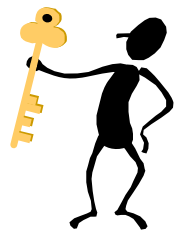
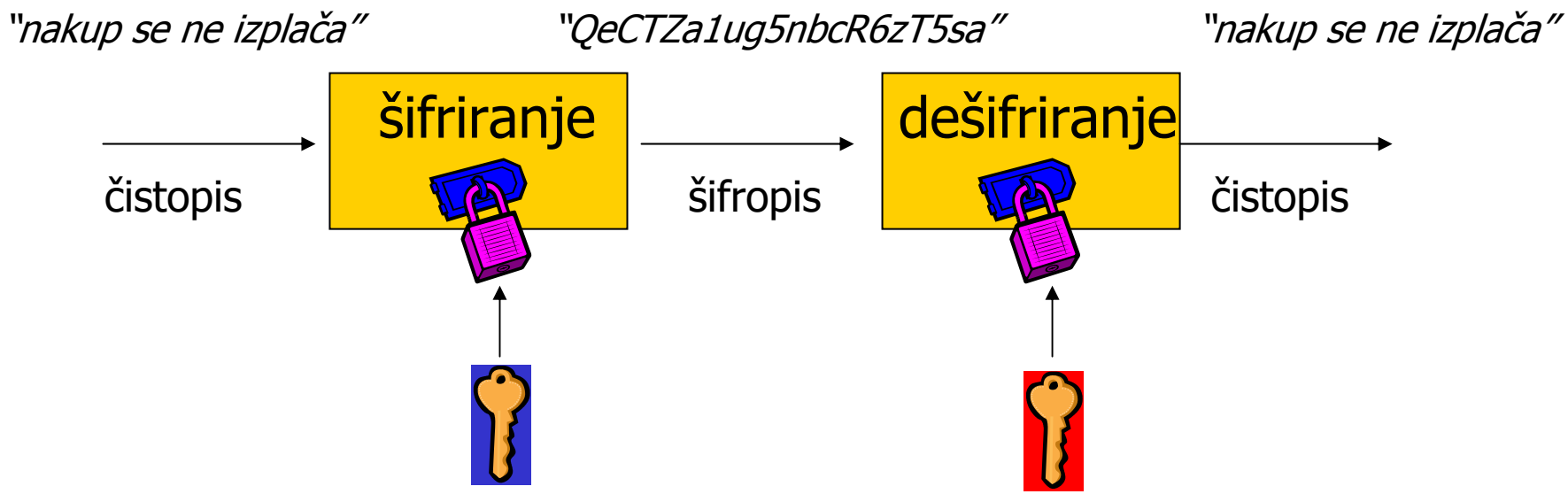
# Asimetrični šifrirni algoritmi

- Asimetrični šifrirni algoritem RSA
  - generacija ključev
  - šifriranje in dešifriranje
- Diffie-Hellmanov algoritem (DH)
- ElGamal-ov algoritem



# Asimetrično šifriranje

- Ključa za šifriranje in dešifriranje nista enaka:




- Pošiljatelj šifrira sporočilo z javnim ključem prejemnika.
- Prejemnik dešifrira sporočilo z zasebnim (privatnim) tajnim ključem.
- Asimetrični postopki šifriranja so zasnovani na enosmerni funkciji s stranskim vhodom (one way trapdoor function).

# Asimetrični šifrirni algoritem RSA

- RSA algoritem se imenuje po prvih črkah priimkov avtorjev (Ronald Rivest, Adi Shamir, Leonard Adleman), ki so razvili algoritem l. 1977
- Kot vsi asimetrični šifrirni postopki temelji na principu enosmerne funkcije.
- RSA izkorišča težavnosti faktorizacije velikih števil:
  - 15=3 * 5
  - ali znate faktorizirati veliko število ?
    1094173864157052742180970732204035761200373294544920599091384213147634998428893478471799725789126733249762575289978183379707653724402714674353159335433389 7
    =
    1026395928297411057720541965739916759007165678080380668033419335217907113077799
    *
    1066034883801684548209272203600128786792079585759892915222706082371930628086433

