Univerza v Ljubljani

Fakulteta za elektrotehniko

Anton Umek

Osnove telekomunikacij I
VAJE

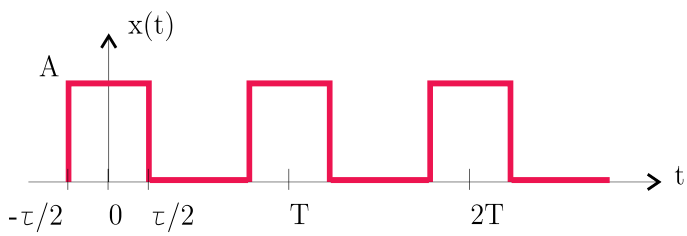
Predloga za vaje 2006

Vsebina

1 Analiza periodičnih signalov

Periodični signal $x(t)$ je vlak pravokotnih impulzov:

$$T = 1\text{ms}$$
$$\tau = \frac{T}{5}$$
$$V = 1$$



Slika 1 – Vlak pravokotnih impulzov.

Naloge:

1. Izračunajte in narišite potek amplitudnega spektra in potek močnostnega spektra signala!
2. Do katere frekvence se nahaja 95% moči signala ?
3. Vlak pravokotnih impulzov x(t) vodimo skozi nizko sito z mejno frekvenco $f_{zg} = \frac{5.5}{T}$. Narišite potek signala $y(t)$ na izhodu sita !

Naloge ponovite tudi za primere:

$$\tau = \frac{T}{2}, \tau = \frac{T}{10} \text{ in } \tau = \frac{T}{20}$$

Navodila: Izračunamo kompleksni spekter periodičnega signala x(t) :

$$X[n] = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} x(t)e^{-\jmath n\omega_0 t}dt$$

$$X[n] = V\frac{\tau}{T}\frac{\sin\left(n\omega_0\frac{\tau}{2}\right)}{n\omega_0\frac{\tau}{2}}$$

1. Amplitudni spekter periodičnega signala je absolutna vrednost Fourierovih koeficientov,

   $$A[n] = |X[n]|$$

   kvadrate komponent amplitudnega spektra $|X[n]|^2$ pa imenujemo močnostni spekter.

2. Srednjo kvadratično vrednost signala imenujemo moč signala. Moč signala je vsota moči posameznih harmonskih komponent:

$$\overline{x(t)^2} = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} x(t)^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |X[n]|^2$$

   Periodični signali imajo lahko neskončno število harmonskih komponent. Zanima nas število spektralnih komponent K s frekvencami $0, \omega_0, 2\omega_0, .., K\omega_0$, ki vsebuje 95%moči signala:

$$\sum_{n=-K}^{K} |X[n]|^2 = \frac{95}{100}\overline{x(t)^2}$$

3. Periodični signal $x(t)$ lahko izrazimo s spektralnimi komponentami $X[n]$, kar ustreza zapisu kompleksne Fourierove vrste:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X[n] e^{\jmath n \omega_0 t}$$

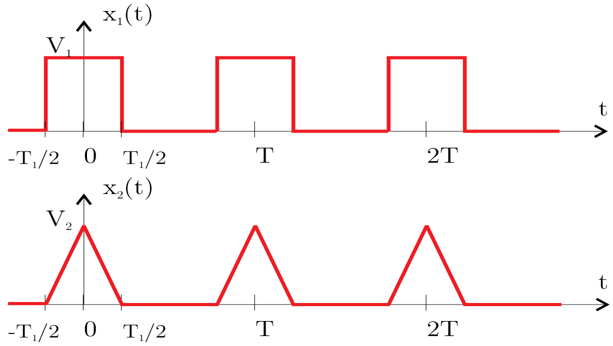
   Frekvenčno omejen signal dobimo s seštevanjem končnega števila N_1 spektralnih komponent:

$$y(t) = \sum_{n=-N_1}^{N_1} X[n] e^{\jmath n \omega_0 t}$$

Rešitve: datoteka otk-vaja1.mcd

2 Korelacija periodičnih signalov

Na sliki 2 sta podana dva periodična signala:



Slika 2 – Vlak pravokotnih impulzov in vlak trikotnih impulzov.

