$$y_1(t) = v_1 \cdot \omega_0 \int_0^t e^{-\omega_0 \tau} d\tau = v_1 \cdot \omega_0 \left. \frac{e^{-\omega_0 \tau}}{-\omega_0} \right|_0^t = v_1 (1 - e^{-\omega_0 t}) ; 0 < t < T_p$$

2) $y_2(t) = v_1 \cdot \omega_0 \int_{t-T_p}^t h(\tau) d\tau = v_1 \cdot \omega_0 \left. \frac{e^{-\omega_0 \tau}}{-\omega_0} \right|_{t-T_p}^t = v_1 (e^{-\omega_0 (t-T_p)} - e^{-\omega_0 t})$

Pogledamo odziv na enotno stopnico ...

Signal na vnosu je linearna kombinacija enotnih stopnic ... Na izhodu je lin. kombinacija odzivov na enotne stopnice.

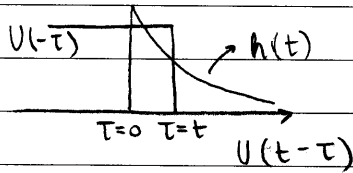


$s(t)$... odziv sistema na primerni enotne stopnice na vnosu

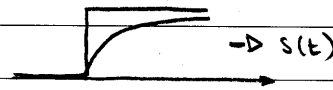
$$x(t) = v_1 (U(t) - U(t - T_p)) ; s(t) = (1 - e^{-\omega_0 t}) \cdot U(t)$$

$$y(t) = V_1 (s(t) - s(t - T_p))$$

$$s(t) = U(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) U(t - \tau) d\tau = \int_0^t \omega_0 e^{-\omega_0 \tau} d\tau =$$



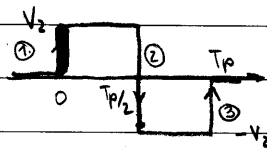
$$= (1 - e^{-\omega_0 t}) \cdot U(t)$$



→ pomnožimo z enotno stopnico

~ Namesto, da računamo konvolucijo v časovnem prostoru, je lažje če računamo produkt v frekvenčnem prostoru: $Y(\omega) = H(\omega) \cdot X(\omega)$... in naredimo obratno inverzno transformacijo

~ Za drugi primer naredimo odziv y_2 s pomočjo linearne kombinacije enotnih stopnic ...



... gre za kombinacijo sestavljeno iz treh delov motinega pulza ...

$$x_2(t) = V_2 (U(t) - 2U(t - T_p/2) + U(t - T_p))$$

$$y_2(t) = V_2 (s(t) - 2s(t - T_p/2) + s(t - T_p))$$

$$u(t) = \begin{cases} 1 & ; t \geq 0 \\ 0 & ; \text{inac} \end{cases}$$

MathCAD:

$$\omega_0 = 3, T_p = 1, V_2 = 1$$

$$h(t) := U(t) \cdot \omega_0 e^{-\omega_0 t}$$

$$U(t) = (t \geq 0) \quad (\dots \text{tako pišemo v mathcadu})$$

$$s(t) = U(t) (1 - e^{-\omega_0 t})$$

$$x_1(t) := V_1 \cdot (U(t) - U(t - T_p))$$

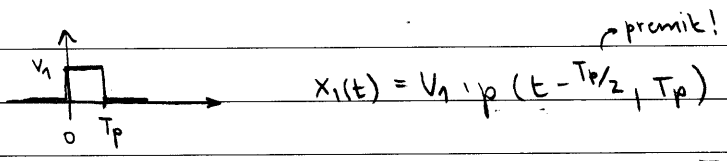
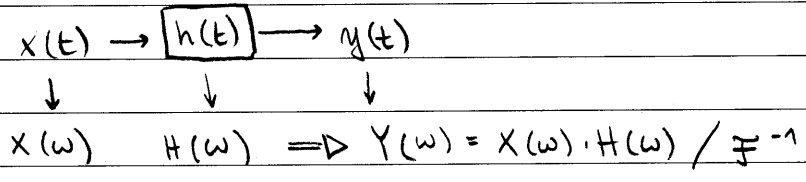
$$x_2(t) := V_2 (U(t) - 2U(t - T_p/2) + U(t - T_p))$$

$$y_1(t) := V_1 (s(t) - s(t - T_p))$$

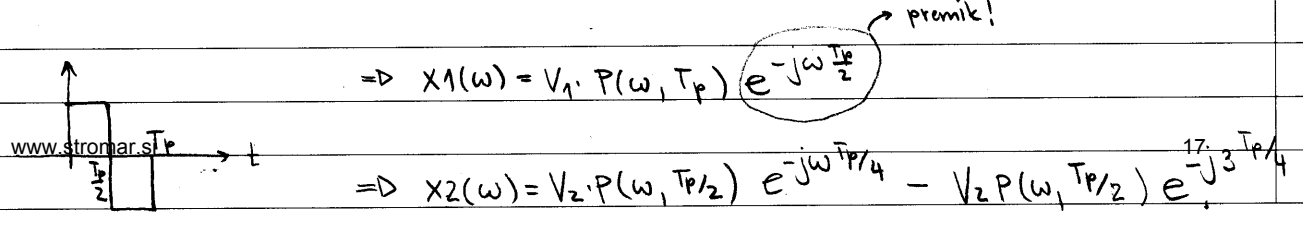
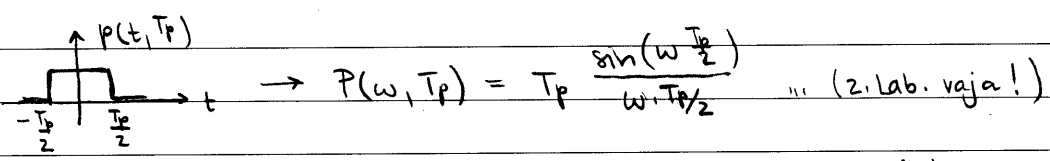
$$y_2(t) := V_2 (s(t) - 2s(t - T_p/2) + s(t - T_p))$$

$$y_1(t) := \int_{t-T_p}^t h(\tau) \cdot x_1(t-\tau) d\tau$$

b) Drugi del malega rešimo tako, da računamo p-frekvenčni prostor. Analitično je rada kar seplete, zato malega rešimo le numerično.



$$x_2(t) = V_2 \cdot p(t - T_p/2, T_p/2) - V_2 \cdot p(t - \frac{3T_p}{4}, T_p/2)$$



→ Potrebujemo še Fourierjev transform prevezjalne funkcije:

$$\begin{aligned}
 H(\omega) &= F(h(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) \cdot e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} M(t) \cdot \omega_0 e^{-\omega_0 t} \cdot e^{-j\omega t} dt = \\
 &= \int_0^{\infty} \omega_0 e^{-t(\omega_0 + j\omega)} dt = \omega_0 \int_0^{\infty} e^{-t(\omega_0 + j\omega)} dt \\
 &= \omega_0 \frac{e^{-t(\omega_0 + j\omega)}}{-(\omega_0 + j\omega)} \Big|_0^{\infty} = \frac{\omega_0}{\omega_0 + j\omega} = \underline{\underline{1/(1 + j\frac{\omega}{\omega_0})}}
 \end{aligned}$$

je 1 in sicer od 0 do ∞ (to upoštevamo v meji!)

$Y_1(\omega) = X_1(\omega) \cdot H(\omega) \Rightarrow$ iz tega bomo izračunali približek $y_1(t)$

$Y_2(\omega) = X_2(\omega) \cdot H(\omega) \rightarrow$... -||- $y_2(t)$

$y_1(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} Y_1(\omega) \cdot e^{j\omega t} d\omega$... približek izračunamo tako da meje spremenimo in izračunamo prednost integrale na nekem intervalu:

MathCAD:

$S_x(x) := \text{if}(x \neq 0, \frac{\sin(x)}{x}, 1)$

$H(\omega) = \frac{\omega_0}{\omega_0 + j\omega}$

$P(\omega) = T_p \cdot S_x(\omega \cdot \frac{T_p}{2})$

$X_1(\omega) = V_1 \cdot P(\omega, T_p) \cdot e^{-j\omega T_p/2}$

$Y_1(\omega) = H(\omega) \cdot X_1(\omega)$

$\omega_m = 10 \cdot \omega_0$

$\omega = -\omega_m, -0,99 \cdot \omega_m, \dots, \omega_m$... (narišes graf: $|Y_1(\omega)|, \omega$)

$y_1(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_m}^{\omega_m} Y_1(\omega) e^{j\omega t} d\omega$

... na enak način izračunaj $y_2(t)$... D.N.!

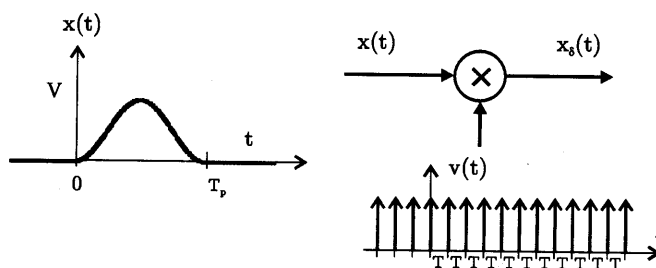
5 Vzorčenje signala

Signal na vhodu vzorčevalnika je oblikovan impulz:

$$x(t) = V_1 p(t, T_p) \frac{1}{2} \left(1 - \cos 2\pi \frac{t}{T_p}\right) \quad (7)$$

Pomožni signal $p(t, T_p)$ je enotni pravokotni impulz s širino T_p :

$$p(t, T_p) = U(t) - U(t - T_p)$$



Slika 5 – Idealno vzorčenje

Naloga: Izračunajte spekter signala na vhodu in na izhodu idealnega vzorčevalnika!