# RSA algoritem

- Generacija ključev
  - izberemo dve veliki praštevili (p,q)
  - izračunamo produkt n= p q (modul) ,
  - izračunamo produkt $\phi$ = (p-1) (q-1)
  - izberemo število e, ki nima skupnega faktorja z f
  - poiščemo število d tako, da daje produkt (e d) ostanek 1 pri deljenju z $\phi$: (e d) mod i = 1

  - **javni ključ**: (n, e)

  - **tajni ključ**: (n, d)
- Enkripcija in dekripcija

  - šifriramo dolge bloke čistopisa m , šifropis označimo z E(p)
  - šifriranje: $E(m)= m^e \bmod n$
  - dešifriranje: $D(E(m))=E(m)^d \bmod n$
- Na osnovi znanega javnega ključa e , čistopisa m, šifropisa c=E(m) v realnem času ni mogoče ugotoviti tajnega ključa d !!

# Zgled generacije RSA ključev

- izberemo dve (veliki) praštevili (p,q)  p=17, q=31
- izračunamo  n= p q  ,  $\phi$ = (p-1) (q-1)  n=527, $\phi$=480
- izberemo število e, ki nima skupnega faktorja z $\phi$, veljati mora gcd(e,$\phi$)=1 ; izberemo **e=61** 
- poiščemo število d tako, da ima produkt (e d) ostanek 1 pri deljenju z $\phi$:  (e  d) mod $\phi$=1
  - veljati mora enačba:  e d=k $\phi$ +1  --> d = (k 480 +1)/61 , pri tem pa mora biti **k** celo število:
  - d = 7k+(53k+1)/61=7k+$k_1$ -> **d =181** 
  - k =(61$k_1$-1)/53=$k_1$+(8$k_1$-1)/53=$k_1$+$k_2$ -> k =23
  - $k_1$ =(53$k_2$+1)/8=6$k_2$+(5$k_2$+1)/8=6$k_2$+$k_3$ -> $k_1$ =20
  - $k_2$ =(8$k_3$-1)/5=$k_3$+(3$k_3$-1)/5=$k_3$+$k_4$ -> $k_2$ =3
  - $k_3$ =(5$k_4$+1)/3=$k_4$+(2$k_4$+1)/3=$k_4$+$k_5$ -> $k_3$ =2
  - $k_4$ =(3$k_5$-1)/2=$k_5$+($k_5$-1)/2=$k_5$+$k_6$ -> $k_4$ =1
  - $k_5$ =(2$k_6$+1)  , izberemo $k_6$=0 -> $k_5$ =1

# RSA šifriranje sporočila

- javni RSA ključ: (n, e)=(527,61) 
- sporočilo v čistopisu: $m$=40
- šifriranje sporočila: $c = E(m) = m^e \bmod n$

$$c = 40^{61} \bmod 527$$

upoštevamo lastnost: e=61=1+4+8+16+32

$40^1 \bmod 527 = 40$

$40^2 \bmod 527 = (40^1 \bmod 527)^2 \bmod 527 = 19$

$40^4 \bmod 527 = (40^2 \bmod 527)^2 \bmod 527 = 361$

$40^8 \bmod 527 = (40^4 \bmod 527)^2 \bmod 527 = 152$

$40^{16} \bmod 527 = (40^8 \bmod 527)^2 \bmod 527 = 443$

$40^{32} \bmod 527 = (40^{16} \bmod 527)^2 \bmod 527 = 205$

$40^{64} \bmod 527 = (40^{32} \bmod 527)^2 \bmod 527 = 392$

$40^{128} \bmod 527 = (40^{64} \bmod 527)^2 \bmod 527 = 307$

$c = ((40^1 \bmod 527)(40^4 \bmod 527)(40^8 \bmod 527)(40^{16} \bmod 527)(40^{32} \bmod 527)) \bmod 527$

