4. LASTNOSTI POSEBNIH PREKLOPNIH FUNKCIJ IN NJIHOVA REALIZACIJA

4.1 Simetrične preklopne funkcije

Definicija:

$f\,(x_1, x_2, \ldots\, x_i, \ldots, x_j, \ldots, x_n)$

je simetrična glede na spremenljivki x_i in x_j če velja:

$f\,(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots, x_n) = f\,(x_1, x_2, \ldots, x_j, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$

$f\,(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots, x_n) = f\,(x_1, x_2, \ldots, \overline{x}_j, \ldots, \overline{x}_i, \ldots, x_n)$

$x_i \sim x_j$

$x_i \sim \overline{x}_j$

<u>Zgled:</u> $f = \overline{x}_2 + \overline{x}_1\overline{x}_3 + x_1x_3$ $\quad x_1 \sim x_3$

	x_1	x_1		
x_2		1		1
	1	1	1	1
		x_3	x_3	

$= f(x_1,x_2,x_3) =$

	x_3	x_3		
x_2		1		1
	1	1	1	1
		x_1	x_1	

$= f(x_3,x_2,x_1)$

$\overline{x}_2 + \overline{x}_1\,\overline{x}_3 + x_1x_3 \quad = \quad \overline{x}_2 + \overline{x}_3\,\overline{x}_1 + x_3x_1$

Ne velja pa to za x_1 in x_2.

$x_1 \not\sim x_2$; Ta zamenjava da namreč funkcijo: $f' = \overline{x}_1 + \overline{x}_2\overline{x}_3 + x_2x_3$

x_2

	1	1	1
1		1	1

x_1; x_3; $= f(x_2,x_1,x_3)$

x_1

	1	1	1
1		1	1

x_2; x_3; $= f'(x_1,x_2,x_3)$

Globalno simetrične preklopne funkcije

Definicija:

$f\,(x_1, x_2,..., x_n)$ je globalno simetrična, če velja za katerikoli par spremenljivk:

x_i, x_j $\quad x_i \sim x_j$ $\quad$ ali $x_i \sim \overline{x}_j$

<u>Izrek 1:</u>

Če za neko poljubno funkcijo $f\,(x_1, x_2,..., x_n)$ velja:

$x_i \sim x_j$ in $x_j \sim x_k$; potem je tudi

$x_i \sim x_k$; velja torej zakon tranzitivnosti.

Izrek 2:

f $(x_1, x_2, .., x_n)$ je globalno simetrična, če in samo če obstaja množica pozitivnih realnih števil:

$\{a_1, a_2, ..., a_p\}$ z vrednostmi: $0 \leq a_i \leq n$

tako, da je pri "i" vhodnih spremenljivkah z vrednostjo 1, vrednost funkcije le v tem primeru enaka 1.

$$f(x_1, x_2, x_3, ..., x_n) = S_{a_1, a_2, ..., a_p}(x_1, x_2, x_3, ..., x_n)$$

$x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ imenujemo simetrijski nabor neodvisnih spremenljivk

Izrek 3:

a)

$$S_{a_1, a_2, ..., a_p}(x_1, x_2, x_3, ..., x_n) + S_{b_1, b_2, ..., b_q}(x_1, x_2, x_3, ..., x_n) =$$

$$= S_{c_1, c_2, ..., c_k}(x_1, x_2, x_3, ..., x_n);$$ kjer je:

$$\{c_1, c_2, ..., c_k\} = \{a_1, a_2, ..., a_p\} \bigcup \{b_1, b_2, ..., b_q\}$$

b)

$$S_{a_1, a_2, ..., a_p}(x_1, x_2, x_3, ..., x_n) \bullet S_{b_1, b_2, ..., b_q}(x_1, x_2, x_3, ..., x_n) =$$

$$= S_{c_1, c_2, ..., c_k}(x_1, x_2, x_3, ..., x_n);$$ kjer je:

$$\{c_1, c_2, ..., c_k\} = \{a_1, a_2, ..., a_p\} \bigcap \{b_1, b_2, ..., b_q\}$$

c)

$$\overline{S}_{a_1,a_2,\dots,a_p}(x_1,x_2,x_3,\dots,x_n) = S_{b_1,b_2,\dots,b_q}(x_1,x_2,x_3,\dots,x_n)$$

kjer je:

$$\{b_1,b_2,\dots,b_k\} = \{0,1,\dots,n\} - \{a_1,a_2 \dots a_p\}$$

d)

$$S_{a_1,a_2,\dots,a_p}(x_1,x_2,x_3,\dots,x_n) = S_{b_1,b_2,\dots,b_q}(\overline{x}_1,\overline{x}_2,\overline{x}_3,\dots,\overline{x}_n)$$

kjer je:

$b_i = n - a_i$; i=1,2,...,p

<u>Izrek 4:</u>

Če ima f (x_1, x_2,.., x_n) pri $\mathbf{p_i}$ – kratnih vrednostih $\mathbf{x_i}$=1 funkcijsko vrednost 1 in pri $\mathbf{q_j}$ – kratnih vrednostih $\mathbf{x_j}$=0 funkcijska vrednost 1, potem je globalno simetrična če in samo če velja za vse i in j:

$p_i = p_j$ in $q_i = q_j$

oziroma

$p_i = q_j$ in $p_j = q_i$

kar pomeni: $x_i \sim x_j$; $x_i \sim \overline{x}_j$

Izrek 5:

$f(x_1,x_2,...x_n)$ je globalno simetrična za nabor $(x_1^{w1},x_2^{w2},...,x_n^{wn})$

če in samo če sta obe naslednji funkciji:

$g_0\ (x_2, x_3,.., x_n) = f\ (0, x_2, x_3,.., x_n)$

$g_1\ (x_2, x_3,.., x_n) = f\ (1, x_2, x_3,.., x_n)$

simetrični in imata v simetričnem naboru komplementirane iste spremenljivke

To pomeni:

$g_1 = a_1, a_2,.., a_p\ (x_2, x_3,.., x_n)$

$g_0 = b_1, b_2,.., b_p\ (x_2, x_3,.., x_n)$

kjer je:

$b_i = a_i + 1$ za vse “i” ali pa $b_i=a_i - 1$ za vse “i”

Izrek 6:

V $f\ (x_1, x_2,.., x_n)$ sta:

a.) spremenljivki x_1 in x_2 zamenljivi $(x_1 \sim x_2)$ če in samo če je:

$f\ (0, 1, x_3,.., x_n) = f\ (1, 0, x_3,.., x_n)$

b.) spremenljivki x_1 in $\overline{x}_2$ pa sta zamenljivi $(x_1 \sim \overline{x}_2)$ če in samo če je:

$f\ (0, 0, x_3,.., x_n) = f\ (1, 1, x_3,.., x_n)$

Izrek 7:

V $f(x_1, x_2,.., x_n)$ sta $x_i \sim x_j$ pri vseh i in j

$1 \leq i, j \leq n$ če in samo če sta izpolnjena naslednja dva pogoja:

1.) $f(x_1, x_2,..., x_{n-1}, x_n) = f(x_1, x_2,..., x_n, x_{n-1})$

2.) $f(x_1, x_2,..., x_{n-1}, x_n) = f(x_2, x_3,..., x_{n-1}, x_1, x_n)$

Dokaz.

Potrebnost: če 1.) ni izpolnjen potem x_{n-1} ni zamenljiv z x_n,

Zadostnost:

Naj bosta P_1 (f) in P_2 (f) funkciji, ki jih dobimo s permutacijami spremenljivk po točkah 1 in 2 izreka 7.

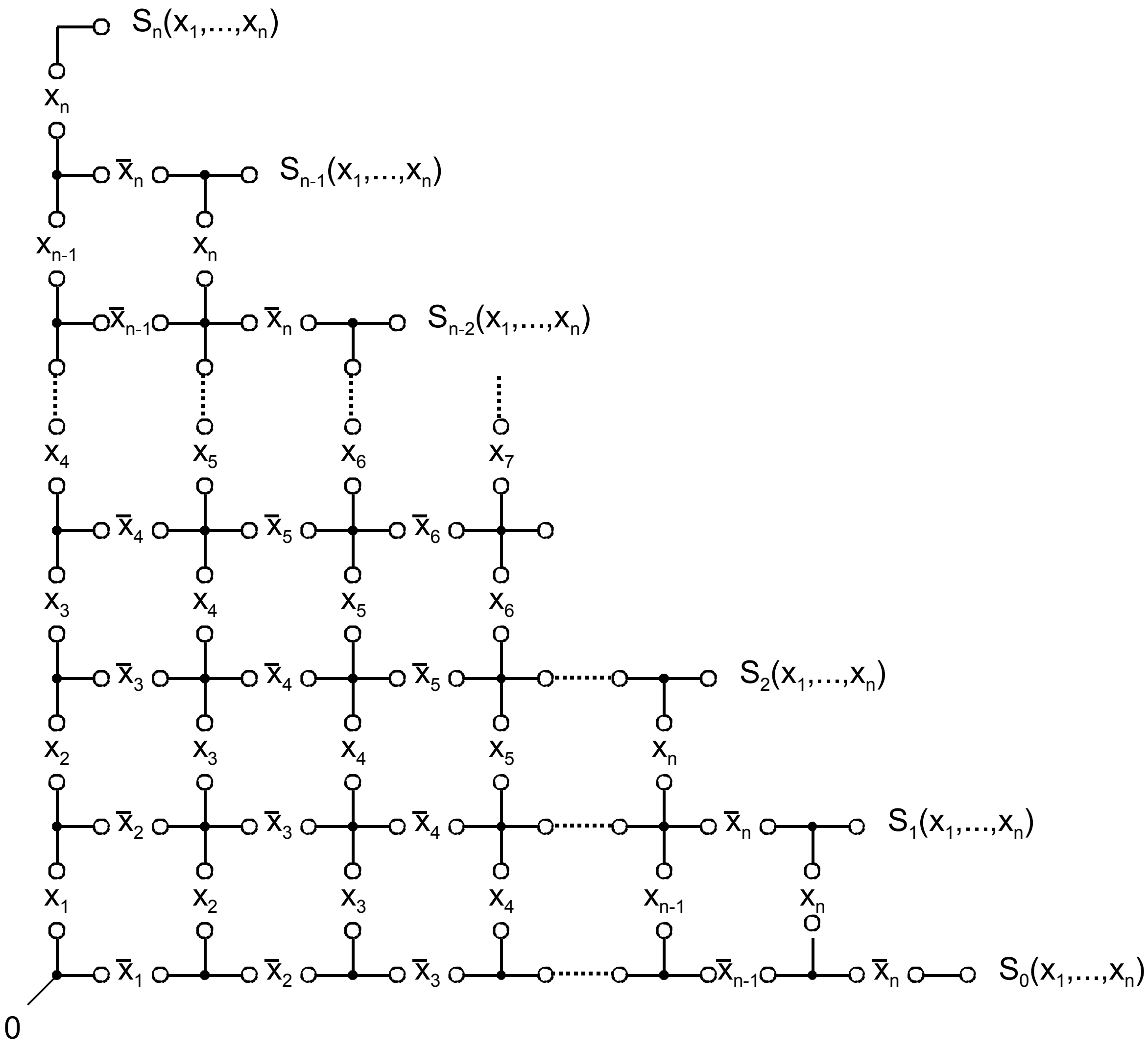
Ker je $P_1(f) = f$ in $P_2(f) = f$, lahko te permutacije ponavljamo s poljubno sekvenco iz P_1 ali P_2, ne da bi pri tem spremenili funkcijo

To pomeni, da lahko katerikoli par x_i in x_j medsebojno zamenjamo, če uporabimo ustrezno sekvenco permutacij v P_1 in P_2.