Naloge:

1. Konstanti V_1 in V_2 določite tako, da bosta oba signala imela efektivno vrednost 10.
2. Izračunajte in narišite močnostna spektra obeh signalov!
3. Izračunajte in narišite poteke križne korelacije med $x_1(t)$ in $z_n(t) = \cos(n\frac{2\pi}{T}t)$ za $n = 1, 2, 3$!
4. Izračunajte in narišite poteka avtokorelacijskih funkcij signalov $x_1(t)$ in $x_2(t)$!
5. Izračunajte in narišite potek funkcije križne korelacije signalov $x_1(t)$ in $x_2(t)$!

Navodila:

1. Efektivna vrednost periodičnega signala je enaka:
$$x_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} x(t)^2 dt}$$
2. Močnostni spekter signala je kvadrat absolutne vrednosti kompleksnih Fourierovih koeficientov:
$$S[n] = |X[n]|^2$$
3. Funkcijo križne korelacije med dvema periodičnima signaloma iščemo po parametru časovnega zamika τ:
$$R_{x_1x_2}(\tau) = \overline{x_1(t)x_2(t+\tau)} = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} x_1(t)x_2(t+\tau)dt$$

$$R_{x_2x_1}(\tau) = \overline{x_1(t+\tau)x_2(t)} = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} x_1(t+\tau)x_2(t)dt$$

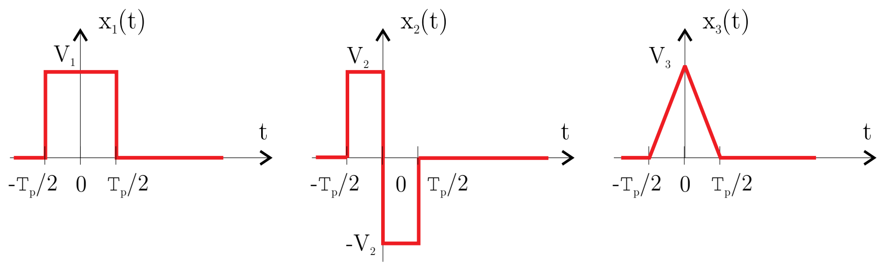
4. Avtokorelacijska funkcija signala je poseben primer korelacijske funkcije dveh enakih signalov:

$$R_{x_1x_1}(\tau) = \overline{x_1(t)x_1(t+\tau)} = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} x_1(t)x_1(t+\tau)dt$$

Rešitev naloge: otk-vaja2.mcd

3 Analiza aperiodičnih signalov

Na sliki 3 so podani trije aperiodični signali:



Slika 3 – Aperiodični signali

Naloge:

1. Konstante V_n določite tako, da bodo imeli vsi signali enako energijo $E_1 = E_2 = E_3 = 1$.
2. Izračunajte Fourierove transforme in narišite poteke gostote amplitudnih, faznih in energijskih spektrov signalov !
3. Primerjajte kumulativne energijske spektre signalov !
4. Izračunajte in narišite poteke križnih korelacij !
5. Izračunajte in narišite poteke avtokorelacijskih funkcij !

Navodila:

1. Energija aperiodičnega signala je enaka:
$$E = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)^2 dt$$
2. Gostote amplitudnega, faznega in energijskega spektra določa Fourierov transform signala:
$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-\jmath\omega t} dt$$
3. Kumulativni energijski spekter predstavlja energijo signala v navzgor omejenem območju do izbrane mejne frekvence ω_{zg}:
$$S(\omega_{zg}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_{zg}}^{\omega_{zg}} |X(\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\omega_{zg}} |X(\omega)|^2 d\omega$$
$$S(\infty) = E$$

4. Funkcijo križne korelacije med dvema aperiodičnima signaloma iščemo po parametru časovnega zamika τ:

$$r_{1,2}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t) x_2(t+\tau) dt$$