$c = (40*361*152*443*205) \bmod 527 = 350$

- šifrirano sporočilo: $c$ =350

# RSA dešifriranje sporočila

- tajni RSA ključ: (n, d)=(527,181) 
- sporočilo v šifropisu: $c = 350$
- dešifriranje sporočila: $m = D(c) = c^d \bmod n$

$$m = 350^{181} \bmod 527$$

upoštevamo lastnost: $d=181=1+4+16+32+128$

$350^1 \bmod 527 = 350$

$350^2 \bmod 527=(350^1 \bmod 527)^2 \bmod 527 = 236$

$350^4 \bmod 527=(350^2 \bmod 527)^2 \bmod 527=361$

$350^8 \bmod 527=(350^4 \bmod 527)^2 \bmod 527=152$

$350^{16} \bmod 527=(350^8 \bmod 527)^2 \bmod 527=443$

$350^{32} \bmod 527=(350^{16} \bmod 527)^2 \bmod 527=205$

$350^{64} \bmod 527=(350^{32} \bmod 527)^2 \bmod 527=392$

$350^{128} \bmod 527=(350^{64} \bmod 527)^2 \bmod 527=307$

$c=((350^1 \bmod 527)(350^4 \bmod 527)(350^{16} \bmod 527)(350^{32} \bmod 527)(350^{128} \bmod 527)) \bmod 527$

$c=(350*361*443*205*307) \bmod 527 = 40$

- dešifrirano sporočilo: $m = 40$

# Diffie - Hellmanov algoritem

- glavna parametra sta lahko enaka za vse uporabnike:
  - (g , p) : "generator" g in veliko praštevilo p
- varnost DH algoritma temelji na težavnosti računanja diskretnega logaritma:
  - za vsako število 0<n<p lahko najdemo potenco k, tako da velja:
  - $n = g^k \bmod p$
  - število k pa zelo težko poiščemo iz (n,g,p) !!
- A in B najprej vsak na svoji strani izbereta tajni ključ $tk_a$ in $tk_b$
- A in B izračunata javna ključa $jk_a$ in $jk_b$ :
  - $jk_a = g^{tk(a)} \bmod p$
  - $jk_b = g^{tk(b)} \bmod p$
- A in B si izmenjata ključa $n_a$ <--> $n_b$ in izračunata skupni ključ:
  - uporabnik A izračuna sejni ključ: $tk_{Ab} = jk_b^{tk(a)} \bmod p$
  - uporabnik B izračuna sejni ključ: $tk_{Ba} = jk_a^{tk(b)} \bmod p$
- oba sejna ključa sta enaka: $g^{tk(b)\ tk(a)} \bmod p = g^{tk(b)\ tk(a)} \bmod p$

# DH - primer generacije sejnega ključa

- parametra g in p sta: g=23 , p=31

- A in B izbereta tajni ključ $tk_a$ in $tk_b$
  - $tk_a = 9$
  - $tk_b = 3$

- A in B izračunata javna ključa $jk_a$ in $jk_b$ :
  - $jk_a = g^{tk(a)} \bmod p = 23^9 \bmod 31 = 27$
  - $jk_b = g^{tk(b)} \bmod p = 23^3 \bmod 31 = 15$

- A in B izmenjata javna ključa $jk_a$ , $jk_b$ in izračunata skupni ključ:
  - A: $tsk_{ab} = jk_b^{tk(a)} \bmod p = 15^9 \bmod 31 = \mathbf{29}$
  - B: $tsk_{ba} = jk_a^{tk(b)} \bmod p = 27^3 \bmod 31 = \mathbf{29}$

# ElGamal-ov algoritem

- imenuje se po avtorju: Taher ElGamal
- varnost ElGamal algoritma temelji na težavnosti računja diskretnega logaritma:
  - skupina uporabnikov izbere veliko praštevilo p in naključno število g
  - vsak uporabnik naključno izbere število x in izračuna par y : $y = g^x \bmod p$
  - tajni ključ sestavljajo števila (x, g, p)
  - javni ključ so števila (y, g, p)
  - če je p zelo veliko število, potem iz (y, g, p) zelo težko izračunamo eksponent x !!
- ElGamal algoritem za enkripcijo
- ElGamal algoritem za digitalni podpis