Komentar

1. Vzorčenje signala predstavimo kot množenje signala v časovnem prostoru s periodično vzorčevalno funkcijo $v(t)$:

$$x_s(t) = x(t)v(t) \quad (8)$$

Idealno vzorčenje predstavimo kot množenje z vlakom Diracovih impulzov:

$$v(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \quad (9)$$

2. Spekter vzorčenega signala je po frekvenci periodičen s periodo ω_{vz} :

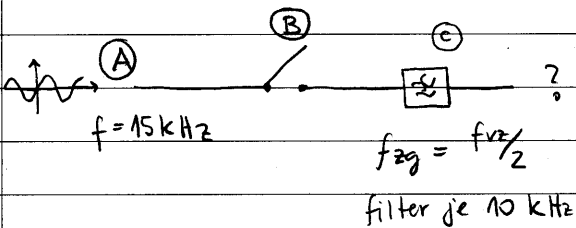
$$X_s(\omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(\omega - k\omega_{vz}) \quad (10)$$

Rešitev naloge: otk-vaja5.mcd

4. Lab. vaja: Vzorčenje signala

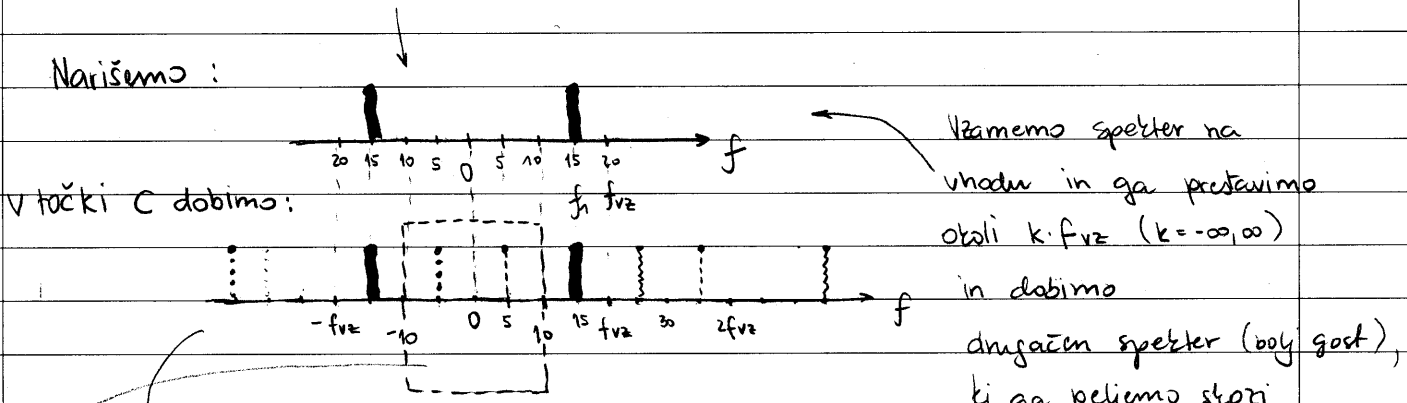
- ~ Vzorčevalna frekvenca mora biti najj 2x večja od vhodne frekvence
- ~ Vzorčni signal peljemo skozi nizko sito ... kaj dobimo na izhodu?

→ Sinusni (harmonični) signal frekvence 15 kHz peljemo skozi nizko sito; -vzorčevalniž ima vzorčno frekvenco 20 kHz:



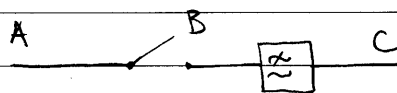
• Pogledamo spekter na vnosu (A) ($f = 15 \text{ kHz}$) ... spekter je periodičen!

Narišemo:



→ To peljemo skozi nizko sito 10 kHz, ki prepusti samo od -10 do +10 kHz

→ To se pelje skozi filter, vse ostalo se odreže! → Na izhodu dobimo harmoničen signal s frekvenco 5 kHz!

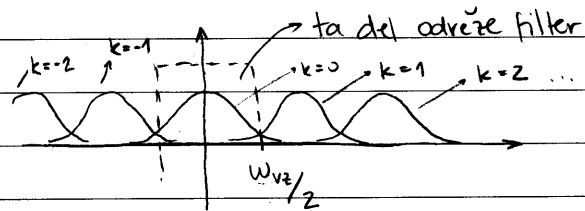


$x(t)$ $x_D(t)$ $x_r(t)$

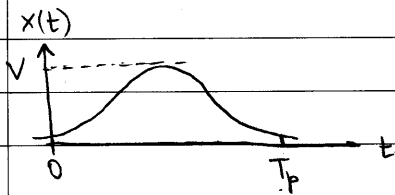
$$X(\omega) \quad X_D(\omega) \quad X_r(\omega) = \begin{cases} X_D(\omega) & \text{za } |\omega| < \frac{\omega_{vz}}{2} \\ 0 & \text{sicer} \end{cases}$$

Spekter originalnega

spekter rekonstruiranega signala

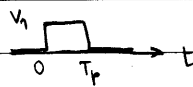


upoštevati moramo vse iste komponente, katerih signal pade noter (N različnih pravokotnih) - pomeni, da te komponente vplivajo na izhod k_{min} in k_{max} sta odvisna od širine originalnega signala, glede na vzročevalno frekvenco...
za naš primer vsaj: $T_{vz} = T_p/3$



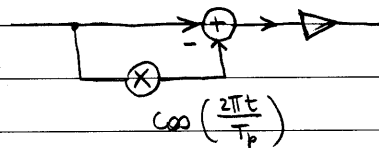
$$x(t) = \begin{cases} \frac{V_1}{2} (1 - \cos(\frac{2\pi t}{T_p})) & \text{za } 0 < t < T_p \\ 0 & \text{sicer} \end{cases}$$

Imamo pravokotni impulz



$$V_1 \cdot p(t, T_p) \leftrightarrow V_1 \cdot P(\omega)$$

Ta spekter bomo lažje izračnali, če bomo upoštevali teorem o modulaciji:



$$x(t) \cdot \cos(\omega_0 t) \leftrightarrow \frac{1}{2} X(\omega + \omega_0) + \frac{1}{2} X(\omega - \omega_0)$$

$$\Rightarrow \frac{V_1}{2} P(\omega + \omega_0) + \frac{V_1}{2} P(\omega - \omega_0) ; \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_p}$$

$$\Rightarrow X(\omega) = \frac{1}{2} V_1 \cdot P(\omega) - \frac{1}{4} V_1 P(\omega + \omega_0) - \frac{1}{4} V_1 P(\omega - \omega_0)$$

$$P(\omega) = T_p \frac{\sin \frac{\omega T_p}{2}}{\omega \cdot \frac{T_p}{2}} \cdot e^{-j\omega T_p/2}$$

... to smo že za pravokotni impulz izpeljali že na prejšnjih vajah!

$$\Rightarrow X_r(\omega) = X_r(\omega) \cdot (|\omega| < \frac{\omega_{vz}}{2}) \quad \dots \text{To MathCad razume!}$$

MathCAD :

$$V_1 := 3 \quad T_p := 1 \quad S_x(x) = \text{if}(x \neq 0, \frac{\sin x}{x}, 1)$$

$$x(t) := \frac{V_1}{2} (1 - \cos(\frac{2\pi t}{T_p})) \cdot (t \geq 0) \cdot (T_p > t)$$

$$t := 0, \frac{T_p}{100}, \dots, 2 \cdot T_p \quad \omega_0 := \frac{2\pi}{T_p}$$

$$P(\omega) := T_p \cdot S_x(\frac{T_p}{2} \omega) e^{-j\omega T_p/2}$$

$$X(\omega) := \frac{V_1}{2} P(\omega) - (\frac{V_1}{4} P(\omega + \omega_0) + \frac{V_1}{4} P(\omega - \omega_0))$$

$$T_{vz} := T_p/5 \quad (\dots \text{izberemo čas vzorčenja})$$

$$\omega_{vz} := 2\pi/T_{vz}$$

$$\omega := 0, \frac{\omega_0}{100}, \dots, 10 \cdot \omega_0 \quad (\text{Narišes grafa: } (x(t), t) \text{ in } (|X(\omega)|, \omega))$$

$$K_{max} := 5 \quad (\dots \text{določiš vzorec} \dots)$$

$$X_{\sigma}(\omega) := \frac{1}{T_{vz}} \sum_{k=-K_{max}}^{K_{max}} X(\omega + k\omega_{vz}) \quad (\text{narišes graf: } (|X_{\sigma}(\omega)|, \omega))$$

$$X_r(\omega) = X_{\sigma}(\omega) \cdot (|\omega| < \frac{\omega_{vz}}{2}) \quad (\text{narišes graf: } (|X_r(\omega)|, \omega))$$

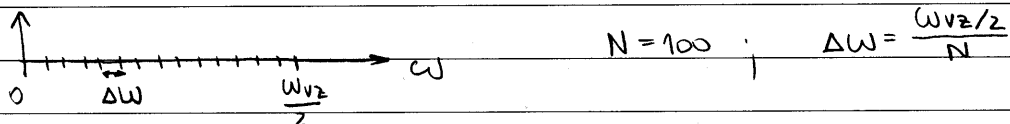
(... Kako vemo, da smo sesteli dovolj komponent? Spekter izhodnega signala mora biti periodičen.)

Racunanje inverznega transforma:

$$X_r(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_r(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \cdot 2 \int_0^{\omega_{vz}/2} [\operatorname{Re}\{X_r(\omega)\} \cos(\omega t) - \operatorname{Im}\{X_r(\omega)\} \sin(\omega t)] d\omega$$

$$\rightarrow X_r(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\omega_{vz}/2} [\operatorname{Re}\{X_r(\omega)\} \cos(\omega t) - \operatorname{Im}\{X_r(\omega)\} \sin(\omega t)] d\omega$$

↳ To bomo rešili numerično ... naredili bomo vsoto namesto integrala:
- interval razdelimo na N delov:

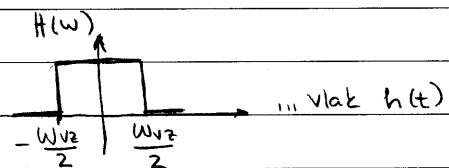


$$\rightarrow X_r(t) \approx \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{N-1} \Delta\omega [\operatorname{Re}\{X_r(n\Delta\omega)\} \cos(n\Delta\omega t) - \operatorname{Im}\{X_r(n\Delta\omega)\} \sin(n\Delta\omega t)]$$

(... idealno nizko sito je isto, ki ima $\frac{\omega_{vz}}{2} = \omega_{\infty}$...)

