



Preklopna vezja

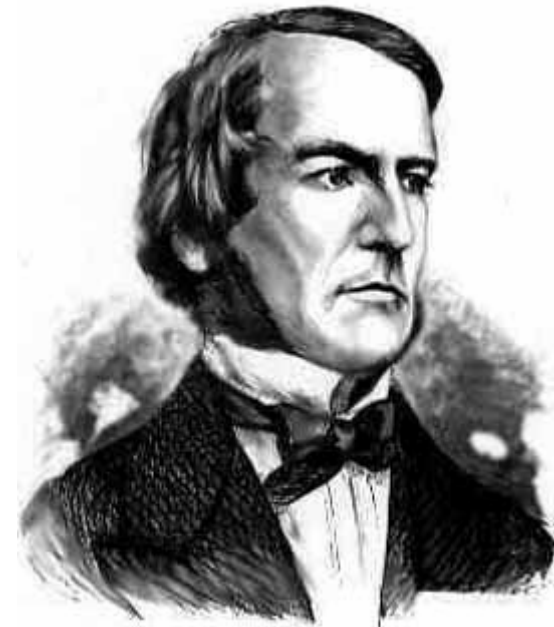
2. poglavje: Booleova algebra



Booleova algebra

Izjave in Booleove spremenljivke

- vsako izjavo obravnavamo kot **spremenljivko**
- če je izjava resnična (pravilna), ima ta spremenljivka vrednost **1**, če je neresnična (nepravilna), pa vrednost **0**
- pravimo, da gre za **Booleovo spremenljivko**



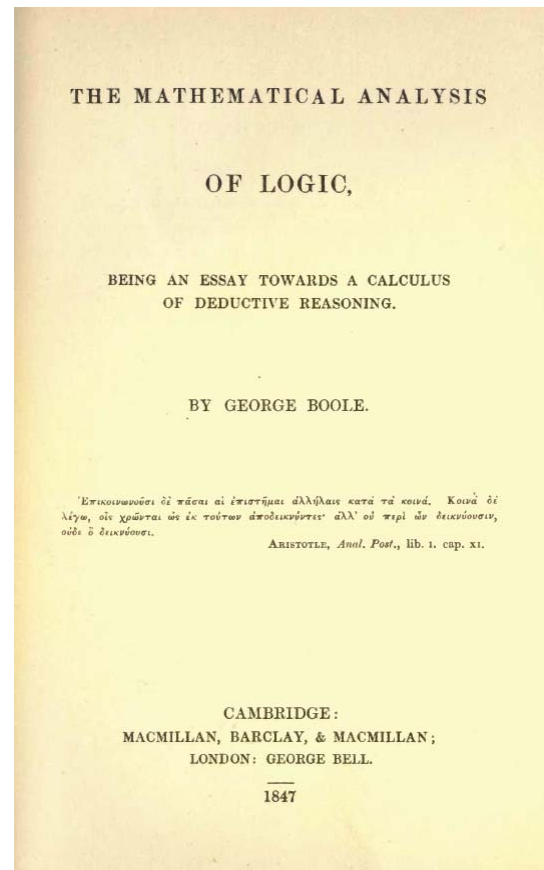
George Boole (1815-1864)



Booleova algebra

Izjave in Booleove spremenljivke

- vsako izjavo obravnavamo kot **spremenljivko**
- če je izjava resnična (pravilna), ima ta spremenljivka vrednost **1**, če je neresnična (nepravilna), pa vrednost **0**
- pravimo, da gre za **Booleovo spremenljivko**



