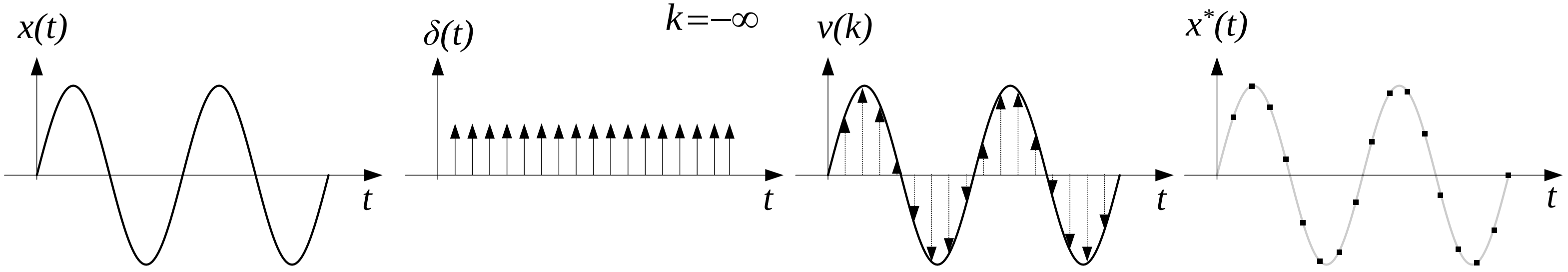
Univerza *v Ljubljani*
Fakulteta *za elektrotehniko*
Laboratorij za elektroenergetske sisteme

Zaščitna tehnika in avtomatizacija

Diskretni Fourierev transform

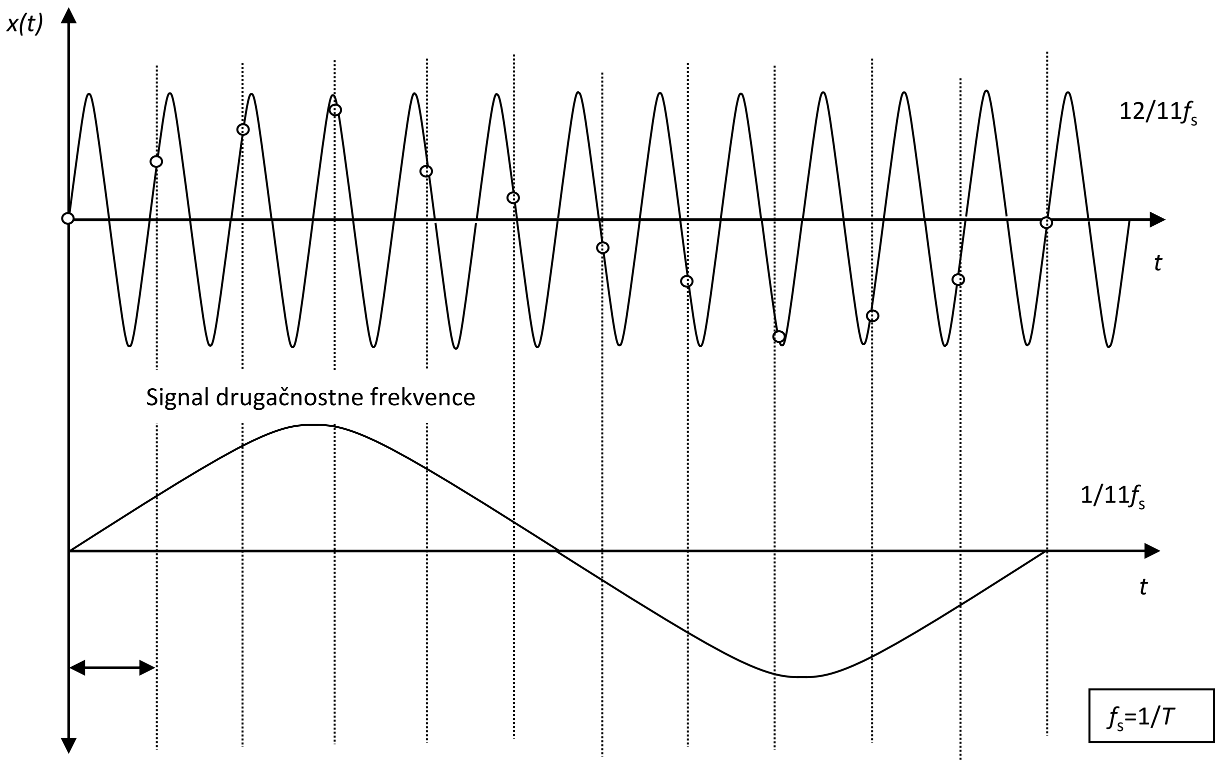
Digitalna zaščita

- Razvoj numeričnih metod
  - Upoštevanje višjih harmonskih komponent, šuma, frekvence odbitih valov, …
  - Za pravilno obdelavo signalov je ključna natančna pretvorba izmerjenega analognega signala v digitalno obliko (v zaporedje časovno diskretnih vrednosti)
  - Upoštevanje Shannonovega teorema (nastanek drugačnostne frekvence ob neizpolnjevanju teorema)
  - Proces vzorčenja $x^*(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT) \cdot \delta(t-kT)$



Vzorčenje signala

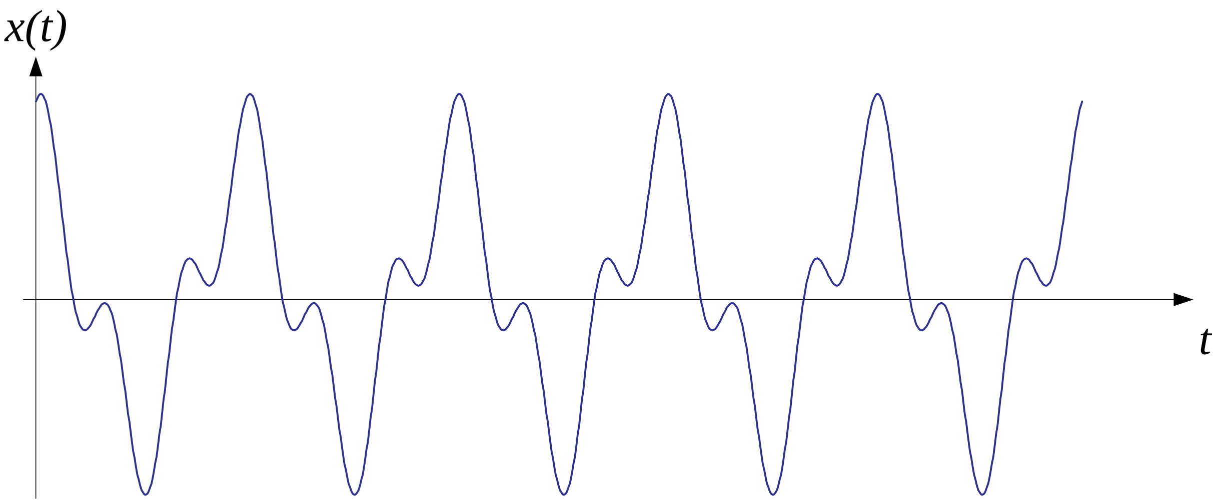
- Neizpolnjevanje Shannonovega teorema povzroči nastanek drugačnostne frekvence



Frekvenčni spekter

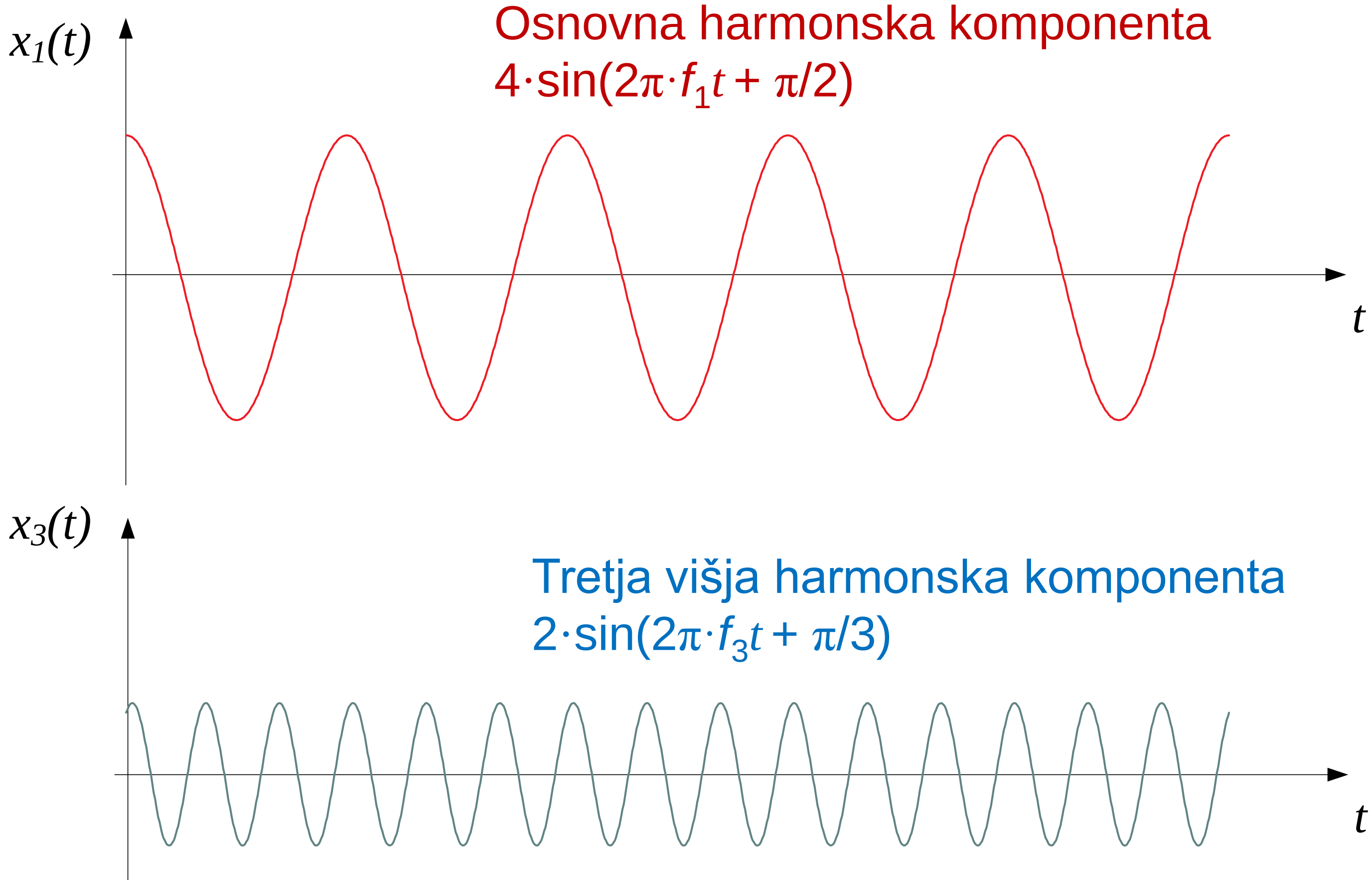
- Frekvenčni spekter vzorčenega signala
  - Uporaba matematičnih orodij, kot je Fourierev transform
    - Amplituda signala
    - Začetni kot signala