Kako to rešimo analitično?

$$H(\omega) \leftrightarrow h(t) \quad ?$$



$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_{vz}/2}^{\omega_{vz}/2} H(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \cdot 2 \int_0^{\omega_{vz}/2} \cos(\omega t) d\omega =$$

$$= \frac{1}{\pi} \left. \frac{\sin(\omega t)}{t} \right|_0^{\omega_{vz}/2} = \frac{\omega_{vz}}{2\pi} \cdot \frac{\sin(\frac{\omega_{vz}}{2} t)}{\frac{\omega_{vz}}{2} t} \quad \left| \quad s_x(x) = \frac{\sin x}{x} \right.$$

$$\omega_{vz} = \frac{2\pi}{T_{vz}} \quad \rightarrow \quad h(t) = T_{vz} \cdot s_x\left(\frac{\omega_{vz} t}{2}\right) = T_{vz} \cdot s_x\left(\frac{\pi}{T_{vz}} t\right)$$

$$\rightarrow X_r(t) = x(t) \cdot \sum \delta(t - nT_{vz}) = \sum \delta(t - nT_{vz}) \cdot x(nT_{vz})$$

$$X_r(t) = \sum_{n=0}^s h(t - nT_{vz}) \cdot x(nT_{vz})$$

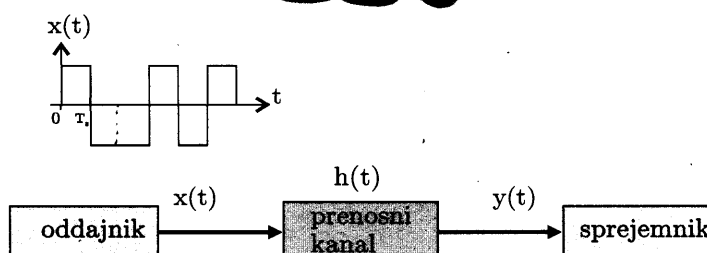
6 Intersimbolna interferenca

Oddajnik pošilja naključno zaporedje binarnih znakov. V naboru signalov sta pravokotna impulza z nasprotno polariteto:

$$x(t) = \sum_{n=0}^N s[n]g(t - nT_s)$$

Signal $x(t)$ vodimo čez prenosni komunikacijski kanal, za katerega poznamo sistemsko funkcijo $h(t)$:

$$h(t) = U(t)\omega_0 e^{-\omega_0 t} \quad (11)$$



Slika 6 – Prenos digitalnega signala

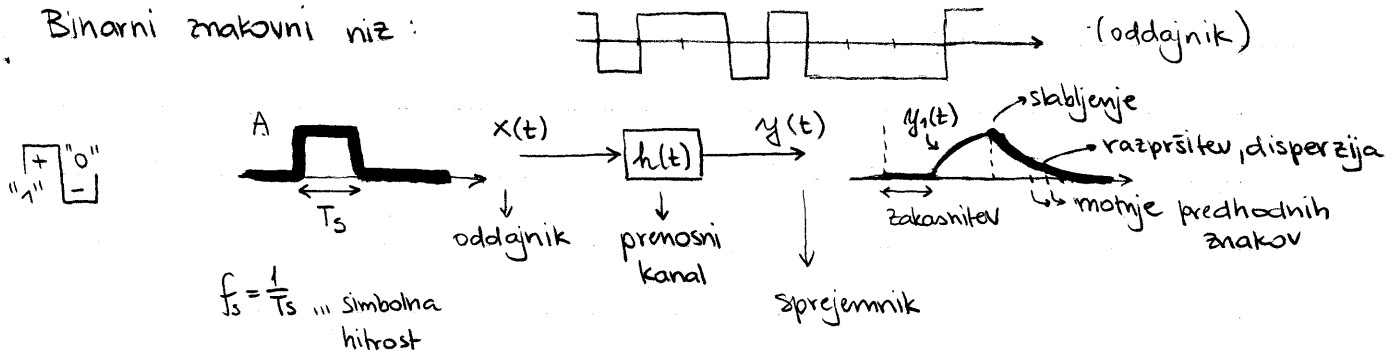
Naloga:

1. Izračunajte in narišite signal na vhodu sprejemnika .
2. Določite velikost intersimbolne interference !

Rešitev naloge: otk-vaja6.mcd

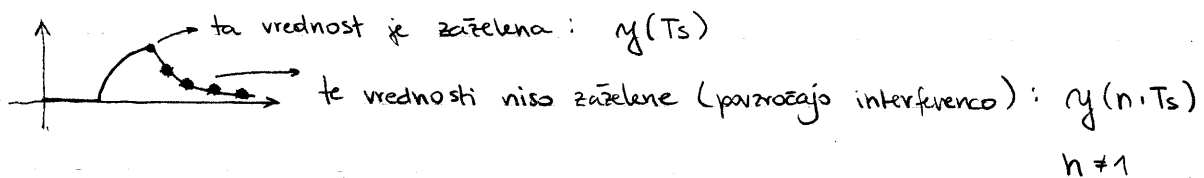
INTERSIMBOLNA INTERFERENCA

Binarni znakovni niz:



~ Če se na enem impulzu zgodi disperzija, kaj se potem pojavi kot motnja pri prenosu znakov?

~ Predhodni impulz povzroča motnjo, prihaja do nekakega prekrivanja ...



ISI ... intersimbolna interferenca - medznakovna motnja

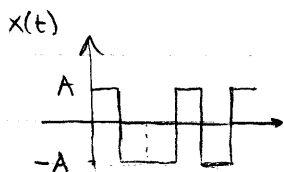
Definicija

$$ISI = \frac{\sum_{n \neq 1} |y(n \cdot T_s)|}{|y(T_s)|}$$

$ISI > 1$... napaka zaradi interference

$ISI < 1$... do interference ne pride
↳ znaki se ne motijo med sabo

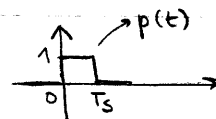
→ $x(t)$... vsota različno obremenjenih pravokotnih impulzov



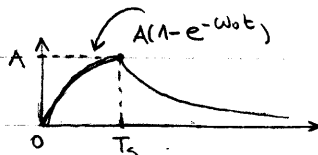
$$x(t) = \sum s(n) p(t - n \cdot T_s)$$

$$s(n) = \begin{cases} A \\ -A \end{cases}$$

$$p(t) = (t \geq 0) (t < T_s)$$



$$y_1(t) = x_1(t) * h(t)$$



~ Pri filtriranju enega impulza smo pri prejšnjih vajah dobili odziv:

$$A \cdot (1 - e^{-\omega_0 t}) \cdot e^{-(t - T_s)\omega_0}$$

$$A=3, \quad T_s=1, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{10 \cdot T_s} \quad \dots \quad \text{ISI} = ?$$

• najprej definiramo impulz na vnosu in odziv tega impulza na izhodu...

$$\underline{s(t) = U(t) \cdot (1 - e^{-\omega_0 t})} \quad \dots \text{glej mazaj!}$$

$$\rightarrow y_1(t) = A \cdot (s(t) - s(t - T_s))$$

MathCad :

$$A := 3 \quad T_s := 1 \quad \omega_0 := 2 \frac{\pi}{10 \cdot T_s}$$

$$p(t) := (t \geq 0) \cdot (t < T_s)$$

$$x_1(t) := A \cdot p(t)$$

$$U(t) := t \geq 0$$

$$s(t) := U(t) \cdot (1 - e^{-\omega_0 t})$$

$$? \quad y_1(t) := A \cdot (s(t) - s(t - T_s))$$

$$t := 0, \frac{T_s}{100} \dots 10 \cdot T_s \quad (\text{nariši grafa: } (x_1(t), t) \text{ in } (y_1(t), t))$$

(... izračunamo vzorce odziva na en znak v ekvidistančnih časovnih intervalih:)

$$N := 10 \quad n := 0 \dots N-1$$

$$y_1 V_n := y_1(n \cdot T_s)$$

$$y_1 V^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \quad (\text{nariši grafa: } (y_1 V_n, n \cdot T_s) \text{ in } (y_1(t), t))$$

$$I := 50 \quad i := 0 \dots I-1$$

$$S_i := 2 \cdot \text{floor}(\text{rnd}(2)) - 1$$

indeks!

$$S^T = \begin{bmatrix} \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

(... To nam da naključno binarno zaporedje znakov +1 in -1 z enakomerno vrjetnostno porazdelitvijo)

$$\left(\begin{array}{c} \text{rnd}(B) \\ \text{0} \quad \text{B} \end{array} \right)$$

$$x(t) := \sum_{i=0}^{I-1} S_i \cdot A \cdot p(t - i \cdot T_s)$$

$$t := 0, \frac{T_s}{10} \dots I \cdot T_s \quad (\text{nariši graf: } (x(t), t) \text{ in pitiskaj FG})$$

$$y(t) := \sum_{i=0}^{I-1} S_i \cdot y_1(t - i \cdot T_s)$$

vektor (zaporedje znakov v sprejemniku detektiramo iz vzorčnega signala i)

$y_{vi} := y(i \cdot T_s)$ (nariši grafa: $(y(t), t)$ in $(y_{vi}, i \cdot T_s)$)

$s_{yi} = \text{if}(y_{vi} \geq 0, 1, -1)$ (detekcija znakov v sprejemniku)

$i_2 := 1, \dots, I-1$ (primerjava sprejetega in oddanega zaporedja znakov)

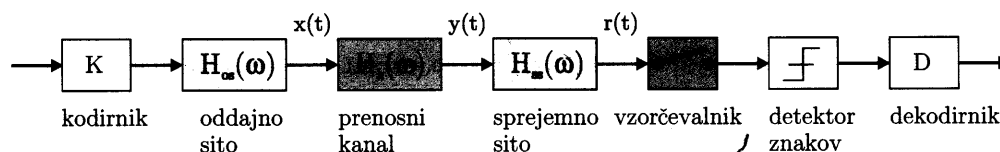
(narišes dva ločena grafa: (s_{i_2-1}, i_2) in $(s_{y_{i_2}}, i_2)$)

$\text{Err}_{i_2} := s_{i_2-1} \neq s_{y_{i_2}}$ (detekcija napak: preverimo ujemanje znakov v oddajniku in sprejemniku)

(narišes graf: (Err_{i_2}, i_2))

7 Prenos brez ISI

V prenosnih sistemih načrtujemo prevajalni karakteristiji oddajnega in sprejemnega sita tako, da zmanjšamo neželeni vpliv disperzije na prenosni poti. Model komunikacijskega kanala podaja slika 7. Skupna prevajalna karakteristika $H(\omega)$ združuje oddajno sito,



Slika 7 – Model prenosnega sistema

prenosni kanal in sprejemno sito.

$$H(\omega) = H_{os}(\omega)H_k(\omega)H_{ss}(\omega)$$

Model časovno diskretnega komunikacijskega kanala podaja slika 8. Če želimo doseči prenos brez intersimbolne interferenice, mora biti izpolnjen pogoj:

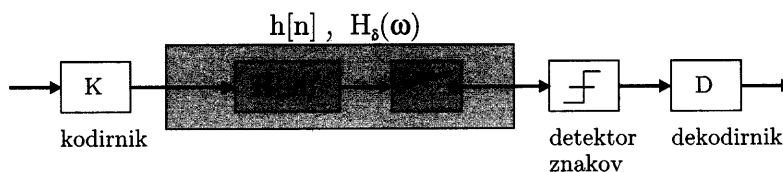
$$h(nT_s + t_0) = A \delta[n] \quad (12)$$

$$\delta[n] = \begin{cases} 1 & ; n = 0 \\ 0 & ; n \neq 0 \end{cases}$$

Pogoj za prenos brez intersimbolne interferenice v časovnem prosturu (12) določa tudi potek vzorčene skupne prevajalne karakteristike:

$$H_\delta(\omega) = konst. \quad (13)$$

$$H_\delta(\omega) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} H(\omega + k\omega_s) = konstanta$$



Slika 8 – Časovno diskretni model prenosnega sistema

Naloga: Na vhod skupne prevajalne funkcije vodimo impulzno modulirani signal $o(t)$:

$$o(t) = \sum_{n=0}^{\infty} s[n] \delta(t - nT_s)$$

Skupna prevajalna funkcija oddajnega sita, prenosne poti in sprejemnega sita ima potek funkcije dvignjenega kosinusa:

$$H(f) = \begin{cases} T_s & ; |f| < \frac{f_s}{2}(1-\alpha) \\ \frac{T_s}{2}(1 + \cos(\frac{\pi T_s}{\alpha}(|f| - \frac{1-\alpha}{2T_s}))) & ; \frac{f_s}{2}(1-\alpha) < |f| < \frac{f_s}{2}(1+\alpha) \\ 0 & ; |f| > \frac{f_s}{2}(1+\alpha) \end{cases}$$

Izračunajte in narišite časovni potek signala na vhodu vzorčevalnika v sprejemniku!