naslovnica Booleove knjige
The Mathematical Analysis of Logic



Booleova algebra

Izjave in Booleove spremenljivke

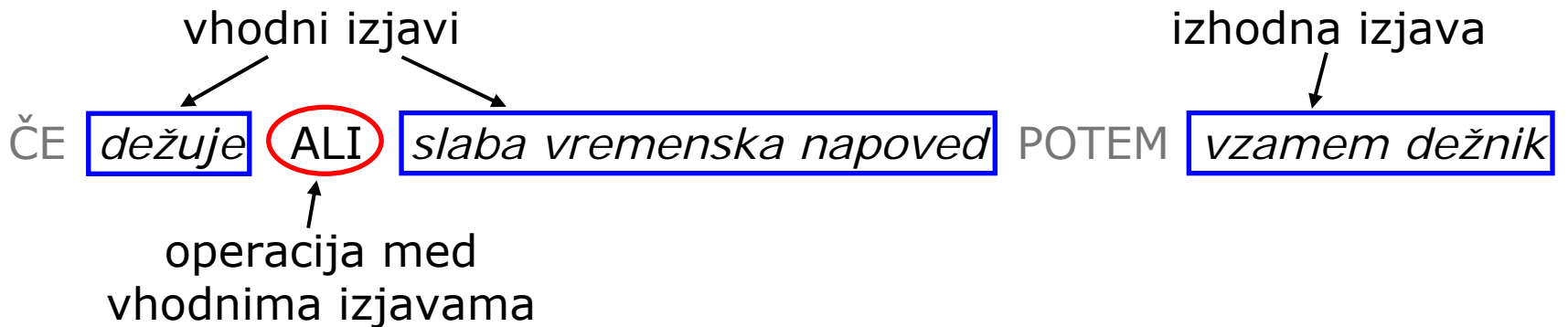
tip spremenljivke	angleško	zaloga vrednosti
kompleksna	complex	vsa kompleksna števila (\mathbb{C})
realna	real	vsa realna števila (\mathbb{R})
celoštevilska	integer	vsa cela števila (\mathbb{Z})
Booleova	Boolean	števili 0 in 1



Booleova algebra

Operacije z izjavami

- disjunkcija = logično seštevanje = ALI (angl. OR); simboli $+$, \vee , \parallel
- konjunkcija = logično množenje = IN (angl. AND); simboli \bullet , \wedge , $\&$
- negacija = logično zanikanje = NE (angl. NOT); simbola $\bar{}$, \neg



$$(dežuje) + (slaba vremenska napoved) = (vzamem dežnik)$$

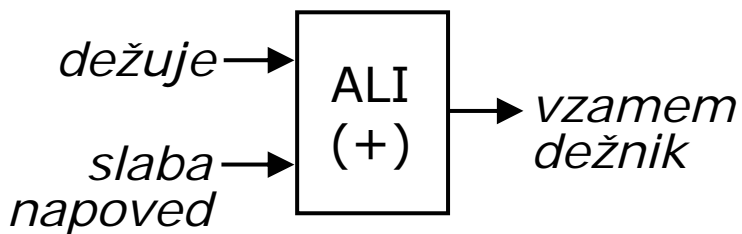


Booleova algebra

Operacije z izjavami

- disjunkcija = logično seštevanje = ALI (angl. OR); simboli $+$, \vee , \parallel
- konjunkcija = logično množenje = IN (angl. AND); simboli \bullet , \wedge , $\&$
- negacija = logično zanikanje = NE (angl. NOT); simbola $\bar{}$, \neg

(vzamem dežnik) = (dežuje) + (slaba vremenska napoved)



dežuje	slaba napoved	dežnik
NE	NE	NE
NE	DA	DA
DA	NE	DA
DA	DA	DA

pravilnostna tabela za disjunkcijo

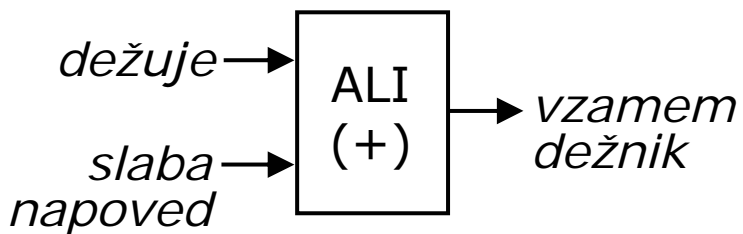


Booleova algebra

Operacije z izjavami

- disjunkcija = logično seštevanje = ALI (angl. OR); simboli $+$, \vee , \parallel
- konjunkcija = logično množenje = IN (angl. AND); simboli \bullet , \wedge , $\&$
- negacija = logično zanikanje = NE (angl. NOT); simbola $\bar{}$, \neg