    - Primer: $x(t) = 4\cdot\sin(2\pi\cdot f_1 t + \pi/2) + 2\cdot\sin(2\pi\cdot f_3\, t + \pi/3)$, kjer f_1 = 50 Hz, f_3 = 150 Hz



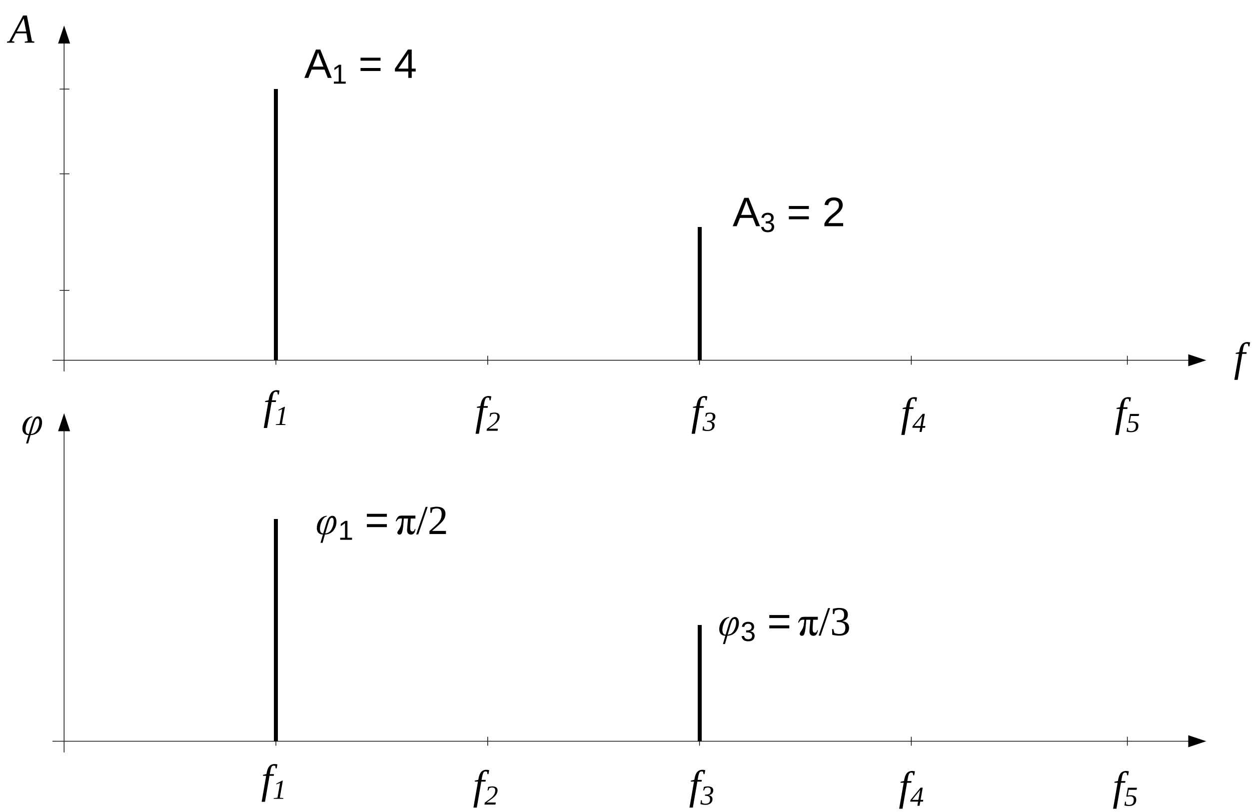
Frekvenčni spekter

- Signal sestavljen iz osnovne in tretje harmonske komponente



Frekvenčni spekter

- Prikaz amplitud in faznih kotov harmonskih komponent signala v frekvenčnem prostoru (prikaz valovanja)



Metode obdelave signalov

- Digitalna zaščita temelji na uporabi časovno diskretnih signalov (numerične metode)
- Sposobnost obravnave harmonsko popačenih signalov in enosmerne komponente
  - Fouriereva analiza
  - Walshova analiza
  - Metoda najmanjših kvadratov
  - Kalmanov filter
- Metode se razlikujejo po
  - Hitrosti delovanja metode (hitrost zaščite)
  - Natančnosti metode (natančnost zaščite)

Metode obdelave signalov

- Naloga
  - Izločiti določene komponente signala
  - Signal preoblikovati v časovni in frekvenčni prostor
  - Pridobiti informacijo o signalu
    - Amplituda, fazni kot, frekvenca
    - Efektivna vrednost, povprečna vrednost
    - …

Fouriereva vrsta in transformacija

- Fourierev transform poda frekvenčni spekter signala
  - Določitev amplitude in faznega kota harmonskih komponent
  - Predpostavka periodičnosti signala

  - Osnovni princip: Opis poljubnega (periodičnega) signala s sinusnimi in kosinusnimi funkcijami → tvorjenje Fouriereve vrste

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos(n \cdot \omega_1 \cdot t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot \sin(n \cdot \omega_1 \cdot t)$$

Fouriereva vrsta in transformacija

- Fourierev transform poda frekvenčni spekter signala
  - Določitev amplitude in faznega kota harmonskih komponent
  - Predpostavka periodičnosti signala

  - Osnovni princip: Opis poljubnega (periodičnega) signala s sinusnimi in kosinusnimi funkcijami → tvorjenje Fouriereve vrste

Fourierevi koeficienti a_0, a_n, b_n

Osnovna perioda signala

$$x(t) = \frac{\boxed{a_0}}{2} + \sum_{\boxed{n}=1}^{\infty} \boxed{a_{\boxed{n}}} \cdot \cos(\boxed{n} \cdot \boxed{\omega_1} \cdot t) + \sum_{n=1}^{\infty} \boxed{b_{\boxed{n}}} \cdot \sin(\boxed{n} \cdot \boxed{\omega_1} \cdot t)$$

n-ta harmonska komponenta

Fouriereva vrsta za zvezne funkcije

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos(n \cdot \omega_1 \cdot t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot \sin(n \cdot \omega_1 \cdot t)$$

Fourierevi koeficienti:

$$a_0 = \frac{2}{T_1} \cdot \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) \cdot dt$$

$$a_n = \frac{2}{T_1} \cdot \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) \cdot \cos(n \cdot \omega_1 \cdot t) \cdot dt$$

$$b_n = \frac{2}{T_1} \cdot \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) \cdot \sin(n \cdot \omega_1 \cdot t) \cdot dt$$

Fouriereva vrsta za zvezne funkcije

- Fourierevo vrsto

$$x(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cdot\cos(n\cdot\omega_1\cdot t)+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\cdot\sin(n\cdot\omega_1\cdot t)$$

- lahko zapišemo drugače

$$x(t)=\frac{a_0}{2}+a_1\cdot\cos(\omega_1\cdot t)+b_1\cdot\sin(\omega_1\cdot t)+$$
$$+a_2\cdot\cos(2\omega_2\cdot t)+b_2\cdot\sin(2\omega_1\cdot t)+\ldots$$

- oziroma kot

Fazni kot *n*-te harmonske komponente

$$x(t)=\frac{a_0}{2}+\boxed{A_1}\cdot\cos(\omega_1\cdot t+\boxed{\varphi_1})+\boxed{A_2}\cdot\cos(2\omega_1\cdot t+\boxed{\varphi_2})+\ldots$$

Amplituda *n*-te harmonske komponente

Fouriereva vrsta za zvezne funkcije

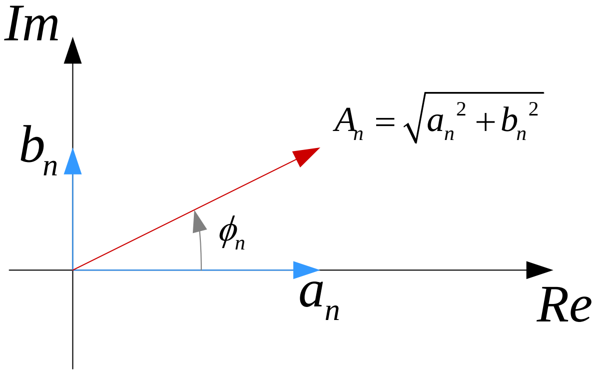
- Amplituda *n*-tega harmonika se izračuna po

$$A_n = \sqrt{{a_n}^2 + {b_n}^2}$$

- Fazni *n*-tega harmonika kot pa po

$$\phi_n = \arctan\left(\frac{b_n}{a_n}\right)$$

- Povezava razvidna v kompleksni ravnini



Uporaba Fouriereve vrste

- Primer žagaste funkcije $$f(x)=x,\ \text{za} -\pi<x<\pi$$ $$f(x+2\pi)=f(x),\ \text{za} -\infty<x<\infty$$
- Fourierevi koeficienti so

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x\cos(nx)dx=0,\ \ n\ge 0,$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x\sin(nx)dx=-\frac{2}{n}\cos(n\pi)=2\frac{(-1)^{n+1}}{n},\ \ n\ge 1.$$

- Fouriereva vrsta za žagasto funkcijo

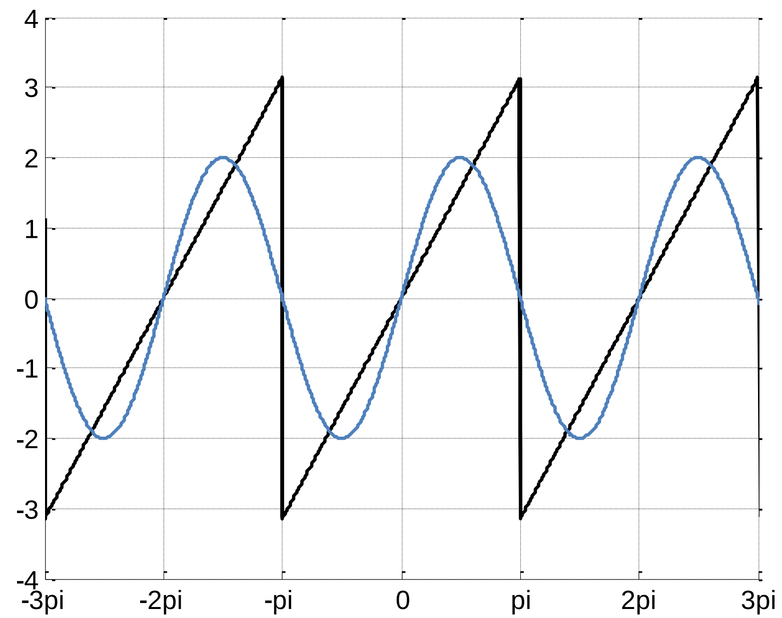
$$f(x)=2\sum_{\boxed{n}=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\boxed{n}+1}}{\boxed{n}}\sin(\boxed{n}x),\ \ za\ x-\pi\notin 2\pi\mathbf{Z}.$$