$f(x_1, x_2,..., x_i,.., x_j,..., x_n) = f(x_1, x_2,.., x_j,..., x_i,..., x_n)$

$x_i \sim x_j$ za vse i, j: $1 \leq i, j \leq n$

Realizacija simetričnih funkcij



4. 2 Monotone preklopne funkcije

Naj bosta $\mathbf{w_i}$ in $\mathbf{w_j}$ točki poliedra, ki ga določajo spremenljivke:

$x_1, x_2,.., x_n$

$f\ (x_1, x_2,.., x_n)$ pa funkcija teh spremenljivk

$f\ (\mathbf{w_i}) \geq f\ (\mathbf{w_j})$ iz česar sledita dve možnosti:

$f\ (\mathbf{w_i}) = f\ (\mathbf{w_j})$ oziroma

$f\ (\mathbf{w_i}) = 1$ in $f\ (\mathbf{w_j}) = 0$

Definirajmo:

Funkcija f je naraščajoča (*pozitivno monotona*) glede na spremenljivko x_i, če za 2^{n-1} možnih kombinacij preostalih n -1 spremenljivk velja:

$$f\ (x_1, x_2,.., x_{i-1}, 1, x_{i+1},.., x_n) \geq f\ (x_1, x_2,.., x_{i-1}, 0, x_{i+1},.., x_n)$$

in padajoča (*negativno monotona*) glede na spremenljivko x_i, če velja:

$$f\ (x_1, x_2,.., x_{i-1},0, x_{i+1},.., x_n) \geq f\ (x_1, x_2,.., x_{i-1}, 1, x_{i+1},..., x_n)$$

<u>Izrek 8</u>

Popolnoma določena preklopna funkcija: $f\ (x_1, x_2,.., x_n)$ je naraščajoča (*pozitivno monotona*) glede na spremenljivko x_i če in samo če minimalna vsota produktov funkcije ne vsebuje komplementarne spremenljivke $\overline{x}_i$.

Podobno je f $(x_1, x_2,.., x_n)$ padajoča (*negativno monotona*) glede na spremenljivko x_i če in samo če minimalna vsota produktov ne vsebuje spremenljivke x_i.

Definirajmo:

Funkcija f je popolnoma monotona, če je za vsak x_i; i = 1, 2,.., n ali naraščajoča ali pa padajoča glede na spremenljivko x_i in to velja tudi za kombinacije dveh, ter vseh nadaljnjih, vse do n-1 spremenljivk

Naj bo: $\mathbf{w_i} = (x_1^{wi1}, x_2^{wi2}, ..., x_n^{win})$

in

$\mathbf{w_j} = (x_1^{wj1}, x_2^{wj2}, ..., x_n^{wjn})$

Potem bo:

$\mathbf{w_i} \geq \mathbf{w_j}$, če bo $x_k^{wik} \geq x_k^{wjk}$

za vse k; $1 \leq k \leq n$

Za naraščajočo funkcijo f $(x_1, x_2,.., x_n)$ bo zato veljalo:

$f(\mathbf{w_i}) \geq f(\mathbf{w_j})$, če je $\mathbf{w_i} \geq \mathbf{w_j}$

in za padajočo:

$f(\mathbf{w_i}) \leq f(\mathbf{w_j})$, če je $\mathbf{w_i} \geq \mathbf{w_j}$

PREKLOPNA VEZJA Poglavje 4

Za popolnoma določene preklopne funkcije velja naslednji teorem:

Popolnoma določena preklopna funkcija: $f(x_1, x_2,.., x_n)$ je monotona če in samo če katerakoli minimalna vsota produktov vsebuje samo originalno ali pa samo komplementirano spremenljivko, ne pa obeh hkrati in to velja za vse spremenljivke x_i, $i = 1, 2,.., n$.

Tako je na primer funkcija $f_1 = x_1x_2 + x_3x_4$ popolnoma monotona funkcija, medtem ko $f_2 = x_1x_2\, x_3 + \overline{x}_2x_4$ ni , saj se spremenljivka x_2 pojavlja v originalni in komplementirani obliki.

4. 3 Pragovne preklopne funkcije

Definicija:

$f(x_1, x_2,.., x_n)$ je pragovna, če obstoja množica celih števil:

$\{a_1, a_2,..., a_n\}, \{w_1, w_2,..., w_n\}$

$f(x_1, x_2,..., x_n) = 1$, če in samo če je izpolnjen pogoj:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \geq P; \quad x_i \in \{0,1\}$$

<u>Izrek 9:</u>

Vse pragovne funkcije so monotone.

Dokaz:

Naj bo $f(x_1, x_2,.., x_n)$ pragovna z $\{a_1, a_2,..., a_n\}$

Če ni monotona lahko njeno minimalno obliko razstavimo po Shannonu

$$f = x_i f_{i1}(x_1, x_2,..., x_{i-1}, x_{i+1},.., x_n) + \overline{x}_i f_{i0}(x_1, x_2,..., x_{i-1}, x_{i+1},..., x_n)$$

Funkciji f_{i1} in f_{i0} sta kot vemo:

$$f_{i1} = f(x_1, x_2,..., x_{i-1}, 1, x_{i+1},..., x_n)$$

$$f_{i0} = f(x_1, x_2,..., x_{i-1}, 0, x_{i+1},..., x_n)$$

Če je $a_i \leq 0$, potem je vsaka točka f_{i1} s funkcijsko vrednostjo 1 hkrati tudi točka f_{i0} s funkcijsko vrednostjo 1.

