Načini podajanja končnih avtomatov

Mealyjev avtomat

$\boldsymbol{X} = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\} \quad \boldsymbol{S} = \{\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \mathbf{s}_3\} \quad \boldsymbol{Z} = \{\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3\}$

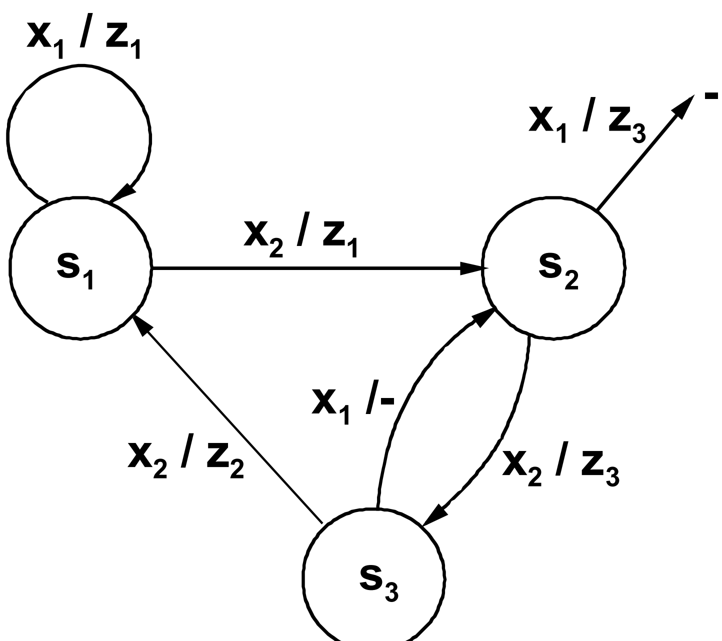
$\delta_1 = \{(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_1);(\mathbf{s}_3, \mathbf{s}_2)\}$

$\delta_2 = \{(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2);(\mathbf{s}_2, \mathbf{s}_3);(\mathbf{s}_3, \mathbf{s}_1)\}$

$\lambda_1 = \{(\mathbf{s}_1, \mathbf{z}_1);(\mathbf{s}_2, \mathbf{z}_3)\}$

$\lambda_2 = \{(\mathbf{s}_1, \mathbf{z}_1);(\mathbf{s}_2, \mathbf{z}_3);(\mathbf{s}_3, \mathbf{z}_2)\}$

A_{ME}	s_1	s_2	s_3
x_1	s_1/z_1	$-/z_3$	$s_2/-$
x_2	s_2/z_1	s_3/z_3	s_1/z_2



Mooreov končni avtomat

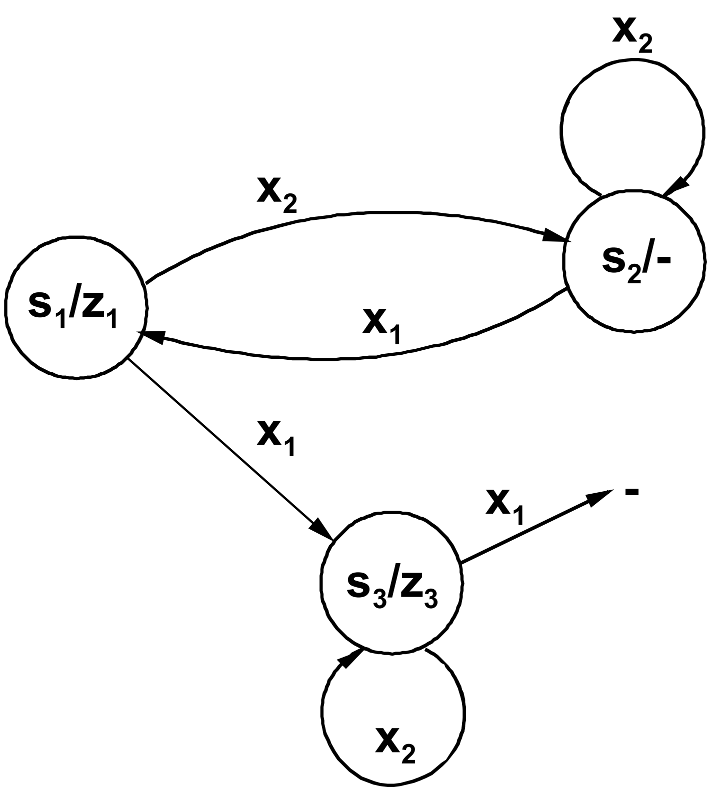
$$\boldsymbol{X} = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\} \qquad \boldsymbol{S} = \{\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \mathbf{s}_3\} \qquad \boldsymbol{Z} = \{\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3\}$$