Rešitev naloge: otk-vaja7.mcd

$$H(\omega) = \begin{cases} \frac{T_s}{\omega_s} \omega + T_s & ; -\omega_s < \omega < 0 \\ -\frac{T_s}{\omega_s} \omega + T_s & ; (0 < \omega < \omega_s) \end{cases}$$

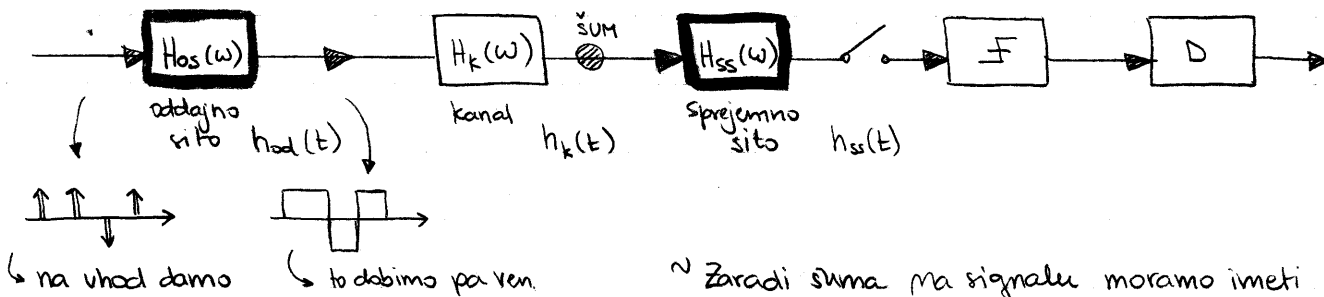
$$\text{if } (-\omega_s < \omega < 0, \frac{T_s}{\omega_s} \omega + T_s, -\frac{T_s}{\omega_s} \omega + T_s)$$

$$\text{if } (\omega_s < \omega < \dots)$$

$$-\omega_s < \omega < \dots$$

$$\omega = f =$$

7. PRENOS BREZ ISI



~ Zaradi suma na signale moramo imeti sprejemno sito. Sprejemno sito bo omejeno na vzgor (od neke frekvence naprej ne bo več prepuščal). Tudi sprejemno sito vpliva na ISI.

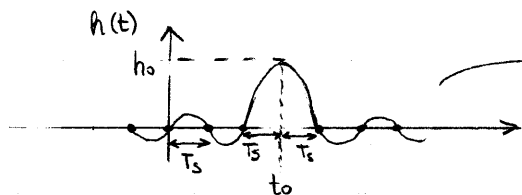
• SKUPNA PREVAJALNA KARAKTERISTIKA:

$$H(\omega) = H_{os}(\omega) \cdot H_k(\omega) \cdot H_{ss}(\omega)$$

$$h(t) = h_{os}(t) * h_k(t) * h_{ss}(t)$$

Fourierjev par

* Zanima nas odziv sistema na en impulz / znak



To je čisto OK! Varno je, da je signal $\neq 0$ ("pikicah") enak 0!

Vmes nas me zanima, kakšna je funkcija!

To je pogoj za prenos brez ISI.

$$\text{Zapišemo: } h(t_0 + n \cdot T_s) = \begin{cases} h_0, & \text{za } n=0 \\ 0, & \text{sicer} \end{cases}$$

To je Nyquistov kriterij za prenos brez ISI

• Prenos brez ISI je le tedaj, kadar je sistemskaja funkcija celotnega sistema enake 0 pri vsaki množici $nT_s + t_0$, vmes pa je lahko njen polje poljubno.

* Skupaj moramo upoštevati $H(\omega)$ + vzorčevalnik \rightarrow $H(\omega)$

* Nyquistov kriterij v frekvenčnem prostoru:

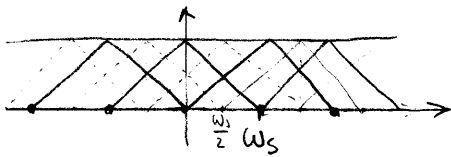
$$H_T(\omega) = \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} H(\omega + n \cdot \omega_s)$$

$T_s = T_{vz}$... vzorčevalni čas

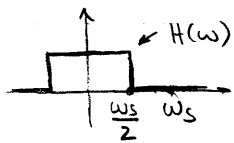
$\omega_s = 2\pi f_s$... vzorčevalna frekvenca

~ Za prenos brez ISI mora veljati: $H_T(\omega) = \text{konstanta}$

Npr. Imamo trikoten potek $H(\omega)$... Pogoj za prenos brez ISI je, da je ničla pri ω_s . Najvišji frekvenčni pas, ki ga rabimo za prenos brez ISI je $\frac{\omega_s}{2}$ (polovica simbolne frekvence).



... če seštejemo vse te trikotnike dobimo konstanto!



... idealno nizko sito ($\omega_{zg} = \frac{\omega_s}{2}$)

Naloga:

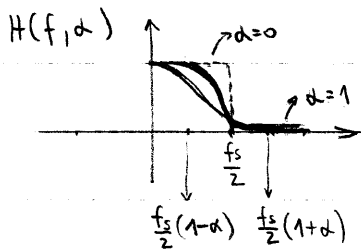
Skupna prevajalna funkcija $H(f, d)$ je podana:

$$H(f, d) = \begin{cases} T_s & ; \text{ za } |f| < \frac{f_s}{2}(1-d) \\ \frac{T_s}{2} \left(1 + \cos \frac{\pi T_s}{d} \left(|f| - \frac{1-d}{2T_s} \right) \right) & ; \text{ za } \frac{f_s}{2}(1-d) < |f| < \frac{f_s}{2}(1+d) \\ 0 & ; \text{ za } |f| > \frac{f_s}{2}(1+d) \end{cases}$$

Ima obliko dvignjenega kosinusa (RAISED COSINE = RC)

~ Izračunati je potrebno časovni potek signala na vnosu vzorčevalnika v sprejemniku!

Raised cosine (RC)



$$f_{zg} = \frac{f_s}{2}(1+d)$$

$$h_{RC}(t, d) = ?$$

$h_{RC}(t, d=0) = h_{ins}(t)$... idealno nizko sito

~ najprej izračunamo inverz tega, potem pa možimo samo še z inverzom kosinuse funkcije podane v prevajalni funkciji ... tega ne bomo izpeljevali!

$$h_{\text{ins}}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H_{\text{ins}}(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\omega_s/2} T_s \cos(\omega t) d\omega =$$

$$= \frac{T_s}{\pi} \cdot \frac{\sin(\omega t)}{t} \Big|_0^{\omega_s/2} = \frac{T_s}{\pi} \frac{\sin(\frac{\omega_s}{2} t)}{t \cdot \omega_s/2} \cdot \frac{\omega_s}{2} = \frac{\sin(\frac{\omega_s}{2} t)}{\omega_s/2 \cdot t} = S_x(\frac{\omega_s}{2} t)$$

$$\Rightarrow h_{\text{RC}}(t, d) = S_x(\frac{\omega_s}{2} t) \cdot \frac{\cos(\frac{\pi}{T_s} d)}{1 - (2d t/T_s)^2}$$

MathCad:

$$T_s := 1 \quad f_s := \frac{1}{T_s} \quad \omega_s := \frac{2\pi}{T_s}$$

$$H_{\text{RC}}(f, d) := \left[|f| < \frac{f_s}{2} \cdot (1+d) \right] \cdot \text{if} \left(|f| < \frac{f_s}{2} \cdot (1-d), T_s, \frac{T_s}{2} \cdot \left(1 + \cos\left(\frac{\pi \cdot T_s}{d} \left(|f| - \frac{(1-d)}{2T_s} \right) \right) \right) \right)$$

$$f := -2f_s, -1.99 \cdot f_s \dots 2 \cdot f_s \quad d1 := 0.11$$

(narišes grafe: $H_{\text{RC}}(f, 1)$, $H_{\text{RC}}(f, 0.5)$, $H_{\text{RC}}(f, 0)$ v odvisnosti od frekvence f)

$$H(f) := \sum_{n=-2}^3 H_{\text{RC}}(f + n \cdot f_s, d1)$$

$$S_x(x) := \text{if}(x \neq 0, \frac{\sin x}{x}, 1)$$

$$h_{\text{RC}}(t, d) := S_x(\frac{\omega_s}{2} t) \cdot \frac{\cos(\frac{\pi}{T_s} d)}{1 - (2d t/T_s)^2} \quad t := -2T_s, -1.99T_s \dots 4T_s$$

(narišes grafe: $h_{\text{RC}}(t, 0)$, $h_{\text{RC}}(t, 0.5)$, $h_{\text{RC}}(t, 1)$ v odvisnosti od t)

$$N := 20 \quad n := 0 \dots N-1 \quad d_n := \text{floor}(\text{rnd}(2)) \cdot 2 - 1$$

$d^T =$ (dobiš tabelo ...)

$$y(t) := \sum_{n=0}^{N-1} d_n \cdot h_{\text{RC}}(t - n \cdot T_s, d1) \quad t := 0, \frac{T_s}{10} \dots N \cdot T_s$$

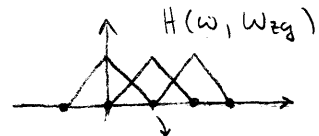
(narišes graf $y(t)$, $y(n \cdot T_s)$ v odvisnosti od t in $n \cdot T_s$)

Domaća naloga:

ZADEVA: OTK DN 1

med datoteka z imenom in priimkom!