5. Avtokorelacijska funkcija signala $x(t)$ je:

$$r(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) x(t+\tau) dt$$

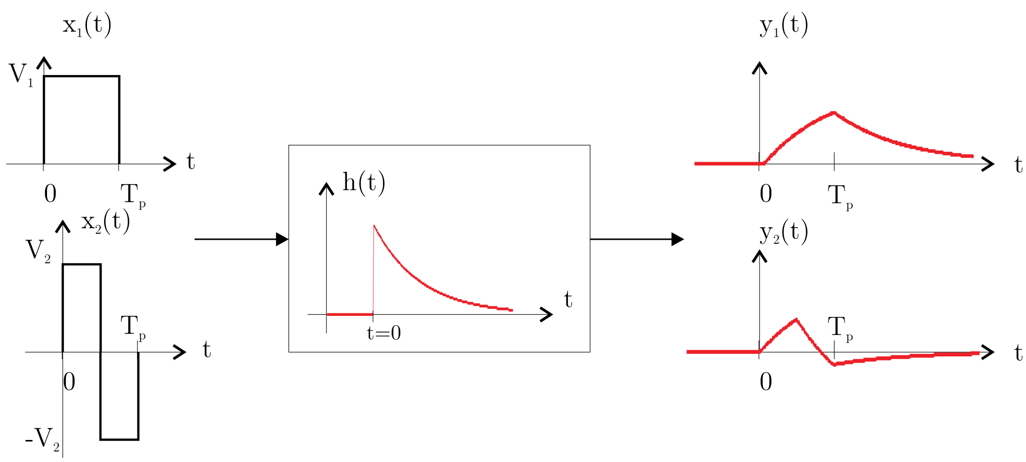
$$r(0) = E$$

Rešitev naloge: otk-vaja3.mcd

4 Prevajanje signalov skozi linearne sisteme

Izračunajte odzive linearnega sistema za različne aperiodične signale na vhodu. Prenosne lastnosti linearnega sistema določa impulzni odziv:

$$h(t) = U(t)\omega_0 e^{-\omega_0 t} \tag{1}$$



Slika 4 – Filtriranje signalov

Naloge:

1. Oba odziva $y_1(t)$ in $y_2(t)$ izračunajte najprej s konvolucijo:
$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau \tag{2}$$
2. Numerično izračunajte približek konvolucije nizov:
$$y(n\Delta t) \approx \Delta t \sum_k x(k\Delta t)h((n-k)\Delta t) \tag{3}$$
3. Izračunajte spekter signala na vhodu $X(\omega)$, prevajalno funkcijo linearnega sistema $H(\omega)$ in spekter signala na izhodu:
$$Y(\omega) = X(\omega)H(\omega) \tag{4}$$
4. Signal na izhodu $y(t)$ izračunajte s transformacijo spektra $Y(\omega)$:
$$y(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} Y(\omega)e^{\jmath\omega t}d\omega \tag{5}$$
Uporabite približek pri računanju integrala:
$$y(t) \approx \Delta\omega \sum_k Y(k\Delta\omega)e^{\jmath k\Delta\omega t} \tag{6}$$

Rešitev naloge: otk-vaja4.mcd

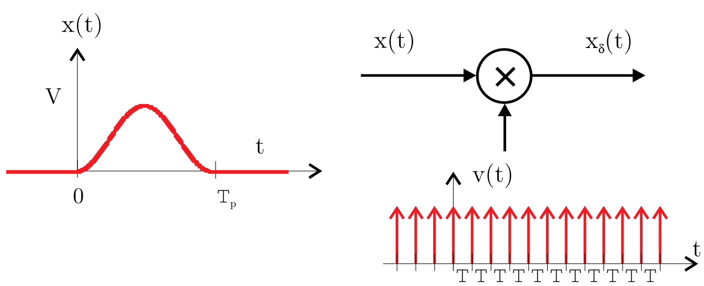
5 Vzorčenje signala

Signal na vhodu vzorčevalnika je oblikovan impulz:

$$x(t) = V_1\, p(t, T_p)\, \frac{1}{2}(1 - \cos 2\pi \frac{t}{T_p}) \tag{7}$$

Pomožni signal $p(t, T_p)$ je enotni pravokotni impulz s širino T_p:

$$p(t, T_p) = U(t) - U(t - T_p)$$



Slika 5 – Idealno vzorčenje

Naloga: Izračunajte spekter signala na vhodu in na izhodu idealnega vzorčevalnika!

Komentar

1. Vzorčenje signala predstavimo kot množenje signala v časovnem prostoru s periodično vzorčevalno funkcijo $v(t)$:

$$x_\delta(t) = x(t)v(t) \tag{8}$$

Idealno vzorčenje predstavimo kot množenje z vlakom Diracovih impulzov:

$$v(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \tag{9}$$

2. Spekter vzorčenega signala je po frekvenci periodičen s periodo ω_{vz}:

$$X_\delta(\omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(\omega - k\omega_{vz}) \tag{10}$$