Žagasto funkcijo opišemo s sinusnimi in kosinusnimi funkcijami
Kako natančno opišemo funkcijo je odvisno od *n*

Uporaba Fouriereve vrste

- $n = 1$

$$f(x) = 2\sum_{n=1}^{1}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin(nx) = 2\frac{(-1)^{2}}{1}\sin(x),\ \ za\ x-\pi \notin 2\pi\mathbf{Z}$$

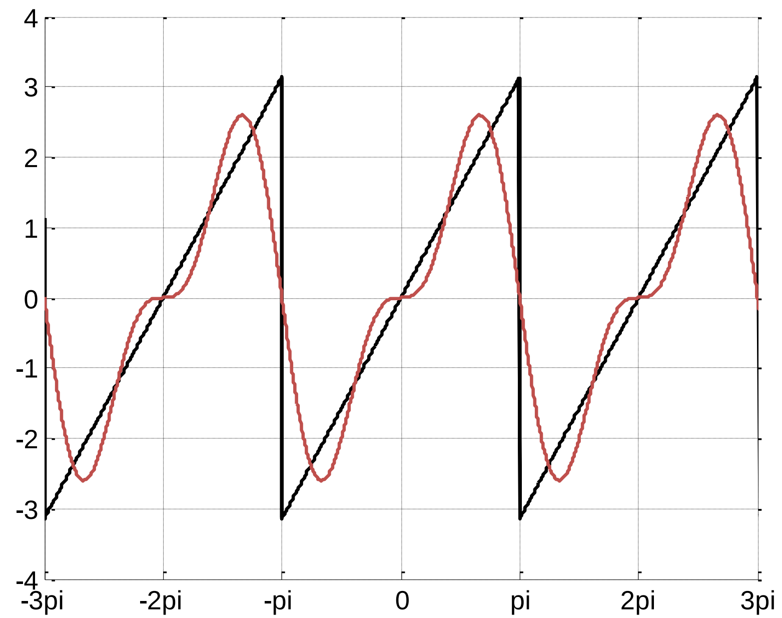


Uporaba Fouriereve vrste

- $n = 2$

$$f(x) = 2\sum_{n=1}^{2} \frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin(nx) =$$

$$= 2\frac{(-1)^{1+1}}{1}\sin(x) + 2\frac{(-1)^{2+1}}{2}\sin(2x), \;\; za\; x - \pi \notin 2\pi\mathbf{Z}$$

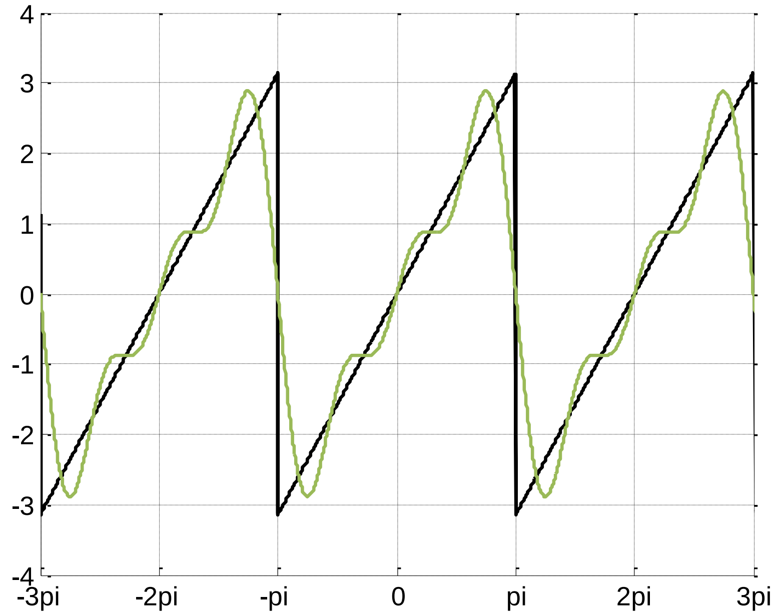


Uporaba Fouriereve vrste

- $n = 3$

$$f(x) = 2\sum_{n=1}^{2}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin(nx) = 2\frac{(-1)^{1+1}}{1}\sin(x) +$$

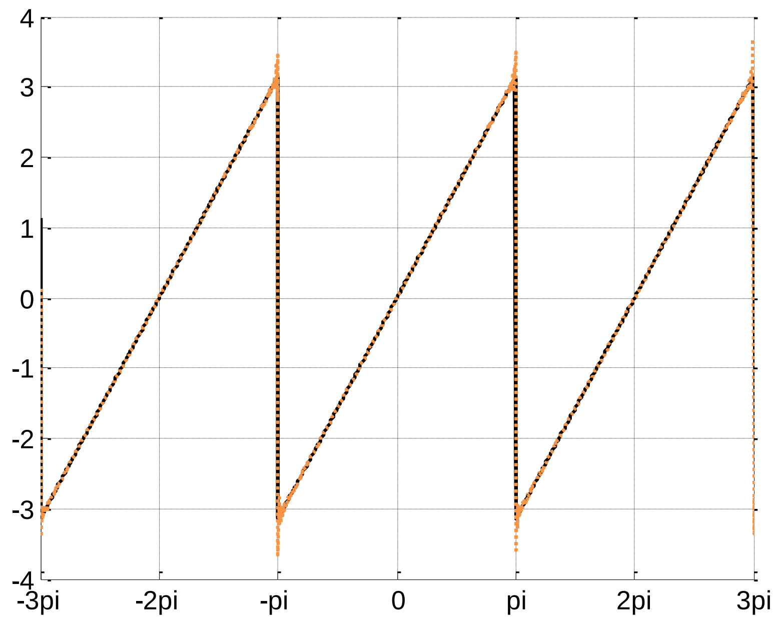
$$+2\frac{(-1)^{2+1}}{2}\sin(2x) + 2\frac{(-1)^{3+1}}{3}\sin(3x),\ \ za\ x-\pi \notin 2\pi\mathbf{Z}$$



Uporaba Fouriereve vrste

- $n \to \infty$

$$f(x) = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin(nx), \;\; za\ x - \pi \notin 2\pi \mathbf{Z}$$



Fouriereva vrsta za diskretne funkcije

- Digitalna zaščita temelji na zaporedju časovno diskretnih vrednosti $\rightarrow$ uporaba časovnega okna
  - Znotraj okna določamo pripadajočo amplitudo in fazo signala
  - FIFO register – z vsakim novim vzorčenjem se ‘premakne’ za čas vzorčenja

- Za diskretne signale integral Fourierevih koeficientov nadomestimo z vrsto

$$X_{\mathrm{Re},n} = a_n \approx \frac{2}{N} \cdot \sum_{i=0}^{N-1} x_i \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot i \cdot n}{N}\right) = \frac{2}{N} \cdot \sum_{i=0}^{N-1} x_i \cdot W_{\mathrm{Re},n,i}$$

$$X_{\mathrm{Im},n} = b_n \approx \frac{2}{N} \cdot \sum_{i=0}^{N-1} x_i \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot i \cdot n}{N}\right) = \frac{2}{N} \cdot \sum_{i=0}^{N-1} x_i \cdot W_{\mathrm{Im},n,i}$$

Fouriereva vrsta za diskretne funkcije

- Digitalna zaščita temelji na zaporedju časovno diskretnih vrednosti → uporaba časovnega okna
  - Znotraj okna določamo pripadajočo amplitudo in fazo signala
  - FIFO register – z vsakim novim vzorčenjem se 'premakne' za čas vzorčenja

- Za diskretne signale integral Fourierevih koeficientov nadomestimo z vrsto

*vredno*st *vzorca i*

i-ti vzorec

Število vzorcev v oknu

$$X_{\mathrm{Re},n} = a_n \approx \frac{2}{N} \cdot \sum_{i=0}^{N-1} x_i \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot i \cdot n}{N}\right) = \frac{2}{N} \cdot \sum_{i=0}^{N-1} x_i \cdot W_{\mathrm{Re},n,i}$$

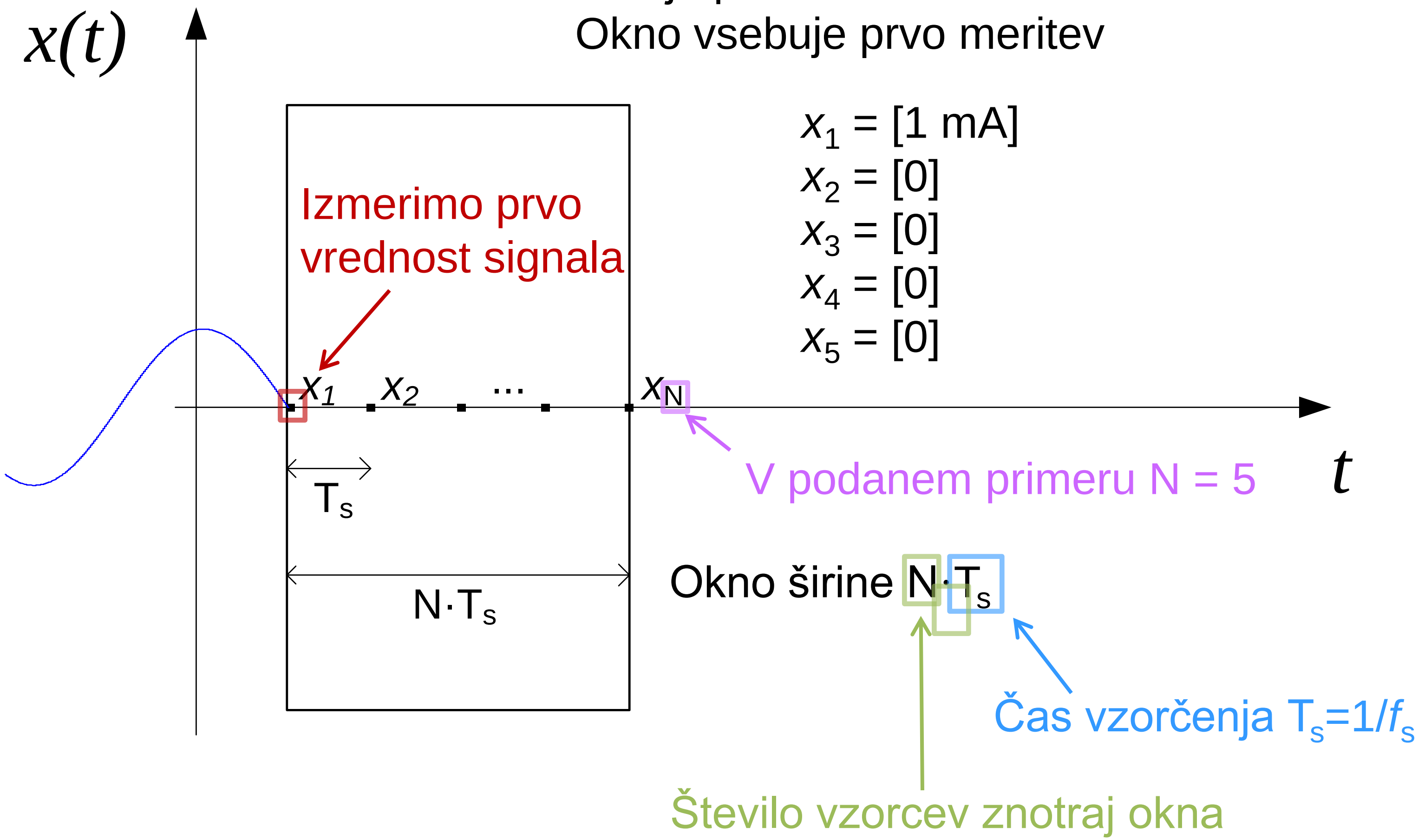
$$X_{\mathrm{Im},n} = b_n \approx \frac{2}{N} \cdot \sum_{i=0}^{N-1} x_i \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot i \cdot n}{N}\right) = \frac{2}{N} \cdot \sum_{i=0}^{N-1} x_i \cdot W_{\mathrm{Im},n,i}$$