→ Dane je prevojalna funkcija trkotne oblike:



$\omega_{zg} = \omega_s$ ali $\omega_{zg} = 2\omega_s$ ali

$\omega_{zg} = 3\omega_s$ itd.

!!! Reši nalogo tako kot smo jo rešili na vajah!

!!! Pokaži, da gre v danem primeru res za Nyquistovne impulze in da če ne velja $\omega_{zg} = n \cdot \omega_s$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) pride do ISI!

!!! Zapiši prevojalno funkcijo v časovnem prostoru (in potem se signal me mladri vzorčevalnike)

8 Generator šuma

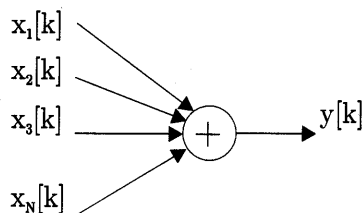
Naloga: Generirajte vzorce naključnega signala $y[k]$, ki bo imel približno normalno (Gaussovo) porazdelitev gostote amplitudne verjetnosti s srednjo vrednostjo $\bar{y} = 0$ in varianco σ_y^2 ! Izračunajte tudi histogram porazdelitve vrednosti naključno generiranih vzorcev!

Komentar: Dober približek za šum z normalno porazdelitvijo dobimo s seštevanjem N neodvisnih signalov $x_n[k]$, ki imajo enakomerno amplitudno verjetnostno porazdelitev.

$$p_x(x) = \begin{cases} \frac{1}{2A} & , \text{ če velja } |x| < A \\ 0 & \text{ sicer} \end{cases} \quad (14)$$

Naključni signali $x_n[k]$ imajo srednjo vrednost $\bar{x}_n = \bar{x} = 0$ in varianco

$$\sigma_x^2 = \int_x (x - \bar{x})^2 p_x(x) dx = \frac{A^2}{3} \quad (15)$$



Slika 9 – Generator Gaussovega šuma.

Razmere podaja slika 9. Signal vsote označimo z $y[k]$:

$$y[k] = \sum_{n=1}^N x_n[k] \quad (16)$$

Srednja vrednost vsote je enaka nič, varianca vsote pa linearno narašča s številom neodvisnih izvorov:

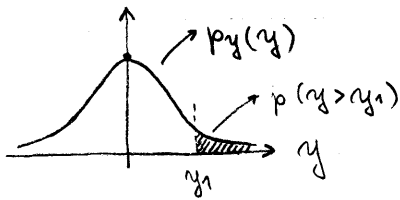
$$\sigma_y^2 = N\sigma_x^2 = N\frac{A^2}{3} \quad (17)$$

Po centralnem limitnem teoremu se porazdelitev vsote signalov neodvisnih naključnih generatorjev z večanjem števila $N \rightarrow \infty$ približuje Gaussovi porazdelitvi:

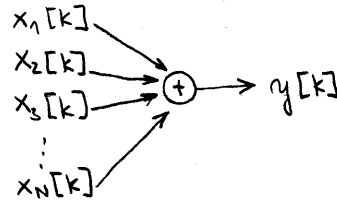
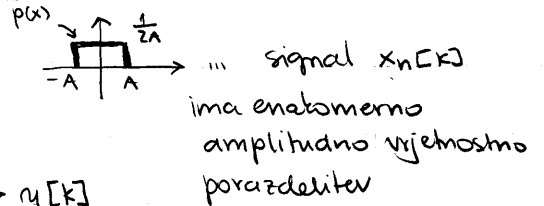
$$p_y(y) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_y^2}} e^{-\frac{y^2}{2\sigma_y^2}} \quad (18)$$

Rešitev naloge: otk-vaja8.mcd

GENERATOR ŠUMA



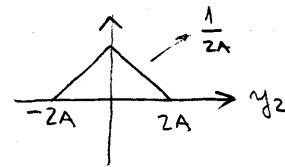
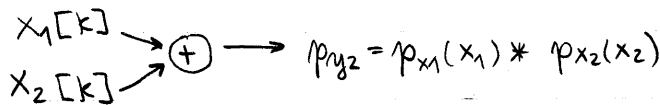
↳ gledati moramo majhne ploščine!



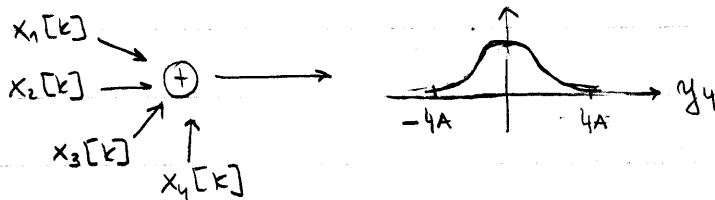
Generator Gaussovega šuma

Vprašanje: imamo dve naključni spremenljivki, ki imata enakomerno porazdelitev, kakšna je porazdelitev, če ju seštejemo? Če sta ti dve spremenljivki zvezni funkciji dobimo trikotno porazdelitev. Če sedaj dodamo še dve taki spr. in jih seštejemo in tako naprej dobimo:

$$p_{y_1}(y) = p_{x_1}(x_1) * p_{x_2}(x_2) * p_{x_3}(x_3) \dots * p_{x_n}(x_n)$$



~ Če dvema spr. dodamo še dve spr. (z enak. porazd.) dobimo konvolucijo dveh trikotnikov! Potek:



• V Math Cadu bomo naredili preizkus (seštevati bomo te spremenljivke)

PREDPOSTAVKA: Naključne spremenljivke imajo enakomerno porazdelitev od $-A$ do A .

Nalogo bomo reševali numerično: Interval bomo razdelili na smiselno št. delov...

Želimo, da ima naša spr. definirano moč (varianco).

PRAVILO: Če sestavimo maksimalne signale, je moč vsote enaka vsoti moči... zato moramo poskušati spreminjati maksimalno vrednost A .

Varianca:

$$\sigma_x^2 = \int_x (x - \bar{x})^2 p_x(x) dx = \frac{A^2}{3}$$

$$\sigma_y^2 = 1$$

$$\sigma_y^2 = N \cdot \sigma_x^2 = \frac{NA^2}{3}$$

$$\rightarrow A = \sqrt{\frac{3\sigma_y^2}{N}}$$

MathCad:

definiramo moč signala y

$$\sigma_y^2 := 1$$

$$N := 10$$

$$A := \sqrt{\frac{3\sigma_y^2}{N}}$$

$$I := 1000$$

$$i := 0..I-1$$

$$y1_i := \sum_{n=0}^N (\text{rnd}(2A) - A) \quad (\text{na ta način naredimo generator šuma})$$

$$\text{mean}(y1) =$$

$$\text{min}(y1) =$$

(preverimo srednjo vrednost

$$\text{var}(y1) =$$

$$\text{max}(y1) =$$

mean(y1) in varianco)

KOMENTARJI:

N ... št. izbrani z enakomerno vrjetostno porazdelitvijo

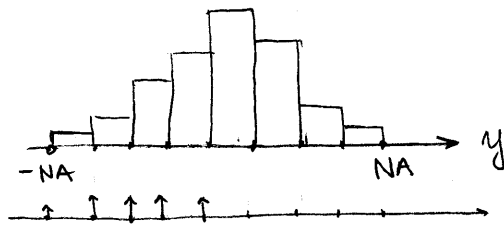
A ... mejna vrednost spr. z enakomerno porazdelitvijo

I, i ... št. vzorcev oz. dolžina vektorja y

$y1_i$... signal $y1$ je vsota N neodvisnih naključnih spremenljivk

HISTOGRAM:

> ni smo jo uporabili!



Uporabili bomo funkcijo `int`, ki
 ga najdemo v MathCadu,
`int` vrne vektor, v katerem
 so zbrane realne vrednosti

MathCad:

$P := 50$ (... določimo število predalov za izračun histograma)

$p := 0 .. P-1$

$mp := 0 .. P$ $\Delta = \frac{2 \cdot NA}{P}$ (Δ ... širina intervala)

$meje_{mp} := -NA + mp \cdot \Delta$ (... meje intervalov)

$Por_{hist} := hist(meje, y)$ (izračunamo histogram vektorja vzorcev)

$length(Por_{hist}) =$ (y po mejah meje)

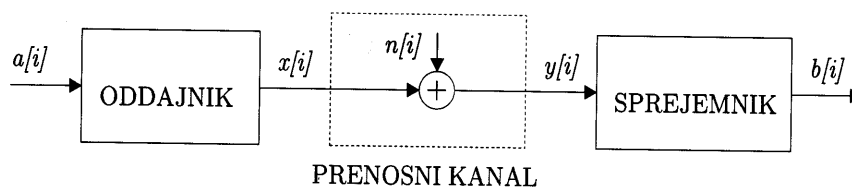
$$P_y(y_1) := \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot y_0} \cdot e^{-y^2 / (2 \cdot y_0^2)}$$

$$y_1 := -NA, -0.99 \cdot NA .. NA$$

~ Glej rešeno vajo na netu!

9 Prenosni kanal z Gaussovim šumom

Modelirajte prenos zaporedja binarnih simbolov po časovno diskretnem kanalu z dodanim Gaussovim šumom!



Slika 10 – Model prenosnega sistema.

Slika 10 podaja model sistema. Binarni niz na vходу kodirnika $a[i]$ pretvorimo v zaporedje simbolov $x[i]$, ki jih določa pravilo:

$$x = \begin{cases} +V & , \text{ če } a = 1 \\ -V & , \text{ če } a = 0 \end{cases} \quad (19)$$

Na kanalu se koristnemu signalu prišteva Gaussov šum. Gaussov šum je naključni signal, ki ima Gaussovo amplitudno porazdelitev s srednjo vrednostjo nič in varianco σ_n^2 :

$$p_n(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_n^2}} e^{-\frac{n^2}{2\sigma_n^2}} \quad (20)$$

Signal na vходу sprejemnika označimo z $y[i]$:

$$y[i] = x[i] + n[i] \quad (21)$$

V sprejemniku detektiramo informacijo v nizu $y[i]$ po pravilu odločanja:

$$b = \begin{cases} 1 & , \text{ če } y > 0 \\ 0 & , \text{ če } y < 0 \end{cases} \quad (22)$$

Verjetnost napake je enaka verjetnosti dogodka $b[i] \neq a[i]$:

$$P_e = P(b[i] \neq a[i]). \quad (23)$$

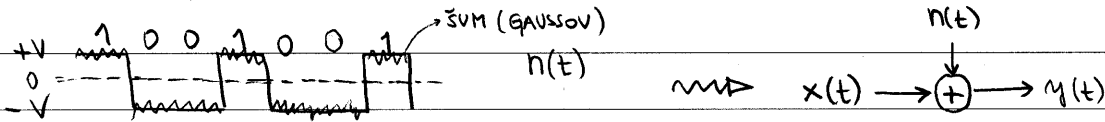
Napake pri prenosu nastopajo, kadar je velikost šuma večja od velikosti signala:

$$P_e = \begin{cases} P(n[i] < -V) & , \text{ če } x[i] = V \\ P(n[i] > V) & , \text{ če } x[i] = -V \end{cases} \quad (24)$$

$$P_e = \int_{n=V}^{\infty} p_n(n) dn \quad (25)$$

Rešitev naloge: otk-vaja9.mcd

PRENOSNI KANAL Z GAUSSOVIM ŠUMOM - vaja 9



Kodirnik ... prepozna in kodira znake

Kdaj pride do napake?

