OSNOVE TELEKOMUNIKACIJ 3
zapiski laboratorijskih vaj TK

Šolsko leto	2008 / 2009
Izvajalec	Anton Umek
Avtor dokumenta	Vesna Koderman
Sodelavci	

UREJANJE DOKUMENTA			
VERZIJA	01	**REVIZIJA**	01
DATUM	17. 1. 2010		
ZADNJI POPRAVLJAL			
PREGLEDAL			

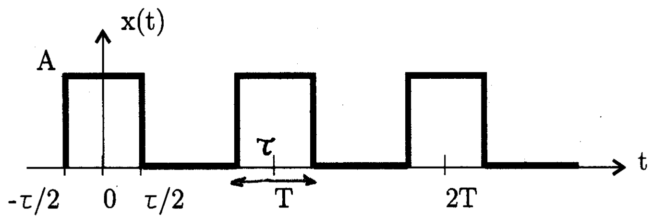
OPOMBE

POPRAVKI

1 Analiza periodičnih signalov

Periodični signal $x(t)$ je vlak pravokotnih impulzov:

$$T = 1\text{ms}$$
$$\tau = \frac{T}{5}$$
$$V = 1$$



Slika 1 – Vlak pravokotnih impulzov.

Naloge:

1. Izračunajte in narišite potek amplitudnega spektra in potek močnostnega spektra signala!
   0,55 Px =
2. Do katere frekvence se nahaja 95% moči signala ? filter = trivialen
3. Vlak pravokotnih impulzov x(t) vodimo skozi nizko sito z mejno frekvenco $f_{zg} = \frac{5.5}{T}$. Narišite potek signala $y(t)$ na izhodu sita ! (do 5. harmonske komponente)
   ω_0, $2\omega_0$, $3\omega_0$, $4\omega_0$, $5\omega_0$

Naloge ponovite tudi za primere:

$$\tau = \frac{T}{2}, \tau = \frac{T}{10} \text{ in } \tau = \frac{T}{20}$$

Učinek filtriranja: seštejemo določeno št. harmonskih komponent (+ upoštevamo popačenje)

Navodila: Izračunamo kompleksni spekter periodičnega signala x(t) :

$$X[n] = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} x(t)e^{-\jmath n\omega_0 t}dt$$

$$X[n] = V\frac{\tau}{T}\frac{\sin\left(n\omega_0\frac{\tau}{2}\right)}{n\omega_0\frac{\tau}{2}}$$

1. Amplitudni spekter periodičnega signala je absolutna vrednost Fourierovih koeficientov,

$$A[n] = |X[n]|$$

kvadrate komponent amplitudnega spektra $|X[n]|^2$ pa imenujemo močnostni spekter.

2. Srednjo kvadratično vrednost signala imenujemo moč signala. Moč signala je vsota moči posameznih harmonskih komponent:

$$\overline{x(t)^2} = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} x(t)^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |X[n]|^2$$

Periodični signali imajo lahko neskončno število harmonskih komponent. Zanima nas število spektralnih komponent K s frekvencami $0, \omega_0, 2\omega_0, .., K\omega_0$, ki vsebuje 95%moči signala:

$$\sum_{n=-K}^{K} |X[n]|^2 = \frac{95}{100}\overline{x(t)^2}$$

3. Periodični signal $x(t)$ lahko izrazimo s spektralnimi komponentami $X[n]$, kar ustreza zapisu kompleksne Fourierove vrste:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X[n]e^{\jmath n\omega_0 t}$$

Frekvenčno omejen signal dobimo s seštevanjem končnega števila N_1 spektralnih komponent:

$$y(t) = \sum_{n=-N_1}^{N_1} X[n]e^{\jmath n\omega_0 t}$$

Rešitve: datoteka otk-vaja1.mcd

Analiza periodičnih signalov

1. Laboratorijska vaja : KOMPLEKSNI ZAPIS FOURIERJEVEGA TRANSFORMA :

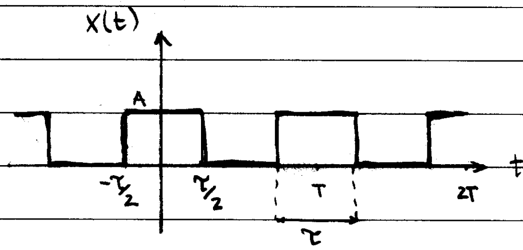
SIGNALI

aperiodični (aperiodični signali omejenega trajanja)

periodični.:

$T; \; f_0 = \frac{1}{T}, \; \omega = \frac{2\pi}{T}$

Skica: vlak pravokotnih impulzov :



$$X[n] = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} x(t)\, e^{-j\omega_0 n t}\, dt$$ ... Fourierjeva transformacija

inverzna Fourierjeva formula: $x(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} X[n]\, e^{j\omega_0 n t}$

Lasnosti :

→ Realni spekter je sodi parameter funkcije, imaginarni spekter pa je lihi parameter funkcije.

→ $X[-n] = X^*[n]$

Rešitev :

1.) $$X[n] = \frac{1}{T}\int_{-\tau/2}^{\tau/2} x(t)\cdot\cos(n\omega_0 t)\, dt + \underbrace{\frac{-j}{T}\int_{-\tau/2}^{\tau/2} \sin(n\omega_0 t)\, dt}_{=0}$$

= 0, ker je funkcija na simetričnem intervalu enaka 0!

$$\Rightarrow X[n] = \frac{1}{T}\int_{-\tau/2}^{\tau/2} A\cdot\cos(n\omega_0 t)\, dt = \frac{2A}{T}\int_0^{\tau/2}\cos(n\omega_0 t)\, dt =$$

$$= \frac{2A}{T}\left(\sin(n\omega_0 t)/(n\omega_0)\right)\Big|_0^{\tau/2} = \frac{2A}{T}\cdot\frac{\sin(n\omega_0 \frac{\tau}{2})}{n\omega_0}\cdot\frac{\tau/2}{\tau/2} = A\cdot\frac{\tau}{T}\cdot\underbrace{\frac{\sin(n\omega_0\tau/2)}{n\omega_0\tau/2}}$$

to sedaj lahko definiramo kot novo funkcijo Sx

MathCad!

$Sx(x) = \text{if}(\text{pogoj, then, else}) = \text{if}\left(x = 0, 1, \frac{\sin x}{x}\right) =$

$= \text{if}\left(x \neq 0, \frac{\sin x}{x}, 1\right)$

2.) **Povprečna moč signala** :

$$\overline{x^2(t)} = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} x^2(t)\, dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |X[n]|^2$$ ... da se moči seštevajo morajo biti signali ORTOGONALNI ... PARSEVALOV TEOREM

$$\overline{X^2(t)} = \frac{2A^2 \cdot \tau/2}{T} = \frac{\tau}{T} A^2$$ ... povprečna moč v našem primeru

• SIGNAL le na OSNOVNI PERIODI:

$x_a(t) = if\ (|t| < \tau/2, A, 0)$ ... če je $|t| \leq \tau/2$ ima $x(t)$ vrednost A, sicer $x(t) = 0$.

• Napotek za MathCAD: funkcija $m(t, T)$ daje ostanek pri deljenju:

$x(t) = x_a(mod(t, T))$

?

• Diskretna funkcija: $X[n] = A\ \tau/T \cdot \frac{\sin(n\omega_0 \tau/2)}{n\omega_0 \tau/2}$

$Sx(x) = if\left(x=0, 1, \frac{\sin(x)}{x}\right)$

$X(n) = A\ \tau/T\ Sx(n\omega_0 \tau/2)$

$n = -10 \ldots 10$ ... zanima nas realni del, imaginarni del in faza ...

• Parametri: A, T, τ ;

• MathCAD:

$A = 1$; $T = 1$; $\tau = T/5$; $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$;

$Sx(x) := if\left(x \neq 0, \frac{\sin x}{x}, 1\right)$

$X(n) := A \cdot \tau/T \cdot Sx(n\omega_0 \tau/2)$

$(n := -10 \ldots 10)$

$N_m := 20$

$n = -N_m \ldots N_m$ (graf → plot xy)

?

$P_x := A^2\ \tau/T$; $N := 9$; $0{,}95 * P_x =$

$x_r(t, N) := \sum_{n=-N}^{N} X(n) \cdot e^{j\omega_0 n t}$ $\left(x(t) \Big|_{N\to\infty} = x_r(t)\right)$

$t := -T, -0{,}99T \ldots 2T$ (graf → plot xy)

... če pulz zožimo, se spekter razširi

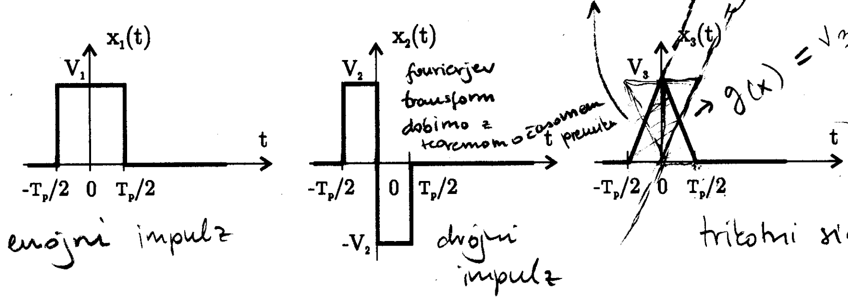
energijski signal

3 Analiza aperiodičnih signalov

$y = kx + n$

$y = \frac{t}{T_{p/2}} V_3$

Na sliki 3 so podani trije aperiodični signali:



Slika 3 – Aperiodični signali

Širina impulza je pri vseh treh T_p

Naloge:

1. Konstante V_n določite tako, da bodo imeli vsi signali enako energijo $E_1 = E_2 = E_3 = 1$.
2. Izračunajte Fourierove transforme in narišite poteke gostote amplitudnih, faznih in energijskih spektrov signalov ! ✓
3. Primerjajte kumulativne energijske spektre signalov !
4. Izračunajte in narišite poteke križnih korelacij !
5. Izračunajte in narišite poteke avtokorelacijskih funkcij !

Navodila:

1. Energija aperiodičnega signala je enaka:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)^2 dt$$

2. Gostote amplitudnega, faznega in energijskega spektra določa Fourierov transform signala:

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-\jmath\omega t} dt$$

3. Kumulativni energijski spekter predstavlja energijo signala v navzgor omejenem območju do izbrane mejne frekvence ω_{zg}:

$$S(\omega_{zg}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_{zg}}^{\omega_{zg}} |X(\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\omega_{zg}} |X(\omega)|^2 d\omega$$

$$S(\infty) = E$$

4. Funkcijo križne korelacije med dvema aperiodičnima signaloma iščemo po parametru časovnega zamika τ:

$$r_{1,2}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t)x_2(t+\tau)dt$$

5. Avtokorelacijska funkcija signala $x(t)$ je:

$$r(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x(t+\tau)dt$$

$$r(0) = E$$

Rešitev naloge: otk-vaja3.mcd

2. Laboratorijska vaja: ANALIZA APERIODIČNIH SIGNALOV

1.) Amplitude naj bodo take, da imajo vsi trije dani signali enako energijo .. ploščine grafa naj bo pri vseh treh signalih enake.

2.) Pogledali bomo potek korelacijskih funkcij - gre za ugotavljanje podobnosti signalov. Naprava primerja signale tako, da računa korelacije. Ta primerjava ne bo OK, če primerjamo signale z različno energijo. Enaka energija je pogoj za računanje korelacij!

-Najprej določimo amplitude tako, da izenačimo energije $E_1 = E_2 = E_3$

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)\,dt \Rightarrow$$

$$E_1 = V_1^2 T_p \quad , \quad E_2 = V_2^2 T_p \quad ; \quad E_3 = 2 \cdot \int_0^{T_p/2} \left(\frac{2V_3}{T_p} t \right)^2 dt =$$

$$= 2 \cdot 4 V_3^2 \frac{1}{T_p^2} \frac{t^3}{3} \Big|_0^{T_p/2} = \cancel{8} V_3^2 \frac{1}{\cancel{T_p^2}} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{T_p^{\cancel{3}}}{\cancel{8}} =$$

$$= V_3^2 \cdot T_p \cdot \frac{1}{3}$$

Normiramo signal po energiji (jim damo vrednost 1):

$E_1 = E_2 = E_3 = E = 1$

$$\Rightarrow \quad V_1 = \sqrt{E/T_p} \quad ; \quad V_2 = \sqrt{E/T_p} \quad ; \quad V_3 = \sqrt{3E/T_p}$$

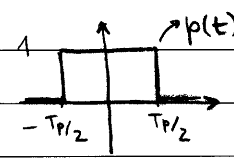
$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j\omega t}\, dt$$

1. SIGNAL:

$$\Rightarrow X_1(\omega) = 2 \int_0^{T_p/2} V_1 \cdot \cos(\omega t)\, dt = 2V_1 \cdot \frac{\sin(\omega t)}{\omega} \Big|_0^{T_p/2} = 2 \cdot V_1 \cdot \frac{\sin \omega \frac{T_p}{2}}{\omega} \Big/ \cdot \frac{T_p/2}{T_p/2} =$$

$$= \cancel{2} V_1 \frac{T_p}{\cancel{2}} \cdot \frac{\sin \omega T_p/2}{\omega \cdot T_p/2} = V_1 \cdot T_p \cdot \frac{\sin(\omega \cdot T_p/2)}{\omega \cdot T_p/2}$$

zapišemo:



$$\Rightarrow P(\omega) = T_p \cdot \frac{\sin(\omega T_p/2)}{\omega T_p/2} \quad ; \quad V_1 = 1$$

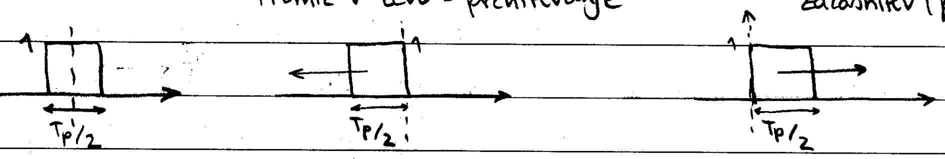
MathCad: $p(t, T_p) := |t| < T_p/2$

$$P(\omega) := T_p \cdot \frac{\sin(\omega T_p/2)}{\omega \cdot T_p/2} \quad ; \quad \text{SPEKTER: } X_1(\omega) = V_1 \cdot P(\omega, T_p)$$

$x_2(t)$:

2. SIGNAL: Naredimo premik v levo (prehitevanje signala), da signal osrediščimo. Signal razdelimo na dva dela: prvi del premaknemo v levo, drugega pa v desno (za $T_p/4$) in potem naredimo superpozicijo teh dveh.

$\rightarrow$ $x_2(t)$: Premik v levo - prehitevanje; zakasnitev (premik v desno) za $T_p/4$



$p(t, T_p/2)$ $\quad$ $p(t + T_p/4, T_p/2)$ $\quad$ $p(t - T_p/4, T_p/2)$

SUPERPOZICIJA: $x_2(t) = V_2 \cdot p(t + T_p/4, T_p/2) - V_2 \cdot p(t - T_p/4, T_p/2)$

~ Zanima nas $\mathcal{F}[x_2(t)]$ ... da to rešimo moramo spomniti lastnost časovnega premika v FT :

ČASOVNI PREMIK: $p(t) \longleftrightarrow P(\omega)$

signal premaknjen za: $p(t - t_0) \longleftrightarrow P(\omega) e^{-j\omega t_0}$ (premik v desno)

$p(t + t_0) \longleftrightarrow P(\omega) e^{j\omega t_0}$ (premik v levo)

$$\Rightarrow \mathcal{F}[x_2(t)] = X_2(\omega) = V_2 \cdot P(\omega, T_p/2)\, e^{j\omega T_p/4} - V_2\, P(\omega, T_p/2)\, e^{-j\omega T_p/4}$$

Bolj eksplicitno to zapišemo:

$$X_2(\omega) = V_2 \left(P(\omega, T_p/2) \right) \cdot 2j \sin(\omega T_p/4) =$$

$$= V_2 \cdot \frac{T_p}{\cancel{2}} \cdot \frac{\sin(\omega \cdot T_p/4)}{\omega \cdot T_p/4} \cdot \cancel{2} \cdot j \cdot \sin(\omega T_p/4) =$$

$$= j V_2 \cdot T_p \cdot \frac{\sin^2(\omega \cdot T_p/4)}{\omega \cdot T_p/4}$$

(Druga pot: $X_2(\omega) = -\int_{-T_p/2}^{T_p/2} \underbrace{x_2(t) \cdot j\sin(\omega t)}_{\text{liha funkcija}}\, dt = 2j \int_0^{T_p/2} V_2 \cdot \sin(\omega t)\, dt = \ldots$

=

3. SIGNAL → $x_3(t)$

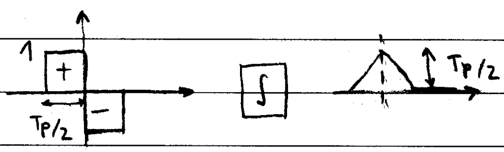
$$\left(X_3(\omega) = 2 \int_0^{T_p/2} V_3 \left(1 - {}^{2t}/_{T_p}\right) \cdot \cos(\omega t)\, dt = \ldots\ ^{DN} \right)$$

... $X_3(\omega)$ se da lepo rešit, če upoštevamo lastnost integracije v frekvenčnem prostoru...

$$x(t) \longleftrightarrow X(\omega) \;; \qquad \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\, d\tau \longleftrightarrow \frac{X(\omega)}{j\omega}$$

$$x(t) \rightarrow \boxed{\int} \rightarrow \;?$$

...gre za izločanje visokofrekvenčnih impulzov
- povprečenje ... poudari nizke frekvence ...
... Višja kot je frekvenca manjša je vrednost na izhodu integratorja...