$$\delta_1 = \{(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_3); (\mathbf{s}_2, \mathbf{s}_1)\}$$

$$\delta_2 = \{(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2); (\mathbf{s}_2, \mathbf{s}_2); (\mathbf{s}_3, \mathbf{s}_3)\}$$

$$\lambda = \{(\mathbf{s}_1, \mathbf{z}_1); (\mathbf{s}_3, \mathbf{z}_3)\}$$

A_{MO}	s_1/z_1	$s_2/-$	s_3/z_3
x_1	s_3	s_1	-
x_2	s_2	s_2	s_3



Ekvivalentnost stanj in minimizacija spomina

Stanji $\mathbf{s_i}$ in $\mathbf{s_j}$ avtomata ***P*** sta ekvivalentni samo tedaj, kadar da avtomat za vse možne vhodne sekvence enake izhodne sekvence ne glede na to katero stanje je začetno $\mathbf{s_i}$ ali $\mathbf{s_j}$.

Definicija 1: Naj bosta ***P*** in ***Q*** dva popolnoma določena avtomata, ki dobivata isto množico možnih vhodnih sekvenc poljubne dolžine.

Naj bo $\mathbf{x_1,x_2,\ldots,x_l}$ omenjena poljubno dolga sekvenca vseh možnih vrednosti vhodne množice.

Stanji $\mathbf{p} \in \boldsymbol{P}$ in $\mathbf{q} \in \boldsymbol{Q}$ sta ekvivalentni samo tedaj, kadar je za katerokoli vhodno sekvenco izpolnjen pogoj:

$$\lambda_P(\mathbf{p}, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots \mathbf{x}_l) = \lambda_Q(\mathbf{q}, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots \mathbf{x}_l)$$

$(\mathbf{p} \equiv \mathbf{q})$

P	Δ^1p	z
	x=0	x=1
p_1	p_3,1	p_2,0
p_2	p_1,0	p_2,1
p_3	$p_1$1	$p_2$0

Q	Δ^1q	z
	x=0	x=1
q_1	q_1,1	q_2,0
q_2	q_1,0	q_2,1

P	$\Delta^1 p$	**z**
	x = 0	x = 1
p_1	p_3,1	p_2,0
p_2	p_1,0	p_2,1
p_3	p_1,1	p_2,0

Q	Δ1q	**z**
	x = 0	x = 1
q_1	q_1,1	q_2,0
q_2	q_1,0	q_2,1

Avtomat ***P***: začetno stanje $\mathbf{p_1}$, vhodna sekvenca 00110

vhod: 0 0 1 1 0

stanje: $\mathbf{p_1\ p_3\ p_1\ p_2\ p_2\ p_1}$

izhod: 1 1 0 1 0

Avtomat ***Q***: začetno stanje $\mathbf{q_1}$, vhodna sekvenca 00110

vhod: 0 0 1 1 0

stanje: $\mathbf{q_1\ q_1\ q_1\ q_2\ q_2\ q_1}$

izhod: 1 1 0 1 0

Stanji $\mathbf{p_1}$ in $\mathbf{q_1}$ sta ekvivalentni

Ista vhodna sekvenca, začetni stanji pa enkrat $\mathbf{p_1}$ drugič pa $\mathbf{p_3}$

vhod: 0 0 1 1 0

stanje: $\mathbf{p_1\ p_3\ p_1\ p_2\ p_2\ p_1}$

izhod: 1 1 0 1 0

vhod: 0 0 1 1 0

stanje: $\mathbf{p_3\ p_1\ p_3\ p_2\ p_2\ p_1}$

izhod: 1 1 0 1 0

Stanji $\mathbf{p_1}$ in $\mathbf{p_3}$ sta tudi ekvivalentni.