Do napake pride, ko je v trenutku vzorčenja šum večji od signala. To je rezano na dogodek (vrjetnost dogodka, da je šum manjši od $-V$ ali vrjetnost dogodka, da je šum večji od V). To sta vrjetnosti dveh različnih dogodkov, gre za simetrični problem!

→ Dogodek A: $p_e = P(n < -V)$

→ Dogodek B: $p_e = P(n > V)$

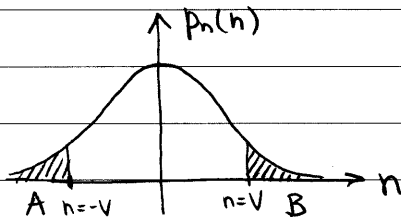
p_e ... vrjetnost napake; P ... vrjetnost dogodka

Poznamo dve funkciji, ki sta vezani na Gaussov šum. To sta $\text{erf}(x)$ in $\Phi(x)$

↳ funkcija napake

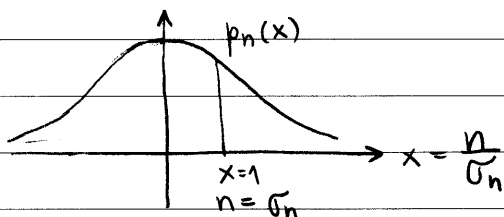
$\Phi(x)$... vrjetnostni integral

chorm ... je funkcija v MathCADu, ki to izračuna!



$$p_e = \frac{1}{2} \left(1 - \Phi\left(\frac{V}{\sigma_n}\right) \right)$$

$$p_e = \frac{1}{2} \left(1 - \text{erf}\left(\frac{V}{\sqrt{2}\sigma_n}\right) \right)$$



$$p_e = 1 - \text{chorm}\left(\frac{V}{\sigma_n}\right) \quad (\text{mathcad})$$

σ_n^2 ... moč šuma

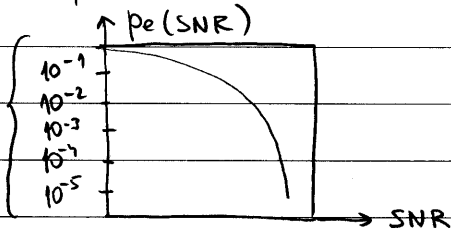
V^2 ... moč signala

$\left(\frac{V}{\sigma_n}\right)$... normirana vrednost

Če imamo podatke moč šuma in velikost signala V , lahko določimo vrjetnost napake

MathCad (kaj bomo delali v MathCadu?):

$$p_e = 1 - \text{cnorm} \left(\frac{v}{\sigma_n} \right)$$



od 10^{-5} do 10^0 je območje meduosti
v logaritemskem merilu!

SNR je v decibelih $SNR = 10 \cdot \log \left(\frac{v^2}{\sigma_n^2} \right)$

$SNR = 20 \log \left(\frac{v}{\sigma_n} \right)$ [dB] || 10 krat logaritem razmerja moči

$\rightarrow \frac{v}{\sigma_n} = 10^{\frac{SNR}{20}}$ (SNR-ga sami določimo)

MathCad - KODA:

$SNR := 0, 0,5, \dots, 20$

$p_e(SNR) := 1 - \text{cnorm} \left(10^{\frac{SNR}{20}} \right)$

(narisi graf: $p_e(SNR)$, SNR ... y -mora imeti logaritemsko skalo!)

efektivno vrednost

Npr, če imamo podano moči $\sigma^2 = 0,1$, kakšna mora biti moč signala, da bo verjetnost napake p_e manjša od 10^{-6} ,

- To izračunamo in razberemo iz grafa!

$p_e < 10^{-6}$

$\sigma_n = 0,1$

$v = ?$

\rightarrow iz grafa vidimo, da je pri $p_e = 10^{-6}$
SNR enak 13,5

$\rightarrow 10^{\frac{13,5}{20}} = \frac{v}{\sigma_n} = 4,7 \Rightarrow$

$v = 0,47$

g_{norm} je inverz od C_{norm} !

Kode : $g_{norm}(1-10^{-12}, 0, 1) = 7.034$

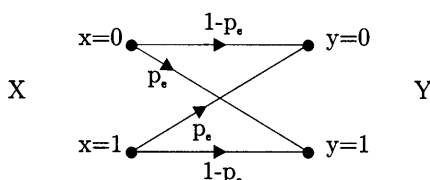
x	$20 \log(x)$ [vdB]
1	0
10	20
100	40
2	6
$\sqrt{2}$	3

→ to vem iz lastnosti logaritmiranja !!!
na splošno je te vrednosti treba
znati izračunati na pamet
znati je treba pretvarjati v dB (za to je
treba dobiti občutek)

→ SNR ... signal to noise ... razmerje signal / šum

10 Prenos informacije preko binarnega simetričnega kanala

Za model diskretnega komunikacijskega kanala na sliki 11 izračunajte vrednosti entropije na vhodu in na izhodu. Izračunajte tudi vrednost povprečne vzajemne informacije med spremenljivko na izhodu kanala in spremenljivko na vhodu kanala!



Slika 11 – Binarni simetrični kanal (BSK)

Lastnosti binarnega simetričnega kanala določa parameter p_e , ki predstavlja verjetnost napake pri prenosu simbolov: $P(y \neq x) = p_e$. Diskretni signala na vhodu in na izhodu sta binarna niza. Verjetnostno porazdelitev vhodnega niza zapišemo z vektorjem, ki ga določa en parameter: $P(x = 0) = p_0$:

$$P_X = \begin{bmatrix} p_0 \\ 1 - p_0 \end{bmatrix} \quad (26)$$

Za izbrane vrednosti parametrov kanala in izvora $p_e = (0, 0.01, 1)$ in $p_0 = (0, 0.1, 0.5)$ izračunajte entropije H_X , H_Y , $H_{Y|X}$, $H_{X|Y}$ in $H_{Y,X}$! Kdaj prenesemo po kanalu največ informacije?

Napotek: Entropija izvora informacije na vhodu kanala X je povprečna informacija:

$$H_X = - \sum_{k=0}^1 P_X[k] \log_2(P_X[k]) = -p_0 \log_2 p_0 - (1 - p_0) \log_2(1 - p_0) \quad (27)$$

Verjetnostno porazdelitev spremenljivke na izhodu P_Y izračunamo iz porazdelitve spremenljivke na vhodu P_X in pogojnih verjetnosti $P_{Y|X}$:

$$P_Y = P_{Y|X} P_X = \begin{bmatrix} 1 - p_e & p_e \\ p_e & 1 - p_e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_0 \\ 1 - p_0 \end{bmatrix} \quad (28)$$

Entropija na izhodu je lahko večja od entropije na vhodu! Pogojne verjetnosti $P_{X|Y}$ izračunamo s pomočjo Bayesove formule:

$$P_{X|Y} = \frac{P_X P_{Y|X}}{P_Y} \quad (29)$$

Vzajemno informacijo med izhodom in vhomom kanala lahko izračunamo na več načinov:

$$I(x; y) = I(x) + I(y) - I(x \wedge y) \quad (30)$$

$$= I(x) - I(x|y) \quad (31)$$

$$= I(y) - I(y|x) \quad (32)$$

Povprečno vzajemno informacijo med izhodom in vhom imenujemo **vzajemna entropija**. Tudi vzajemno entropijo lahko izrazimo na več načinov:

$$H_{X;Y} = \overline{I(x;y)} = H_X + H_Y - H_{XY} \quad (33)$$

$$= H_X - H_{X|Y} \quad (34)$$

$$= H_Y - H_{Y|X} \quad (35)$$

Vzajemna entropija med izhodom in vhom kanala ne more biti večja od entropije na vhom! Pogojna entropija $H_{X|Y}$ je mera negotovosti sprejetega signala:

$$H_{X|Y} = \sum_j \sum_k P_Y[k] P_{X|Y}[j, k] \log_2 \frac{1}{P_{X|Y}[j, k]} \quad (36)$$

Vzajemno entropijo 33 določa tudi enačba:

$$\mathcal{I} = H_{X;Y} = \sum_j \sum_k P_X[j] P_{Y|X}[j, k] \log_2 \frac{P_{Y|X}[j, k]}{P_Y[k]} \quad (37)$$

$$= \sum_j \sum_k P_Y[k] P_{X|Y}[j, k] \log_2 \frac{P_{X|Y}[j, k]}{P_X[j]} \quad (38)$$

Kapaciteta kanala C je maksimalna vzajemna entropija, ki jo dobimo pri optimalni porazdelitvi simbolov na vhom:

$$C = \max_{P_X} H_{Y;X} \quad (39)$$

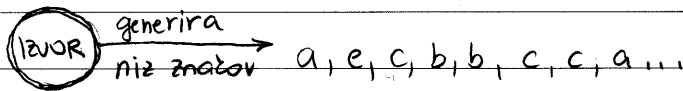
Rešitev 39 za BSK najdete v knjigi¹, stran 56.

Rešitev naloge: otk-vaja10.mcd

Prenos informacije preko binarnega simetričnega kanala - vaja 10

Imamo dogodek, da nek izvor generira nek znak: \leadsto dogodek A
 Informacija je vezana na dogodek

$$I(A) = \log_2 \frac{1}{P(A)} = -\log_2 P(A) \quad [\text{bit}]$$

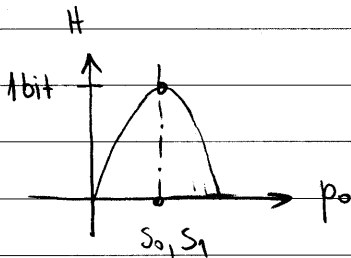


a b c d e
 $S \in (s_0, s_1, \dots, s_{N-1})$
 \hookrightarrow dogodki

$$P(S = s_i) = p_i$$

$$I(S = s_i) = -\log_2(p_i)$$

ENTROPIJA IZVORA:



$$p_0 = 1 - p_1$$

$$H = \sum_{i=0}^{n-1} I(S = s_i) \cdot P(S = s_i)$$

povprečno št. bitov ne more biti nižja od ?