Rešitev naloge: otk-vaja5.mcd

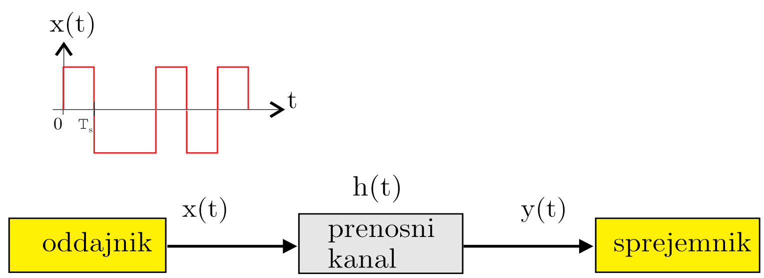
6 Intersimbolna interferenca

Oddajnik pošilja naključno zaporedje binarnih znakov. V naboru signalov sta pravokotna impulza z nasprotno polariteto:

$$x(t) = \sum_{n=0}^{N} s[n]g(t - nT_s)$$

Signal $x(t)$ vodimo čez prenosni komunikacijski kanal, za katerega poznamo sistemsko funkcijo $h(t)$:

$$h(t) = U(t)\omega_0 e^{-\omega_0 t} \tag{11}$$



Slika 6 – Prenos digitalnega signala

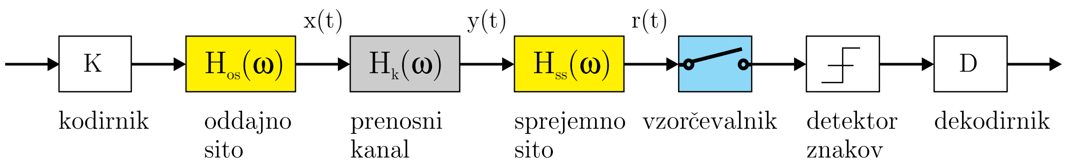
Naloga:

1. Izračunajte in narišite signal na vhodu sprejemnika .
2. Določite velikost intersimbolne interference !

Rešitev naloge: otk-vaja6.mcd

7 Prenos brez ISI

V prenosnih sistemih načrtujemo prevajalni karakteristiji oddajnega in sprejemnega sita tako, da zmanjšamo neželeni vpliv disperzije na prenosni poti. Model komunikacijskega kanala podaja slika 7. Skupna prevajalna karakteristika $H(\omega)$ združuje oddajno sito,



Slika 7 – Model prenosnega sistema

prenosni kanal in sprejemno sito.

$$H(\omega) = H_{os}(\omega)H_k(\omega)H_{ss}(\omega)$$

Model časovno diskretnega komunikacijskega kanala podaja slika 8. Če želimo doseči prenos brez intersimbolne interference, mora biti izpolnjen pogoj:

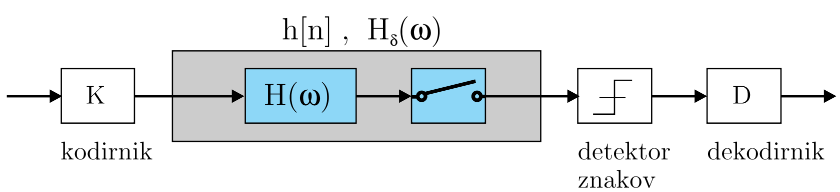
$$h(nT_s + t_0) = A\,\delta[n] \tag{12}$$

$$\delta[n] = \begin{cases} 1 & ; \quad n = 0 \\ 0 & ; \quad n \neq 0 \end{cases}$$

Pogoj za prenos brez intersimbolne interference v časovnem prosturu (12) določa tudi potek vzorčene skupne prevajalne karakteristike:

$$H_\delta(\omega) = konst. \tag{13}$$

$$H_\delta(\omega) = \frac{1}{T_s}\sum_{k=-\infty}^{\infty} H(\omega + k\omega_s)$$



Slika 8 – Časovno diskretni model prenosnega sistema

Naloga: Na vhod skupne prevajalne funkcije vodimo impulzno modulirani signal $o(t)$:

$$o(t) = \sum_{n=0}^{\infty} s[n]\delta(t - nT_s)$$

Skupna prevajalna funkcija oddajnega sita, prenosne poti in sprejemnega sita ima potek funkcije dvignjenega kosinusa:

$$H(f) = \begin{cases} T_s & ; \quad |f| < \frac{f_s}{2}(1-\alpha) \\ \frac{T_s}{2}(1+\cos(\frac{\pi T_s}{\alpha}(|f| - \frac{1-\alpha}{2T_s}))) & ; \quad \frac{f_s}{2}(1-\alpha) < |f| < \frac{f_s}{2}(1+\alpha) \\ 0 & ; \quad |f| > \frac{f_s}{2}(1+\alpha) \end{cases}$$

Izračunajte in narišite časovni potek signala na vhodu vzorčevalnika v sprejemniku!