? $V_2 \cdot T_p/2$

$$\Rightarrow \frac{V_3}{V_2 \cdot T_p/2} \cdot x_2(t) \longrightarrow \boxed{\int} \longrightarrow x_3(t)$$

$$\downarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \downarrow$$

$$X(\omega) \qquad\qquad\qquad\qquad X_3(\omega)$$

$$\frac{X_2(\omega)}{j\omega} \cdot \frac{V_3}{V_2 T_p/2} \Rightarrow X_3(\omega) = \frac{V_3}{V_2 \cdot T_p/2} \cdot \frac{1}{j\omega} \cdot X_2(\omega)$$

$$X_2(\omega) = j\, V_2 \cdot T_p \, \frac{\sin\left(\frac{\omega \cdot T_p}{4}\right)}{\omega\, T_p/4} \cdot \sin\left(\frac{\omega T_p}{4}\right)$$

$$\Rightarrow X_3(\omega) = \frac{V_3}{\cancel{V_2}\cancel{T_p}/\cancel{2}} \cdot \frac{1}{\cancel{j}\omega} \cdot \cancel{j}\, \cancel{V_2}\, \cancel{T_p} \cdot \frac{\sin^2\left(\frac{\omega T_p}{4}\right)}{\omega \cdot T_p/4} = \underline{\underline{\frac{T_p \cdot V_3}{2} \left(\frac{\sin\left(\frac{\omega T_p}{4}\right)}{\omega \cdot T_p/4}\right)^2}}$$

... Dobili smo vse tri spektre: $X_1(\omega)$, $X_2(\omega)$, $X_3(\omega)$

Math CAD !!! naredimo 6 korakov :

1.) $E = 1$; $T_p = 1$; $t := -2T_p, -1.99 \cdot T_p \,..\, 2 \cdot T_p$

2.) $V_1 = \sqrt{E/T_p}$; $V_2 = \sqrt{E/T_p}$; $V_3 = \sqrt{3E/T_p}$

3.) $p(t, T_p) := |t| < T_p/2$

4.) $X_1(t) = V_1 \cdot p(t, T_p)$

$X_2(t) = V_2 \left(p(t + T_p/4, T_p/2) - p(t - T_p/4, T_p/2) \right)$

5.) $\left(P(\omega, T_p) := T_p \cdot \frac{\sin(\omega\, T_p/2)}{\omega\, T_p/2} \right)$ $\quad Sx(x) = \text{if}\left(x \neq 0, \frac{\sin x}{x}, 1\right)$

$P(\omega, T_p) := T_p \cdot Sx(\omega\, T_p/2)$

$X_1(\omega) := V_1 \cdot P(\omega, T_p)$

$X_2(\omega) := j \cdot V_2 \cdot T_p \; Sx\left(\omega \frac{T_p}{4}\right) \cdot \sin\left(\frac{\omega T_p}{4}\right)$

$X_3(\omega) := \frac{V_3}{2} \cdot T_p \cdot \left(Sx\left(\omega \frac{T_p}{4}\right)\right)^2$

$\omega_1 = \frac{2\pi}{T_p}$

$\omega = 0, \frac{\omega_1}{100} \,..\, 4\omega_1$

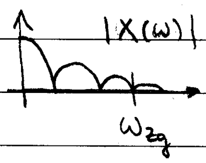
6.) GRAF : plot XY

• **Primerjanje kumulativnih energijskih spektrov signalov:**

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2\,d\omega$$

$$S_x(\omega = \infty) = E$$

$$S_x(\omega_{zg}) = 2 \cdot \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\omega_{zg}} |X(\omega)|^2\,d\omega$$ ω_{zg} ... $\omega_{zgornji}$



MathCAD: $S1(\omega_{zg}) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\omega_{zg}} (|X1(\omega)|)^2\,d\omega$

$\omega_{zg} = 0, \frac{\omega_1}{100} .. \omega_1$ ... graf ... XY plot

• **Potek križnih koleracij:**

$$r_{12}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t) \cdot x_2(t+\tau)\,dt$$ ... korelacija

$$r_{11}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t) \cdot x_1(t+\tau)\,dt$$ ... avtokoleracija

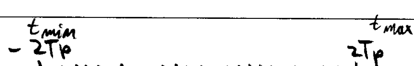
KOLERACIJA: parameter funkcije r_{12} je τ (premik), 1. funkcijo primerjamo z 2. funkcijo premaknjeno za τ!

AVTOKOLERACIJA: primerjamo funkcijo samo s sabo, vendar premaknjeno za τ ...

$$r_{11}(\tau = 0) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)\,dt = E$$ ... povezava z energijo ...

... Namesto da računamo integral, računamo vsoto ... uporaba numerične integracije ...

$$\int_{i\Delta t}^{(i+1)\Delta t} f(t)\,dt \cong f(i\Delta t)\,\Delta t$$



... v tem primeru nadomestimo integral z vsoto

$\Delta t = 4\,T_p/N$

$N = 100$

$t_{min} \longrightarrow t_{max} \longrightarrow t$

$t_{min} = -2T_p$, $t_{max} = 2T_p$ $\Rightarrow$ $\Delta t = \dfrac{t_{max} - t_{min}}{N}$

$N = 100$

$\Rightarrow$ $r_{12}(\tau) = \int_{t_{min}}^{t_{max}} x_1(t) \cdot x_2(t+\tau)\, dt$ ... namesto tega naredimo:

$$\Rightarrow r_{12}(\tau) = \Delta t \sum_{n_{min}=-\frac{N}{2}}^{n_{max}=\frac{N}{2}-1} x_1(n\Delta t) \cdot x_2(n\Delta t + \tau)$$; graf (xy plot)

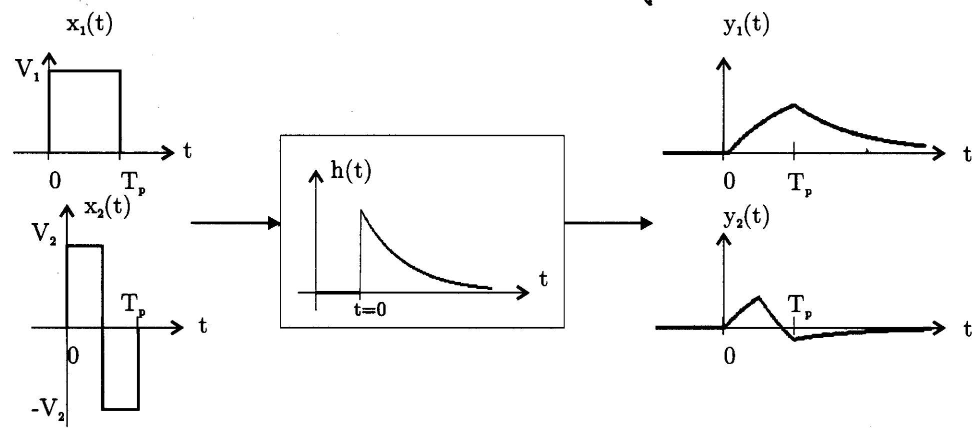
na enak način naredimo tudi za $r_{11}(\tau)$ in $r_{13}(\tau)$!

4 Prevajanje signalov skozi linearne sisteme

Izračunajte odzive linearnega sistema za različne aperiodične signale na vhodu. Prenosne lastnosti linearnega sistema določa impulzni odziv:

$$h(t) = U(t)\omega_0 e^{-\omega_0 t} \tag{1}$$

↳ delta impulz!



Slika 4 – Filtriranje signalov

Naloge:

1. Oba odziva $y_1(t)$ in $y_2(t)$ izračunajte najprej s konvolucijo:
$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau \tag{2}$$
2. Numerično izračunajte približek konvolucije nizov:
$$y(n\Delta t) \approx \Delta t \sum_k x(k\Delta t)h((n-k)\Delta t) \tag{3}$$
3. Izračunajte spekter signala na vhodu $X(\omega)$, prevajalno funkcijo linearnega sistema $H(\omega)$ in spekter signala na izhodu:
$$Y(\omega) = X(\omega)H(\omega) \tag{4}$$
4. Signal na izhodu $y(t)$ izračunajte s transformacijo spektra $Y(\omega)$:
$$y(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} Y(\omega)e^{j\omega t}d\omega \tag{5}$$
Uporabite približek pri računanju integrala:
$$y(t) \approx \Delta\omega \sum_k Y(k\Delta\omega)e^{jk\Delta\omega t} \tag{6}$$

Rešitev naloge: otk-vaja4.mcd

3. Lab. vaja: prevajanje signalov skozi linearne sisteme

a) $x(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t) = x(t) * h(t)$

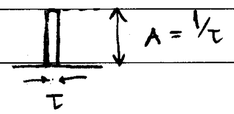
diracov impulz...

$h(t) = U(t) \cdot \omega_0 e^{-\omega_0 t}$

$\delta(t) \longrightarrow \boxed{} \longrightarrow h(t) \longleftrightarrow H(\omega)$

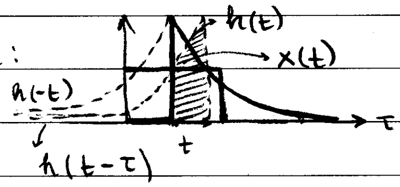
↳ konstruiramo v frekvenčnem prostoru (omejitve postavljamo v frekv. prostoru)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\, dt = 1$$

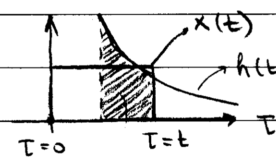
Npr.:  $\rightarrow$ Če ta impulz ožamo, se od neke širine (τ) naprej, odziv več bistveno ne spreminja

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, x(t-\tau)\, d\tau$$

⟹ Dva različna načina:



$\longleftrightarrow$



$y(t) = ?$

$$x_1(t) = \begin{cases} V_1 & ; 0 < t < T_p \\ 0 & ; \text{sicer} \end{cases}$$

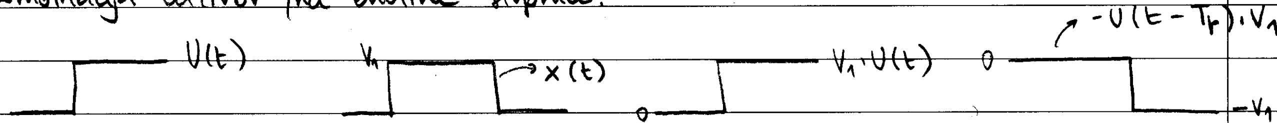
1.) $$y_1(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, x(t-\tau)\, d\tau = V_1 \int_0^t h(\tau)\, d\tau$$

$$y_1(t) = V_1 \cdot \omega_0 \int_0^t e^{-\omega_0 \tau}\, d\tau = V_1 \cdot \omega_0 \left. \frac{e^{-\omega_0 \tau}}{-\omega_0} \right|_0^t = V_1 (1 - e^{-\omega_0 t}) \quad ; \quad 0 < t < T_p$$

2.) $$y_1(t) = V_1 \cdot \omega_0 \int_{t-T_p}^{t} h(\tau)\, d\tau = V_1 \omega_0 \left. \frac{e^{-\omega_0 \tau}}{-\omega_0} \right|_{t-T_p}^{t} = V_1 (e^{-\omega_0 (t-T_p)} - e^{-\omega_0 t})$$

Pogledamo odziv na enotino stopnico ...

Signal na vhodu je linearna kombinacija enotinih stopnic ... Na izhodu je lin. kombinacija odzivov na enotine stopnice.

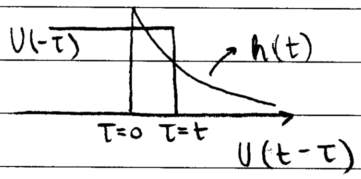


$s(t)$ ... odziv sistema v primeru enotine stopnice na vhodu

$x(t) = V_1 (U(t) - U(t - T_p))$; $s(t) = (1 - e^{-\omega_0 t}) \cdot U(t)$

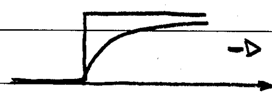
$$y(t) = V_1\left(s(t) - s(t - T_p)\right)$$

$$s(t) = U(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, U(t-\tau)\, d\tau = \int_{0}^{t} \omega_0 e^{-\omega_0 t} \cdot d\tau =$$



$$= \left(1 - e^{-\omega_0 t}\right) \cdot U(t)$$

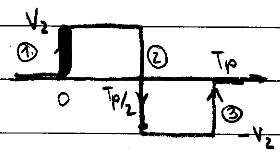
pomnožimo z enotino stopnico



$\rightarrow s(t)$

~ Namesto, da računamo konvolucijo v časovnem prostoru, je lažje če računamo produkt v frekvenčnem prostoru ; $Y(\omega) = H(\omega) \cdot X(\omega)$ ... in naredimo obratno inverzno transformacijo

~ Za drugi primer naredimo odziv y_2 s pomočjo linearne kombinacije enotinih stopnic ...



... gre za kombinacijo sestavljeno iz treh delov enotinega pulza ...

$$x_2(t) = V_2\left(U(t) - 2U(t - T_p/2) + U(t - T_p)\right)$$

$$y_2(t) = V_2\left(s(t) - 2s(t - T_p/2) + s(t - T_p)\right)$$

$$u(t) = \begin{cases} 1 & ; t \geq 0 \\ 0 & ; \text{sicer} \end{cases}$$

Math CAD :

$\omega_0 = 3, \quad T_p = 1, \quad V_2 = 1$

$$h(t) := U(t) \cdot \omega_0 e^{-\omega_0 t}$$

$u(t) = (t \geq 0)$ (... tako pišemo v mathCadu)

$$s(t) = U(t)(1 - e^{-\omega_0 t})$$

$$x_1(t) := V_1 \cdot (U(t) - U(t - T_p))$$

$$x_2(t) := V_2 (U(t) - 2U(t - T_p/2) + U(t - T_p))$$

$$y_1(t) := V_1 (s(t) - s(t - T_p))$$

$$y_2(t) := V_2 (s(t) - 2s(t - T_p/2) + U(t - T_p)$$

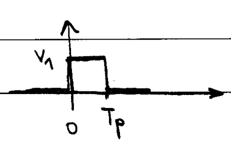
$$y1(t) := \int_{t-T_p}^{t} h(\tau) \cdot x1(t - \tau)\, d\tau$$

b) Drugi del naloge rešimo tako, da računamo v frekvenčnem prostoru. Analitično je računa kar zapleteno, zato nalogo rešimo le numerično.

$$x(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t)$$

$$\downarrow \qquad\quad \downarrow \qquad\quad \downarrow$$

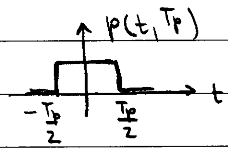
$$X(\omega) \qquad H(\omega) \Longrightarrow Y(\omega) = X(\omega) \cdot H(\omega) \;/\; \mathcal{F}^{-1}$$



premik!