Entropija je mera za povprečno informacijo na izhodu kanala.

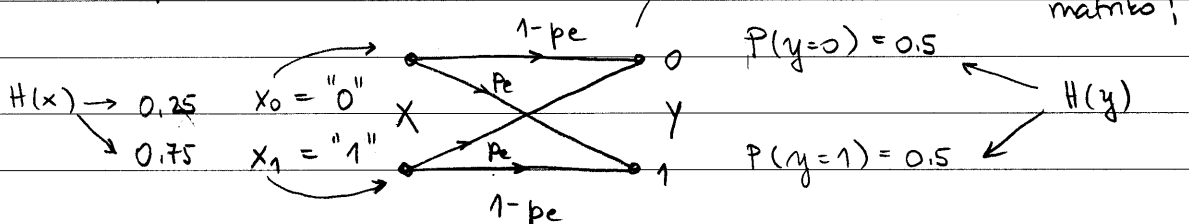
(Entropija je manjša od 1 bit!)

izvor \rightarrow kanal \rightarrow izhod iz kanala

koda: "0" = x_0

"1" = x_1

naríšemo:



gre za matriko pogojnih verjetnosti glej Mathcad!

(ta primer ni dober, ker se vsa informacija izgubi!) npr: $p_e = 0.5$

vidimo da dobimo, da je $H(y) > H(x)$, (česar ne bi pričakovali)

(Samo računanje entropije ne bo dovolj)

Zanima nas povprečna prenesena informacija, ki jo lahko izračunamo ne samo povprečne entropije na vnosu in ne podlagi Bayesove formule!
To lahko izračunamo na tri načine (glej list!).

Zanimame nas, koliko informacije se prenese ... OZ. povprečne vzajemne informacije med vhodom in izhodom = vzajemne informacije

• Imamo binarni simetrični kanal! BSK

• Za Mathcad rabimo funkcijo:

$$\text{lb}(x) = \frac{\log(x)}{\log(2)}$$

ker mathcad ne pozna dvojiškega logaritma!

• Potrebujemo binarno spr. na vnosu kanala:

$$p_0 = 0.1 \\ \text{in } p_x = \begin{bmatrix} p_0 \\ 1-p_0 \end{bmatrix}$$

• Izračunajmo entropijo vhodne spr.!

$$H_x = \sum_{i=0}^1 p_{x_i} \cdot \text{lb}\left(\frac{1}{p_{x_i}}\right)$$

$$H_x = 0.469 \dots \text{entropija na vnosu}$$

• BSK ima definirano vrjetnost napake: $p_e = 0.1$

• Predstavimo graf, tako da zapišemo matriko pogojnih vrjetosti!

$$p_{y-x} = \begin{bmatrix} 1-p_e & p_e \\ p_e & 1-p_e \end{bmatrix}$$

$$p_{y-x} = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.1 & 0.9 \end{bmatrix}$$

• Zanimame nas porazdelitev vrjetosti spr. na izhodu BSK:

$$k = 0.1$$

$$p_{y_k} = \sum_{j=0}^1 p_{x_j} \cdot p_{y_j | x_k}$$

$$p_y = \text{samo izpis} = \begin{bmatrix} 0.18 \\ 0.82 \end{bmatrix}$$

$$H_y = \sum_{i=0}^1 p_{y_i} \cdot \text{lb}\left(\frac{1}{p_{y_i}}\right)$$

$$H_y = \text{samo izpis} = \underline{0.68} \dots \text{entropija na izhodu}$$

- Po Bayesovi formuli lahko naredimo matricen izračun pogojnih verjetnosti "x glede na y" ($P_{x|y}$) i

$$j = 0, 1$$

$$P_{x|y_{jik}} = \frac{P_{x_j} \cdot P_{y-x_{jik}}}{P_{y_k}} \quad P_{x|y} = \text{samo izpis} = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,012 \\ 0,5 & 0,998 \end{bmatrix}$$

Bayesova formula

- Na osnovi pogojnih verjetnosti izračunamo količino prenesene informacije!

$$H_{x|y} = \sum_{i=0}^1 \sum_{k=0}^1 P_{y_k} \cdot P_{x|y_{jik}} \cdot \lg \left(\frac{1}{P_{x|y_{jik}}} \right) \quad (\text{enačba 36 na listu})$$

$H_{x|y}$ je pogojna entropija ... mera negotovosti sprejetega signala

- ~ Za izračun prenesene informacije upoštevamo pogojno entropijo!
- ~ Entropija je med 0 in 1
- ~ zaradi napak na kanalu se entropija na vhodu kanala še poveča!

- Povprečna vzajemna informacija na vhodu in izhodu:

enačba 34:

$$\begin{array}{l} 33 \\ \text{ali} \\ 35 \end{array} : \quad H_x - H_{x|y} = 0,211 \quad \dots \text{ to je dejanska prenesena inf.}$$

- Če je verjetnost napake zelo velika, potem bo šlo malo informacije skozi

✓ Najslabšem primeru bo: $p_e = 0,5$... vrjetnost napake
 $p_0 = 0,25$... entropija na vhodu

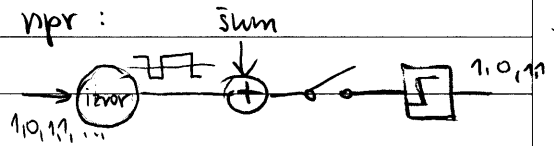
$$\Rightarrow H_x = 0,811 ; \quad H_y = 1$$

→ informacija " $I = 0$

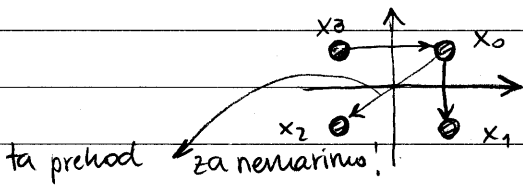
Kapaciteta kanala je maksimalna ^{→ povprečna} prejetna informacija med vhodom in izhodom

DOMAČA NALOGA: (do srede!)

(BSK je model diskretnega kanala :

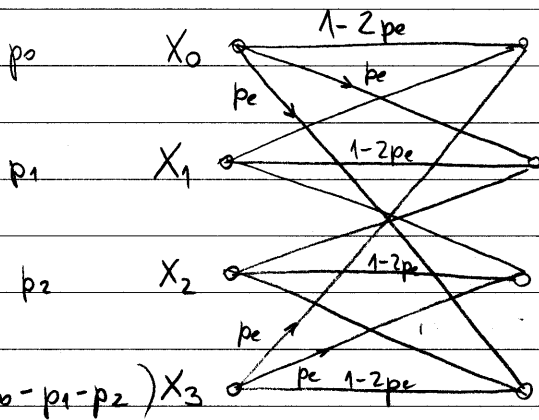


Imamo nek model: signal, ki ima nek stanje)



Vrjetnost napake je opredeljena samo iz prehoda iz enega v drugo stanje ... Zametamo diagonalne prehode ... Kreiramo kanal:

p_{xi}



(Kanal ZSK je BSK)

Nsota vrjetnosti mora biti 1

→ Naš kanal je QSK oz 4SK

→ za štiri znake rabimo 2bita!

kodirna tabela: 00 01 10 11

Tak kanal lahko prenese največ dva bita informacije!

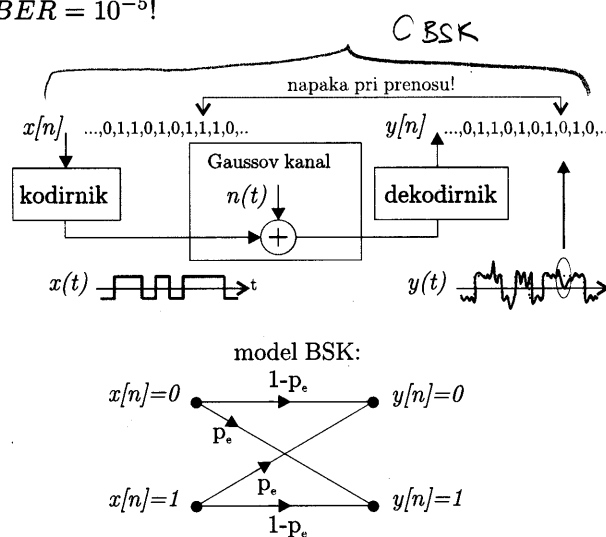
Entropija je največ 2bita!

Koliko je prenesene informacija za kanal 4SK?

matrice bodo $4 \times 4!$

11 Učinkovitost prenosnega sistema- primerjava prenosnih kapacitet

1. Za prenosni sistem na sliki 12 določite model BSK.
2. Izračunajte potek teoretične prenosne kapacitete BSK: $C_{BSK}(P_e(SNR))!$
3. Izračunajte potek kapacitete Gaussovega kanala $C(SNR)!$
4. Učinkovitost prenosnega sistema izrazite z odmikom od Shannonove kapacitete kanala pri $BER = 10^{-5}!$



Slika 12 – Dvonivojski prenos po Gaussovem kanalu in nadomestni model diskretnega kanala

Komentar: Slika 12 podaja model prenosnega sistema. Po Gaussovem prenosnem kanalu prenašamo par simbolov, ki sta po obliki pravokotna impulza z nasprotno polariteto. Dekodirnik v sprejemniku preverja polariteto vzorcev sprejetega signala. Napake pri prenosu nastopajo zaradi šuma, ki se na prenosnem kanalu prišteva oddanemu signalu. Verjetnost napake lahko natančno izračunamo iz verjetnostne porazdelitve šuma. Osnovna parametra, ki določa lastnosti prenosnega kanala sta moč šuma σ_n^2 in omejitvev moči signala σ_x^2 . Ekvivalentni diskretni kanal za dani primer je BSK. Potek odvisnosti prenosne kapacitete od razmerja SNR , izračunamo posredno iz relacij $C_{BSK}(P_e)$ in $P_e(SNR)$.

Idealni prenosni sistem izkorišča polno kapaciteto kanala, ki jo določa Shannonova formula. Prenosni sistem z dvonivojskim kodiranjem ne izkorišča polne kapacitete Gaussovega prenosnega kanala. Razlike v kapaciteti lahko ocenimo na osnovi primerjave $C(SNR)$ in $C_{BSK}(SNR)$. Učinkovitost prenosnega sistema izražamo z odmikom od Shannonove kapacitete kanala $\gamma(P_e)$. Za izbrani prenosni sistem, kjer prenašamo b bitov na simbol s končno verjetnostjo napake pri prenosu P_e , potrebujemo $\gamma(P_e)$ -krat večjo moč signala, kot bi jo potrebovali v idealnem prenosnem sistemu za primer $C = b = 2$.