n-ta harmonska komponenta

Fouriereva vrsta za diskretne funkcije

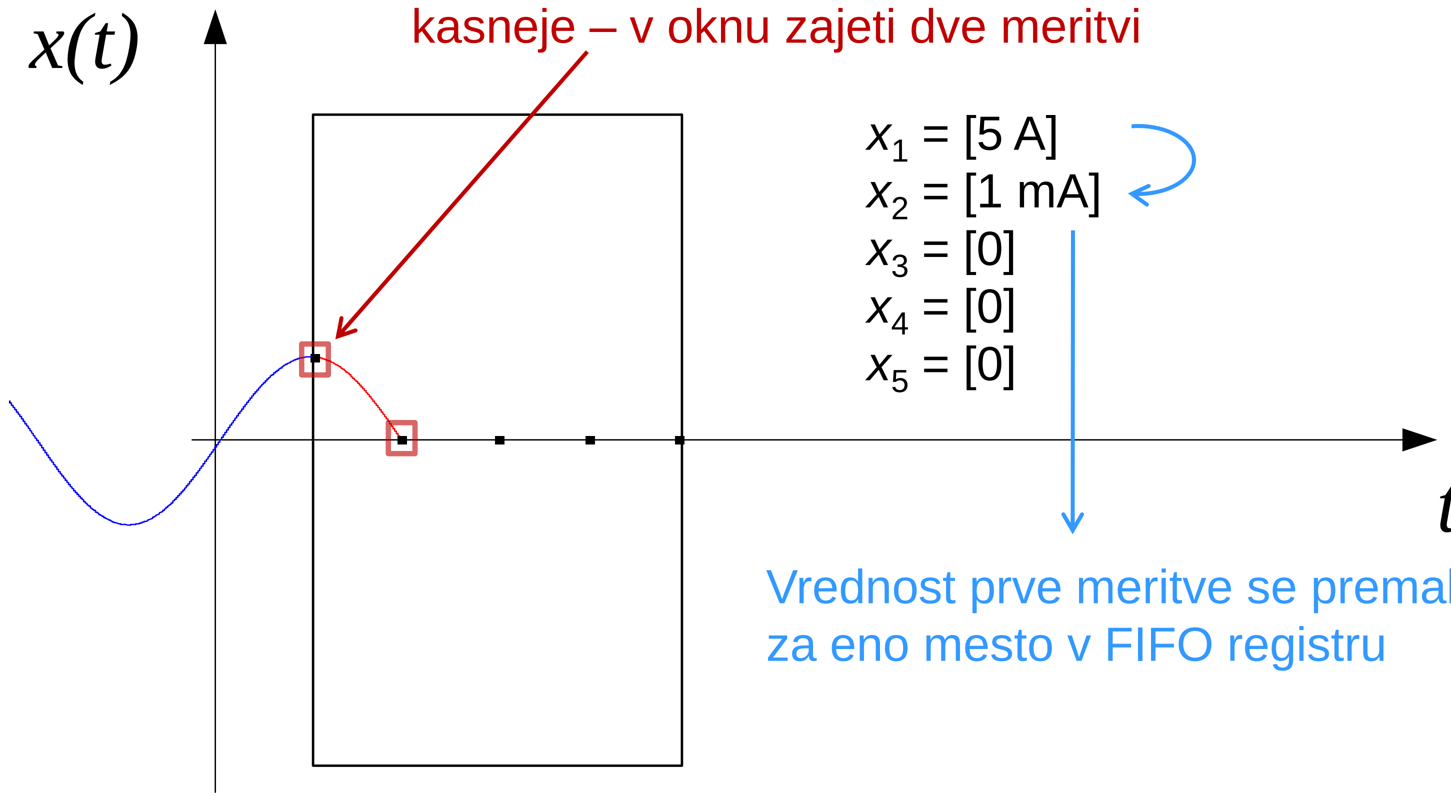
Stanje pri začetku meritve
Okno vsebuje prvo meritev

x_1 = [1 mA]
x_2 = [0]
x_3 = [0]
x_4 = [0]
x_5 = [0]



Fouriereva vrsta za diskretne funkcije

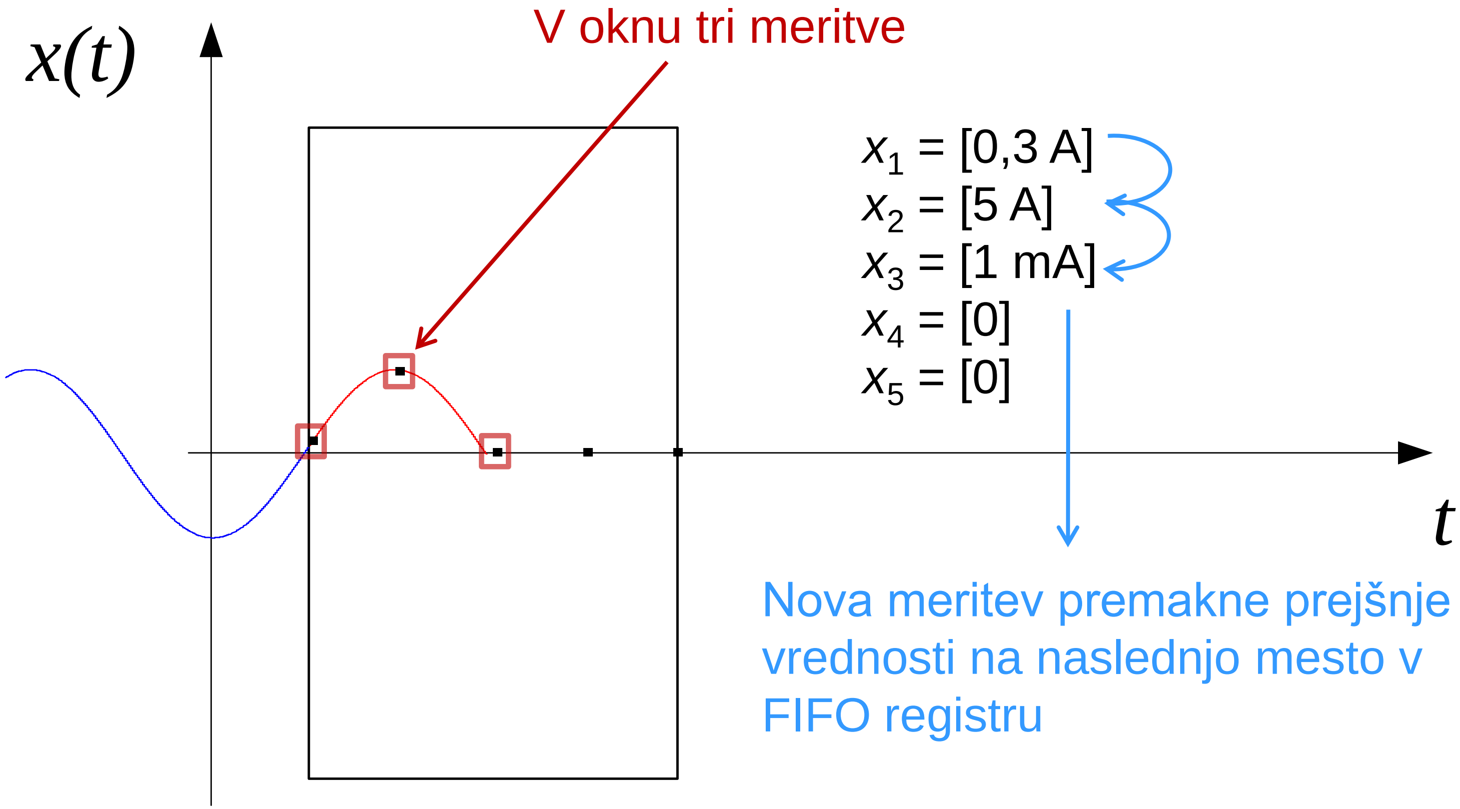
Izmerimo naslednjo vrednost signala T_s kasneje – v oknu zajeti dve meritvi