# ElGamal-ovo šifriranje

- veliko praštevilo p in naključno število g sta javna
- uporabnika A in B naključno izbereta tajna ključa in generirata javna ključa:
  - $jk_a = g^{tk(a)} \bmod p$
  - $jk_b = g^{tk(b)} \bmod p$
- pošiljatelj A:
  - izbere naključno število k , gcd(k,p-1)=1
  - na osnovi čistopisa m, naključnega števila k in javnega ključa prejemnika $jk_b$ izračuna dvodelni šifropis (a , b):

$$a = g^k \bmod p$$

$$b = ( jk_b^k \; m ) \bmod p$$

- prejemnik B:
  - dešifriranje sporočilo na osnovi tajnega ključa prejemnika x :

$$m = b \; a^{p-1-tk(b)} \bmod p$$

# ElGamal-ovo šifriranje - zgled

- javni števili za več uporabnikov: $p=31$ in $g=9$
- uporabnik B naključno izbere tajni ključ in generirata javni ključ:
  - $tk_b = 3$
  - $jk_b = g^{tk(b)} \bmod p = 16$
- pošiljatelj A:
  - izbere naključno število $k=7$ , $\gcd(7, 30)=1$
  - na osnovi čistopisa $m=23$, naključnega števila $k$ in javnega ključa prejemnika $jk_b$ izračuna dvodelni šifropis ($a$ , $b$):

$$a = g^k \bmod p = 9^7 \bmod 31 = 10$$

$$b = ( jk_b^k \; m ) \bmod p = ( 16^7 \; 23 ) \bmod 31 = 29$$

- prejemnik B:
  - dešifriranje sporočilo na osnovi tajnega ključa prejemnika $x$ :

$$m = b \; a^{p-1-tk(b)} \bmod p = 29 \; 10^{27} \bmod 31 = 23$$

# ElGamal-ov digitalni podpis

- izbran in objavljen je par števil (g, p)
- podpisnik izračuna dvodelni podpis sporočila m na osnovi svojega tajnega ključa (x, g, p) in naključnega števila k tako da:
  - izbere naključno število k, ki izpolnjuje pogoj gcd(k,p-1)=1
  - izračuna prvi del podpisa a:

    $a = g^k \bmod p$
  - In izračuna drugi del podpisa b:

    $m = (x\,a + k\,b) \bmod (p-1)$
  - javni ključ podpisnika je $y = g^x \bmod p$

- prejemnik preverja digitalni podpis (a, b) sporočila m s pomočjo javnega ključa pošiljatelja y:

  $y^a\,a^b \bmod p = g^m \bmod p$ ?

# ElGamal-ov digitalni podpis - zgled

- izbran in objavljen je par števil ($g=2$, $p=11$)
- podpisnik izračuna dvodelni podpis sporočila $m=5$ na osnovi svojega tajnega ključa ($x=8$, $g=2$, $p=11$) tako da:
  - izbere naključno število $k=9$, gcd(9, 10)=1
  - izračuna prvi del podpisa $a$:

    $a = g^k \bmod p = 2^9 \bmod 11 = 6$
  - izračuna drugi del podpisa $b$:

    $m = (x\,a + k\,b) \bmod (p-1)$ --> $b=3$
  - javni ključ podpisnika je $y = g^x \bmod p = 2^8 \bmod 11$, $y= 3$
- prejemnik preverja digitalni podpis ($a=6$, $b=3$) sporočila $m$ s pomočjo javnega ključa pošiljatelja $y=3$:

  $y^a\,a^b \bmod p = g^m \bmod p$ ?

  levo: $y^a\,a^b \bmod p = 3^6\,6^3 \bmod 11 = 10$

  desno: $g^m \bmod p = 2^5 \bmod 11 = 10$