Rešitev naloge: otk-vaja7.mcd

8 Generator šuma

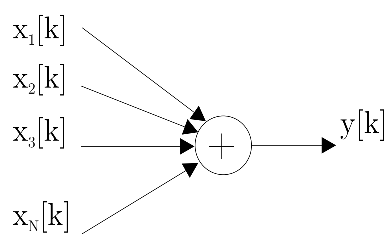
Naloga: Generirajte vzorce naključnega signala $y[k]$, ki bo imel približno normalno (Gaussovo) porazdelitev gostote amplitudne verjetnosti s srednjo vrednostjo $\bar{y} = 0$ in varianco σ_y^2 ! Izračunajte tudi histogram porazdelitve vrednosti naključno generiranih vzorcev !

Komentar: Dober približek za šum z normalno porazdelitvijo dobimo s seštevanjem N neodvisnih signalov $x_n[k]$, ki imajo enakomerno amplitudno verjetnostno porazdelitev.

$$p_x(x) = \begin{cases} \frac{1}{2A} & \text{, če velja } |x| < A \\ 0 & \text{sicer} \end{cases} \tag{14}$$

Naključni signali $x_n[k]$ imajo srednjo vrednost $\bar{x_n} = \bar{x} = 0$ in varianco

$$\sigma_x^2 = \int_x (x - \bar{x})^2 p_x(x) dx = \frac{A^2}{3} \tag{15}$$



Slika 9 – Generator Gaussovega šuma.

Razmere podaja slika 9. Signal vsote označimo z $y[k]$:

$$y[k] = \sum_{n=1}^{N} x_n[k] \tag{16}$$

Srednja vrednost vsote je enaka nič, varianca vsote pa linearno narašča s številom neodvisnih izvorov:

$$\sigma_y^2 = N\sigma_x^2 = N\frac{A^2}{3} \tag{17}$$

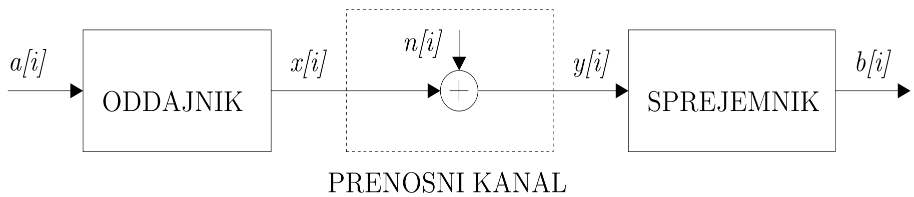
Po centralnem limitnem teoremu se porazdelitev vsote signalov neodvisnih naključnih generatorjev z večanjem števila $N \to \infty$ približuje Gaussovi porazdelitvi:

$$p_y(y) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_y^2}} e^{-\frac{y^2}{2\sigma_y^2}} \tag{18}$$

Rešitev naloge: otk-vaja8.mcd

9 Prenosni kanal z Gaussovim šumom

Modelirajte prenos zaporedja binarnih simbolov po časovno diskretnem kanalu z dodanim Gaussovim šumom!



Slika 10 – Model prenosnega sistema.

Slika 10 podaja model sistema. Binarni niz na vhodu kodirnika $a[i]$ pretvorimo v zaporedje simbolov $x[i]$, ki jih določa pravilo:

$$x = \begin{cases} +V & \text{, če } a = 1 \\ -V & \text{, če } a = 0 \end{cases} \tag{19}$$

Na kanalu se koristnemu signalu prišteva Gaussov šum. Gaussov šum je naključni signal, ki ima Gaussovo amplitudno porazdelitev s srednjo vrednostjo nič in varianco σ_n^2:

$$p_n(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_n^2}} e^{-\frac{n^2}{2\sigma_n^2}} \tag{20}$$

Signal na vhodu sprejemnika označimo z $y[i]$:

$$y[i] = x[i] + n[i] \tag{21}$$

V sprejemniku detektiramo informacijo v nizu $y[i]$ po pravilu odločanja:

$$b = \begin{cases} 1 & \text{, če } y > 0 \\ 0 & \text{, če } y < 0 \end{cases} \tag{22}$$