Definicija 2: Dva digitalna avtomata ***P*** in ***Q*** sta ekvivalentna $P \equiv Q$, če obstoja za vsako stanje **p** v avtomatu ***P*** stanje **q** v avtomatu ***Q*** tako, da velja $\mathbf{p} \equiv \mathbf{q}$ in obratno, za vsako stanje **q** v avtomatu ***Q*** obstoja stanje **p** v avtomatu ***P***, tako, da je $\mathbf{q} \equiv \mathbf{p}$.

$s_1 \equiv s_1$ zakon refleksivnosti – popolnoma specificiran

$s_1 \equiv s_2,\ s_2 \equiv s_1$ zakon simetričnosti

$s_1 \equiv s_2 \quad s_2 \equiv s_3 \quad \Rightarrow \quad s_1 \equiv s_3$ zakon tranzitivnosti

Neposredna posledica gornjih zakonitosti je možnost razdelitve stanj avtomata na skupine ločljivih razredov ekvivalentnosti.

V teh skupinah razredov se v posameznem razredu nahajajo samo ekvivalentna stanja – dve ali več.

Minimizacija stanj avtomata pomeni iskanje minimalnega števila skupin ekvivalentnih stanj.

Minimiziran avtomat ***Q*** bo torej imel toliko stanj, kolikor ločljivih razredov obstoja v začetnem ***P*** avtomatu.

Nakazan postopek formalizirajmo z ustreznimi pravili, s katerimi bo mogoče testirati ekvivalentnost stanj popolnoma opredeljenega avtomata.

Teorem 1: Naj bodo stanja avtomata ***A*** razdeljena na ločljive razrede.

Z označbo $\mathbf{s}_1 \triangleq \mathbf{s}_2$ označimo, da se stanji $\mathbf{s_1}$ in $\mathbf{s_2}$ nahajata znotraj istega razreda.
Razdelitev je sestavljena iz razredov ekvivalentnosti, ki vsebujejo ekvivalentna stanja samo takrat, ko za katerikoli par stanj

$$\mathbf{s}_1 \triangleq \mathbf{s}_2$$

in pri istem vhodu $\mathbf{x_i}$ velja, da je:

1. $\lambda(\mathbf{s}_1,\mathbf{x}_i) = \lambda(\mathbf{s}_2,\mathbf{x}_i)$
2. $\delta(\mathbf{s}_1,\mathbf{x}_i) \triangleq \delta(\mathbf{s}_2,\mathbf{x}_i)$

Dokaz:

Predpostavimo, da se razdelitev sestoji iz razredov ekvivalentnosti s stanji, ki se ne razlikujejo.

V tem primeru smemo na osnovi enakosti 1 za katerokoli vhodno sekvenco:

$$\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\ldots,\mathbf{x}_l$$

in za katerikoli posamičen vhod $\mathbf{x_i}$, ki se pojavi pred njo in jo s tem razširi, pisati glede na že podano relacijo:

$$\lambda(\mathbf{s}_1,\mathbf{x}_i\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2\ldots\mathbf{x}_l) = \lambda(\mathbf{s}_2,\mathbf{x}_i\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2\ldots\mathbf{x}_l)$$

Vrednost zgornje relacije se ne bo spremenila, če ločeno opazujemo izhodno stanje, ki ustreza prvi vzbujalni črki:

$$\lambda(\mathbf{s}_1,\mathbf{x}_i)\bullet\lambda\left[\delta(\mathbf{s}_1,\mathbf{x}_i),\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2\ldots\mathbf{x}_l\right] = \lambda(\mathbf{s}_2,\mathbf{x}_i)\bullet\lambda\left[\delta(\mathbf{s}_2,\mathbf{x}_i),\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2\ldots\mathbf{x}_l\right]$$