Funkcijo f lahko zato zapišemo v obliki:

$$f = \overline{x}_i f_{i0} + f_{i1}$$

O tem se prepričamo takole:

f_{i1}: x_i

	1		
		1	
1			

+

f_{i0}: $\overline{x}_i$

			1
	1		
		1	1
1			

$$f = (x_i + \overline{x}_i) f_{i1} + \overline{x}_i f_{i0} = \overline{x}_i f_{i0} + f_{i1}$$

Ta funkcija pa je padajoča glede na spremenljivko x_i

Če pa je $a_i \geq 0$ potem je vsaka točka funkcije f_{i0} s funkcijsko vrednostjo 1 hkrati tudi točka funkcije f_{i1} s funkcijsko vrednostjo 1.

Funkcijo f lahko zato zapišemo v obliki:

$f = x_i f_{i1} + f_{i0}$

Ta funkcija pa je naraščajoča glede na spremenljivko x_i - Protislovje

Poleg tega sledi iz dokaza izreka 8 tudi to, da je vsaka pragovna funkcija z $a_i > 0$ naraščajoča in z $a_i < 0$ padajoča glede na spremenljivko x_i.

Izrek 10: Niso vse monotone funkcije pragovne.

Dokaz:

Za $f = x_1x_2 + x_3x_4$ privzemimo, da je pragovna z:

$\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ in P

$f(1, 1, 0, 0) = 1 \quad \Rightarrow \quad a_1 + a_2 \geq P$

$f(1, 0, 1, 0) = 0 \quad \Rightarrow \quad a_1 + a_3 < P$

; sledi zaključek: $a_2 > a_3$

Podobno je:

$f(0, 0, 1, 1) = 1 \quad \Rightarrow \quad a_3 + a_4 \geq P$

$f(0, 1, 0, 1) = 0 \quad \Rightarrow \quad a_2 + a_4 < P$

; sledi zaključek: $a_3 > a_2$

To pa je kontradikcija; za to f ni pragovna funkcija, je pa monotona !!!

Razdelimo sedaj vse točke poliedra v dva razreda. Teh točk je kot vemo 2^n

1. razred je razred funkcijskih vrednosti 1

2. razred je razred funkcijskih vrednosti 0

Pri pragovni preklopni funkciji je to možno narediti s hiperravnino, katere enačba je:

$$a_1x_1 + a_ax_2 + \ldots a_nx_n = P$$

Zato velja za vsako točko s funkcijsko vrednostjo »1« $\mathbf{w_i} = (x_1^{wi1}, x_2^{wi2}, \ldots x_n^{win})$

in vsako točko s funkcijsko vrednostjo »0« $\mathbf{w_j} = (x_1^{wj1}, x_2^{wj2}, \ldots x_n^{wjn})$

naslednja neenakost:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k x_{ik} > \sum_{k=1}^{n} a_k x_{jk}$$

Pri čemer pripadajo x_{ik} točkam s funkcijsko vrednostjo »1« in x_{jk} točkam s funkcijsko vrednostjo »0«.

Pragovna preklopna funkcija ima v splošnem k_0 točk s funkcijsko vrednostjo »0« in k_1 točk s funkcijsko vrednostjo »1«.

S temi točkami lahko tvorimo $k_0.k_1$ linearnih pogojev ali neenakosti za uteži a_i, ki morejo biti zadovoljene če in samo če je funkcija f pragovna.

Minimalni vektor funkcijskih vrednosti »1«

Za popolnoma monotono preklopno funkcijo f $(x_1, x_2,.., x_n)$ je vektor $\mathbf{w_i}$ funkcijskih vrednosti »1« minimalen, če sprememba katerekoli originalne spremenljivke iz 1 v 0 ali katerekoli komplementarne iz 0 v 1 transformira $\mathbf{w_i}$ v $\mathbf{w_i}'$ tako, da je $f(\mathbf{w_i}') = 0$

Torej:

Minimalni vektor funkcijskih vrednosti »1«

$x_i : 1 \rightarrow 0$ ali $\overline{x}_i : 0 \rightarrow 1$

$\mathbf{w_i} \rightarrow \mathbf{w_i}'$ $\rightarrow$ $f(\mathbf{w_i}') = 0$

Maksimalni vektor funkcijskih vrednosti »0«

Podobno je vektor $\mathbf{w_j}$ funkcijskih vrednosti »0« maksimalen, če sprememba katerekoli originalne spremenljivke iz 0 v 1 ali komplementarne iz 1 v 0 transformira $\mathbf{w_j}$ v $\mathbf{w_j}'$ tako, da je $f(\mathbf{w_j}') = 1$

Torej:

$x_j : 0 \rightarrow 1$ ali $\overline{x}_j : 1 \rightarrow 0$

$\mathbf{w_j} \rightarrow \mathbf{w_j}'$ $\rightarrow$ $f(\mathbf{w_j}') = 1$

$\mathbf{M_1}$ - množica vseh minimalnih vektorjev $\mathbf{w_i}$

$\mathbf{M_0}$ - množica vseh maksimalnih vektorjev $\mathbf{w_j}$

Dvojček: ($\mathbf{w_i}$, $\mathbf{w_j}$); $\mathbf{w_i} \in \mathbf{M_1}$ in $\mathbf{w_j} \in \mathbf{M_0}$ določa torej linearno neenakost pri neznankah $\underline{a_k}$.

Iz tega lahko povzamemo, da če so zadovoljeni pogoji, ki izvirajo iz min. VFV-1 in max. VFV-0, potem so zadovoljeni tudi pogoji, ki izvirajo iz katerekoli točke s funkcijsko vrednostjo 1 ali točke s funkcijsko vrednostjo 0.