(vzamem dežnik) = (dežuje) + (slaba vremenska napoved)



x	y	$x + y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

pravilnostna tabela za disjunkcijo



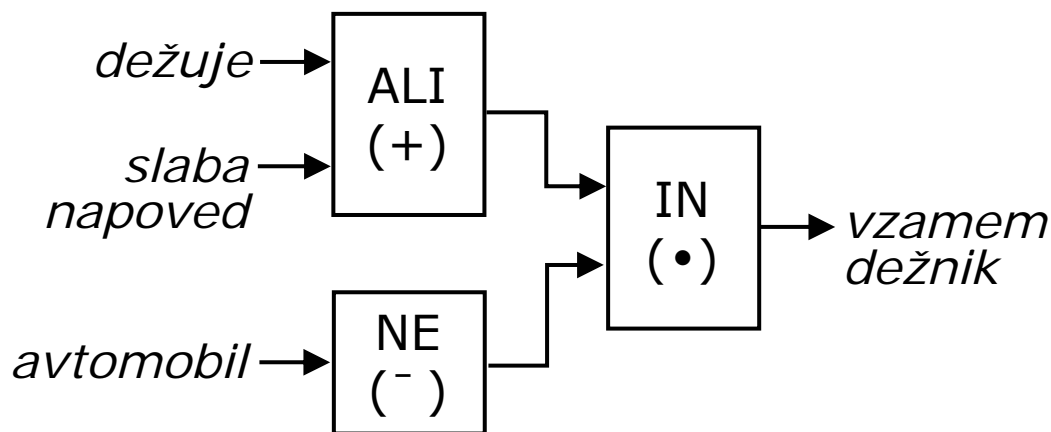
Booleova algebra

Operacije z izjavami

- disjunkcija = logično seštevanje = ALI (angl. OR); simboli $+$, \vee , \parallel
- konjunkcija = logično množenje = IN (angl. AND); simboli \bullet , \wedge , $\&$
- negacija = logično zanikanje = NE (angl. NOT); simbola $\bar{\quad}$, \neg

(vzamem dežnik) = ((dežuje) + (slaba vremenska napoved))

- *$\overline{((peljem se z avtomobilom))}$*



x	y	$x \cdot y$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

x	\bar{x}
0	1
1	0

pravilnostni tabeli za konjunkcijo in negacijo



Booleova algebra

Operacije z izjavami

- disjunkcija = logično seštevanje = ALI (angl. OR); simboli $+$, \vee , \parallel
- konjunkcija = logično množenje = IN (angl. AND); simboli \bullet , \wedge , $\&$
- negacija = logično zanikanje = NE (angl. NOT); simbola $\bar{}$, \neg

vrstni red izvajanja operacij:

- brez oklepajev: najprej negacija, nato konjunkcija, na koncu disjunkcija
- morebitne oklepaje upoštevamo enako kot v običajni aritmetiki
- negacija nad izrazom z več spremenljivkami se izvaja, kot da je izraz v oklepajih
- kot pri običajnem množenju tudi tukaj znak \bullet včasih opustimo

$$x \bullet z + \bar{y} \bullet z + \bar{x} \bullet y \bullet \bar{z}$$

$$x \bullet (z + \bar{y}) \bullet z + \bar{x} \bullet y \bullet \bar{z}$$

$$\overline{x \bullet y} = \overline{(x \bullet y)}$$

$$\overline{x + y} = \overline{(x + y)}$$

$$xy = x \bullet y$$

$$xz + \overline{(yz + \bar{x}y)}z + z\bar{x}$$



Booleova algebra

Aksiomi in teoremi

aksiomi (postulati): pravila, ki se med seboj ne izključujejo in jih privzamemo brez preverjanja

teoremi: dodatna pravila, ki jih lahko izpeljemo iz aksiomov

Huntingtonovi postulati: sistem aksiomov (eden od možnih), ki omogoča postavitvev pravil za sistem operacij $\{+, \cdot, \bar{}\}$

P1	$x+0 = x$	nevtralnost	P3	$x+y = y+x$	komutativnost
P1'	$x\cdot 1 = x$		P3'	$x\cdot y = y\cdot x$	
P2	$x+\bar{x} = 1$	komplementarnost	P4	$(x+y)+z = x+(y+z)$	asociativnost
P2'	$x\cdot\bar{x} = 0$		P4'	$(x\cdot y)\cdot z = x\cdot(y\cdot z)$	
			P5	$x\cdot(y+z) = x\cdot y+x\cdot z$	distributivnost
			P5'	$x+y\cdot z = (x+y)\cdot(x+z)$	

te lastnosti ustrezajo algebrski strukturi (kolobarju), odtod "Booleova algebra"



Booleova algebra

Vennovi diagrami

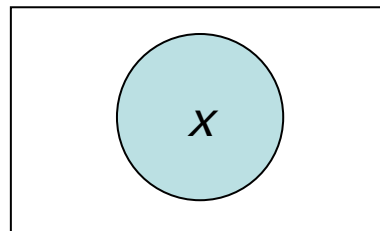
- z Vennovimi diagrami grafično ponazorimo Booleove spremenljivke in operacije med njimi kot množice
- disjunkcija med Booleovima spremenljivkama je ekvivalentna uniji množicama, konjunkcija preseku, negacija pa komplementu