V skladu z definicijo enakosti izhodov mora biti: $\lambda(\mathbf{s}_1,\mathbf{x}_i) = \lambda(\mathbf{s}_2,\mathbf{x}_i)$

oziroma: $\lambda\left[\delta(\mathbf{s}_1,\mathbf{x}_i),\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2\ldots\mathbf{x}_l\right] = \lambda\left[\delta(\mathbf{s}_2,\mathbf{x}_i),\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2\ldots\mathbf{x}_l\right]$ tako, da je

$$\delta(\mathbf{s}_1,\mathbf{x}_i) \equiv \delta(\mathbf{s}_2,\mathbf{x}_i)$$

In to za katerokoli vhodno sekvenco Teorem je s tem dokazan!

$$\delta(\mathbf{s}_1,\mathbf{x}_i) \triangleq \delta(\mathbf{s}_2,\mathbf{x}_i)$$

Metoda, ki je osnovana na tem se imenuje Huffman - Mealyjev algoritem, sestavljena pa je iz sledečih korakov.

1. Imamo tabelo stanj avtomata ***P.*** Na osnovi pogoja $(\mathbf{s_1},\mathbf{x_i}) = (\mathbf{s_2},\mathbf{x_i})$ delimo notranja stanja na razrede, katerih elementi imajo iste izhode.

2. Opazujemo polje naslednjih stanj avtomata. Na osnovi identičnosti naslednjih stanj določimo ekvivalentnost.

3. Reduciramo tabelo stanj s tem, da množico ekvivalentnih stanj zamenjamo z enim elementom te množice.

4. Zgrajujemo razdvojene množice ekvivalentnih stanj s pomočjo relacije.

$$\lambda(\mathbf{s}_1,\mathbf{x}_i) = \lambda(\mathbf{s}_2,\mathbf{x}_i)$$

5. Nadaljujemo z izgradnjo razdvojenih množic s testom naslednjih stanj po relaciji:

$$\delta(\mathbf{s}_1,\mathbf{x}_i) \triangleq \delta(\mathbf{s}_2,\mathbf{x}_i)$$

6. Če je potrebno ponavljamo korake 4. in 5. Če ni, ima tabela stanj avtomata ***Q*** toliko vrstic, kolikor je ločljivih razredov.

Minimizacijo spomina pa lahko naredimo tudi neposredno s pomočjo korakov 4. in 5., to je brez predhodne minimizacije preko identičnih stanj.

Prikaz neposredne minimizacije

P	$\Delta^1 p$	z
	x = 0	x = 1
p_1	p_1,1	p_4,0
p_2	p_1,0	p_5,0
p_3	p_2,0	p_6,0
p_4	p_2,0	p_6,0
p_5	p_3,0	p_7,1
p_6	p_3,0	p_7,1
p_7	p_4,0	p_8,1
p_8	p_4,0	p_8,1

$$\pi_0 = (p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6, p_7, p_8)$$

$$\pi_1 = (p_1)(p_2, p_3, p_4)(p_5, p_6, p_7, p_8)$$

$$\pi_2 = (p_1)(p_2)(p_3, p_4)(p_5, p_6, p_7, p_8)$$

Q	$\Delta^1 p$	z
	x = 0	x = 1
$(p_1) \rightarrow q_1$	q_1,1	q_3,0
$(p_2) \rightarrow q_2$	q_1,0	q_4,0
$(p_3,p_4) \rightarrow q_3$	q_2,0	q_4,0
$(p_5,p_6,p_7,p_8) \rightarrow q_4$	q_3,0	q_4,1