1. Določimo množici $\mathbf{M_1}$ in $\mathbf{M_0}$

2. Izberemo dvojčke ($\mathbf{w_i}$, $\mathbf{w_j}$); $\mathbf{w_i} \in \mathbf{M_1}$; $\mathbf{w_j} \in \mathbf{M_0}$ in napišemo neenačbe. Teh enačb je toliko, kolikor znaša produkt števila elementov v obeh množicah

3. Iščemo rešitev sistema neenačb. Če rešitev tega sistema obstaja, dobimo vrednosti posameznih uteži; to je množica $\{a_1, a_2, .., a_n\}$

4. Določimo prag funkcije po enačbi:

$$P = \min_{\mathbf{w}_i \in M_1} \sum_{j=1}^{n} a_j x_{ij}; \text{ kjer je } \mathbf{w_i} = (x_1^{w_{i1}}, x_2^{w_{i2}}, \ldots, x_n^{w_{in}})$$

Pragovnost torej pomeni, da za točke s funkcijsko vrednostjo »0«, ki se ne prilegajo hiperravnini velja neenačba:

$$\sum_{j=1}^{n} a_j x_{ij} < P$$

Za točke s funkcijsko vrednostjo »1«, ki se ne prilegajo hiper-ravnini pa neenačba:

$$\sum_{j=1}^{n} a_j x_{ij} > P$$

4. 4. Verjetnostne preklopne funkcije

4. 4.1 Osnovni pojmi verjetnosti

Vrste verjetnosti:

- intuitivna verjetnost
- apriorna verjetnost
- aposteriorna verjetnost (statistična)
- verjetnost zasnovana na aksiomski teoriji

Apriorna verjetnost

Dogodki:

- zanesljiv dogodek
- slučajni dogodek
- nemogoč dogodek
- združljivi dogodki
- nezdružljivi dogodki

Slučajni dogodek:

ta se v danih pogojih zgodi ali ne zgodi. Kvantitativna ocena možnosti, da se dogodek zgodi je njegova verjetnost.

Definicija verjetnosti:

Če mora pri nekih pogojih nastopiti eden izmed »n« nezdružljivih slučajnih dogodkov in nihče med njimi nima prednosti pravimo, da imajo dogodki enako verjetnost:

$p = \frac{1}{n}$ - verjetnost nastopa slučajnih nezdružljivih dogodkov

Če se slučajni dogodek »A^i« pojavlja kot posledica poljubnega izmed »m« dogodkov, pri skupnem številu nezdružljivih in enako verjetnih dogodkov »n«, je verjetnost dogodka A^i:

$$p = \frac{m}{n}$$

Statistična verjetnost (aposteriorna)

Tu verjetnosti ne poznamo v naprej, zato poskuse ponavljamo. Pri tem se srečamo s pojmom relativna pogostost dogodka »A^i«

$$p \cong \frac{m}{n} \qquad p = \lim_{n \to \infty} \frac{m}{n}$$

n – število ponovitev

m – število, kolikokrat se zgodi A^i med “n” ponovitvami

PREKLOPNA VEZJA Poglavje 4

4. 4. 2 Verjetnost sestavljenih dogodkov

$A_i = (A^1, A^2,..., A^n)$ – sestavljen dogodek

$$w_i = \begin{cases} 1, & \text{če pride do dogodka } A_i \\ 0, & \text{če ne pride do dogodka } A_i \end{cases} \quad : \; w_i \text{ - slučajna spremenljivka}$$

z »n« elementarnimi dogodki imamo 2^n različnih A_i in w_i

$A_i(w_i=1)$ – verjetnost sestavljenega dogodka

$w_i w_j = 0$ za vse w_i in w_j, če je $i \neq j$ in so dogodki med seboj neodvisni

Verjetnost sestavljenega dogodka A_i $(w_i=1)$ bomo označevali s P_i; verjetnost enostavnega dogodka A^i pa s p_i

$P_i = p_1, p_2 ...p_n$ <u>To velja samo za neodvisne dogodke!</u>

Gornjo relacijo je potrebno še dokazati!

w_i z m_i in A^i z x_i

Konjunkcija = produkt

<u>Disjunkcija = vsota </u>(omejeno zaradi razlike med Booleovo in navadno algebro)

A^i se pojavlja s p_i

A^i se ne pojavlja s $\overline{p}_i$; $\overline{p}_i = 1-p_i$

$p_i + \overline{p}_i = 1$ – <u>zakon popolne verjetnosti!</u>

4. 4. 3 Izhodišča aksiomske teorije verjetnosti

Povezave med preklopno algebro in verjetnostnim računom

1. Veljajo osnovni zakoni za algebro!

- zakon komutativnosti
- zakon distributivnosti
- zakon asociativnosti

2. Veljajo vse relacije z univerzalnim razredom **U**= 1

$A \cup 0 = A$; $A \cap 0 = 0$

$A \cup \mathbf{U} = \mathbf{U}$; $A \cap \mathbf{U} = A$

3. Veljata De-Morganova zakona v osnovni obliki:

$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} \rightarrow$ 1. De Morganov zakon

$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} \rightarrow$ 2. De Morganov zakon

4. Dodatno pa velja še naslednje:

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) – P(A B)$

$P(A \cap B) = P(A) P (B/A) = P(B)P(A/B)$

$P(A \cap B) = P(A)P(B)$; kadar sta dogodka neodvisna

4. 4. 4 Ekvivalenti med preklopno algebro in verjetnostnim računom

VERJETNOSTNI RAČUN	PREKLOPNA ALGEBRA
A^i ; $p(A^i) = p_i$	x_i
w_i	m_i
$p_i + \bar{p}_i = 1$	$x_i + \bar{x}_i = 1$
$p_i + 0 = p_i$	$x_i + 0 = x_i$
$p_i \cdot 0 = 0$	$x_i \cdot 0 = 0$
$p_i \cdot 1 = p_i$	$x_i \cdot 1 = x_i$
$\bar{A}^i;\ p(\bar{A}^i) = (1-p) = \bar{p}$	$\bar{x}$
$\overline{\bar{p}_i\bar{p}_j} = p_i + p_j - p_ip_j$	$\overline{\bar{x}_i\bar{x}_j} = x_i + x_j$
$\overline{\bar{p}_i + \bar{p}_j - \bar{p}_i\bar{p}_j} = p_ip_j$	$\overline{\bar{x}_i + \bar{x}_j} = x_ix_j$