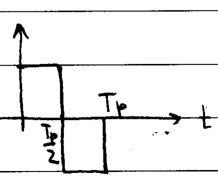
$$x_1(t) = V_1 \cdot p(t - T_p/2, T_p)$$

$$x_2(t) = V_2 \cdot p((t - T_p/2), T_p/2) - V_2 \cdot p((t - \tfrac{3T_p}{4}), T_p/2)$$



$$\rightarrow P(\omega, T_p) = T_p \frac{\sin(\omega \frac{T_p}{2})}{\omega \cdot T_p/2}$$ ... (2. Lab. vaja!)

premik!



$$\Rightarrow X1(\omega) = V_1 \cdot P(\omega, T_p)\, e^{-j\omega \frac{T_p}{2}}$$

$$\Rightarrow X2(\omega) = V_2 \cdot P(\omega, T_p/2)\, e^{-j\omega T_p/4} - V_2 P(\omega, T_p/2)\, e^{-j3 T_p/4}$$

→ Potrebujemo še Fourierjev transform prevajalne funkcije:

je 1 in sicer od 0 do ∞ (to upoštevamo v meji!)

$$H(\omega) = \mathcal{F}(h(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)\cdot e^{-j\omega t}\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)\cdot \omega_0 e^{-\omega_0 t}\cdot e^{-j\omega t}\,dt =$$

$$= \int_0^{\infty} \omega_0 e^{-t(\omega_0+j\omega)}\,dt = \omega_0 \int_0^{\infty} e^{-t(\omega_0+j\omega)}\,dt$$

$$= \omega_0 \left.\frac{e^{-t(\omega_0+j\omega)}}{-(\omega_0+j\omega)}\right|_0^{\infty} = \underline{\underline{\frac{\omega_0}{\omega_0+j\omega}}} = \underline{\underline{1/(1+j\tfrac{\omega}{\omega_0})}}$$

$Y1(\omega) = X_1(\omega)\cdot H(\omega)$ ⟹ iz tega bomo izračunali približek $y_1(t)$

$Y2(\omega) = X_2(\omega)\cdot H(\omega)$ ⟶ ... -||- $y_2(t)$

$y_1(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty} Y1(\omega)\cdot e^{j\omega t}\,d\omega$ ... približek izračunamo tako da meje spremenimo in izračunamo vrednost integrala na nekem intervalu:

MathCAD:

$Sx(x) := \text{if}\left(x \neq 0, \frac{\sin(x)}{x}, 1\right)$

$H(\omega) = \frac{\omega_0}{\omega_0+j\omega}$

$P(\omega) = T_p\cdot Sx\left(\omega\cdot\frac{T_p}{2}\right)$

$X1(\omega) = V_1\cdot P(\omega, T_p)\cdot e^{-j\omega T_p/2}$

$Y1(\omega) = H(\omega)\cdot X1(\omega)$

$\omega m = 10\cdot\omega_0$

$\omega = -\omega m, -0{,}99\cdot\omega m \,..\, \omega m$ ... (narišeš graf: $|Y1(\omega)|, \omega$)

$$y1(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega m}^{\omega m} Y1(\omega)\, e^{j\omega t}\,d\omega$$

... na enak način izračunaš $y2(t)$ ... D.N.!

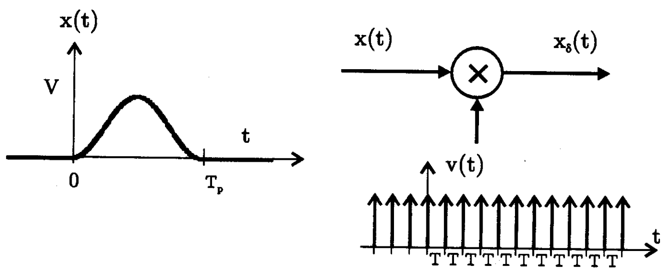
5 Vzorčenje signala

Signal na vhodu vzorčevalnika je oblikovan impulz:

$$x(t) = V_1\, p(t, T_p)\, \frac{1}{2}(1 - \cos 2\pi \frac{t}{T_p}) \tag{7}$$

Pomožni signal $p(t, T_p)$ je enotni pravokotni impulz s širino T_p:

$$p(t, T_p) = U(t) - U(t - T_p)$$



Slika 5 – Idealno vzorčenje

Naloga: Izračunajte spekter signala na vhodu in na izhodu idealnega vzorčevalnika!

Komentar

1. Vzorčenje signala predstavimo kot množenje signala v časovnem prostoru s periodično vzorčevalno funkcijo $v(t)$:

$$x_\delta(t) = x(t)v(t) \tag{8}$$

   Idealno vzorčenje predstavimo kot množenje z vlakom Diracovih impulzov:

$$v(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \tag{9}$$

2. Spekter vzorčenega signala je po frekvenci periodičen s periodo ω_{vz}:

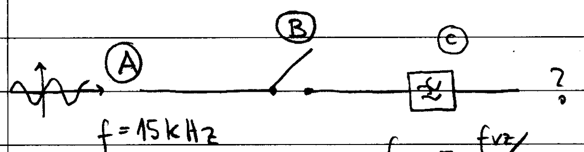
$$X_\delta(\omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(\omega - k\omega_{vz}) \tag{10}$$

Rešitev naloge: otk-vaja5.mcd

4. Lab. vaja: Vzorčenje signala

~ Vzorčevalna frekvenca mora biti vsaj 2x večja od vhodne frekvence
~ Vzorčni signal peljemo skozi nizko sito ... kaj dobimo na izhodu?

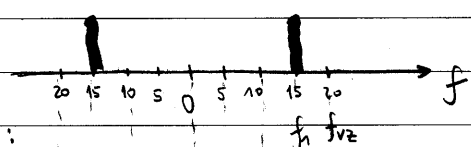
→ Sinusni (harmonični) signal frekvence 15 kHz peljemo skozi nizko sito; vzorčevalnik ima vzorčno frekvenco 20 kHz:



filter je 10 kHz

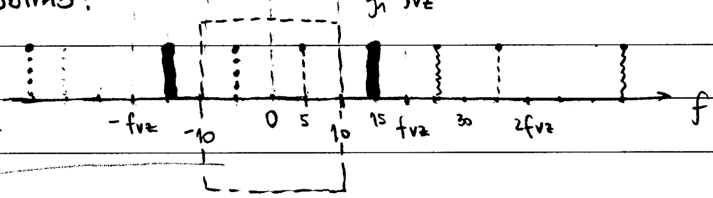
• Pogledamo spekter na vhodu (A) (f = 15 kHz) ... spekter je periodičen!

Narišemo:



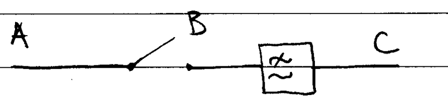
Vzamemo spekter na vhodu in ga prestavimo okoli $k \cdot f_{vz}$ ($k = -\infty, \infty$) in dobimo drugačen spekter (bolj gost), ki ga peljemo skozi nizko sito

V točki C dobimo:



→ To peljemo skozi nizko sito 10 kHz, ki prepusti samo od -10 do +10 kHz

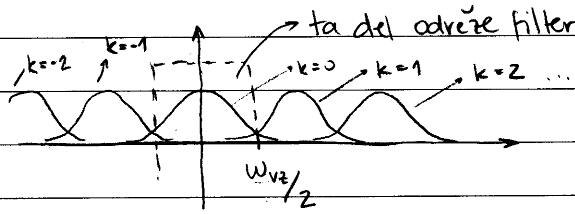
→ To se pelje skozi filter, vse ostalo se odreže! → Na izhodu dobimo harmoničen signal s frekvenco 5 kHz!



$x(t)$ → $X(\omega)$ → spekter originalnega signala

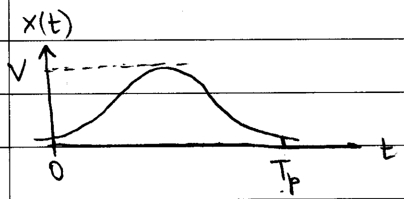
$x_\delta(t)$ → $X_\delta(\omega)$ → spekter vzorčenega signala

$x_r(t)$ → $X_r(\omega) = \begin{cases} X_\delta(\omega); & \text{za } |\omega| < \frac{\omega_{vz}}{2} \\ 0; & \text{sicer} \end{cases}$ → spekter rekonstruiranega signala



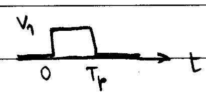
upoštevali moramo vse tiste komponente, katerih signal pade notr (v področ pravokotnik) - pomeni, da te komponente vplivajo na izhod. k_{min} in k_{max} sta odvisna od širine originalnega signala, glede na vzorčevalno frekvenco ...

za naš primer vsaj: $T_{vz} = T_p/3$



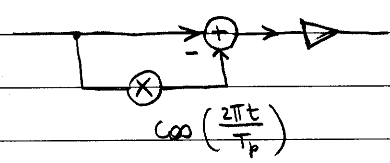
$$x(t) = \begin{cases} \frac{V_1}{2}\left(1-\cos\left(\frac{2\pi t}{T_p}\right)\right); & \text{za } 0 < t < T_p \\ 0; & \text{sicer} \end{cases}$$

⟹ Imamo pravokotni impulz



$V_1 \cdot p(t, T_p) \longleftrightarrow V_1 \cdot P(\omega)$

Ta spekter [$P(\omega)$] bomo lažje izračunali, če bomo upoštevali teorem o modulaciji:



$$x(t)\cdot\cos(\omega_0 t) \longleftrightarrow \frac{1}{2}X(\omega+\omega_0) + \frac{1}{2}X(\omega-\omega_0)$$

$$\Rightarrow \frac{V_1}{2}P(\omega+\omega_0) + \frac{V_1}{2}P(\omega-\omega_0); \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_p}$$

$$\Rightarrow X(\omega) = \frac{1}{2}V_1\cdot P(\omega) - \frac{1}{4}V_1 P(\omega+\omega_0) - \frac{1}{4}V_1\cdot P(\omega-\omega_0)$$

$$P(\omega) = T_p \frac{\sin\frac{\omega T_p}{2}}{\omega\cdot\frac{T_p}{2}}\cdot e^{-j\omega^{T_p/2}}$$

... to smo za pravokotni impulz izpeljali že na prejšnjih vajah!

$$\Rightarrow X_r(\omega) = X_\delta(\omega)\cdot\left(|\omega| < \frac{\omega_{vz}}{2}\right)$$ ... To MathCad razume!

MathCAD :

$V_1 := 3 \qquad T_p := 1 \qquad S_x(x) = \text{if}\left(x \neq 0, \frac{\sin x}{x}, 1\right)$

$x(t) := \frac{V_1}{2}\left(1 - \cos\left(\frac{2\pi t}{T_p}\right)\right) \cdot (t \geq 0) \cdot (T_p > t)$

$t := 0, \frac{T_p}{100} .. 2 \cdot T_p \qquad ; \qquad \omega_0 := \frac{2\pi}{T_p}$

$P(\omega) := T_p \cdot S_x\left(\frac{T_p}{2}\omega\right) e^{-j\omega T_p/2}$

$X(\omega) := \frac{V_1}{2} P(\omega) - \left(\frac{V_1}{4} P(\omega + \omega_0) + \frac{V_1}{4} P(\omega - \omega_0)\right)$

$T_{vz} := T_p/5$ (... izberemo čas vzorčenja)

$\omega_{vz} := 2\pi/T_{vz}$

$\omega := 0, \frac{\omega_0}{100} .. 10 \cdot \omega_0$ (Narišeš grafa : $(x(t), t)$ in $(|X(\omega)|, \omega)$)

$K_{max} := 5$ (... določiš vzorec...)

$X_\delta(\omega) := \frac{1}{T_{vz}} \sum_{k=-k_{max}}^{k_{max}} X(\omega + k\omega_{vz})$ (narišeš graf : $(|X_\delta(\omega)|, \omega)$)

$X_r(\omega) = X_\delta(\omega) \cdot \left(|\omega| < \frac{\omega_{vz}}{2}\right)$ (narišeš graf : $(|X_r(\omega)|, \omega)$)

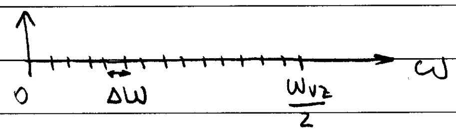
(... Kako vemo, da smo sešteli dovolj komponent? Spekter izhodnega signala mora biti periodičen.)

Računanje inverznega transforma:

$$x_r(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X_r(\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega = \frac{1}{2\pi}\cdot 2\int_0^{\infty}\Big(Re(X_r(\omega))\cdot\cos(\omega t) - Im(X_r(\omega))\sin(\omega t)\Big)d\omega$$

$$\Rightarrow\ x_r(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\omega_{vz}/2}\left[Re\{X_r(\omega)\}\cos(\omega t) - Im\{X_r(\omega)\}\cdot\sin(\omega t)\right]d\omega$$

↳ To bomo rešili numerično ... naredili bomo vsoto namesto integrala:
- interval razdelimo na N delov:



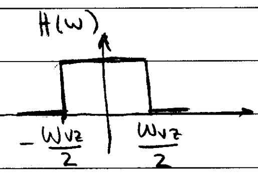
$N = 100$; $\Delta\omega = \frac{\omega_{vz}/2}{N}$

$$\Rightarrow\ x_r(t) \cong \frac{1}{\pi}\sum_{N=0}^{N-1}\Delta\omega\left[Re\{X_r(n\cdot\Delta\omega)\}\cos(n\Delta\omega t) - Im\{X_r(n\Delta\omega)\cdot\sin(n\Delta\omega t)\right]$$

(... Idealno nizko sito je tisto, ki ima $\frac{\omega_{vz}}{2} = \omega$ ...)

Kako to rešimo analitično?

$H(\omega) \longleftrightarrow h(t)$?



... vlak $h(t)$

$$h(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{0} H(\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega = \frac{1}{2\pi}\, 2\int_0^{\omega_{vz}/2}\cos(\omega t)\, d\omega =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left.\frac{\sin(\omega t)}{t}\right|_0^{\omega_{vz}/2} = \frac{\omega_{vz}}{2\pi}\cdot\frac{\sin\left(\frac{\omega_{vz}}{2}t\right)}{\frac{\omega_{vz}}{2}t}\ ;\quad S_x(x) = \frac{\sin x}{x}$$

$$\omega_{vz} = \frac{2\pi}{T_{vz}} \Rightarrow h(t) = T\cdot S_x\left(\frac{\omega_{vz} t}{2}\right) = T\cdot S_x\left(\frac{\pi}{T_{vz}}t\right)$$

$$\Rightarrow\ x_\delta(t) = x(t)\cdot\sum\delta(t - nT_{vz}) = \sum\delta(t - nT_{vz})\cdot x(nT_{vz})$$

$$x_r(t) = \sum_{n=0}^{s} h(t - nT_{vz})\cdot x(t\cdot T_{vz})$$

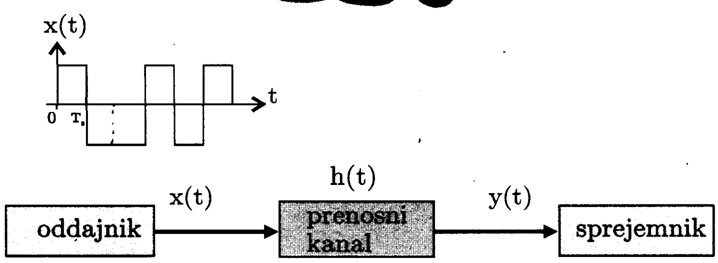
6 Intersimbolna interferenca

Oddajnik pošilja naključno zaporedje binarnih znakov. V naboru signalov sta pravokotna impulza z nasprotno polariteto:

$$x(t) = \sum_{n=0}^{N} s[n]g(t - nT_s)$$

Signal $x(t)$ vodimo čez prenosni komunikacijski kanal, za katerega poznamo sistemsko funkcijo $h(t)$:

$$h(t) = U(t)\omega_0 e^{-\omega_0 t} \tag{11}$$



Slika 6 – Prenos digitalnega signala

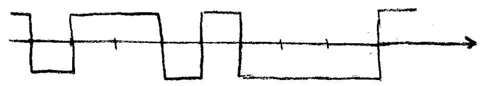
Naloga:

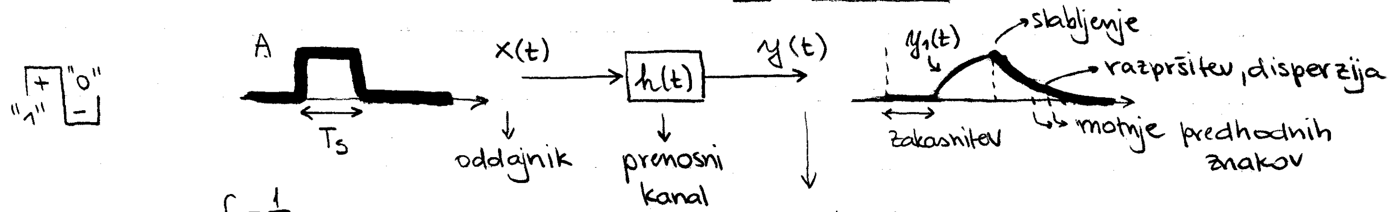
1. Izračunajte in narišite signal na vhodu sprejemnika .
2. Določite velikost intersimbolne interference !