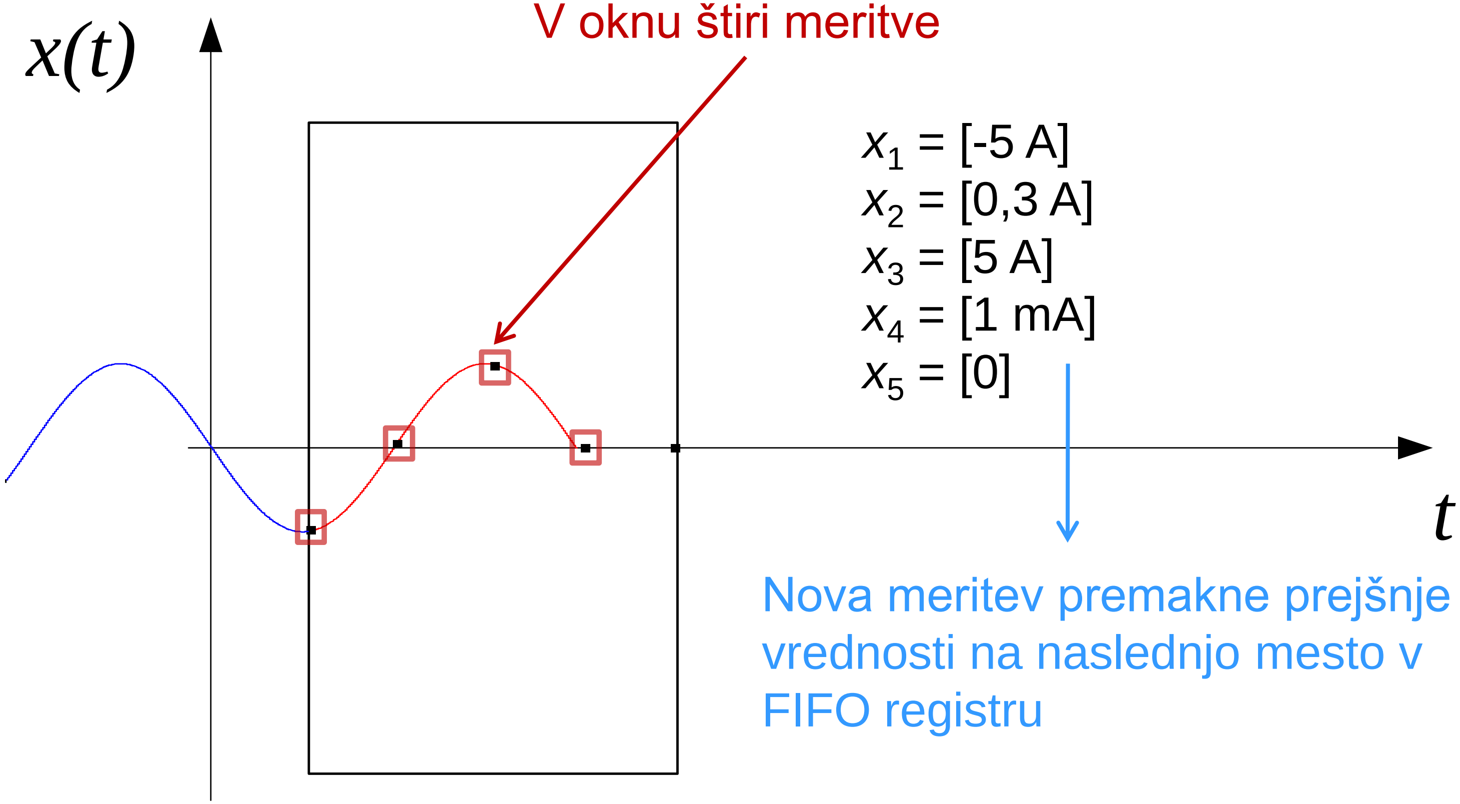
$x_1 = [5\ \mathrm{A}]$
$x_2 = [1\ \mathrm{mA}]$
$x_3 = [0]$
$x_4 = [0]$
$x_5 = [0]$

Vrednost prve meritve se premakne za eno mesto v FIFO registru

Fouriereva vrsta za diskretne funkcije



Fouriereva vrsta za diskretne funkcije

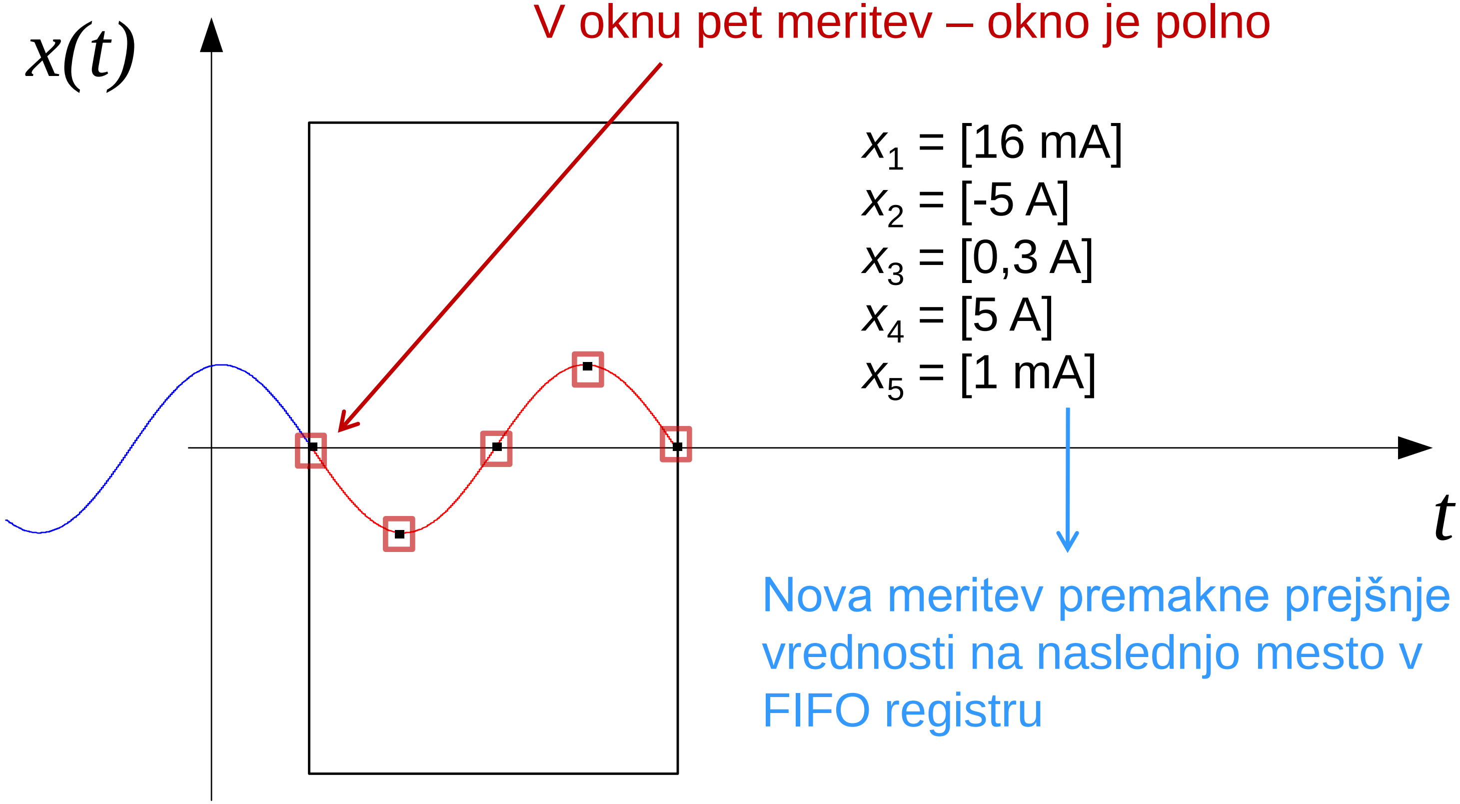


x_1 = [-5 A]
x_2 = [0,3 A]
x_3 = [5 A]
x_4 = [1 mA]
x_5 = [0]