$p_i = p\,(A^i)$; $p_j = p\,(A^j)$

$p_ip_j = 0$; potem velja tudi analogija za De-Morganova izreka

4. 4. 5 Določanje verjetnosti preklopnih funkcij

Definicija:

$f\,(x_1, x_2,..., x_n)$ je verjetnostna, če je:

$0 < p_i = p(x_i = 1) < 1$

in

$0 < \overline{p}_i = p(x_i = 0) < 1$

$$P(m_i) = p_1^{w_{i1}} p_2^{w_{i2}} \dots p_n^{w_{in}}$$

$$p^w = \begin{cases} p; & \text{za } w = 1 \\ \overline{p}; & \text{za } w = 0 \end{cases}$$

4. 4. 6 Zanesljivost

Definicija

Zanesljivost je sposobnost naprave, da opravlja zahtevano funkcijo. Zanesljivost v splošnem ocenjujemo s $P(p_1, p_2, .., p_n) = P(p)$

$f(x_1, x_2, .., x_n)$ – njeno zanesljivost označimo s $P(f)$

$$P(f) = \sum_{i=0}^{2^n-1} P(m_i) \quad \text{ali} \quad P(f) = \sum_{i=0}^{j} P(k_i)$$

$P(m_i)$ – verjetnost nastopa minterma m_i

Če m_i ne nastopa v funkciji je $P(m_i) = 0$

4. 4. 7 Ortogonalna oblika preklopna funkcije

Definicija

$f(x_1, x_2, ..., x_n) = k_1 + k_2 + ... k_i + ... + k_j + ... + k_q$

je ortogonalna, če za vsak par (k_i, k_j) velja:

$k_i k_j = 0$; pri $i \neq j$

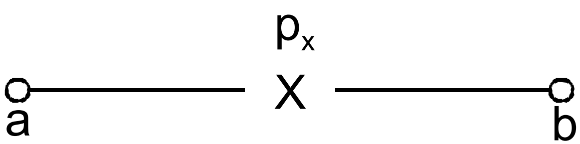
<u>PDNO:</u> $m_i . m_j = 0$; $i \neq j$

<u>Izrek 11:</u>

Vsaki preklopni funkciji pripada v verjetnostnem računu nek polinom, katerega vrednost je enaka verjetnosti preklopne funkcije:

$P(f) = P(p)$

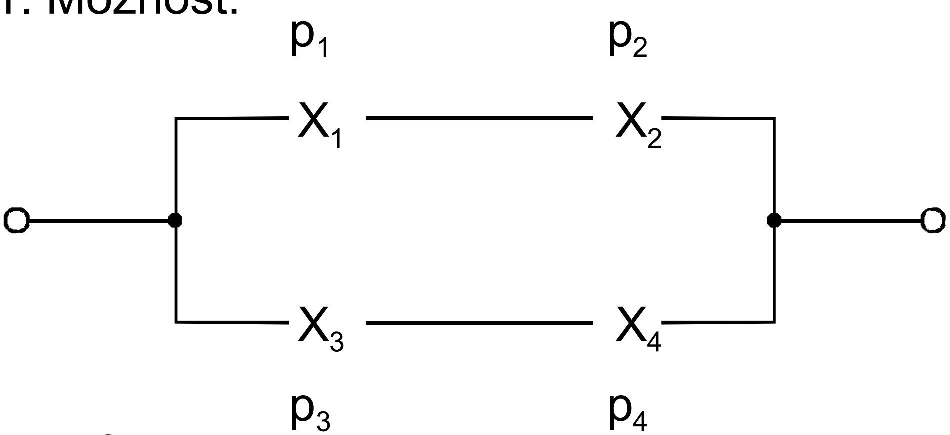
4. 4. 8 Povečanje zanesljivosti preklopnih funkcij



Zveza od "a" do "b" bo najboljša kadar bo $p_x = 1$

$p_x < 1$; p_x želimo povečati

1. Možnost:



$p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = p$

$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1x_2 + x_3x_4$

PDNO:

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_1x_2x_3x_4 + x_1x_2x_3\overline{x}_4 + x_1x_2\overline{x}_3x_4 + x_1x_2\overline{x}_3\overline{x}_4 + x_1\overline{x}_2x_3x_4 + \overline{x}_1x_2x_3x_4 + \overline{x}_1\overline{x}_2x_3x_4$$

Pripadajoč verjetnostni polinom pa: P(p) = P(f)