Rešitev naloge: otk-vaja6.mcd

INTERSIMBOLNA INTERFERENCA

Binarni znakovni niz :

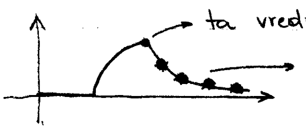




$f_s = \frac{1}{T_s}$ ... simbolna hitrost

~ Če se na enem impulzu zgodi disperzija, kaj se potem pojavi kot motnja pri prenosu znakov ?

~ Predhodni impulz povzroča motnjo, prihaja do nekakšnega prekrivanja ...



ta vrednost je zaželena : $y(T_s)$

te vrednosti niso zaželene (povzročajo interferenco) : $y(n \cdot T_s)$, $n \neq 1$

ISI ... intersimbolna interferenca - medznakovna motnja

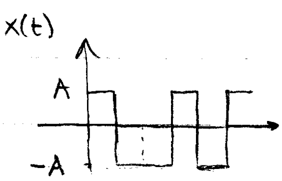
Definicija $$ISI = \frac{\sum_{n \neq 1} |y(n \cdot T_s)|}{|y(T_s)|}$$

$ISI > 1$ ... napaka zaradi interference

$ISI < 1$ ... do interference ne pride

↳ znaki se ne motijo med sabo

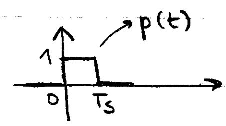
→ $x(t)$ ... vsota različno obteženih pravokotnih impulzov

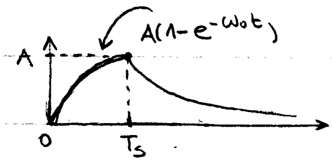


$$x(t) = \sum S(n)\, p(t - n \cdot T_s) \quad ; \quad S(n) = \begin{cases} A \\ -A \end{cases}$$

simbol

$$p(t) = (t \geq 0)(t < T_s) \quad :$$





$$y_1(t) = x_1(t) * h(t)$$

~ Pri filtriranju enega impulza smo pri prejšnjih vajah dobili odziv:

$$A \cdot (1 - e^{-\omega_0 t}) \cdot e^{-(t - T_s)\omega_0}$$

$A=3, \quad T_s=1, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{10 \cdot T_s} \quad \ldots \quad ISI = ?$

• najprej definiramo impulz na vhodu in odziv tega impulza na izhodu...

$$s(t) = U(t)\cdot(1-e^{-\omega_0 t})$$ ... glej nazaj!

$$\rightarrow \quad y_1(t) = A\cdot(s(t) - s(t-T_s))$$

MathCad :

$A := 3 \qquad T_s := 1 \qquad \omega_0 := 2\frac{\pi}{10\cdot T_s}$

$p(t) := (t \geq 0)(t < T_s)$

$x_1(t) := A\cdot p(t)$

$U(t) := t \geq 0$

$s(t) := U(t)(1-e^{-\omega_0 t})$

? $y_1(t) := A(s(t) - s(t-T_s))$

$t := 0, \frac{T_s}{100} \,..\, 10\cdot T_s$ (nariši grafa: $(x_1(t), t)$ in $(y_1(t), t)$)

(... izračunamo vzorce odziva na en znak v ekvidistančnih časovnih intervalih:)

$N := 10 \qquad n := 0 \,..\, N-1$

$y_1V_n := y_1(n\cdot T_s)$

$y_1V^T =$

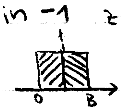
	0	1	2	...			
0							

(nariši grafa: $(y_1V_n, n\cdot T_s)$ in $(y_1(t), t)$)

$I := 50 \qquad i := 0 \,..\, I-1$

$S_i := 2\cdot \text{floor}(\text{rnd}(2)) - 1$ (... To nam da naključno binarno zaporedje znakov +1 in −1 z enakomerno verjetnostno porazdelitvijo)

indeks!

( rnd (B))

$S^T =$

$x(t) := \sum_{i=0}^{I-1} S_i \cdot A\cdot p(t - i\cdot T_s)$

$t := 0, T_s/10 \,..\, I\cdot T_s$ (nariši graf : $(x(t), t)$ in pritiskaj F9)

$y(t) := \sum_{i=0}^{I-1} S_i \cdot y_1(t - i\cdot T_s)$

vektor (zaporedje znakov v sprejemniku detektiramo iz vzorčenega signala :)

$yv_i := y(i \cdot Ts)$ (... nariši grafa: $(y(t), t)$ in $(yv_i, i \cdot Ts)$)

$sy_i = \text{if}(yv_i \geq 0, 1, -1)$ (... detekcija znakov v sprejemniku)

$i2 := 1 .. I-1$ (... primerjava sprejetega in oddanega zaporedja znakov)

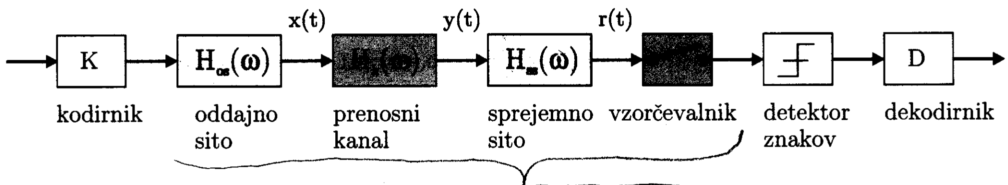
(narišeš dva ločena grafa : $(s_{i2-1}, i2)$ in $(sy_{i2}, i2)$)

$Err_{i2} := s_{i2-1} \neq sy_{i2}$ (... detekcija napak : preverimo ujemanje znakov v oddajniku in sprejemniku)

(... narišeš graf : $(Err_{i2}, i2)$)

7 Prenos brez ISI

V prenosnih sistemih načrtujemo prevajalni karakteristiji k oddajnega in sprejemnega sita tako, da zmanjšamo neželeni vpliv disperzije na prenosni poti. Model komunikacijskega kanala podaja slika 7. Skupna prevajalna karakteristika $H(\omega)$ združuje oddajno sito,



Slika 7 – Model prenosnega sistema

prenosni kanal in sprejemno sito.

$H(\omega)$

$$\boxed{H(\omega) = H_{os}(\omega)H_k(\omega)H_{ss}(\omega)}$$

Model časovno diskretnega komunikacijskega kanala podaja slika 8. Če želimo doseči prenos brez intersimbolne interference, mora biti izpolnjen pogoj:

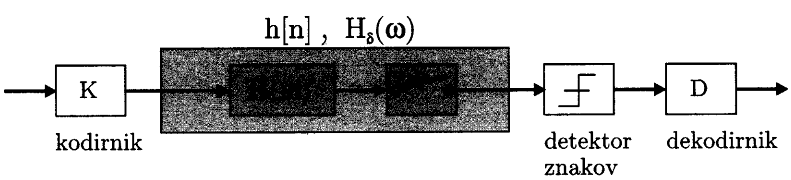
$$h(nT_s + t_0) = A\,\delta[n] \tag{12}$$

$$\delta[n] = \begin{cases} 1 & ; \quad n = 0 \\ 0 & ; \quad n \neq 0 \end{cases}$$

Pogoj za prenos brez intersimbolne interference v časovnem prosturu (12) določa tudi potek vzorčene skupne prevajalne karakteristike:

$$H_\delta(\omega) = konst. \tag{13}$$

$$H_\delta(\omega) = \frac{1}{T_s}\sum_{k=-\infty}^{\infty} H(\omega + k\omega_s) = \text{konstanta}$$



Slika 8 – Časovno diskretni model prenosnega sistema

Naloga: Na vhod skupne prevajalne funkcije vodimo impulzno modulirani signal $o(t)$:

$$o(t) = \sum_{n=0}^{\infty} s[n]\delta(t - nT_s)$$

Skupna prevajalna funkcija oddajnega sita, prenosne poti in sprejemnega sita ima potek funkcije dvignjenega kosinusa:

$$H(f) = \begin{cases} T_s & ; \quad |f| < \frac{f_s}{2}(1-\alpha) \\ \frac{T_s}{2}(1 + \cos(\frac{\pi T_s}{\alpha}(|f| - \frac{1-\alpha}{2T_s}))) & ; \quad \frac{f_s}{2}(1-\alpha) < |f| < \frac{f_s}{2}(1+\alpha) \\ 0 & ; \quad |f| > \frac{f_s}{2}(1+\alpha) \end{cases}$$

Izračunajte in narišite časovni potek signala na vhodu vzorčevalnika v sprejemniku!

Rešitev naloge: otk-vaja7.mcd

$$H(\omega) = \begin{cases} \frac{T_s}{\omega_s}\omega + T_s & ; -\omega_s < \omega < 0 \\ -\frac{T_s}{\omega_s}\omega + T_s & ; (0 < \omega < \omega_s) \end{cases}$$

$$\text{if}\left(-\omega_s < \omega < 0, \frac{T_s}{\omega_s}\omega + T_s, -\frac{T_s}{\omega_s}\omega + T_s\right)$$

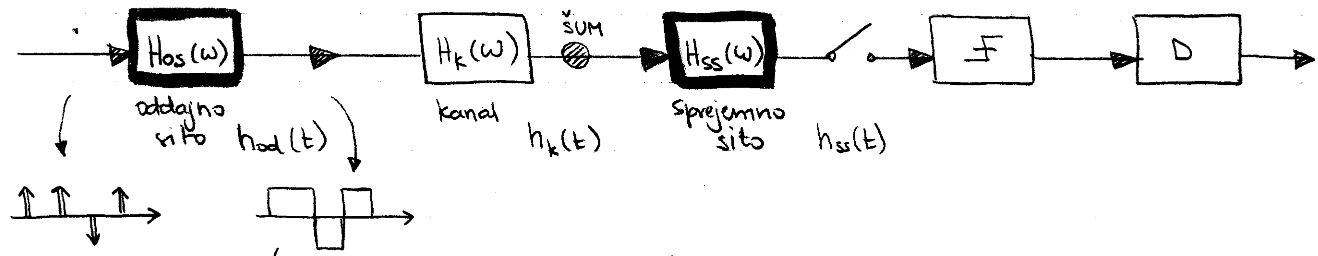
if $(\omega_0 < \omega <$

IZPIT!!!!!

$-\omega_{zg} < \omega <$

$\omega = f =$

7. PRENOS BREZ ISI



↳ na vhod damo vlak δ impulzov

↳ to dobimo pa ven.

~ Zaradi šuma na signalu moramo imeti sprejemno sito. Sprejemno sito bo omejeno navzgor (od neke frekvence naprej ne bo več prepuščal). Tudi sprejemno sito vpliva na ISI.

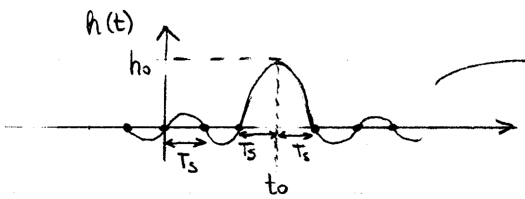
- SKUPNA PREVAJALNA KARAKTERISTIKA:

$$H(\omega) = H_{os}(\omega) \cdot H_k(\omega) \cdot H_{ss}(\omega)$$

$$\rightsquigarrow h(t) = h_{os}(t) * h_k(t) * h_{ss}(t)$$

Fourierjev par

* Zanima nas odziv sistema na en impulz / znak



→ To je čisto OK! Važno je, da je signal v • ("pikicah") enak 0! Vmes nas ne zanima, kakšna je funkcija! To je pogoj za prenos brez ISI.

Zapišemo: $h(t_0 + n \cdot T_s) = \begin{cases} h_0 \ ; & \text{za } n = 0 \\ 0 \ ; & \text{sicer} \end{cases}$

↳ To je Nyquistov kriterij za prenos brez ISI

- Prenos brez ISI je le tedaj, kadar je sistemska funkcija celotnega sistema enaka 0 v vseh vzorčnih trenutkih $n \cdot T_s + t_0$, vmes pa je lahko njen potek poljuben.

* Skupaj moramo upoštevati $H(\omega)$ + vzorčevalnik → 

* Nyquistonov kriterij v frekvenčnem prostoru :

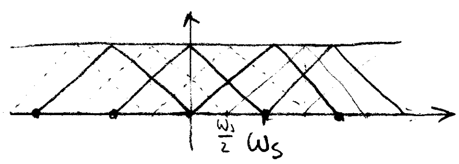
$$H_J(\omega) = \frac{1}{T_{VZ}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} H(\omega + n \cdot \omega_s)$$

$T_s = T_{VZ}$ ... vzorčevalni čas

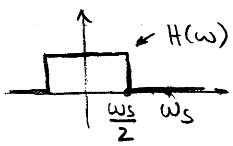
$\omega_s = 2\pi f_s$ ... vzorčevalna frekvenca

~ Za prenos brez ISI mora veljati : $\boxed{H_J(\omega) = \text{konstanta}}$

Npr. Imamo trikoten potek $H(\omega)$ ... Pogoj za prenos brez ISI je, da je ničla pri ω_s. Najožji frekvenčni pas, ki ga rabimo za prenos brez ISI je $\frac{\omega_s}{2}$ (polovica simbolne frekvence).



... če seštejemo vse te trikotnike dobimo konstanto !



... Idealno nizko sito $\left(\omega_{zg} = \frac{\omega_s}{2}\right)$

Naloga :

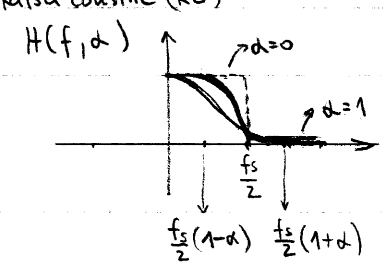
Skupna prevajalna funkcija $H(f, \alpha)$ je podana :

$$H(f,\alpha) = \begin{cases} T_s & ; \text{ za } |f| < \frac{f_s}{2}(1-\alpha) \\ \frac{T_s}{2}\left(1 + \cos\left(\frac{\pi T_s}{\alpha}\left(|f| - \frac{1-\alpha}{2T_s}\right)\right)\right) & ; \text{ za } f_s/2(1-\alpha) < |f| < \frac{f_s}{2}(1+\alpha) \\ 0 & ; \text{ za } |f| > f_s/2(1+\alpha) \end{cases}$$

↳ Ima obliko dvignjenega kosinusa (RAISED COUSINE = RC)

~ Izračunati je potrebno časovni potek signala na vhodu vzorčevalnika v sprejemniku !