Pretvarjanje avtomatov

Pretvorba Mealyjevega avtomata v Mooreovega

$(\mathbf{s}_i\ ,\ \mathbf{x}_j)$ - naslednje stanje Mealyjevega avtomata

$\mathbf{x}_r$ - vhodna črka za naslednje stanje v Mooreovem avtomatu

$$\delta_{MO}((\mathbf{s}_{iMO},\mathbf{x}_j),\mathbf{x}_r) = (\delta_{ME}(\mathbf{s}_{iME},\mathbf{x}_j),\mathbf{x}_r); \quad \mathbf{s}_i \neq \mathbf{s}_0$$

$$\delta_{MO}(\mathbf{s}_{0MO},\mathbf{x}_r) = (\mathbf{s}_{0ME},\mathbf{x}_r) = \mathbf{s}_{0rMO}; \quad \mathbf{s}_{0MO} = \mathbf{s}_{0ME}$$

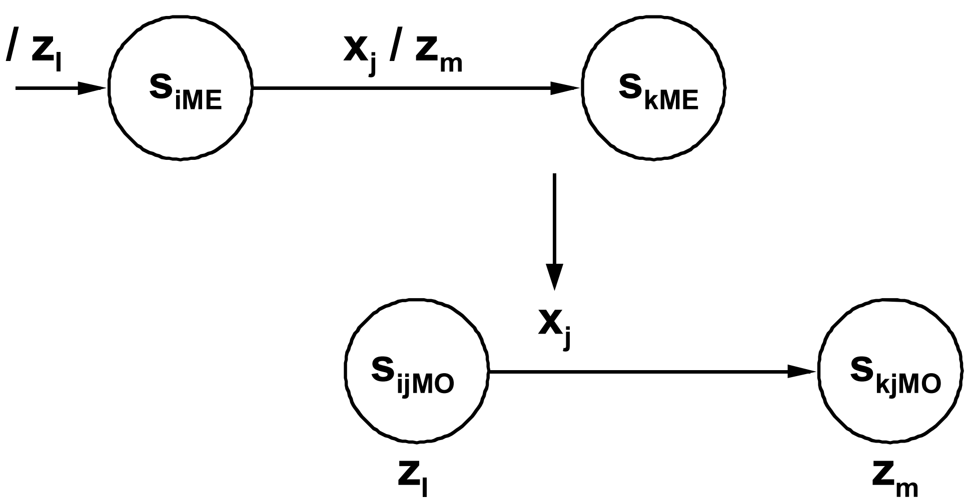
$$\lambda_{MO}(\mathbf{s}_{ij}) = \lambda_{ME}(\mathbf{s}_i,x_j); \quad \mathbf{s}_{ij} \neq \mathbf{s}_0$$

Stanju $\delta_{ME}(\mathbf{s}_{iME}\ ,\mathbf{x}_j)$ ustreza stanje $\mathbf{s}_{ijMO}$.

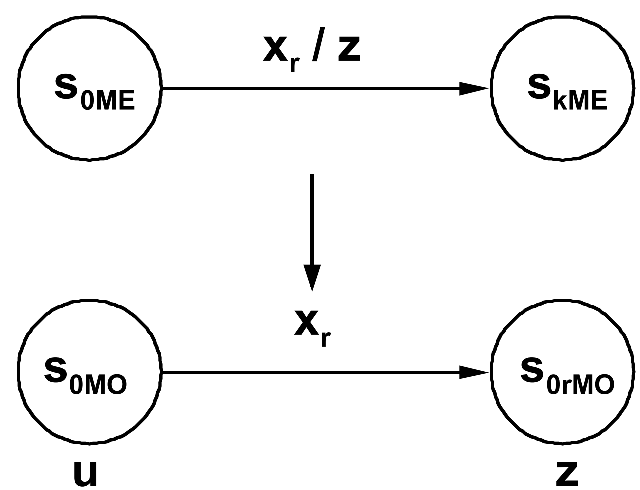
$$\lambda_{MO}(\mathbf{s}_0) = \mathbf{u}; \quad \mathbf{s}_{0MO} = \mathbf{s}_{0ME}$$