Verjetnost napake je enaka verjetnosti dogodka $b[i] \neq a[i]$:

$$P_e = P(b[i] \neq a[i]). \tag{23}$$

Napake pri prenosu nastopajo, kadar je velikost šuma večja od velikosti signala:

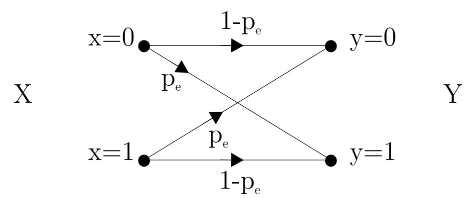
$$P_e = \begin{cases} P(n[i] < -V) & \text{, če } x[i] = V \\ P(n[i] > V) & \text{, če } x[i] = -V \end{cases} \tag{24}$$

$$P_e = \int_{n=V}^{\infty} p_n(n) dn \tag{25}$$

Rešitev naloge: otk-vaja9.mcd

10 Prenos informacije preko binarnega simetričnega kanala

Za model diskretnega komunikacijskega kanala na sliki 11 izračunajte vrednosti entropije na vhodu in na izhodu. Izračunajte tudi vrednost povprečne vzajemne informacije med spremenljivko na izhodu kanala in spremenljivko na vhodu kanala!



Slika 11 – Binarni simetrični kanal (BSK)

Lastnosti binarnega simetričnega kanala določa parameter p_e, ki predstavlja verjetnost napake pri prenosu simbolov: $P(y \neq x) = p_e$. Diskretni signala na vhodu in na izhodu sta binarna niza. Verjetnostno porazdelitev vhodnega niza zapišemo z vektorjem, ki ga določa en parameter: $P(x = 0) = p_0$:

$$P_X = \begin{bmatrix} p_0 \\ 1 - p_0 \end{bmatrix} \tag{26}$$

Za izbrane vrednosti parametrov kanala in izvora $p_e = (0, 0.01, 1)$ in $p_0 = (0, 0.1, 0.5)$ izračunajte entropije H_X, H_Y, $H_{Y|X}$, $H_{X|Y}$ in $H_{Y;X}$! Kdaj prenesemo po kanalu največ informacije?

Napotek: Entropija izvora informacije na vhodu kanala X je povprečna informacija:

$$H_X = -\sum_{k=0}^{1} P_X[k]\log_2(P_X[k]) = -p_0 \log_2 p_0 - (1 - p_0)\log_2(1 - p_0) \tag{27}$$

Verjetnostno porazdelitev spremenljivke na izhodu P_Y izračunamo iz porazdelitve spremenljivke na vhodu P_X in pogojnih verjetnosti $P_{Y|X}$:

$$P_Y = P_{Y|X}P_X = \begin{bmatrix} 1 - p_e & p_e \\ p_e & 1 - p_e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_0 \\ 1 - p_0 \end{bmatrix} \tag{28}$$

Entopija na izhodu je lahko večja od entropije na vhodu! Pogojne verjetnosti $P_{X|Y}$ izračunamo s pomočjo Bayesove formule:

$$P_{X|Y} = \frac{P_X P_{Y|X}}{P_Y} \tag{29}$$

Vzajemno informacijo med izhodom in vhodom kanala lahko izračunamo na več načinov:

$$\begin{aligned} I(x;y) &= I(x) + I(y) - I(x \wedge y) && (30)\\ &= I(x) - I(x|y) && (31)\\ &= I(y) - I(y|x) && (32) \end{aligned}$$

Povprečno vzajemno informacijo med izhodom in vhodom imenujemo **vzajemna entropija**. Tudi vzajemno entropijo lahko izrazimo na več načinov:

$$H_{X;Y} = \overline{I(x;y)} = H_X + H_Y - H_{XY} \tag{33}$$

$$= H_X - H_{X|Y} \tag{34}$$

$$= H_Y - H_{Y|X} \tag{35}$$

Vzajemna entropija med izhodom in vhodom kanala ne more biti večja od entropije na vhodu! Pogojna entropija $H_{X|Y}$ je mera negotovosti sprejetega signala:

$$H_{X|Y} = \sum_j \sum_k P_Y[k] P_{X|Y}[j,k] \log_2 \frac{1}{P_{X|Y}[j,k]} \tag{36}$$