Raisd Cousine (RC)



$$f_{zg} = \frac{f_s}{2}(1+\alpha)$$

$h_{RC}(t, \alpha) = ?$

$h_{RC}(t, \alpha=0) = h_{ins}(t)$ ... idealno nizko sito

↳ najprej izračunamo inverz tega, potem pa množimo samo še z inverzom kosinusne funkcije podane v prevajalni funkciji ... tega ne bomo izpeljevali !

$$h_{ins}(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} H_{ins}(\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\omega_s/2} T_s \cdot \cos(\omega t)\, d\omega =$$

$$= \frac{T_s}{\pi} \cdot \frac{\sin(\omega t)}{t}\Big|_0^{\omega_s/2} = \frac{T_s}{\pi}\,\frac{\sin(\frac{\omega_s}{2}t)}{t\cdot \omega_s/2}\cdot\frac{\omega_s}{2} = \frac{\sin(\frac{\omega_s}{2}t)}{\omega_s/2\cdot t} = Sx\left(\frac{\omega_s}{2}t\right)$$

$$\Longrightarrow \quad h_{RC}(t,\alpha) = Sx\left(\frac{\omega_s}{2}\cdot t\right)\cdot\frac{\cos(\pi\frac{t}{T_s}\alpha)}{1-(2\alpha\, t/T_s)^2}$$

MathCad:

$T_s := 1 \qquad f_s := \frac{1}{T_s} \qquad \omega_s := \frac{2\pi}{T_s}$

$$HRC(f,\alpha) := \left[|f| < \frac{f_s}{2}\cdot(1+\alpha)\right]\cdot if\left(|f| < \frac{f_s}{2}\cdot(1-\alpha),\ T_s,\ \frac{T_s}{2}\cdot\left(1+\left(\cos\left(\frac{\pi\cdot T_s}{\alpha}\left(|f|-\frac{(1-\alpha)}{2T_s}\right)\right)\right)\right)\right)$$

$f := -2f_s, -1.99\cdot f_s .. 2\cdot f_s \qquad \alpha 1 := 0.11$

(narišeš grafe: $HRC(f,1)$, $HRC(f,0.5)$, $HRC(f,0)$ v odvisnosti od frekvence f)

$$H(f) := \sum_{n=-2}^{3} HRC(f + n\cdot f_s,\ \alpha 1)$$

$$Sx(x) := if\left(x \neq 0,\ \frac{\sin x}{x},\ 1\right)$$

$$hRC(t,\alpha) := Sx\left(\frac{\omega_s}{2}t\right)\cdot\frac{\cos(\pi\cdot t/T_s\cdot\alpha)}{1-(2\alpha\, t/T_s)^2} \qquad t := -2\cdot T_s, -1.99\cdot T_s .. 4\cdot T_s$$

(narišeš grafe: $h_{RC}(t,0)$, $h_{RC}(t,0.5)$, $h_{RC}(t,1)$ v odvisnosti od t)

$N := 20 \qquad n := 0 .. N-1 \qquad d_n := floor(rnd(2))\cdot 2 - 1$

$d^T =$ (dobiš tabelo ...)

$$y(t) := \sum_{n=0}^{N-1} d_n\cdot h_{RC}(t - n\cdot T_s,\ \alpha 1) \qquad t := 0, \frac{T_s}{10} .. N\cdot T_s$$

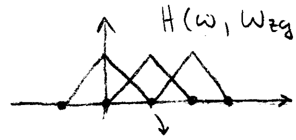
(narišeš graf $y(t)$, $y(n\cdot T_s)$ v odvisnosti od t in $n\cdot T_s$)

Domača naloga:

ZADEVA: OTK DN 1

mcd datoteka z imenom in priimkom!

→ Dana je prevajalna funkcija trikotne oblike:



$\omega_{zg} = \omega_s$ ali $\omega_{zg} = 2\omega_s$ ali $\omega_{zg} = 3\omega_s$ itd.

!!! Reši nalogo tako kot smo jo rešili na vajah!

!!! Pokaži, da gre v danem primeru res za Nyquistonove impulze in da če ne velja $\omega_{zg} = n \cdot \omega_s$ $(n = 0, 1, 2 \ldots)$ pride do ISI!

!!! Zapiši prevajalno funkcijo v časovnem prostoru (in potem še signal na izhodu vzorčevalnika)

8 Generator šuma

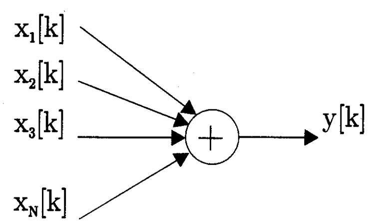
Naloga: Generirajte vzorce naključnega signala $y[k]$, ki bo imel približno normalno (Gaussovo) porazdelitev gostote amplitudne verjetnosti s srednjo vrednostjo $\bar{y} = 0$ in varianco σ_y^2 ! Izračunajte tudi histogram porazdelitve vrednosti naključno generiranih vzorcev !

Komentar: Dober približek za šum z normalno porazdelitvijo dobimo s seštevanjem N neodvisnih signalov $x_n[k]$, ki imajo enakomerno amplitudno verjetnostno porazdelitev.

$$p_x(x) = \begin{cases} \frac{1}{2A} & \text{, če velja } |x| < A \\ 0 & \text{sicer} \end{cases} \tag{14}$$

Naključni signali $x_n[k]$ imajo srednjo vrednost $\bar{x_n} = \bar{x} = 0$ in varianco

$$\sigma_x^2 = \int_x (x - \bar{x})^2 p_x(x) dx = \frac{A^2}{3} \tag{15}$$



Slika 9 – Generator Gaussovega šuma.

Razmere podaja slika 9. Signal vsote označimo z $y[k]$:

$$y[k] = \sum_{n=1}^{N} x_n[k] \tag{16}$$

Srednja vrednost vsote je enaka nič, varianca vsote pa linearno narašča s številom neodvisnih izvorov:

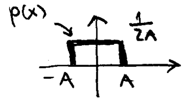
$$\sigma_y^2 = N\sigma_x^2 = N\frac{A^2}{3} \tag{17}$$

Po centralnem limitnem teoremu se porazdelitev vsote signalov neodvisnih naključnih generatorjev z večanjem števila $N \to \infty$ približuje Gaussovi porazdelitvi:

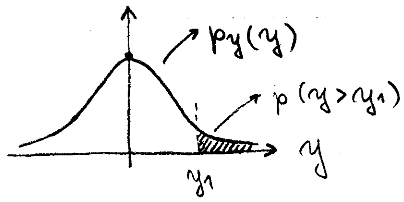
$$p_y(y) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_y^2}} e^{-\frac{y^2}{2\sigma_y^2}} \tag{18}$$

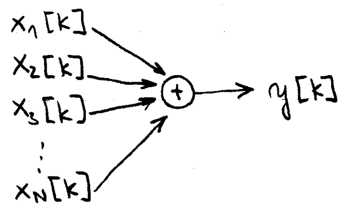
Rešitev naloge: otk-vaja8.mcd

GENERATOR ŠUMA



... signal $x_n[k]$ ima enakomerno amplitudno vrjetnostno porazdelitev





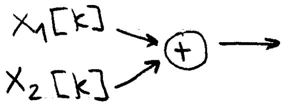
Generator Gaussovega šuma

↳ gledati moramo majhne ploščine!

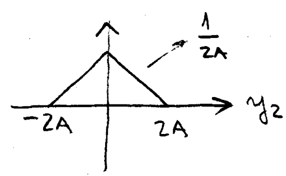
Vprašanje: imamo dve naključni spremenljivki, ki imata enakomerno porazdelitev. Kakšna je porazdelitev, če ju seštejemo? Če sta ti dve spremenljivki zvezni funkciji dobimo trikotno porazdelitev.

Če sedaj dodamo še dve taki spr. in jih seštejemo in tako naprej dobimo:

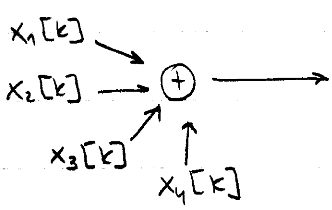
$$p_y(y) = p_{x_1}(x_1) * p_{x_2}(x_2) * p_{x_3}(x_3) ,,,,,* p_{x_n}(x_n)$$

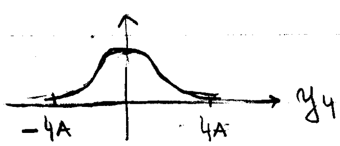


$$p_{y_2} = p_{x_1}(x_1) * p_{x_2}(x_2)$$



~ Če dvema spr. dodamo še dve spr. (z enak. porazd.) dobimo konvolucijo dveh trikotnikov! Potek:





- V MathCadu bomo naredili preizkus (seštevali bomo te spremenljivke)

PREDPOSTAVKA: Naključne spremenljivke imajo enakomerno porazdelitev od -A do A.

Nalogo bomo reševali numerično: Interval bomo razdelili na smiselno št. delov...

Želimo, da ima naša spr. definirano moč (varianco).

PRAVILO: Če seštevamo naključne signale, je moč vsote enaka vsoti moči... Zato moramo ustrezno spreminjati maksimalno vrednost A.

Varianca:

$$\sigma_x^2 = \int_x (x-\bar{x})^2 p_x(x)\, dx = \frac{A^2}{3}$$

$$\sigma_{y2} = 1 \quad ; \quad \sigma_y^2 = N \cdot \sigma_x^2 = \frac{NA^2}{3} \longrightarrow \boxed{A = \sqrt{\frac{3\sigma_{y}^2}{N}}}$$

MathCad:

$\sigma y2 := 1$ → definiramo moč signala y

$N := 10 \qquad A := \sqrt{\frac{3\sigma y2}{N}} \qquad I := 1000$

$i := 0 .. I-1$

$$y1_i := \sum_{n=0}^{N} (\mathrm{rnd}(2A) - A) \quad \text{(na ta način naredimo generator šuma)}$$

mean(y1) = min(y1) = (preverimo srednjo vrednost
var(y1) = max(y1) = mean(y1) in varianco)

KOMENTARJI:

N... št. izvorov z enakomerno vrjetnostno porazdelitvijo

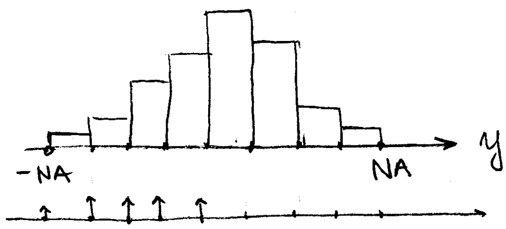
A... mejna vrednost spr. z enakomerno porazdelitvijo

I, i ... št. vzorcev oz. dolžina vektorja y

y1i ... signal y1 je vsota N neodvisnih naključnih spremenljivk

HISTOGRAM:

? nismo jo uporabili !



Uporabili bomo ukaz **int**, ki ga najdemo v mathCadu, int vrne vektor, v katerem so zbrane realne vrednosti

MathCad:

$P := 50$ (... določimo število predalov za izračun histograma)

$p := 0 \,..\, P-1$

$mp := 0 \,..\, P$ $\qquad \Delta = \frac{2 \cdot N \cdot A}{P}$ (Δ ... širina intervala)

$meje_{mp} := -N \cdot A + mp \cdot \Delta$ (... meje intervalov)

$Porhist := hist(meje, y)$ (izračunamo histogram vektorja vzorcev y po mejah meje)

$length(Porhist) =$

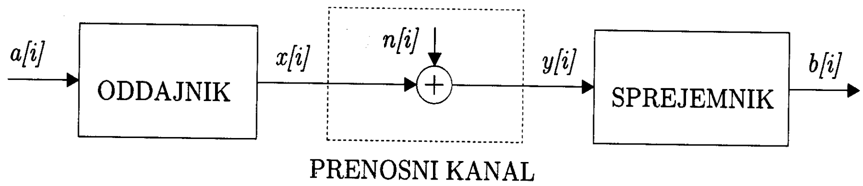
$$Py(y1) := \frac{1}{\sqrt{2\pi\, y\sigma 2}} \cdot e^{-y^2/2 \cdot y\sigma 2}$$

$y1 := -N \cdot A, -0.99 \cdot N \cdot A \,..\, N \cdot A$

~ Glej rešeno vajo na netu!

9 Prenosni kanal z Gaussovim šumom

Modelirajte prenos zaporedja binarnih simbolov po časovno diskretnem kanalu z dodanim Gaussovim šumom!



Slika 10 – Model prenosnega sistema.

Slika 10 podaja model sistema. Binarni niz na vhodu kodirnika $a[i]$ pretvorimo v zaporedje simbolov $x[i]$, ki jih določa pravilo:

$$x = \begin{cases} +V & \text{, če } a = 1 \\ -V & \text{, če } a = 0 \end{cases} \tag{19}$$

Na kanalu se koristnemu signalu prišteva Gaussov šum. Gaussov šum je naključni signal, ki ima Gaussovo amplitudno porazdelitev s srednjo vrednostjo nič in varianco σ_n^2:

$$p_n(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_n^2}} e^{-\frac{n^2}{2\sigma_n^2}} \tag{20}$$

Signal na vhodu sprejemnika označimo z $y[i]$:

$$y[i] = x[i] + n[i] \tag{21}$$

V sprejemniku detektiramo informacijo v nizu $y[i]$ po pravilu odločanja:

$$b = \begin{cases} 1 & \text{, če } y > 0 \\ 0 & \text{, če } y < 0 \end{cases} \tag{22}$$

Verjetnost napake je enaka verjetnosti dogodka $b[i] \neq a[i]$:

$$P_e = P(b[i] \neq a[i]). \tag{23}$$

Napake pri prenosu nastopajo, kadar je velikost šuma večja od velikosti signala:

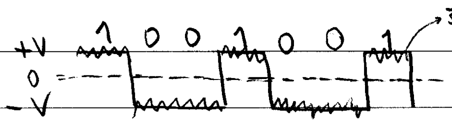
$$P_e = \begin{cases} P(n[i] < -V) & \text{, če } x[i] = V \\ P(n[i] > V) & \text{, če } x[i] = -V \end{cases} \tag{24}$$

$$P_e = \int_{n=V}^{\infty} p_n(n)dn \tag{25}$$

Rešitev naloge: otk-vaja9.mcd

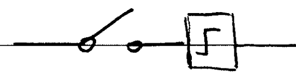
8.1.2009

PRENOSNI KANAL Z GAUSSOVIM ŠUMOM – vaja 9



$$x(t) \xrightarrow{} \oplus \xrightarrow{} y(t), \quad n(t) \text{ vstopa v } \oplus$$

Kodirnik ... prepoznava in kodira znake



Kdaj pride do napake?

Do napake pride, ko je v trenutku vzorčenja šum večji od signala. To je vezano na dogodek (vrjetnost dogodka, da je šum manjši od $-V$ ali vrjetnost dogodka, da je šum večji od V). To sta vrjetnosti dveh različnih dogodkov, gre za simetrični problem!

→ Dogodek A: $p_e = P(n < -V)$

→ Dogodek B: $p_e = P(n > V)$

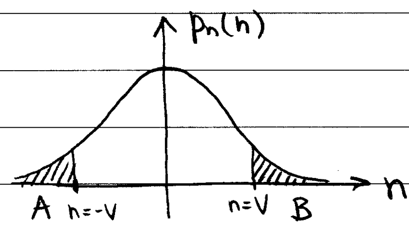
p_e ... vrjetnost napake; P ... vrjetnost dogodka

Poznamo dve funkciji, ki sta vezani na Gaussov šum. To sta $\mathrm{erf}(x)$ in $\Phi(x)$

↳ funkcija napake

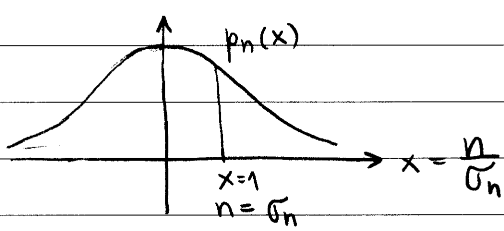
$\Phi(x)$ ... vrjetnostni integral

cnorm ... je funkcija v MathCadu, ki to izračuna!



$$p_e = \frac{1}{2}\left(1 - \Phi\left(\frac{V}{\sigma_n}\right)\right)$$

$$p_e = \frac{1}{2}\left(1 - \mathrm{erf}\left(\frac{V}{\sqrt{2}\,\sigma_n}\right)\right)$$



$$p_e = 1 - \mathrm{cnorm}\left(\frac{V}{\sigma_n}\right) \quad (\text{mathCad})$$

$\left(\frac{V}{\sigma_n}\right.$ ... normirana vrednost$\left.\right)$

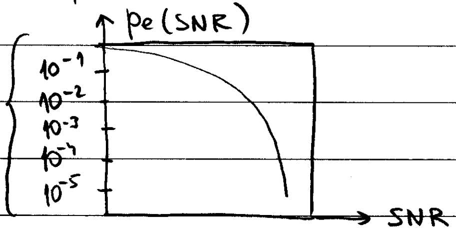
σ_n^2 ... moč šuma

V^2 ... moč signala

Če imamo podatek moč šuma in velikost signala V, lahko določimo vrjetnost napake

MathCad (kaj bomo delali v MathCadu?):

$pe = 1 - cnorm\left(\frac{V}{\sigma_n}\right)$



od 10^{-5} do 10^{0} je območje vrednosti v logaritemskem merilu!