Stanje $\mathbf{s}_{krMO}$ iščemo v Mealy-jevem avtomatu v stolpcu $\mathbf{s}_{kME}$, če je le $\delta_{ME}(\mathbf{s}_{iME}\ ,\mathbf{x}_j) = \mathbf{s}_{kME}$

Če je $\mathbf{x}_r = \mathbf{x}_j$ nastopa preslikava detajlov, ki jo vidimo na naslednji sliki:



Začetno stanje pa je naslednje:



Zgled:

A_{ME}	s_1	s_2	s_3	s_4
x_1	s_2/z_2	$s_3/-$	s_2/z_1	$-/-$
x_2	s_4/z_1	$-/-$	$s_1/-$	$-/-$

$(s_{1ME}, x_1) \Rightarrow s_{11MO}$ $\quad$ $(s_{3ME}, x_1) \Rightarrow s_{31MO}$

$(s_{1ME}, x_2) \Rightarrow s_{12MO}$ $\quad$ $(s_{3ME}, x_2) \Rightarrow s_{32MO}$

$(s_{2ME}, x_1) \Rightarrow s_{21MO}$ $\quad$ $(s_{4ME}, x_1) \Rightarrow s_{41MO}$

$(s_{2ME}, x_2) \Rightarrow s_{22MO}$ $\quad$ $(s_{4ME}, x_2) \Rightarrow s_{42MO}$

$(s_{1ME}, x_1)\rightarrow s_{2ME} : (s_{11MO}, x_1)\rightarrow s_{21MO}\ ,\ (s_{11MO}, x_2)\rightarrow s_{22MO}$ ➩1

$(s_{1ME}, x_2)\rightarrow s_{4ME} : (s_{12MO}, x_1)\rightarrow s_{41MO}\ ,\ (s_{12MO}, x_2)\rightarrow s_{42MO}$ ➩2

$(s_{2ME}, x_1)\rightarrow s_{3ME} : (s_{21MO}, x_1)\rightarrow s_{31MO}\ ,\ (s_{21MO}, x_2)\rightarrow s_{32MO}$ ➩3

$(s_{2ME}, x_2)\rightarrow - : (s_{22MO}, x_1)\rightarrow -\ ,\ (s_{22MO}, x_2)\rightarrow -$ ➩4

$(s_{3ME}, x_1)\rightarrow s_{2ME} : (s_{31MO}, x_1)\rightarrow s_{21MO}\ ,\ (s_{31MO}, x_2)\rightarrow s_{22MO}$ ➩5

$(s_{3ME}, x_2)\rightarrow s_{1ME} : (s_{32MO}, x_1)\rightarrow s_{11MO}\ ,\ (s_{32MO}, x_2)\rightarrow s_{12MO}$ ➩6

$(s_{4ME}, x_1)\rightarrow - : (s_{41MO}, x_1)\rightarrow -\ ,\ (s_{41MO}, x_2)\rightarrow -$ ➩7

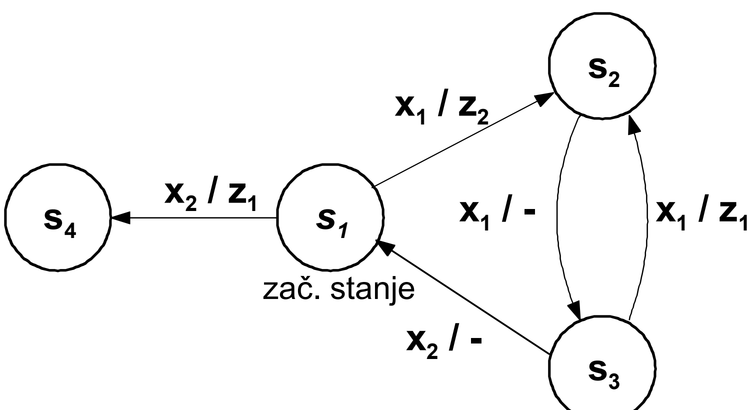
$(s_{4ME}, x_2)\rightarrow s_{2ME} : (s_{42MO}, x_1)\rightarrow -\ ,\ (s_{42MO}, x_2)\rightarrow s_{22MO}$ ➩8