$P(f) = 2p^2 (1-p)^2 + 4p^3 (1-p) + p^4 = 2p^2 - p^4$

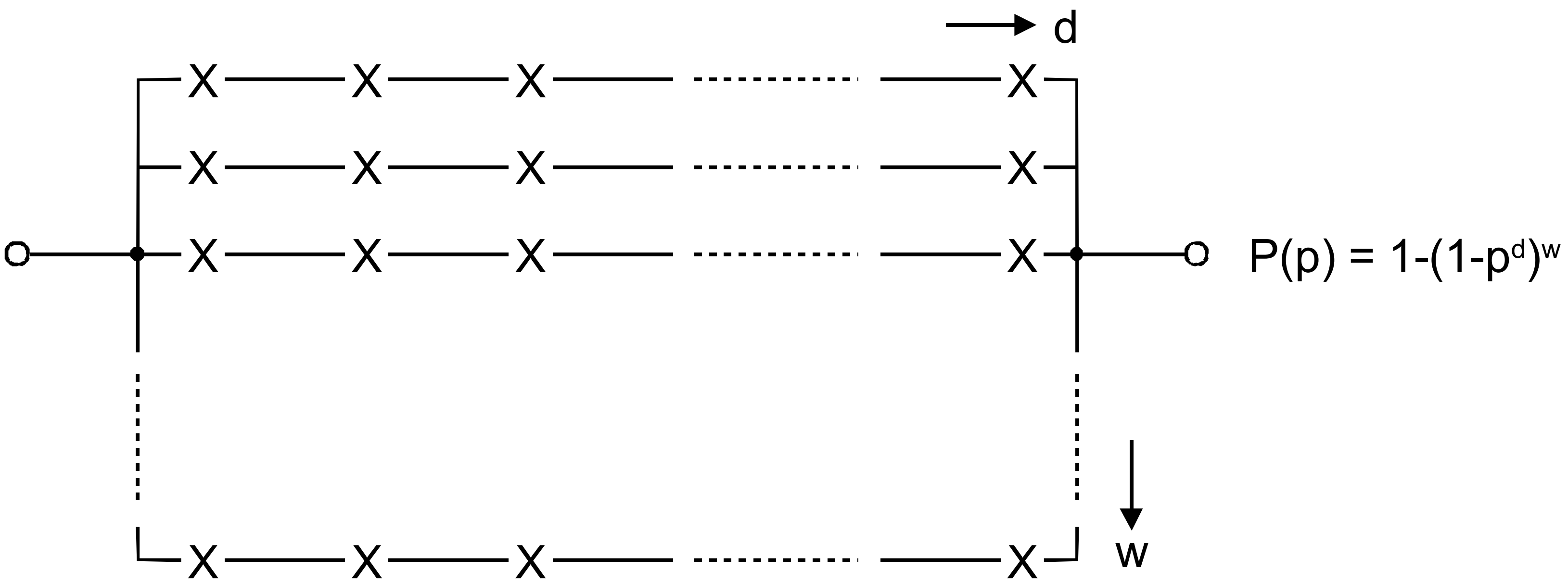
Poseg je upravičen če je <u>$p > 0.618$</u>

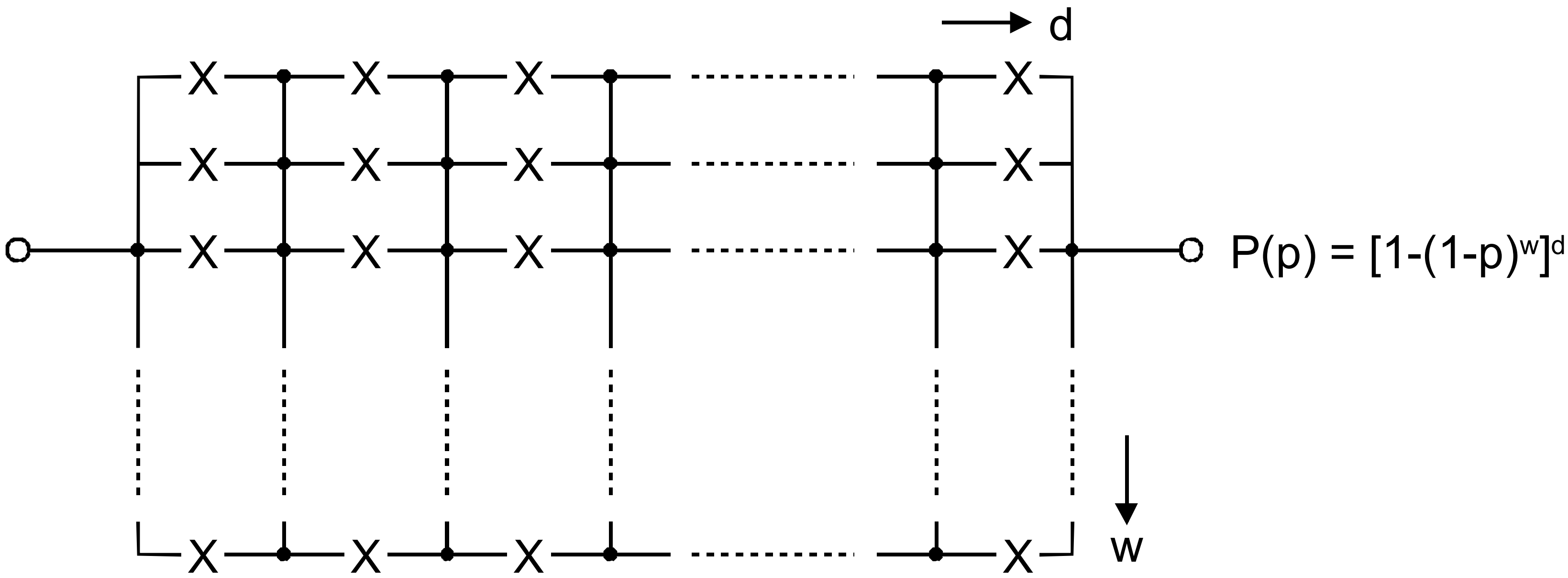
V splošnem izbiramo takšna vezja za povečanje zanesljivosti, ki dajo polinome z

$$P(p) = P(f) = \frac{1}{2};\ \text{pri } p = \frac{1}{2}$$

in težijo k pravokotnemu poteku. V poštev pridejo polinomi tipov:

$P(p) = 1 - (1 - p^d)^w$ in $P(p) = [1 - (1 - p)^w]^d$, ki izhajajo iz naslednjih topoloških možnosti:





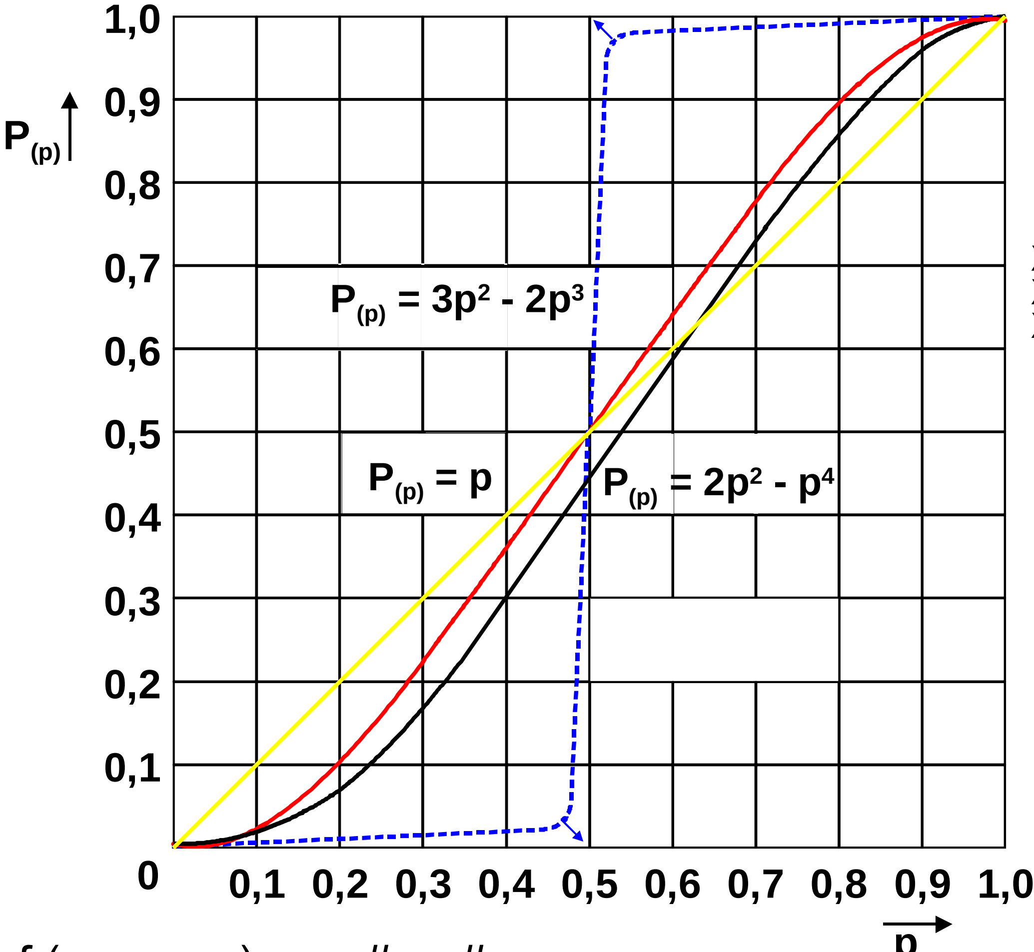
Vzemimo preklopno funkcijo:

$f\,(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3$

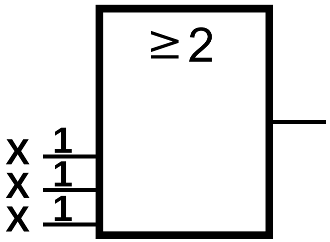
Ta funkcija je pragovna in ima vlogo operatorja. Imenuje se: J. von Neuman – Lindamanov operator

$$P(p) = 3p^2 - 2p^3 \rightarrow P(p) = \frac{1}{2} \ \text{ pri } p = \frac{1}{2}$$

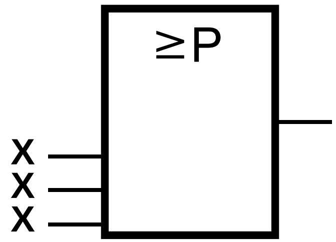
Lindamanov operator je pragovna funkcija z utežmi 1 in pragom 2; $w_1=w_2=w_3=1$; P=2



IEC simboli pragovnih operatorjev



Lindamanov operator



Splošni pragovni operator

$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 \# x_2 \# x_3$

$\{\#, \text{konst}, -\}$ funkcijsko poln sistem

$x_1x_2 = x_1 \# x_2 \# 0$

$x_1 + x_2 = x_1 \# x_2 \# 1$

$x_3 = 0 \rightarrow x_1x_2 + x_2.0 + x_1.0 = x_1x_2$

$x_3 = 1 \rightarrow x_1x_2 + x_2.1 + x_1.1 = x_1x_2 + x_2 + x_1 = x_1 + x_2(x_1+1) = x_1 + x_2$

$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_i\, f(x_i=1) + \bar{x}_i\, f(x_i=0)$

$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = [f(x_i=1) \# x_i \# 0] \# [f(x_i=0) \# \bar{x}_i \# 0] \# 1$

R. Lindaman in M. Chon

Tri možnosti za realizacijo:

$$f(x_1, x_2, \ldots x_n) = (x_i \# x_j \# f(x_j = \bar{x}_i)) \# (\bar{x}_i \# \bar{x}_j \# f(x_j = \bar{x}_i)) \# f(x_j = x_i)$$

$$f(x_1, x_2, \ldots x_n) = (x_i \# \bar{x}_j \# f(x_j = x_i) \# (\bar{x}_i \# x_j \# f(x_j = x_i)) \# f(x_j = \bar{x}_i)$$

$$f(x_1, x_2, \ldots x_n) = (x_i \# x_j \# f(x_j = \bar{x}_i)) \# (\bar{x}_i \# x_j \# f(x_j = x_i)) \# \bar{x}_j$$