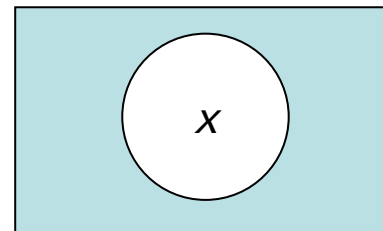
konstanta 1



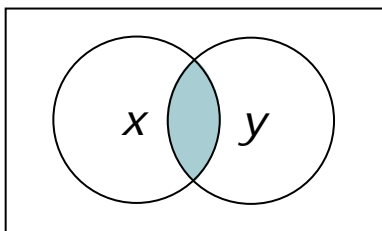
konstanta 0



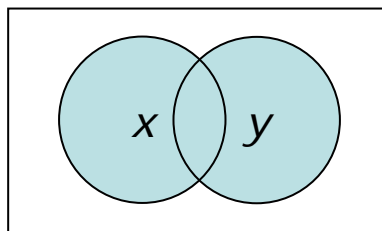
funkcija $f(x) = x$



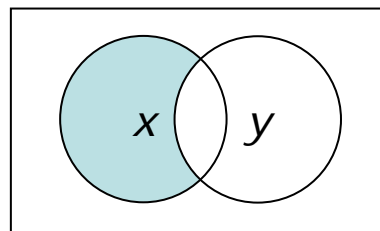
$f(x) = \bar{x}$



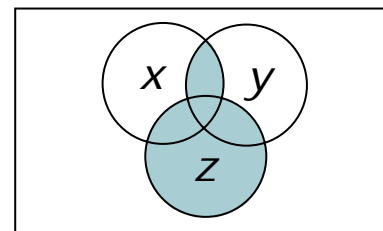
$f(x, y) = xy$



$f(x, y) = x + y$



$f(x, y) = x\bar{y}$



$f(x, y, z) = xy + z$



Booleova algebra

Trije načini dokazovanja teoremov

- iz aksiomov in že dokazanih teoremov
- s pravilnostno tabelo (popolna indukcija)
- z Vennovimi diagrami

Teorem T1: $x + 1 = 1$

Dokaz iz aksiomov:

$$\begin{aligned}x + 1 &= (x + 1) \cdot 1 && \text{(uporabili smo P1': } x \cdot 1 = x\text{)} \\ &= (x + 1) \cdot (x + \bar{x}) && \text{(P2: } x + \bar{x} = 1\text{)} \\ &= x + 1 \cdot \bar{x} && \text{(P5': } x + y \cdot z = (x + y) \cdot (x + z)\text{)} \\ &= x + \bar{x} \cdot 1 && \text{(P3': } x \cdot y = y \cdot x\text{)} \\ &= x + \bar{x} && \text{(P1': } x \cdot 1 = x\text{)} \\ &= 1 && \text{(P2: } x + \bar{x} = 1\text{)}\end{aligned}$$



Booleova algebra

Trije načini dokazovanja teoremov

- iz aksiomov in že dokazanih teoremov
- s pravilnostno tabelo (popolna indukcija)
- z Vennovimi diagrami

Teorem T1: $x + 1 = 1$

Dokaz s pravilnostno tabelo:

x	1	$x + 1$
0	1	1
1	1	1



Booleova algebra

Trije načini dokazovanja teoremov

- iz aksiomov in že dokazanih teoremov
- s pravilnostno tabelo (popolna indukcija)
- z Vennovimi diagrami

Teorem T1: $x + 1 = 1$

Dokaz z Vennovimi diagrami:





Booleova algebra

Teoremi z eno in dvema spremenljivkama

T1	$x + 1 = 1$
T2	$x + x = x$
T3	$x \cdot x = x$
T4	$x \cdot 0 = 0$
T5	$\overline{\overline{x}} = x$

T6	$x + x \cdot y = x$
T7	$x \cdot (x + y) = x$
T8	$(x + \overline{y}) \cdot y = x \cdot y$
T9	$x \cdot \overline{y} + y = x + y$
T10	$x + y + \overline{x} = 1$
T11	$\overline{x} \cdot \overline{y} \cdot x = 0$
T12	$\overline{x + y} = \overline{x} \cdot \overline{y}$
T13	$\overline{x \cdot y} = \overline{x} + \overline{y}$