SNR je v decibelih $SNR = 10 \cdot \log\left(\frac{V^2}{\sigma_n^2}\right)$

$SNR = 20 \log\left(\frac{V}{\sigma_n}\right)$ [dB] ... 10 krat logaritem razmerja moči

$\hookrightarrow \frac{V}{\sigma_n} = 10^{\frac{SNR}{20}}$ (SNR-ga sami določimo)

MathCad - KODA:

SNR := 0, 0,5 ... 20
pe (SNR) := 1 − cnorm $\left(10^{\frac{SNR}{20}}\right)$
(nariši graf: pe(SNR), SNR ... y mora imeti logaritemsko skalo!)

Npr, če imamo podano moči šume (efektivno vrednost) $\sqrt{\sigma^2} = 0,1$, kakšna mora biti moč signala, da bo verjetnost napake pe manjša od 10^{-6},
- To izračunamo in razberemo iz grafa!

$pe < 10^{-6}$
$\sigma_n = 0,1$
$V = ?$ $\Rightarrow$ iz grafa vidimo, da je pri $pe = 10^{-6}$ SNR enak 13,5

$\Rightarrow 10^{\frac{13,5}{20}} = \frac{V}{\sigma_n} = 4,7 \Rightarrow$

$V = 0,47$

gnorm je inverz od cnorma !

kode : gnorm $(1-10^{-12}, 0, 1) = 7.034$

x	20 log(x) [v dB]
1	0
10	20
100	40
2	6
$\sqrt{2}$	3

to vemo iz lastnosti logaritmiranja !!!

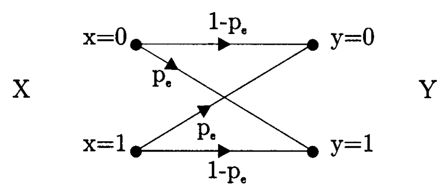
na splošno je te vrednosti treba znat izračunat na pamet

znati je treba pretvarjati v dB (za to je treba dobit občutek)

→ SNR ... signal to nois ... razmerje signal šum

10 Prenos informacije preko binarnega simetričnega kanala

Za model diskretnega komunikacijskega kanala na sliki 11 izračunajte vrednosti entropije na vhodu in na izhodu. Izračunajte tudi vrednost povprečne vzajemne informacije med spremenljivko na izhodu kanala in spremenljivko na vhodu kanala!



Slika 11 – Binarni simetrični kanal (BSK)

Lastnosti binarnega simetričnega kanala določa parameter p_e, ki predstavlja verjetnost napake pri prenosu simbolov: $P(y \neq x) = p_e$. Diskretni signala na vhodu in na izhodu sta binarna niza. Verjetnostno porazdelitev vhodnega niza zapišemo z vektorjem, ki ga določa en parameter: $P(x=0) = p_0$:

$$P_X = \begin{bmatrix} p_0 \\ 1-p_0 \end{bmatrix} \tag{26}$$

Za izbrane vrednosti parametrov kanala in izvora $p_e = (0, 0.01, 1)$ in $p_0 = (0, 0.1, 0.5)$ izračunajte entropije H_X, H_Y, $H_{Y|X}$, $H_{X|Y}$ in $H_{Y;X}$! Kdaj prenesemo po kanalu največ informacije?

Napotek: Entropija izvora informacije na vhodu kanala X je povprečna informacija:

$$H_X = -\sum_{k=0}^{1} P_X[k]\log_2(P_X[k]) = -p_0\log_2 p_0 - (1-p_0)\log_2(1-p_0) \tag{27}$$

Verjetnostno porazdelitev spremenljivke na izhodu P_Y izračunamo iz porazdelitve spremenljivke na vhodu P_X in pogojnih verjetnosti $P_{Y|X}$:

$$P_Y = P_{Y|X}P_X = \begin{bmatrix} 1-p_e & p_e \\ p_e & 1-p_e \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_0 \\ 1-p_0 \end{bmatrix} \tag{28}$$

Entopija na izhodu je lahko večja od entropije na vhodu! Pogojne verjetnosti $P_{X|Y}$ izračunamo s pomočjo Bayesove formule:

$$P_{X|Y} = \frac{P_X P_{Y|X}}{P_Y} \tag{29}$$

Vzajemno informacijo med izhodom in vhodom kanala lahko izračunamo na več načinov:

$$I(x;y) = I(x) + I(y) - I(x \wedge y) \tag{30}$$
$$= I(x) - I(x|y) \tag{31}$$
$$= I(y) - I(y|x) \tag{32}$$

Povprečno vzajemno informacijo med izhodom in vhodom imenujemo **vzajemna entropija**. Tudi vzajemno entropijo lahko izrazimo na več načinov:

$$
\begin{aligned}
H_{X;Y} = \overline{I(x;y)} &= H_X + H_Y - H_{XY} && (33)\\
&= H_X - H_{X|Y} && (34)\\
&= H_Y - H_{Y|X} && (35)
\end{aligned}
$$

Vzajemna entropija med izhodom in vhodom kanala ne more biti večja od entropije na vhodu! Pogojna entropija $H_{X|Y}$ je mera negotovosti sprejetega signala:

$$
H_{X|Y} = \sum_j \sum_k P_Y[k] P_{X|Y}[j,k] \log_2 \frac{1}{P_{X|Y}[j,k]} \tag{36}
$$

Vzajemno entropijo 33 določa tudi enačba:

$$
\begin{aligned}
I = H_{X;Y} &= \sum_j \sum_k P_X[j] P_{Y|X}[j,k] \log_2 \frac{P_{Y|X}[j,k]}{P_Y[k]} && (37)\\
&= \sum_j \sum_k P_Y[k] P_{X|Y}[j,k] \log_2 \frac{P_{X|Y}[j,k]}{P_X[j]} && (38)
\end{aligned}
$$

Kapaciteta kanala C je maksimalna vzajemna entropija, ki jo dobimo pri optimalni porazdelitvi simbolov na vhodu:

$$
C = \max_{P_X} H_{Y;X} \tag{39}
$$

Rešitev 39 za BSK najdete v knjigi[1], stran 56.

Rešitev naloge: otk-vaja10.mcd

[1]Sašo Tomažič: **Osnove telekomunikacij I**

Prenos informacije prezo binarnega simetričnega kanala – vaja 10

Imamo dogodek, da nek izvor generira nek znak: ⇝ dogodek A
Informacija je vezana na dogodek

$$I(A) = \log_2 \frac{1}{P(A)} = -\log_2 P(A) \quad [\text{bit}]$$

IZVOR $\xrightarrow[\text{niz znakov}]{\text{generira}}$ a, e, c, b, b, c, c, a, ...

$$S \in (S_0, S_1, \ldots, S_{N-1})$$

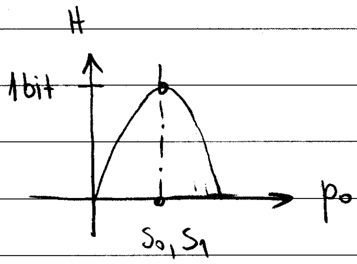
(a b c d e)

↳ dogodki

$P(S = S_i) = p_i$; $I(S=S_i) = -\log_2(p_i)$

ENTROPIJA IZVORA:

$$\boxed{H = \sum_{i=0}^{n-1} I(S=S_i) \cdot P(S=S_i)}$$



povprečno št. bitov ne more biti nižja od ?

p_0
$p_1 = 1 - p_0$

Entropija je mera za povprečno informacijo na izhodu kanale.
(Entropija je manjša od 1 bit!)

izvor ⟶ kanal ⟶ izhod iz kanala

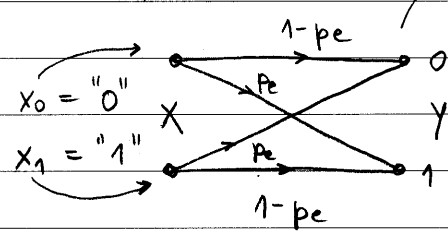
gre za matriko pogojnih vrjetnosti glej Mathcad!

Koda: "0" = X_0
"1" = X_1

narišemo:

to lahko predstavimo tudi z neko matriko!

$H(x) \to 0{,}25$
$\quad\;\; \to 0{,}75$



$P(y=0) = 0{,}5$
$H(y)$
$P(y=1) = 0{,}5$

(ta primer ni dober, ker se vsa informacija izgubi!) npr: $pe = 0{,}5$

vidimo de dobimo, de je $H(y) > H(x)$, (česar ne bi pričakovali)

(samo računanje entropije ne bo dovolj)

Zanima nas povprečna prenešene informacija, ki jo lahko izračunamo na osnovi povprečne entropije na izvoru in na podlagi Bayesove formule!

To lahko izračunamo na tri načine (glej list!).

Zanima nas, koliko informacije se prenese ... oz. povprečne vzajemne informacije med vhodom in izhodom = vzajemna informacija

- Imamo binarni simetrični kanal! BSK
- Za MathCad rabimo funkcijo:

$$lb(x) = \frac{\log(x)}{\log(2)}$$

ker mathcad ne pozna dvojiškega logaritma!

- Potrebujemo binarno spr. na vhodu kanala;

$p_0 = 0.1$ in $px = \begin{bmatrix} p_0 \\ 1-p_0 \end{bmatrix}$

- Izračunajmo entropijo vhodne spr.!

$$Hx := \sum_{i=0}^{1} Px_i \cdot lb\left(\frac{1}{Px_i}\right) \quad ; \quad Hx = 0.469$$

... entropija na vhodu

- BSK ima definirano vrjetnost napake: $pe = 0.1$
- Predstavimo graf, tako da zapišemo matriko pogojnih vrjetnosti!

$$py\_x = \begin{bmatrix} 1-pe & pe \\ pe & 1-pe \end{bmatrix} \quad ; \quad Py\_x = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.1 & 0.9 \end{bmatrix}$$

- Zanima nas porazdelitev vrjetnosti spr. na izhodu BSK:

$k = 0..1$

$$Py_k = \sum_{j=0}^{1} Px_j \cdot Py\_x_{j,k}$$

$$Py = \text{samo izpis} = \begin{bmatrix} 0.18 \\ 0.82 \end{bmatrix}$$

$$Hy = \sum_{i=0}^{1} Py_i \cdot lb\left(\frac{1}{Py_i}\right)$$

Hy = samo izpis = $\underline{0.68}$ ... entropija na izhodu

• Po Bayesovi formuli lahko naredimo natančen izračun pogojnih verjetnosti "x glede na y" (P_{x_y}) :

$j = 0, 1$

$$P_{x\_y_{j,k}} = \frac{P_{x_j} \cdot P_{y-x_{j,k}}}{P_{y_k}}$$ Bayesova formula

$$P_{x\_y} = \text{samo izpis} = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,012 \\ 0,5 & 0,998 \end{bmatrix}$$

• Na osnovi pogojnih verjetnosti izračunamo količino prenešene informacije!

$$H_{x-y} = \sum_{j=0}^{1} \sum_{k=0}^{1} P_{y_k} \cdot P_{x-y_{j,k}} \cdot \mathrm{lb}\left(\frac{1}{P_{x-y_{j,k}}}\right)$$ (enačba 36 na listu)

H_{x-y} je pogojna entropija ... mera negotovosti sprejetega signala

~ Za izračun prenesene informacije upoštevamo pogojno entropijo!
~ Entropija je med 0 in 1
~ zaradi napak na kanalu se entropija na izhodu kanala še poveča!

• Povprečna vzajemna informacija na vhodu in izhodu:
enačba 34 :
33 ali 35 : $H_x - H_{x\_y} = 0,211$ ... to je dejanska prenesena inf.

• Če je verjetnost napake zelo velika, potem bo šlo malo informacije skozi

V najslabšem primeru bo: $p_e = 0,5$ ... verjetnost napake
$p_0 = 0,25$ ... entropija na vhodu

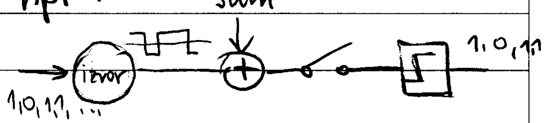
$\Rightarrow$ $H_x = 0,811$; $H_y = 1$

$\rightarrow$ informacija " $I = 0$

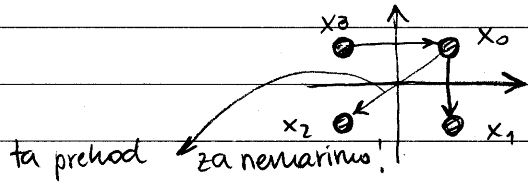
Kapaciteta kanala je maksimalna povprečna vzajemna informacija med vhodom in izhodom

DOMAČA NALOGA: (do srede!)

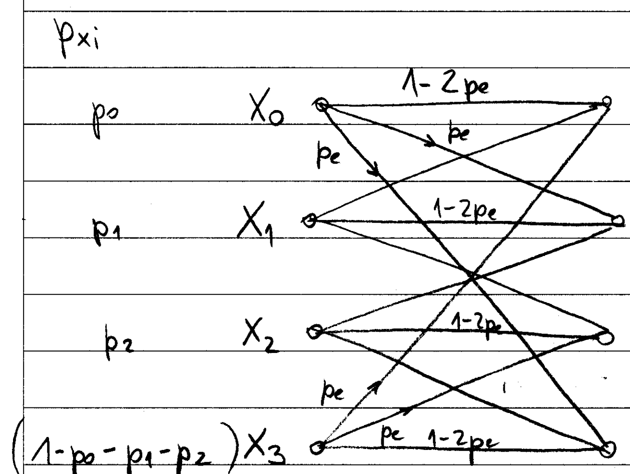
(BSK je model diskretnega kanala: npr:



Imamo več model: signal, ki ima več stanj)



Vrjetnost napake je opredeljena samo iz prehoda iz enega v drugo stanje ... Zanemarimo diagonalne prehode ... Kreiramo kanal:



(Kanal 2SK je BSK)

vsota vrjetnosti mora biti 1

→ Naš kanal je QSK oz 4SK

za štiri znake rabimo 2 bita!

kodirna tabela: 00 01 10 11

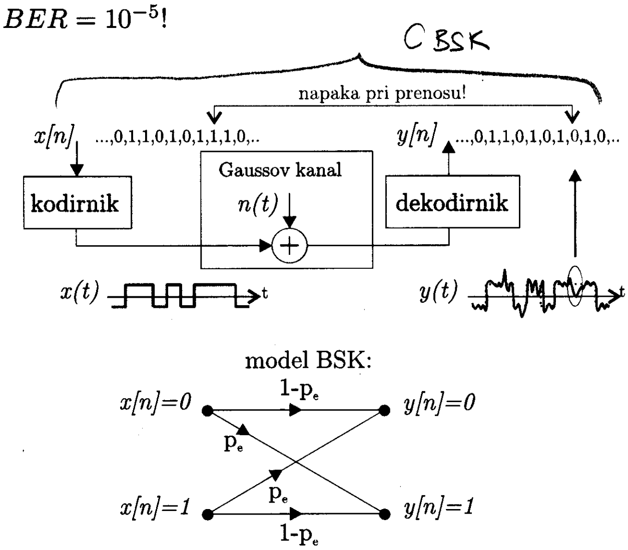
Tak kanal lahko prenese največ dva bita informacije!

Entropija je največ 2 bita!

Koliko je prenešena informacija za kanal 4SK?
matrike bodo 4 × 4!

11 Učinkovitost prenosnega sistema- primerjava prenosnih kapacitet

1. Za prenosni sistem na sliki 12 določite model BSK.
2. Izračunajte potek teoretične prenosne kapacitete BSK: $C_{BSK}(Pe(SNR))$!
3. Izračunajte potek kapacitete Gaussovega kanala $C(SNR)$!
4. Učinkovitost prenosnega sistema izrazite z odmikom od Shannonove kapacitete kanala pri $BER = 10^{-5}$!