Nova meritev premakne prejšnje vrednosti na naslednjo mesto v FIFO registru

Fouriereva vrsta za diskretne funkcije

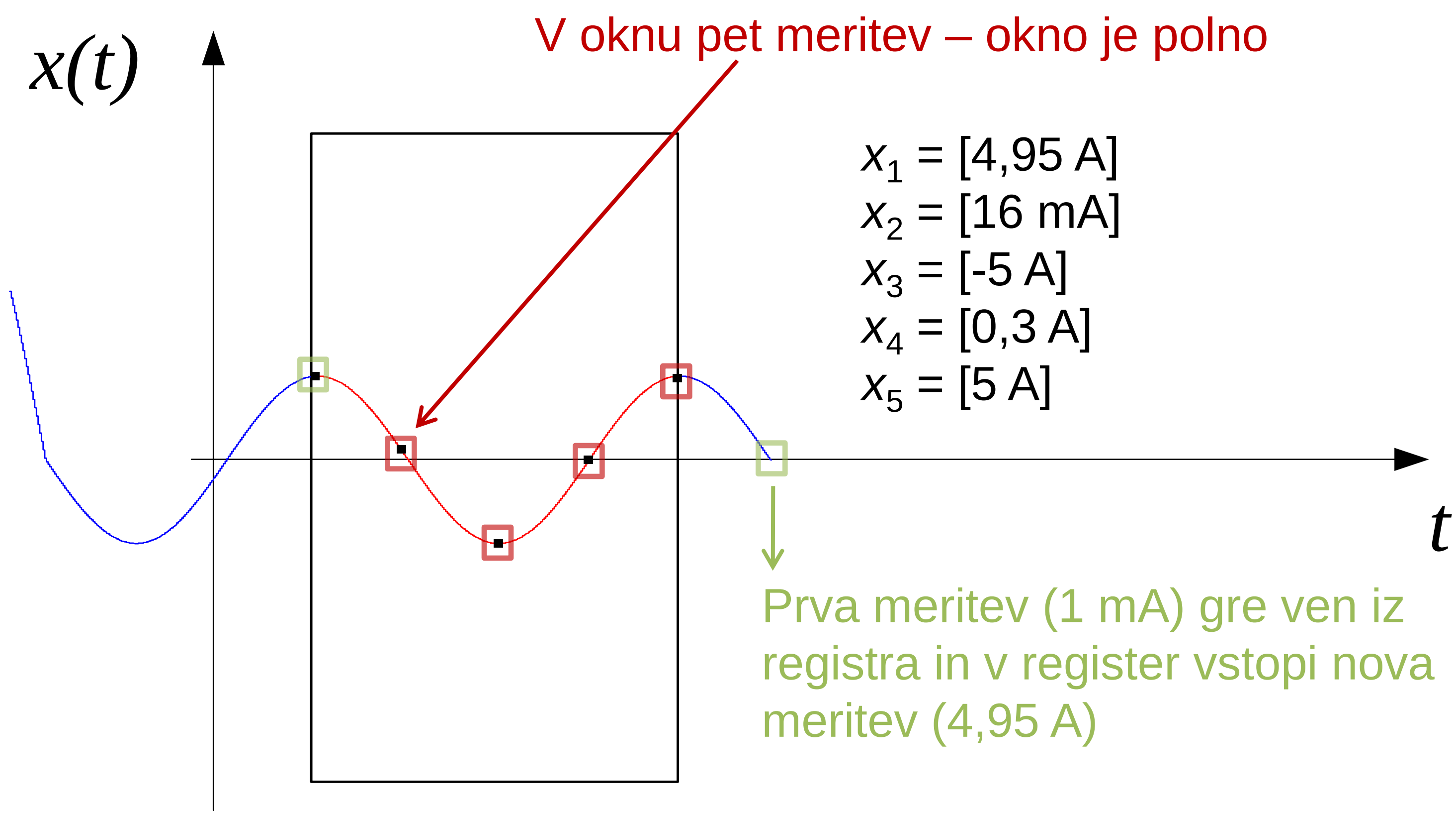
V oknu pet meritev – okno je polno



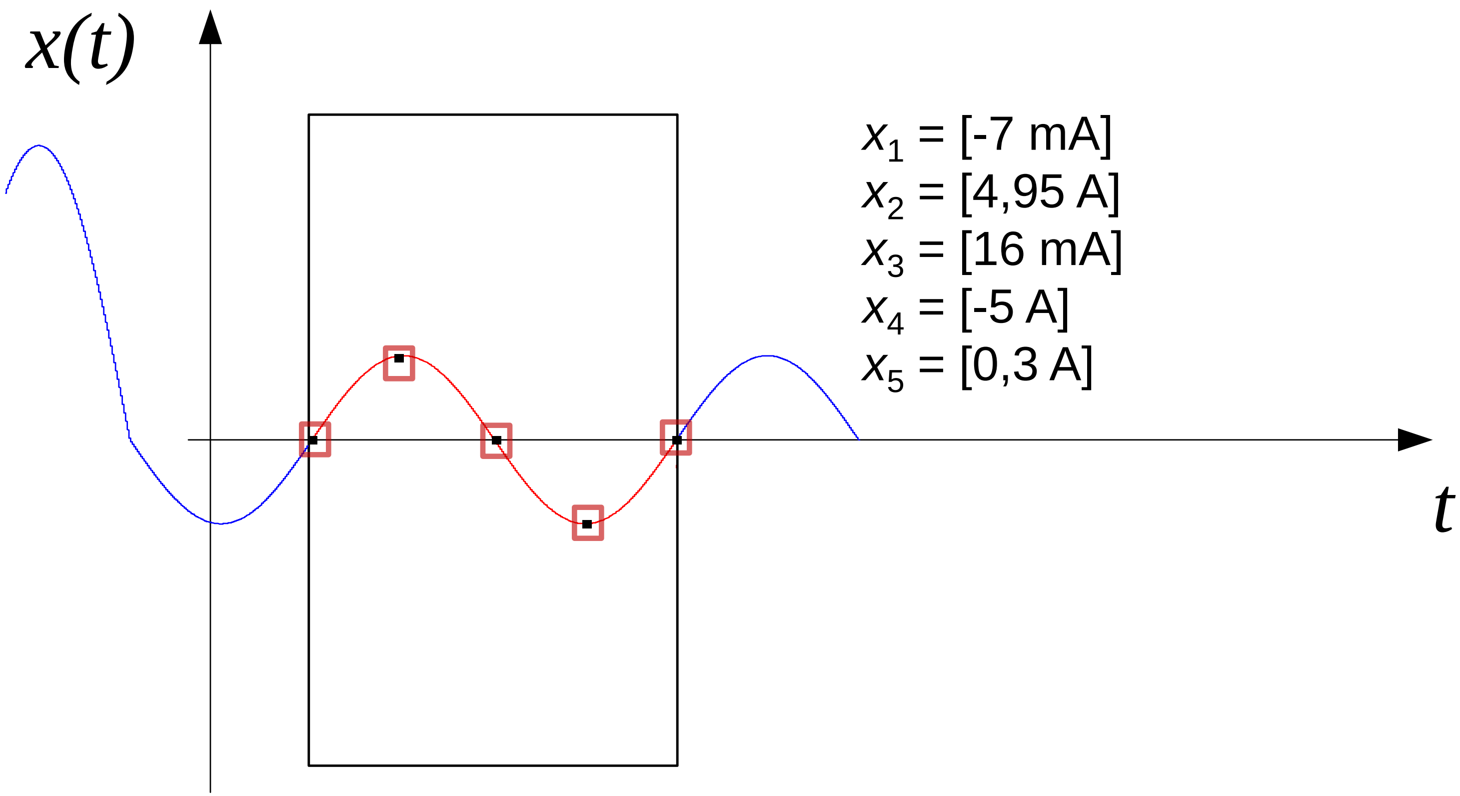
x_1 = [16 mA]
x_2 = [-5 A]
x_3 = [0,3 A]
x_4 = [5 A]
x_5 = [1 mA]

Nova meritev premakne prejšnje vrednosti na naslednjo mesto v FIFO registru

Fouriereva vrsta za diskretne funkcije

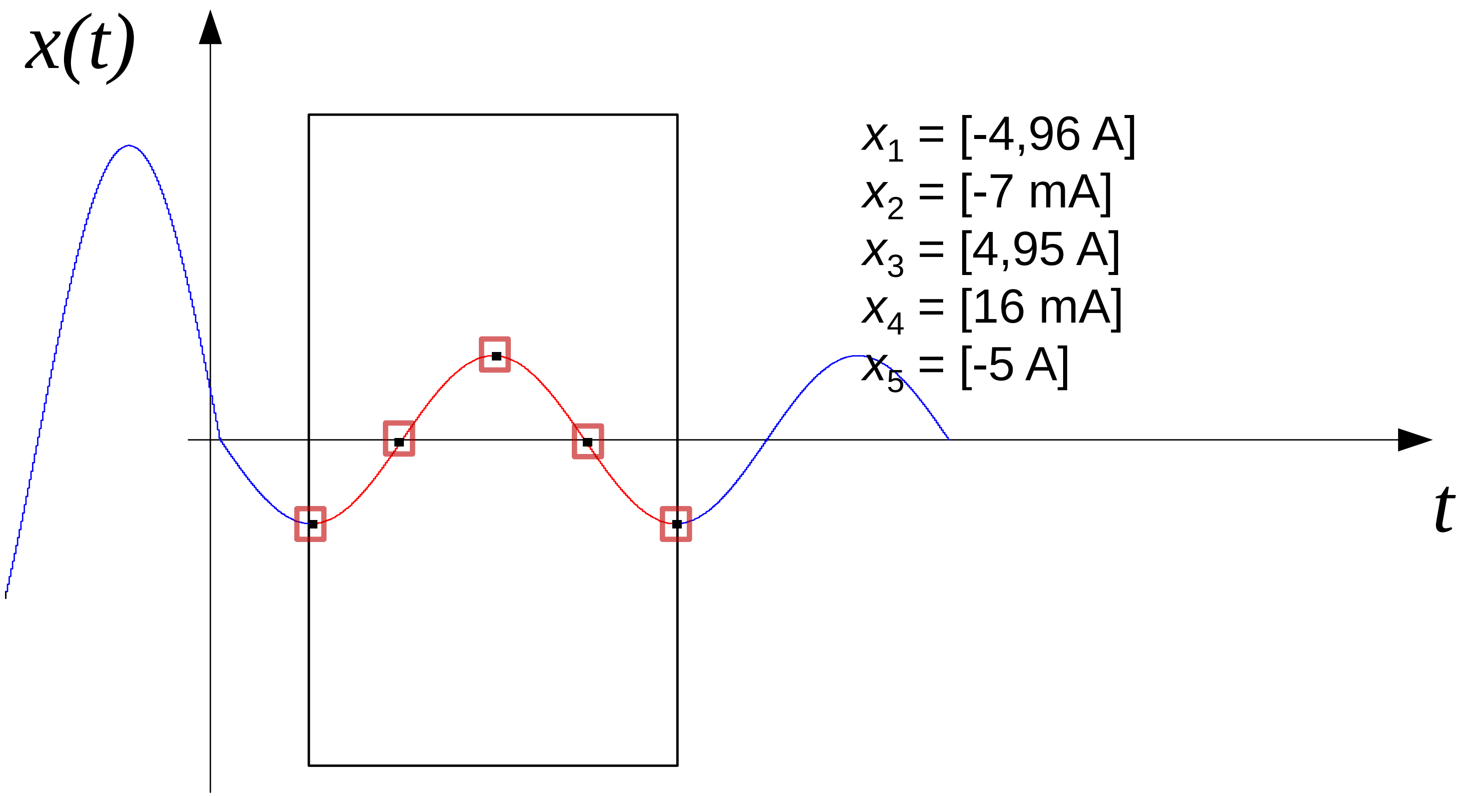


Fouriereva vrsta za diskretne funkcije

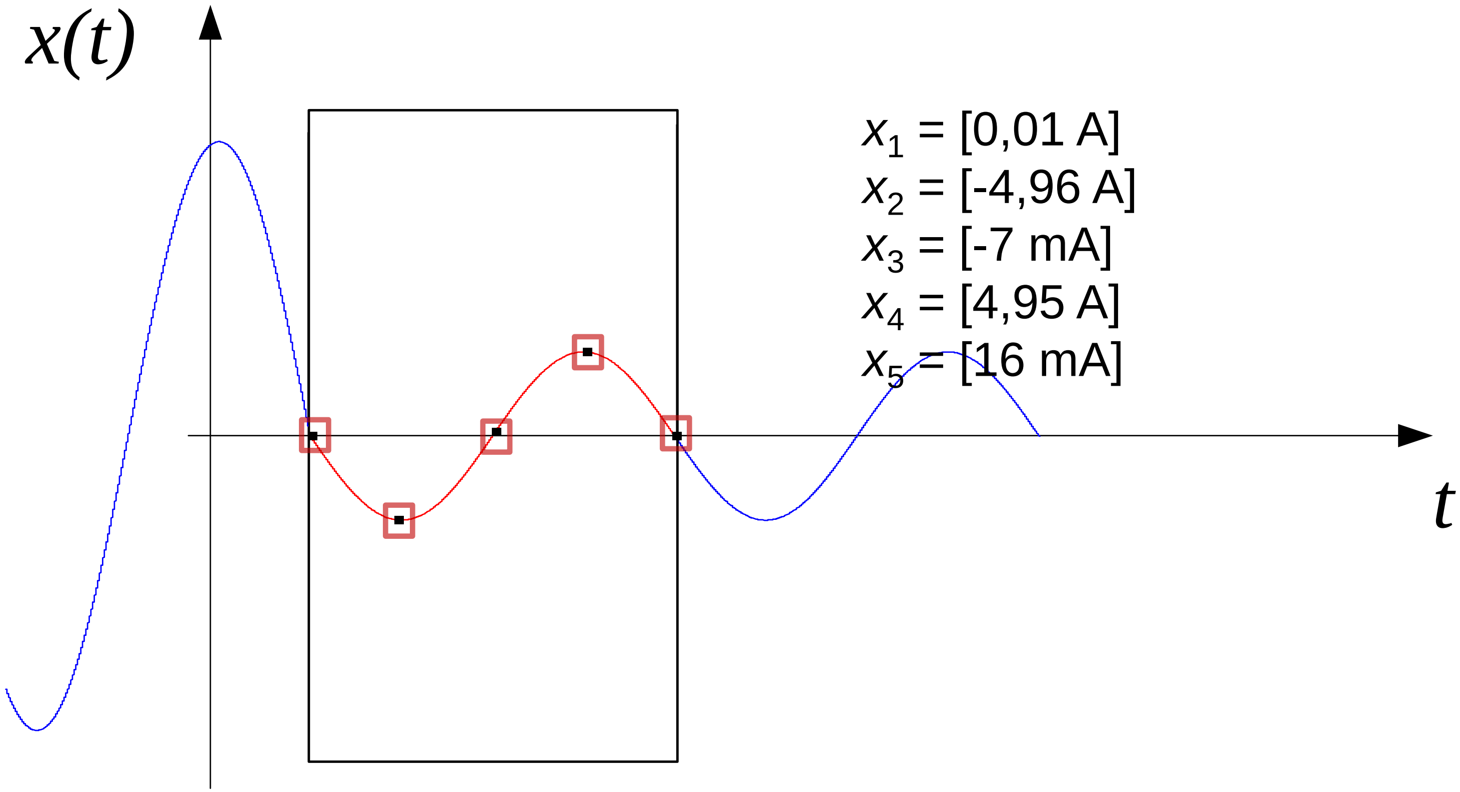


x_1 = [-7 mA]
x_2 = [4,95 A]
x_3 = [16 mA]
x_4 = [-5 A]
x_5 = [0,3 A]