Vzajemno entropijo 33 določa tudi enačba:

$$H_{X;Y} = \sum_j \sum_k P_X[j] P_{Y|X}[j,k] \log_2 \frac{P_{Y|X}[j,k]}{P_Y[k]} \tag{37}$$

$$= \sum_j \sum_k P_Y[k] P_{X|Y}[j,k] \log_2 \frac{P_{X|Y}[j,k]}{P_X[j]} \tag{38}$$

Kapaciteta kanala C je maksimalna vzajemna entropija, ki jo dobimo pri optimalni porazdelitvi simbolov na vhodu:

$$C = \max_{P_X} H_{Y;X} \tag{39}$$

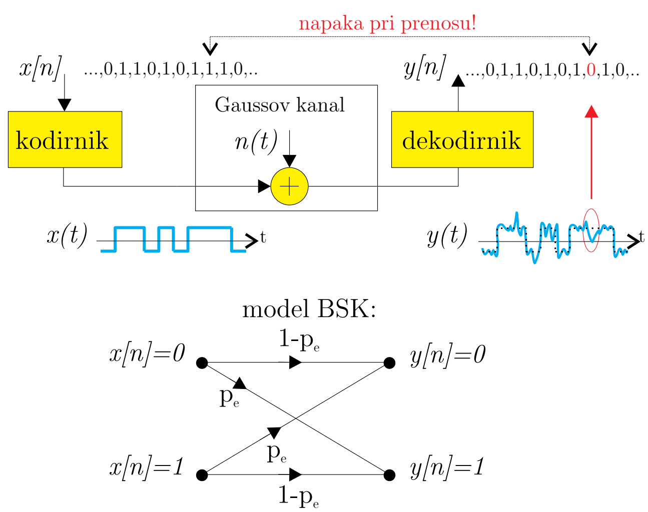
Rešitev 39 za BSK najdete v knjigi[1], stran 56.

Rešitev naloge: otk-vaja10.mcd

[1] Sašo Tomažič: **Osnove telekomunikacij I**

11 Učinkovitost prenosnega sistema- primerjava prenosnih kapacitet

1. Za prenosni sistem na sliki 12 določite model BSK.
2. Izračunajte potek teoretične prenosne kapacitete BSK: $C_{BSK}(Pe(SNR))$!
3. Izračunajte potek kapacitete Gaussovega kanala $C(SNR)$!
4. Učinkovitost prenosnega sistema izrazite z odmikom od Shannonove kapacitete kanala pri $BER = 10^{-5}$!



Slika 12 – Dvonivojski prenos po Gaussovem kanalu in nadomestni model diskretnega kanala

Komentar: Slika 12 podaja model prenosnega sistema. Po Gaussovem prenosnem kanalu prenašamo par simbolov, ki sta po obliki pravokotna impulza z nasprotno polariteto. Dekodirnik v sprejemniku preverja polariteto vzorcev sprejetega signala. Napake pri prenosu nastopajo zaradi šuma, ki se na prenosnem kanalu prišteva oddanemu signalu. Verjetnost napake lahko natančno izračunamo iz verjetnostne porazdelitve šuma. Osnovna parametra, ki določa lastnosti prenosnega kanala sta moč šuma σ_n^2 in omejitev moči signala σ_x^2. Ekvivalenti diskretni kanal za dani primer je BSK. Potek odvisnosti prenosne kapacitete od razmerja SNR, izračunamo posredno iz relacij $C_{BSK}(P_e)$ in $P_e(SNR)$.

Idealni prenosni sistem izkorišča polno kapaciteto kanala, ki jo določa Shannonova formula. Prenosni sistem z dvonivojskim kodiranjem ne izkorišča polne kapacitete Gaussovega prenosnega kanala. Razlike v kapaciteti lahko ocenimo na osnovi primerjave $C(SNR)$ in $C_{BSK}(SNR)$. Učinkovitost prenosnega sistema izražamo z odmikom od Shannonove kapacitete kanala $\gamma(P_e)$. Za izbrani prenosni sistem, kjer prenašamo b bitov na simbol s končno verjetnostjo napake pri prenosu P_e, potrebujemo $\gamma(P_e)$-krat večjo moč signala, kot bi jo potrebovali v idealnem prenosnem sistemu za primer $C = b = 2$.

Rešitev naloge: otk-vaja11.mcd