Slika 12 – Dvonivojski prenos po Gaussovem kanalu in nadomestni model diskretnega kanala

Komentar: Slika 12 podaja model prenosnega sistema. Po Gaussovem prenosnem kanalu prenašamo par simbolov, ki sta po obliki pravokotna impulza z nasprotno polariteto. Dekodirnik v sprejemniku preverja polariteto vzorcev sprejetega signala. Napake pri prenosu nastopajo zaradi šuma, ki se na prenosnem kanalu prišteva oddanemu signalu. Verjetnost napake lahko natančno izračunamo iz verjetnostne porazdelitve šuma. Osnovna parametra, ki določa lastnosti prenosnega kanala sta moč šuma σ_n^2 in omejitev moči signala σ_x^2. Ekvivalenti diskretni kanal za dani primer je BSK. Potek odvisnosti prenosne kapacitete od razmerja SNR, izračunamo posredno iz relacij $C_{BSK}(P_e)$ in $P_e(SNR)$.

Idealni prenosni sistem izkorišča polno kapaciteto kanala, ki jo določa Shannonova formula. Prenosni sistem z dvonivojskim kodiranjem ne izkorišča polne kapacitete Gaussovega prenosnega kanala. Razlike v kapaciteti lahko ocenimo na osnovi primerjave $C(SNR)$ in $C_{BSK}(SNR)$. Učinkovitost prenosnega sistema izražamo z odmikom od Shannonove kapacitete kanala $\gamma(P_e)$. Za izbrani prenosni sistem, kjer prenašamo b bitov na simbol s končno verjetnostjo napake pri prenosu P_e, potrebujemo $\gamma(P_e)$-krat večjo moč signala, kot bi jo potrebovali v idealnem prenosnem sistemu za primer $C = b = 2$.

Rešitev naloge: otk-vaja11.mcd

11. Vaja

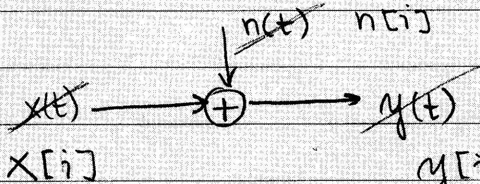
11. UČINKOVITOST PRENOSNEGA SISTEMA → PRIMERJAVA PRENOSNIH KAPACITET

~ Diskretni kanal nima časovne dimenzije ... zanima nas koliko bitov na znak se prenese!

Koliko bitov lahko nosi en znak preko kanala?

~> Shannonova kapaciteta Gaussovega kanala: $\boxed{C = \frac{1}{2}\log_2\left(1+\frac{\sigma_x^2}{\sigma_n^2}\right)}$

↳ eno

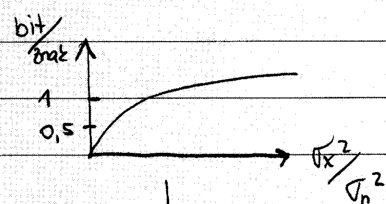


σ_x^2 ... moč signala

σ_n^2 ... moč šuma

~> Veliko razmerje (vsaj sto) mora biti med močjo signala in močjo šuma, da prenesemo le nekaj bitov na znak!

Narišemo graf, da si lažje predstavljamo:



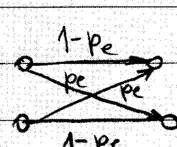
↓ narišemo še v logaritemski skali

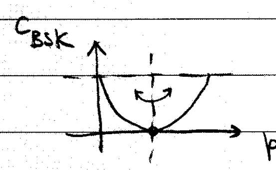
↳ Gaussova porazdelitev ima pri dani moči največjo entropijo! (informacijo)

~> Gaussova porazdelitev omogoča največ informacije za najmanj moči!

~> Kapaciteta kanala: največja vzajemna entropija (oz. povprečna informacija med vhodom in izhodom)

BSK ... je diskretni model:





Model diskretnega kanala je BSK,
model zveznega kanala je Gaussov kanal!

$pe\left(\sigma_x^2 / \sigma_n^2\right)$?

pomembno je razmerje moči :

$$S\_N = \frac{\sigma_x^2}{\sigma_n^2} \quad \left(SNR = 10 \cdot \log_2 S\_N\right) \qquad S\_N = 10^{\frac{SNR}{10}}$$

$C_{BSK}\left(pe\left(\sigma_x^2/\sigma_n^2\right)\right) = ?$

$C_{BSK}(pe) = 1 + pe \log_2(pe) + (1-pe)\cdot \log_2(1-pe)$ = Max. vzajemna entropija

gauss!

$\rightsquigarrow C(SNR) =$

MathCad :

dvojiški logaritem : $lb(x) = \frac{\log(x)}{\log(2)}$

kapaciteta gaussovega kanala : $C(S\_N) = \frac{1}{2} \cdot lb(1 + S\_N)$

kapaciteta BSK : $C_{BSK}(pe) = 1 + pe \cdot \log_2(pe) + (1-pe) \cdot \log_2(1-pe)$

$C(SNR) = \frac{1}{2} \cdot lb\left(1 + 10^{\frac{SNR}{10}}\right)$ $SNR := -20 \ldots 20$ (graf C(SNR), SNR)

(graf $C_{BSK}(pe)$, pe)

$pe(SNR) = 1 - \text{cnorm}\left(10^{\frac{SNR}{20}}\right)$

↳ graf (pe(SNR), SNR) ... logaritemska skala na ordinatni osi ...

!!! $C_{BSK}(0{,}1) = 0{,}531$

↳ razlaga! Če imamo 1000 znakov in 10% napake prenesemo ne tisoč znakov le 531 znakov in ne 900!

Dva grafa na eni sliki [C(SNR) in CBSK(pe(SNR))]

↳ RAZLAGA !!!

Odmik od kapacitete kanala merimo po (abscisni osi) moči !

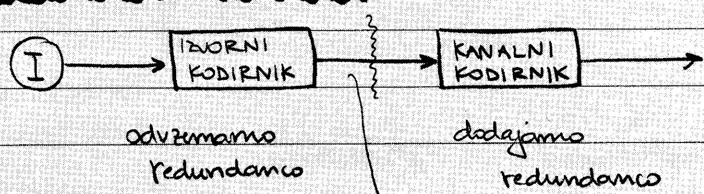
To mi ravno izpima naloga! → koretična naloga za razumevanje

KOMENTAR : Pomembno je, da imamo učinkovite kanalske kodirnike!

Redundanca

DODATNO za KOLOKVIJ!

INFORMACIJSKI IZVOR:



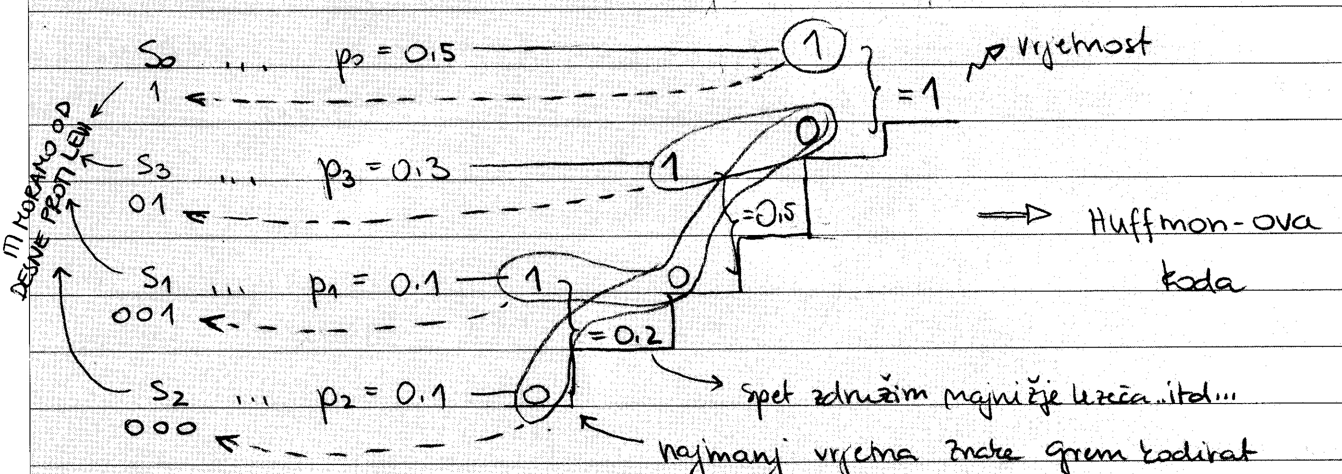
?
podatkovni izvor ne more biti večji od entropije izvora!

Radi bi strnili informacijo:

PRIMERI: Entropijsko kodiranje → HUFFMANOVA KODA

I $\xrightarrow{s_0, s_1, s_2, s_3}$

- Kodiranje obvezno vnaša tudi zakasnitev...
- Znak, ki pogosto nastopa nosi manj informacije, kot znak ki redkeje nastopa.



$\rightsquigarrow H_{max} = \log_2(M) = \log_2(4) = 2$

$H_{izvor} = \sum p_i \cdot \log_2(p_i) = M_{cad}$!

$I = \sum p_i L_i = 0{,}5 \cdot 1 + 0{,}1 \cdot 3 + 0{,}1 \cdot 3 + 0{,}3 \cdot 2 = 1.7$ bit/znak

↳ Informacija izračunane s pomočjo Haffmanove kode...

Še en primer iz knjige: Če imamo opravka z gaussovim kanalom je kapaciteta: $\boxed{C = \frac{1}{2}\log_2\left(1+\frac{\sigma_x^2}{\sigma_n^2}\right)}$; Shannon!

Nyquistonov teorem pravi: $f_{max} = 2B$; $f_s \le 2B$

Če to dvoje združimo, govorimo o INFORMACIJSKEM PRETOKU

- Informacijski pretok povečamo tako, da povečamo hitrost ali znak!

$r = f_s \cdot b_s$ ... $r_{max} = f_{smax} \cdot b_{smax}$; $b_{smax} = C$ (gaussov kanal)

$f_{max} = 2B$ (če imamo lepo karakteristiko signala)

$r\,[bit/s]$; $f_s\,[znak/s]$; $b_s = [bit/znak]$

⇝ $\boxed{r_{max} = B \cdot \log_2\left(1+\frac{\sigma_x^2}{\sigma_n^2}\right)}$

razmerje moči; če bi imeli razmerje amplitud, bi bilo: $SNR/20$

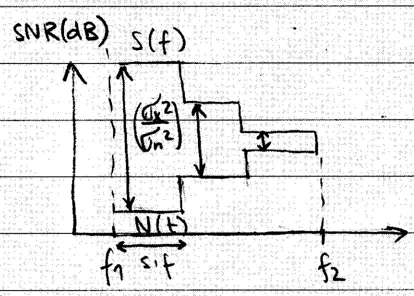
Npr.: $SNR = 30\ dB \rightarrow C(SNR) = \frac{1}{2}\log_2\left(1+10^{\frac{SNR}{10}}\right)$

$B = 10\ kHz \rightarrow f_{smax} = 2B = 20.000$ znak/sekundo

$r_{max}\,[bit/s] = ?$ $C(30dB) = 4.984$

⇝ $r_{max} = B \cdot \log\left(1+10^{\frac{SNR}{10}}\right) = 20.000 \cdot 4{,}989 = 99.780$ bitov/sekundo

Imamo kanal:



$r = r_1 + r_2 + r_3$

$r_1 = B \cdot \log_2\left(1+\frac{\sigma_x^2}{\sigma_n^2}\right)$

⋮

Informacijski pretok je odvisen od kapacitete kanala in pasovne širine!

Kolokvij: 6., 7., 8., 9., 10. in 11. vaja pridejo v poštev!

DODATNO: Entropijsko kodiranje → Huffmanova koda → radi bi strnili informacijo. Kodiranje obvezno vnaša zakasnitev, znak, ki nastopa pogosto nosi manj informacij, kot znak, ki nastopa redkeje: INFORMACIJSKI PRETOK: $r = f_s \cdot b_s$; $r_{max} = f_{smax} \cdot b_{smax}$; $b_{smax} = C$ (gaussov kanal); $C = \frac{1}{2}\log_2(1 + \sigma_x^2/\sigma_n^2)$, Nyquist: $f_{max} = 2B \Rightarrow f_s \leq 2B$; $f_s[\text{znak}/s]$, $r[\text{bit}/s]$; $b_s[\text{bit}/\text{znak}]$
→ $r_{max} = B \cdot \log_2(1 + \sigma_x^2/\sigma_n^2)$; Npr.: SNR = 30dB, B = 10kHz → $r_{max} = B \cdot \log_2(1 + 10^{SNR/10})$; IP je odvisen od kapacitete kanala in pas. širine

6. ISI: na vhodu imamo vsoto različno deženih pravokotnih impulzov: $x(t) = \sum_{n=0}^{N} s[n] g(t - nT_s)$, $s[n]$: A, $-A$. Poznamo sistemsko funkcijo $h(t) = U(t) \cdot w_0 e^{-w_0 t}$. oddajnik $\xrightarrow{x(t)}$ prenosni kanal ($h(t)$) $\xrightarrow{y(t)}$ sprejemnik. Zanima nas signal na vhodu sprejemnika in velikost ISI. Sistemska funkcija $h(t)$ ne izpolnjuje Nyquistonovega kriterija, zato pride do ISI!
oddajnik pošilja naključno zaporedje binarnih znakov: $I = 50$, $i = 0..I-1$; $data_i = floor(rnd(2))$; $p(t) = (t \geq 0)(t < T_s)$; $T_s = 10$
$x1(t) = A \cdot p(t)$; $x(t) = \sum_{i=0}^{I-1} x1(t - iT_s) \cdot (2data_i - 1)$; $t = 0, 0.1 \cdot T_s .. 10T_s$. Signal $x(t)$ se popači na prenosni poti: $U(t) = t > 0$;
$w_0 = \frac{2\pi}{10T_s}$; $h(t) = U(t) \cdot w_0 \cdot e^{-w_0 t}$; Popačitev opazimo že pri prenosu enega znaka: $s(t) = U(t) \cdot (1 - e^{-w_0 \cdot t})$; odziv prenosne poti na $x1(t)$: $y1(t) = A(s(t) - s(t - T_s))$ ↗ to smo izračunali na list; (narišeš $x_1(t)$ in $y_1(t)$; $t = 0, 0.02T_s .. 2T_s$); $y(t) = \sum_{i=0}^{I-1} y1(t - iT_s)(2data_i - 1)$; $2 \cdot floor(rnd(2)) - 1$
(narišeš $x1(t)$ in $y1(t)$; $t = 0, 0.1T_s .. 30 \cdot T_s$), Pri prenosu zaporedja znakov pride do ISI, Velikost ISI lahko izrazimo z relativno mero ISI iz vzorcev odziva na en znak: $k = 0, 1..100$; $yd_k = y1(k \cdot T_s)$; $ISI = \left(\sum_{k=0}^{100} |yd_k| / yd_0\right) - 1$; narišeš graf: $y1(t)$ in yd_k (t, $k \cdot T_s$; $y1(k \cdot T_s)$)
Do napak zaradi ISI prihaja, kadar je $ISI > 1$; V sprejemniku prepoznavamo znake na osnovi ugotavljanja polaritete. Zadošča, če ugotavljamo polariteto enega vzorca na znak (narišeš graf: $y(t)$ in $y(k \cdot T_s)$). Napake zaradi ISI ugotovimo tako, da sprejete znake primerjamo z oddanimi znaki ($data_i$): $spr_i = if(y(i \cdot T_s + T_s) > 0, 1, 0)$; narišeš graf: $data_i$ in spr_i od i;
in detektiraš napake: (narišeš graf $data_i \neq spr_i$ od i) $x(t)$ $\Phi(t)$ → $h(t)$
!!! Kako računamo odziv $y(t)$, če imamo na vhodu poljuben pravokoten signal, na izhodu (kanalu) pa $h(t) = U(t) \cdot w_0 \cdot e^{-wt}$? Na voljo imamo tri različne načine: 1. S KONVOLUCIJO (DIREKTNO): $y(t) = \int_0^{T_p} x(t_1) \cdot h(t - t_1) dt_1$; 2. NUMERIČNO: $y(t) = \Delta t_1 \sum_n x(n \cdot \Delta t_1) \cdot h(t - n \cdot \Delta t_1)$; $\Delta t_1 = \frac{T_p}{N}$, N, n