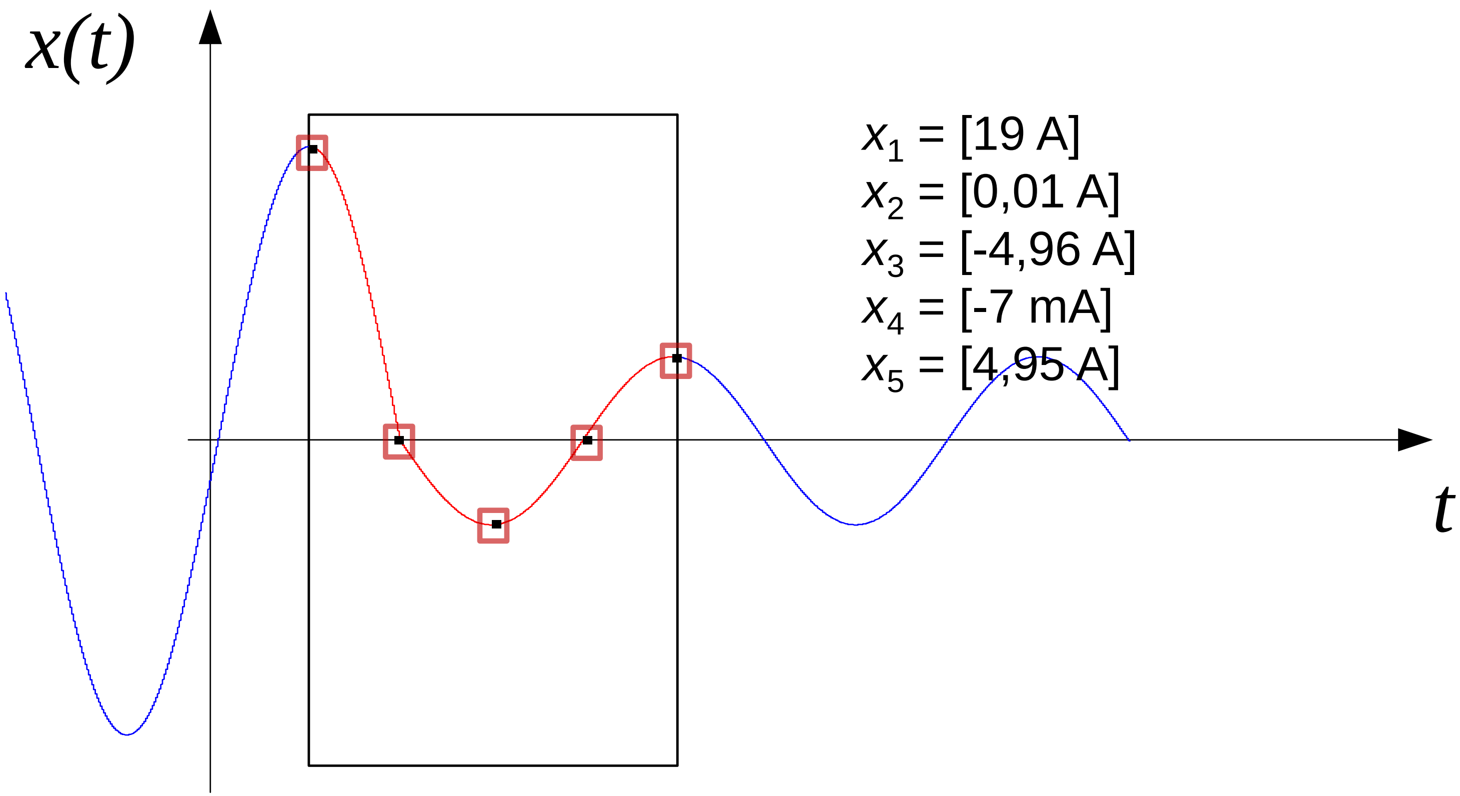
Fouriereva vrsta za diskretne funkcije



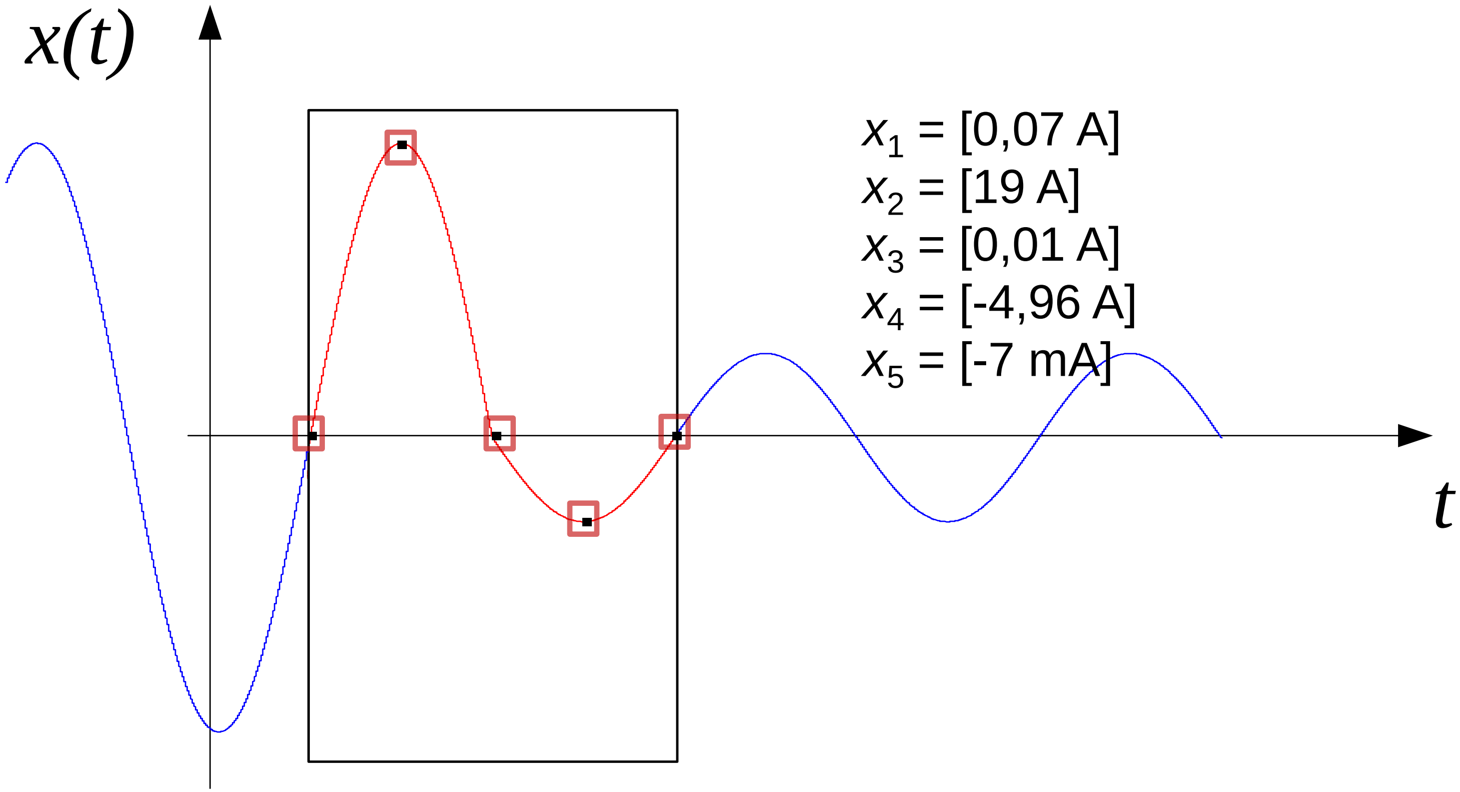
Fouriereva vrsta za diskretne funkcije



Fouriereva vrsta za diskretne funkcije

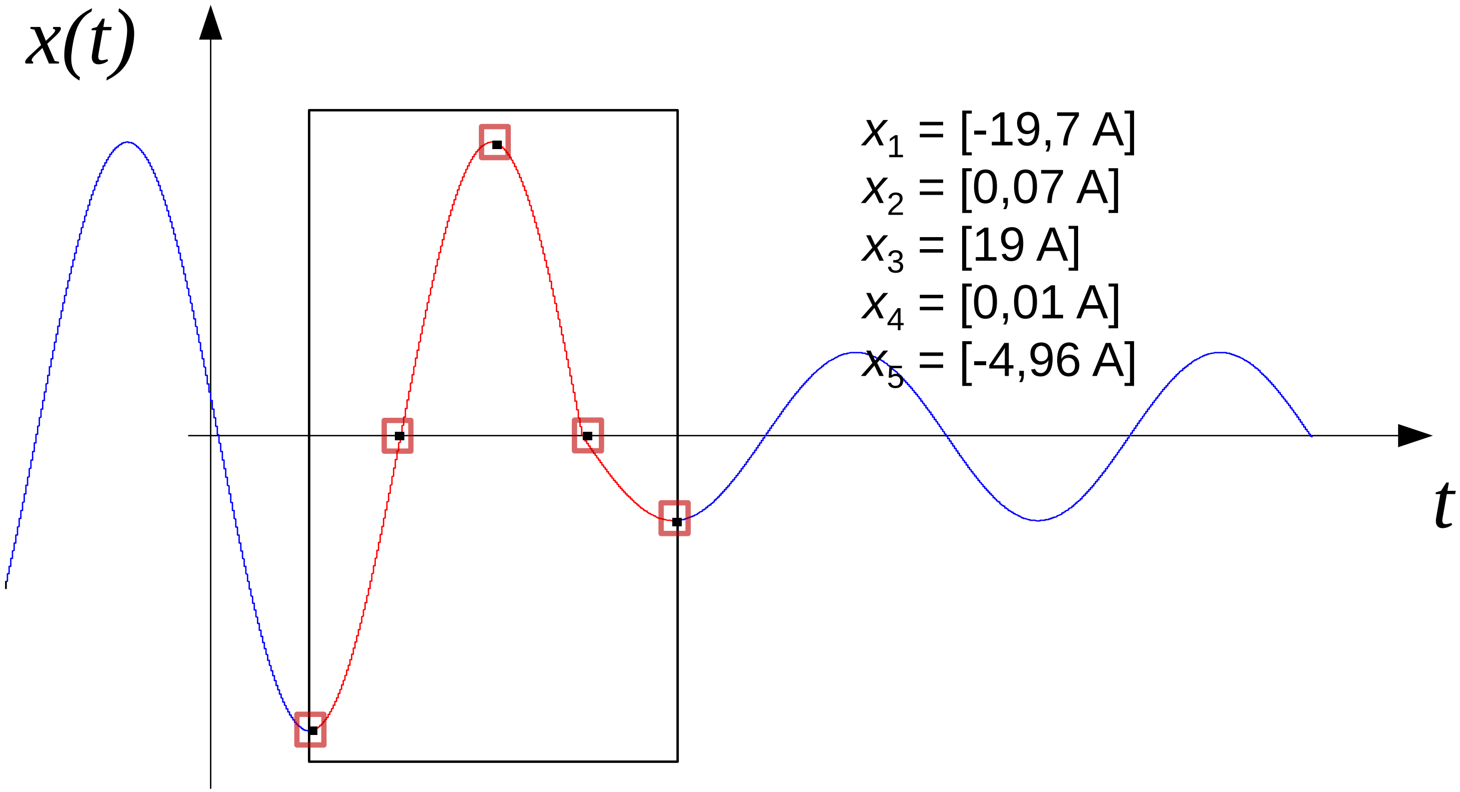


Fouriereva vrsta za diskretne funkcije

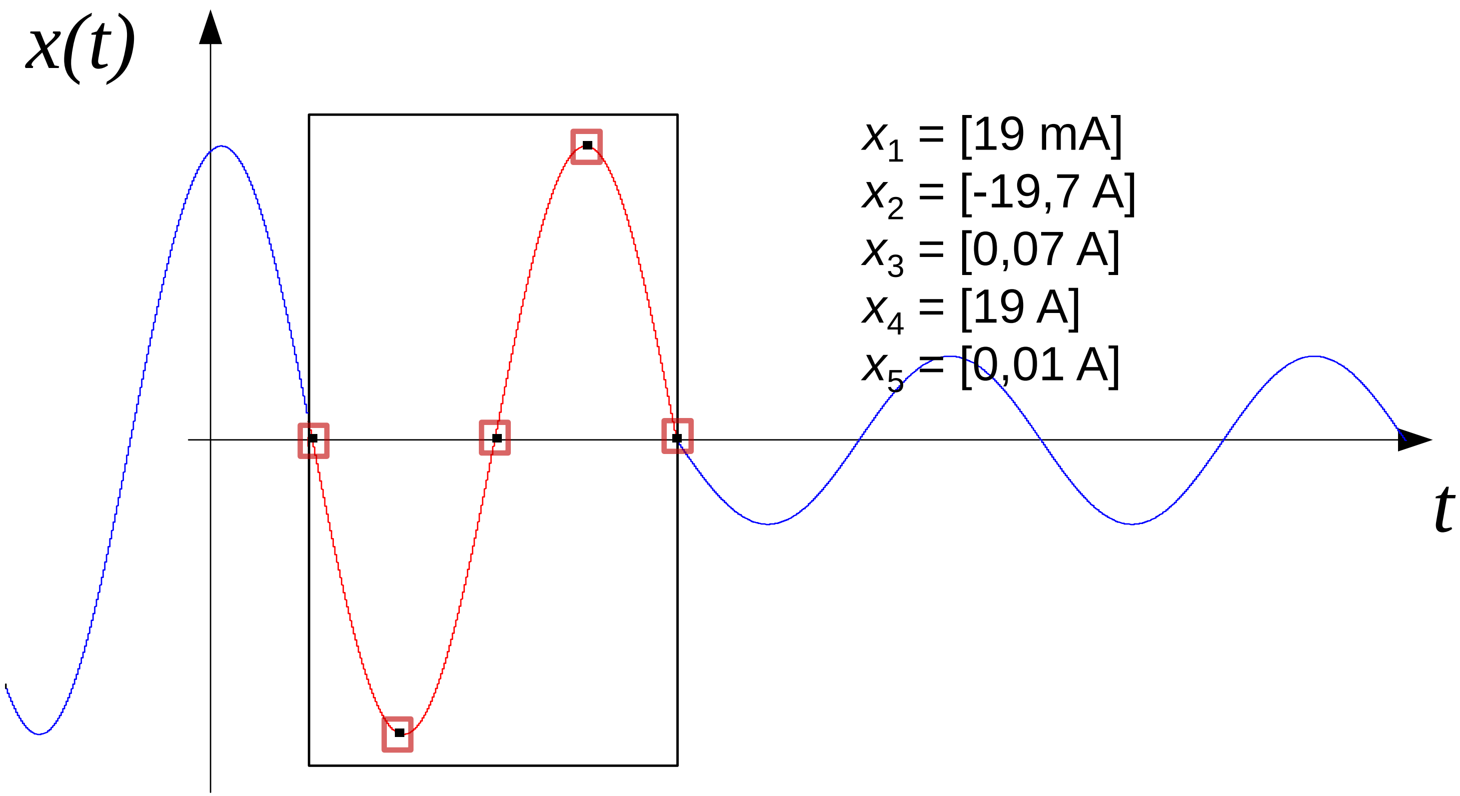


x_1 = [0,07 A]
x_2 = [19 A]
x_3 = [0,01 A]
x_4 = [-4,96 A]
x_5 = [-7 mA]

Fouriereva vrsta za diskretne funkcije



Fouriereva vrsta za diskretne funkcije

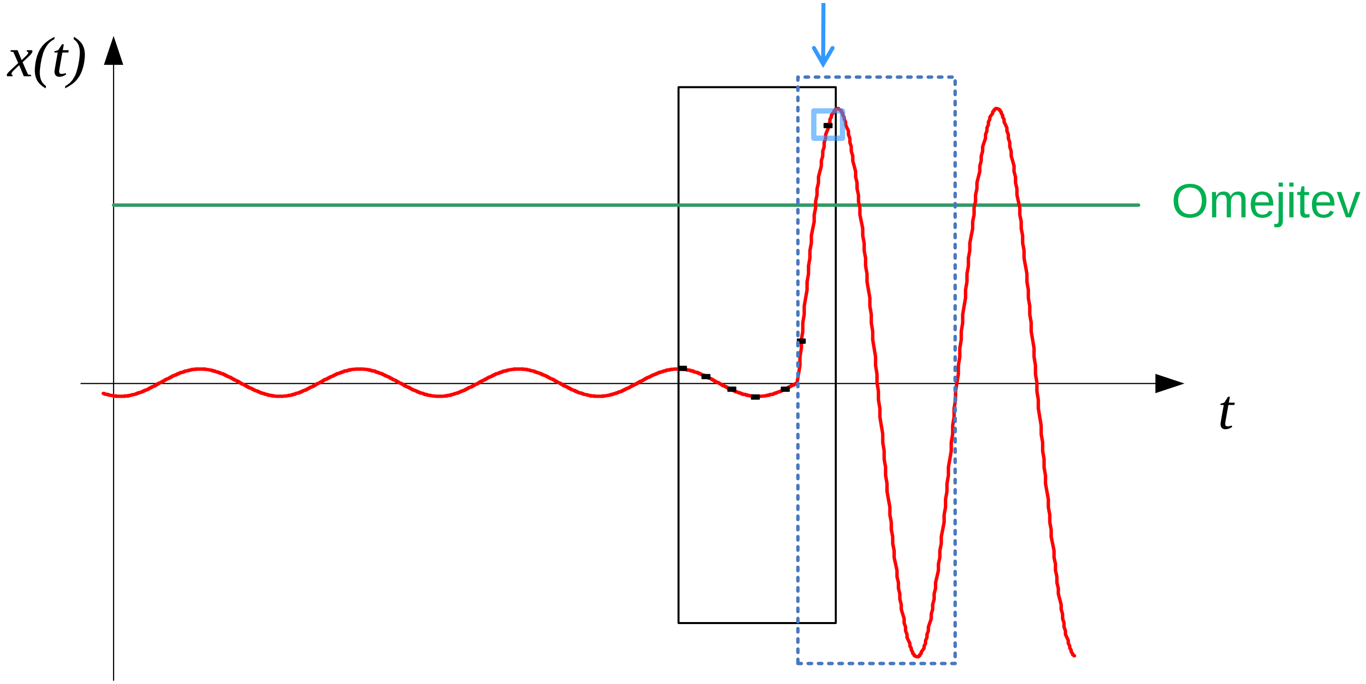


x_1 = [19 mA]
x_2 = [-19,7 A]
x_3 = [0,07 A]
x_4 = [19 A]
x_5 = [0,01 A]

Fouriereva vrsta za diskretne funkcije

- V oknu se izvaja obdelava vzorcev - zakasnitev zaznavanja sprememb → zakasnitev delovanja zaščite

Dejanska prekoračitev omejitve – v oknu zaradi ‘povprečenja’ te prekoračitve ne zaznamo v trenutku – zajeti potrebno več ‘spremenjenih’ vrednosti



Fouriereva vrsta za diskretne funkcije

- Uporaba *polovičnega okna*
  - Namen izboljšati hitrost metode za obdelavo signalov
  - Slabost je poslabšanje frekvenčne karakteristike
    - Nepravilna analiza sodih harmonskih komponent
    - Občutljivost na enosmerno komponento

$$X_{\mathrm{Re},n} = \frac{4}{N} \cdot \sum_{i=0}^{N/2-1} x_i \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot i \cdot n}{N}\right) = \frac{4}{N} \cdot \sum_{i=1}^{N/2-1} x_i \cdot W_{\mathrm{Re},1/2,n,i}$$

$$X_{\mathrm{Im},n} = \frac{4}{N} \cdot \sum_{i=0}^{N/2-1} x_i \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot i \cdot n}{N}\right) = \frac{4}{N} \cdot \sum_{i=1}^{N/2-1} x_i \cdot W_{\mathrm{Im},1/2,n,i}$$