Rešitev naloge: otk-vaja11.mcd

11. UČINKOVITOST PRENOSNEGA SISTEMA → PRIMERJAVA PRENOSNIH KAPACITET

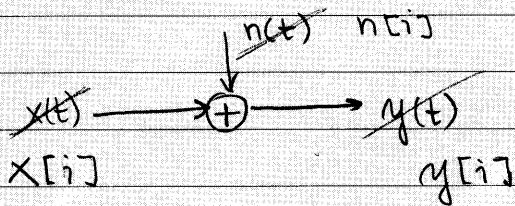
~ Diskretni kanal nima časovne dimenzije, zanjima nas koliko bitov na znak se prenese!

Koliko bitov lahko preni en znak preko kanala?

~ Shannonova kapaciteta Gausovega kanala:

$$C = \frac{1}{2} \log_2 \left(1 + \frac{\sigma_x^2}{\sigma_n^2} \right)$$

↳ eno

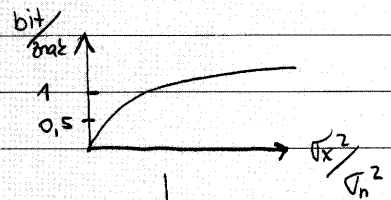


σ_x^2 ... moč signala

σ_n^2 ... moč šuma

~ Veliko razmerje (maj sto) mora biti med močjo signala in močjo šuma, da prenesemo le nekaj bitov na znak!

Narišemo graf, da ni lažje predstavljamo:



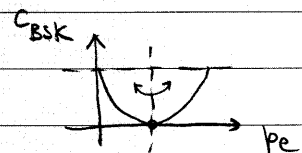
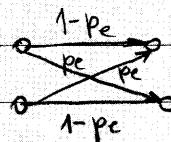
↳ Gaussova porazdelitev ima pri dani moči največjo entropijo! (informacija)

↳ narišemo še na logaritemski skali

~ Gaussova porazdelitev omogoča največ informacije za najmanjšo moči!

~ Kapaciteta kanala: največja vzajemna entropija (oz. povprečna informacija med vhodom in izhodom)

BSK ... je diskretni model:



Model diskretnega kanala je BSK,

model zveznega kanala je Gaussov kanal!

$$pe\left(\frac{\sigma_x^2}{\sigma_n^2}\right);$$

pomembno je razmerje moči:

$$C_{BSK}(pe(\frac{\sigma_x^2}{\sigma_n^2})) = ?$$

$$\left. \begin{aligned} S-N &= \frac{\sigma_x^2}{\sigma_n^2} \\ (SNR &= 10 \cdot \log_2 S-N) \end{aligned} \right\} S-N=10 \quad \frac{SNR}{10}$$

$$C_{BSK}(pe) = 1 + pe \log_2(pe) + (1-pe) \cdot \log_2(1-pe) = \text{Max. vzajemna entropija}$$

$$\xrightarrow{\text{gauss!}} C(SNR) =$$

MathCad:

dvjiški logaritem:

$$\text{lb}(x) = \frac{\log_2(x)}{\log_2(2)}$$

kapaciteta gaussovega kanala:

$$C(S-N) = \frac{1}{2} \cdot \text{lb}(1 + S-N)$$

kapaciteta BSK:

$$C_{BSK}(pe) = 1 + pe \cdot \log_2(pe) + (1-pe) \cdot \log_2(1-pe)$$

$$C(SNR) = \frac{1}{2} \cdot \text{lb}\left(1 + 10^{\frac{SNR}{10}}\right)$$

SNR i = -20...20

(graf C(SNR), SNR)

(graf C_{BSK}(pe), pe)

$$pe(SNR) = 1 - \text{cnorm}\left(10^{\frac{SNR}{20}}\right)$$

↳ graf (pe(SNR), SNR) ... logaritemsko skala

!!! $C_{BSK}(0,1) = 0,531$

(na ordinatni osi...)

↳ razlaga! Če imamo 1000 znakov in 10% napake prenesemo na

Dva grafu na eni sliki [C(SNR) in C_{BSK}(pe(SNR))]

1000 znakov
le 531 znakov
in ne 900!

↳ RAZLAGA !!!

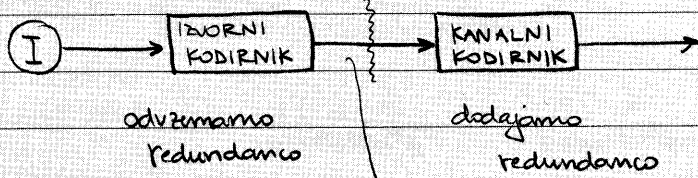
Odmik od kapacitete kanala merimo po (abscisni osi) moči!

To ni ravno izpitna naloga! → korektna naloga za razumevanje

KOMENTAR: Pomembno je, da imamo mitične kanalske kodirane!

DODATNO za KOLOKVIJ!

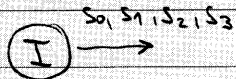
INFORMACIJSKI IZVOR:



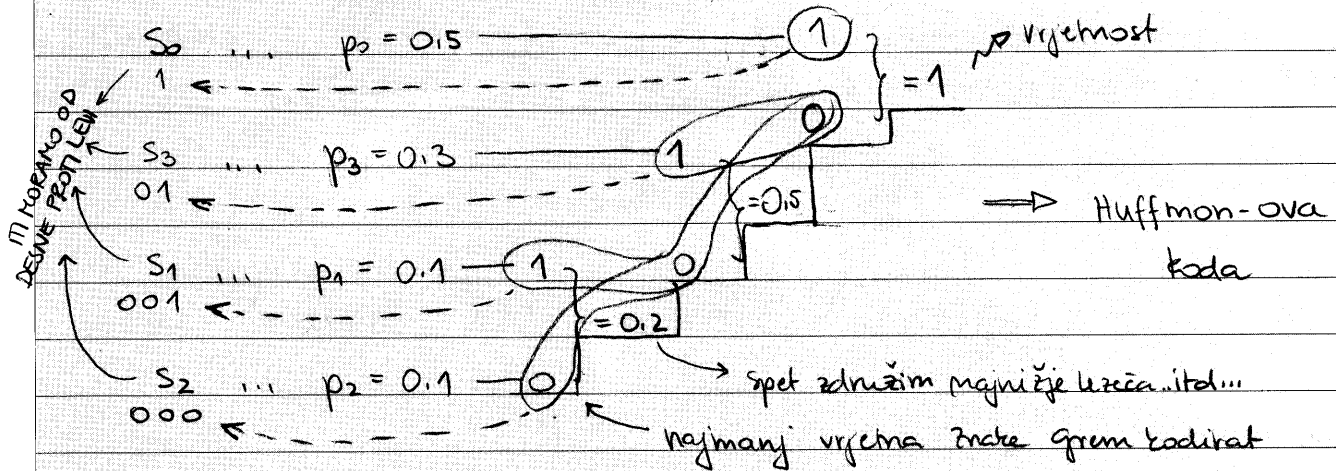
? podatkovni izvor ne more biti večji od entropije izvora!

Radi bi strnili informacijo:

PRIMERI: Entropijsko kodiranje → HUFFMANOVA KODA



- Kodiranje obratno vrša tudi zakamitev...
- Znak, ki pogosto nastopa nosi manj informacije, kot znak ki redkeje nastopa.



$\Rightarrow H_{max} = \log_2(M) = \log_2(4) = 2$

$H_{izvor} = \sum p_i \cdot \log_2(p_i) = M \cdot \text{ced}!$

$I = \sum p_i L_i = 0,15 \cdot 1 + 0,1 \cdot 3 + 0,1 \cdot 3 + 0,3 \cdot 2 = 1,7 \text{ bit/znak}$

↳ Informacija izračunava s pomočjo Huffmanove kode...

Še en primer iz knjige: Če imamo opravke z Gaussovim kanalom je kapaciteta:

$$C = \frac{1}{2} \log_2 \left(1 + \frac{\sigma_x^2}{\sigma_n^2} \right) \quad ; \text{ Shannon!}$$

Nyquistov teorém pravi: $f_{\max} = 2B$; $f_s \leq 2B$

če to dvoje združimo, govorimo o

INFORMACIJSKEM PRETOKU

• Informacijski pretok povečamo tako, da povečamo hitrost ali maz!

$$r = f_s \cdot b_s \quad || \quad r_{\max} = f_{s\max} \cdot b_{s\max} \quad ; \quad b_{s\max} = C \quad (\text{Gaussov kanal})$$

$$f_{s\max} = 2B \quad (\text{če imamo lepo}$$

$$r \text{ [bit/s]} \quad ; \quad f_s \text{ [znak/s]} \quad ; \quad b_s = \text{[bit/znak]} \quad \text{karakteristično signala)}$$

$$\Rightarrow r_{\max} = B \cdot \log_2 \left(1 + \frac{\sigma_x^2}{\sigma_n^2} \right)$$

razmerje moči;

če bi imeli razmerje

Npr. ; $SNR = 30 \text{ dB} \Rightarrow C(SNR) = \frac{1}{2} \log_2 \left(1 + 10^{\frac{SNR}{10}} \right)$

$B = 10 \text{ kHz} \Rightarrow f_{s\max} = 2B = 20.000 \text{ znak/sekundo}$

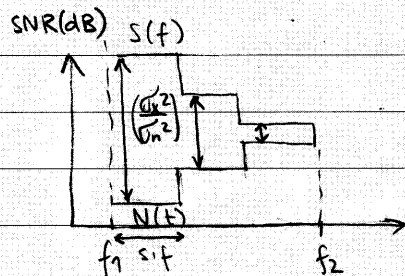
amplitud, bi bilo:

$$SNR/20$$

$$r_{\max} \text{ [bit/s]} = ? \quad C(30\text{dB}) = 4.984$$

$$\Rightarrow r_{\max} = B \cdot \log_2 \left(1 + 10^{\frac{SNR}{10}} \right) = 20.000 \cdot 4.989 = 99.780 \text{ bitov/sekundo}$$

Imamo kanal:



$$r = r_1 + r_2 + r_3$$

$$r_1 = B \cdot \log_2 \left(1 + \frac{\sigma_x^2}{\sigma_n^2} \right)$$

⋮

Informacijski pretok je odvisen od kapacitete kanala in pasovne širine!

Kolokvij: 6., 7., 8., 9., 10. in 11. vaja pridejo v postev!