$T_p = 1$
$Y(\omega) = X(\omega) H(\omega)$

3. S SUPERPOZICIJO ODZIVOV NA STOPNICO: definiraš $s(t) = \Phi(t)(1 - e^{-w_0 \cdot t})$ $s(t)$. Na vhodu imaš npr. $x(t)$, potem je $y(t) = (s(t) - 2 \cdot s(t - T_p/2) + s(t - T_p/2))$; če je $x(t)$ npr.: 1, potem je $y(t) = (s(t) - s(t - T_p))$, itd.
!!! Računanje spektra lahko narediš kar po definiciji: npr. $X(\omega) = \int_0^{T_p} x(t) \cdot e^{-i\omega \cdot t} dt$, enako velja za računanje inverznege funkcije: $x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_s}^{\omega_s} X(\omega) \cdot e^{i\omega t} d\omega$; Pazi, od kod do kod so meje! Na podlagi tega lahko pišeš tudi: $x(t) = 2 \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{\omega_s} X(\omega) \cdot \cos(\omega t) d\omega$ za sode funkcije ali $x(t) = -2 \frac{1}{2\pi} \int_0^{\omega_s} X(\omega) \cdot \sin(\omega t) d\omega$ za lihe funkcije. (ω_s - ω_{max}) Prav tako lahko inverzni transform določiš NUMERIČNO: $x(t) = \frac{\Delta\omega}{\pi} \left(\left[\sum_{n=0}^{K-1} Re(X(n \cdot \Delta\omega)) \cdot \cos(n \cdot \Delta\omega \cdot t) - Im(X(n\Delta\omega)) \cdot \sin(n \cdot \Delta\omega \cdot t)\right]\right)$; $\Delta\omega = \frac{\omega_s}{K}$; $K = 100$

7. PRENOS BREZ ISI: $H(\omega)$ je postana tako, da ne pride do ISI ($H(\omega) = H_{os}(\omega) \cdot H_k(\omega) \cdot H_{ss}(\omega)$, $h(t) = h_{os} * h_k * h_{ss}$)
Če želimo prenos brez ISI, mora biti izpolnjen pogoj $h(nT_s + t_0) = A \cdot \delta[n]$; $\delta[n] = \begin{cases} 1; & n = 0 \\ 0; & n \neq 0 \end{cases}$ v časovnem prostoru in $H_\delta(\omega) = \frac{1}{T_s} \sum_{-\infty}^{\infty} H(\omega + k \cdot \omega_s)$ = konstanta v frekvenčnem prostoru. Na vhodu imamo impulzno moduliran signal $o(t) = \sum_{n=0}^{\infty} s[n] \delta(t - nT_s)$. Skupna prevajalna funkcija ima potek dvignjenega kosinusa

$h(nT_s + t_0) = \begin{cases} A_0; & n = 0 \\ 0; & n \neq 0 \end{cases}$

$H(f) = \begin{cases} T_s; & |f| < ... \\ 0; & ... \end{cases}$. Zanima nas časovni potek signala na vhodu vzorčevalnika (to je skupna prevajalna f. (sistemske f.) v časovnem prostoru)
↳ Kako definiramo neko tako funkcijo: $H(\omega) = \begin{cases} /; & -\omega_s < \omega < 0 \\ \backslash; & 0 < \omega < \omega_s \end{cases}$ → $H(\omega) = if[-\omega_{zg} < \omega < 0; /; \backslash](|\omega| < \omega_{zg})$
$T_s = 1$; $f_s = \frac{1}{T_s}$; $\omega_s = 2\frac{\pi}{T_s}$; $HRC(f, \alpha) = [..]$; $f = -2 \cdot f_s, -1.99 \cdot f_s .. 2f_s$ (narišeš $HRC(f, 1)$, $HRC(f, 0.5)$, $HRC(f, 0)$); $\alpha 1 = 0.01$
$H(f) = \sum_{n=-3}^{3} HRC(f + n \cdot f_s, \alpha 1)$; $hrc(t, \alpha 1)$ smo kar določili (narišeš $hrc(t, \alpha 1)$, $t = -2 \cdot T_s, -1.99 \cdot T_s .. 4T_s$);
naključen signal na vhodu: $N = 20$, $n = 0 .. N-1$; $d_n = floor(rnd(2)) \cdot 2 - 1$ (pogledaš d^T);
$y(t) = \sum_{n=0}^{N-1} d_n \cdot hrc(t - n \cdot T_s, \alpha 1)$; $t = 0, \frac{T_s}{10} .. N \cdot T_s$ (narišeš $y(t)$ in $y(n \cdot T_s)$, t in $n \cdot T_s$)
DOMAČA NALOGA: $T_s = 1$; $f_s = \frac{1}{T_s}$; $\omega_s = 2\pi f_s$; $\omega_{zg} = \omega_s$; $H1(\omega) := if[-\omega_{zg} < \omega < \omega_{zg}, -\frac{T_s}{\omega_{zg}}|\omega| + T_s, 0]$; Če želimo prenos brez ISI mora biti prevajalna funkcija celotnega enaka 0 pri vseh vzorčnih frekvencah $(f + n \cdot f_s)$ ... veljati mora $\omega = \omega_{zg} = n * \omega_s$ $(n = 0, 1, 2, ...)$: $H(\omega) = \frac{1}{T_s} \sum_{-5}^{5} H1(\omega + n\omega_{zg})$ ... po eni izmed metod naredim inverzni transform: npr: $h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_s}^{\omega_s} H1(\omega) \cdot e^{i\omega t} d\omega$. Na vhod damo $x_n = floor(rnd(2)) \cdot 2 - 1$ ($N = 50$; $n = 0..N-1$); naredimo konvolucijo z NUMERIČNO METODO $y(t) = \sum_{n=0}^{N-1} x_n \cdot h(t - n \cdot T_s)$ ... in dobili smo signal na izhodu (Narišem: $y(t)$ in $y(n \cdot T_s)$) ($h(t)$ in $h(n \cdot T_s)$)
ISI za zvezno funkcijo: $ISI = \frac{\left(\sum_{i=-10}^{10} |h(i \cdot t_s)|\right)}{h(0)} - 1$ ali $ISI = \frac{\sum_{n=1}^{N-1} |h(0 + nT_s)|}{h(0)}$; ↘ $h(t) = A \cdot x(t + \Delta t)$; $\Delta t = \frac{T_s}{1000}$ (to naredimo zaradi singularnosti)

11. UČINKOVITOST PRENOSNEGA SISTEMA – PRIMERJAVA PRENOSNIH KAPACITET : $lb(x) = \frac{\log(x)}{\log(2)}$; kapaciteta Gaussovega kanala $C(S\_N) = \frac{1}{2} lb(1+S\_N)$ ($S\_N = \sigma_x^2/\sigma_n^2$ ... razmerje moči → $SNR = 10 \cdot \log_2 S\_N$ → $S\_N = 10^{SNR/10}$) ; kapaciteta BSK : $CBSK(pe) = 1 + pe \cdot lb(pe) + (1-pe) \cdot lb(1-pe)$; Zakaj!
$C(SNR) = \frac{1}{2} lb(1 + 10^{SNR/10})$; $SNR = -20..20$; $pe(SNR) = 1 - cnorm(10^{SNR/20})$, (graf $pe(SNR)$, SNR ... log. skala na ordinati) ; $CBSK(0.1) = 0.531$!
[grafa: $C(SNR)$ in $CBSK(pe(SNR))$] ! Veliko razmerje mora biti med močjo signala in ~~močjo šuma, da prenesemo le nekaj bitov na znak~~ !

8. GENERATOR ŠUMA : generacija naključnega signala $y[k]$ z normalno (Gauss-ovo) porazdelitvijo (srednja vrednost $\bar{y}$ naj bo 0 ... zanima nas tudi histogram porazdelitve vrednosti naključno generiranih vzorcev.

$p(x)$, $\frac{1}{2A}$, A

Dober približek za šum dobimo s seštevanjem N neodvisnih signalov $x_n[k]$, ki imajo enakomerno amplitudno verjetnostno porazdelitev $p_x(x) = \begin{cases} 1/2A ; & |x| < A \\ 0 ; & sicer \end{cases}$; $\sigma_x^2 = \int_x (x-\bar{x})^2 p_x(x) dx = A^2/3$; $y[k] = \sum_{n=1}^{N} x_n[k]$; $\sigma_y^2 = N \cdot \sigma_x^2$; $p_y(y) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_y^2}} e^{-\frac{y^2}{2\sigma_y^2}}$ → gaussova porazd.
$p_y(y) = p_{x_1}(x_1) * p_{x_2}(x_2) * \ldots * p_{x_n}(x_n)$ ... več je teh konvolucij, bolj je $p_y(y)$ zvončaste oblike ...
Predpostavka: spremenljivke imajo enakomerno porazdelitev od $-A$ do A ! GENERATOR → $\sigma_{y2} = 1$; $N = 10$;
$A = \sqrt{\frac{3\sigma_{y2}}{N}}$; $I = 1000$; $i = 0..I-1$; $y1_i = \sum_{n=0}^{N-1} rnd(2A) - A$ ($y_k = \sum A(1 - rnd(2))$) ; $mean(y1) =$; $var(y1) =$; $min(y1) =$; $max(y1) =$
N ... št. izvorov z enakomerno verjetnostno porazd., A ... mejna vrednost spr. z enakom. porazd., I, i ... št. vzorcev, dolžina, y1 ... signal $y1_i$ je vsota N neodvisnih naključnih spr.
HISTOGRAM: $P := 50$; $p = 0..p-1$; $mp = 0..P$ (meje intervalov) ; $\Delta = \frac{2NA}{P}$ $\left(= \frac{y_{max} - y_{min}}{P}\right)$ (širina intervala) ; $meje_{mp} = -NA + mp \cdot \Delta$ (→ meje intervalov, y_{min}) ;
$Porhist = hist(meje, y)$ ... izračunamo histogram vektorja vzorcev (y pomeja h meje), $length(Porhist) =$; $P_y(y1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_y^2}} \cdot e^{-y_1^2/2\sigma_y^2}$,
$y1 = -N \cdot A, -0.99 N \cdot A .. N \cdot A$; narišeš oba grafa : Porhist in $P_y(y1)$

9. PRENOSNI KANAL Z GAUSOVIM ŠUMOM : ~ Modeliranje prenosa binarnih simbolov po časovno diskretnem kanalu z dodanim gausovim šumom ! $a[i] \rightarrow \boxed{oddajnik} \xrightarrow{x[i]} \oplus (n[i]) \xrightarrow{y[i]} \boxed{sprejemnik} \rightarrow b[i]$; $N = 1000$; $i = 0..N-1$;
(a ... zaporedje binarnih simbolov) $a_i = floor(rnd(2))$ (narišeš a_j ; $j = 0..100$) ; x_i ... signal na izhodu oddajnika : $V = 4$; $x_i = V \cdot (a_i \cdot 2 - 1)$ (narišeš x_j, $j = 0..100$) $\left(x = \begin{cases} +V ; & a = 1 \\ -V ; & a = 0 \end{cases}\right)$; n ... šum z normalno porazdelitvijo in varianco $\sigma_n = 2$ (v resnici na kvadrat!) → $n = rnorm(N, 0, \sigma_n)$ (→ narišeš n_j od j), $var(n) =$, $mean(n) =$, $y_i = x_i + n_i$
(narišeš : y_j in n_j od j) ; y ... signal na vhodu sprejemnika ; b ... dekodirmo zaporedje $b_i = y > 0$
$err = a_i \neq b_i$ (napake pri prenosu) ; $BER = \sum_i err_i / N$ (BER ... razmerje napak pri prenosu) , $BER =$,
Pe ... vrjetnost napake (je enaka vrjetnosti dogodka, da je $a_i \neq b_i \rightarrow Pe = P(a_i \neq b_i)$) $P(x) := 1 - cnorm(x)$ ($x = \frac{V}{\sigma_n}$)
$Pe := P(V/\sigma_n)$; $Pe =$, $x := 1, 1.1 .. 4.5$ (narišeš $P(x)$ in Pe od x, V/σ_n) . Napake pri prenosu nastopajo, kadar je velikost šuma n večja od velikosti signala V : $Pe = \begin{cases} P(n[i] < -V ; & \text{če je } x[i] = V \\ P(n[i] > V ; & \text{če je } x[i] = -V \end{cases}$; $Pe = \int_{n=V}^{\infty} p_n(n) dn$
Šum ima gaussovo amplitudno porazdelitev : $p_n(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_n^2}} e^{-\frac{n^2}{2\sigma_n^2}}$; V^2 ... moč signala ; σ_n^2 ... moč šuma
$\frac{V}{\sigma_n}$ ... normirana vrednost ; $SNR = 20 \log\left(\frac{V}{\sigma_n}\right) [dB] = 10 \cdot \log\left(\frac{V^2}{\sigma_n^2}\right) \rightarrow \frac{V}{\sigma_n} = 10^{SNR/20}$; $SNR := 0, 0.5 .. 20$;
$pe(SNR) = 1 - cnorm(10^{SNR/20})$ (narišeš graf $pe(SNR)$, SNR ... y-os naj ima logaritemsko skalo!) ; $qnorm(1 - 10^{-12}, 0, 1) =$,

10. PRENOS INFORMACIJE PREK BSK : Zanima nas vzajemna entropija oz. povprečna vzajemna informacija med vhodom in izhodom ($I = -\log_2 P(A)$) ; definiramo dvojiški logaritem : $lb(x) = \frac{\log(x)}{\log(2)}$; $po = 0.1$, $pe = 0.01$; $Px = \begin{bmatrix} po \\ 1-po \end{bmatrix}$ (Px ... porazdelitev vhodne binarne spr.) ; povprečno informacijo na vhodu določa vhodna entropija $Hx = \sum_{j=0}^{J-1} \left(Px_j \, lb\left(\frac{1}{Px_j}\right)\right)$; $Hx =$,

$M = 2$
$J = M$
$j = 0..J-1$
$K = M$
$k = 0..K-1$

[SPLOŠNO ZA BSK : $Hx = -\sum_{k=0}^{1} Px[k] \cdot \log_2(Px[k]) = -po \log_2 po - (1-po) \log_2(1-po)$]. Pogojne vrjetnosti $P(y|x)$ so odvisne od vrjetnosti napak pe : $Py\_x = \begin{bmatrix} 1-pe & pe \\ pe & 1-pe \end{bmatrix}$; $Py\_x =$; Vrjetnostna porazdelitev spr. na izhodu : $Py = Py\_x \cdot Px$
$Py_k = \sum_{j=0}^{J-1} (Px_j \cdot Py\_x_{j,k})$; entropija na izhodu : $Hy = -\sum_{k=0}^{K-1} Py_k \cdot lb(Py_k)$; $Hy =$, entropija na izhodu kanala je lahko večja od entropije na izhodu , Hx in Hy nista dovolj ! Izračunamo pogojno vrjetnost $Px\_y_{j,k} = \frac{Px_j \cdot Py\_x_{j,k}}{Py_k}$ na podlagi Bayesove formule
$I = H(y;x) = H(x) - H(x|y) = H(y) - H(y|x)$; $H(x|y)$ je mera negotovosti sprejetega signala ; → Hx_y ... pogojna entropija
$Hx\_y = \sum_{j=0}^{J-1} \left(\sum_{k=0}^{K-1} \left(Py_k \cdot Px\_y_{j,k} \cdot lb\left(\frac{1}{Px\_y_{j,k}}\right)\right)\right)$ ali $I = Hx;y = \sum_j \sum_k Px[j] \cdot Py|x[j,k] \cdot \log_2 \frac{Py|x[j,k]}{Py[k]} =$
$= \sum_j \sum_k Py[k] \cdot Px|y[j,k] \cdot \log_2 \frac{Px|y[j,k]}{Px[j]}$

Kapaciteta kanala C je maksimalna vzajemna entropija
$C = \max_{Px} Hx;y$

$C_{BSK}(pe) = 1 + (pe \cdot lb(pe) + (1-pe) \cdot lb(1-pe))$
$pe = 0, 0.01 .. 1$