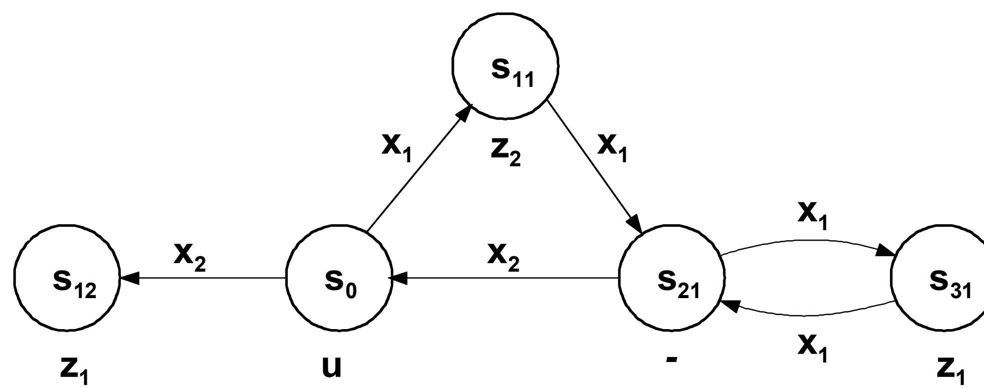
$(s_{0MO}, x_1)\rightarrow s_{11MO}\ ,\ (s_{0MO}, x_2)\rightarrow s_{12MO}$ ➩0

A_{MO}	u	z_2	z_1	-	-	z_1	-	-	-
	s_{0MO}	s_{11}	s_{12}	s_{21}	s_{22}	s_{31}	s_{32}	s_{41}	s_{42}
x_1	s_{11}	s_{21}	s_{41}	s_{31}	-	s_{21}	s_{11}	-	-
x_2	s_{12}	s_{22}	s_{42}	s_{32}	-	s_{22}	s_{12}	-	-

$s_{22} = s_{41} = s_{42} = -$ $\qquad$ $s_0 = s_{32}$

A_{MO}	-	z_2	z_1	-	z_1
	s_{0MO}	s_{11}	s_{12}	s_{21}	s_{31}
x_1	s_{11}	s_{21}	-	s_{31}	s_{21}
x_2	s_{12}	-	-	s_0	-





Pretvorba Mooreovega končnega avtomata v Mealyjevega

$$\delta_{ME}(\mathbf{s}_{ME},\mathbf{x}) = \delta_{MO}(\mathbf{s}_{MO},\mathbf{x}); \qquad \mathbf{s}_{ME} = \mathbf{s}_{MO}$$

$$\lambda_{ME}(\mathbf{s}_{ME},\mathbf{x}) = \lambda_{MO}(\delta_{MO}(\mathbf{s}_{MO},\mathbf{x}))$$

A_{MO}	s_0/u	s_1/z_2	s_2/z_1	$s_3/-$	s_4/z_1
x_1	s_1	s_3	-	s_4	s_3
x_2	s_2	-	-	s_0	-

A_{ME}	s_0	s_1	s_2	s_3	s_4
x_1	s_1/z_2	$s_3/-$	-/-	s_4/z_1	$s_3/-$
x_2	s_2/z_1	-/-	-/-	$s_0/-$	-/-

A_{ME}	s_0	s_1	s_2	s_3	s_4
x_1	s_1/z_2	$s_3/-$	-/-	s_4/z_1	$s_3/-$
x_2	s_2/z_1	-/-	-/-	$s_0/$ -	-/-

A_{ME}	s_0	s_1	s_2	s_3
x_1	s_1/z_2	$s_3/-$	-/-	s_4/z_1
x_2	s_2/z_1	-/-	-/-	$s_0/-$