# 3. MINIMIZACIJA PREKLOPNIH FUNKCIJ

## 3. 1 Osnove minimizacijskih postopkov

PDNO → DNO → MDNO

PKNO → KNO → MKNO

Glavni vsebovalnik je najkrajša konjunkcija, ki je disjunktivno vsebovana v preklopni funkciji.

Dolžine teh konjunkcij so lahko različne: n, n -1, n – 2, n – 3,...

Glavni vsebovalniki dajo v splošnem le DNO!

Minimalno obliko funkcije pa dobimo, če upoštevamo samo tiste glavne vsebovalnike, ki vsebujejo kak minterm, ki ga nima noben drug glavni vsebovalnik.

Takšen glavni vsebovalnik je tudi potreben glavni vsebovalnik.

Brez kateregakoli potrebnega glavnega vsebovalnika ni izhodiščne funkcije – je torej neka druga funkcija.

"Potrebni glavni vsebovalnik" – essential prime implicant

Glavne in potrebne glavne vsebovalnike določamo na osnovi sosednosti.

***Definicja sosednosti:***

**Dve konjunkcije sta sosedni, če imata enako število črk, razlikujeta pa se samo po eni negaciji.**

**$K_1$ in $K_2$ sta sosedni konjunkciji če velja:**

$$K_1 = x_1^{w_{i1}} x_2^{w_{i2}} \bullet \bullet \bullet x_k^{w_{ik}} \bullet \bullet \bullet x_m^{w_{im}}$$

$$K_1 = x_1^{w_{i1}} x_2^{w_{i2}} \bullet \bullet \bullet x_k^{\overline{w}_{ik}} \bullet \bullet \bullet x_m^{w_{im}}$$

**Če to ne velja za nobeno od preostalih nastopajočih konjunkcij, je opazovana konjunkcija izolirana konjunkcija.**

**Izolirana konjunkcija je vedno glavni vsebovalnik in tudi potrebni glavni vsebovalnik.**

**Sosednost konjunkcij vedno vnašamo ali opuščamo na osnovi postulatov p in p`.**

**Temelji poenostavljanja in minimizacijskih postopkov so postulati in teoremi**

**Boolove algebre in sicer tisti, ki imajo na eni strani enačaja manjše število črk.**

**Med pomembnimi so:**

$$x + \overline{x} = 1$$

$$x \overline{x} = 0$$

$$x + x + \ldots + x = x$$

$$x_1 + x_1 x_2 = x_1$$

$$x_1 (x_1 + x_2) = x_1$$

$$x_1 + \overline{x}_1 x_2 = x_1 + x_2$$

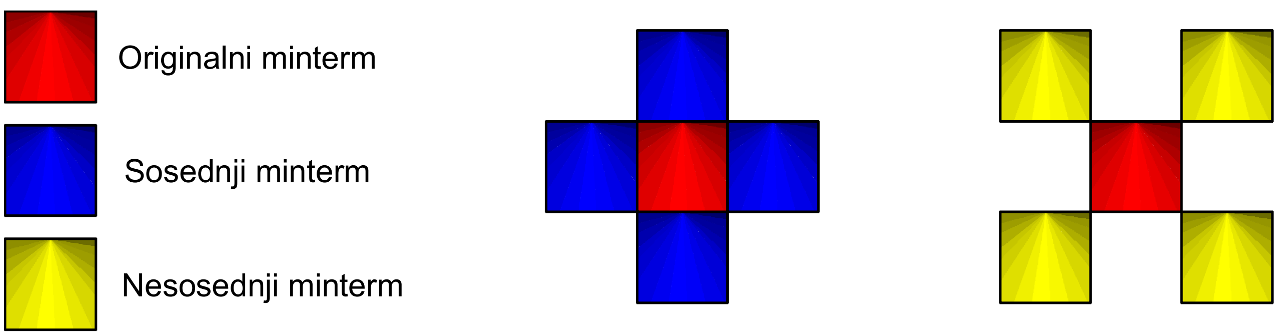
$$x_1 (\overline{x}_1 + x_2) = x_1 x_2$$

$$\sum_{i=0}^{2^n-1} m_i = 1$$

$$\prod_{i=0}^{2^n-1} (M_i) = 0$$

## 3. 2 Postopek minimizacije v Veitchevem diagramu

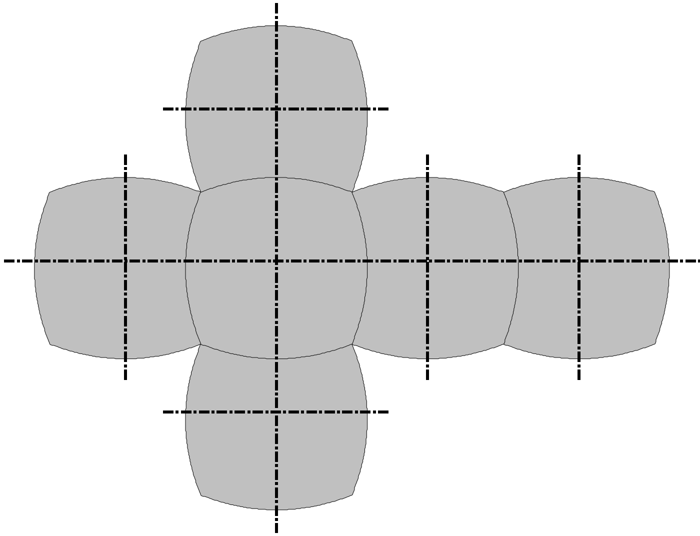
**V tem diagramu izvajamo minimizacijo na osnovi sosednosti mintermov:**



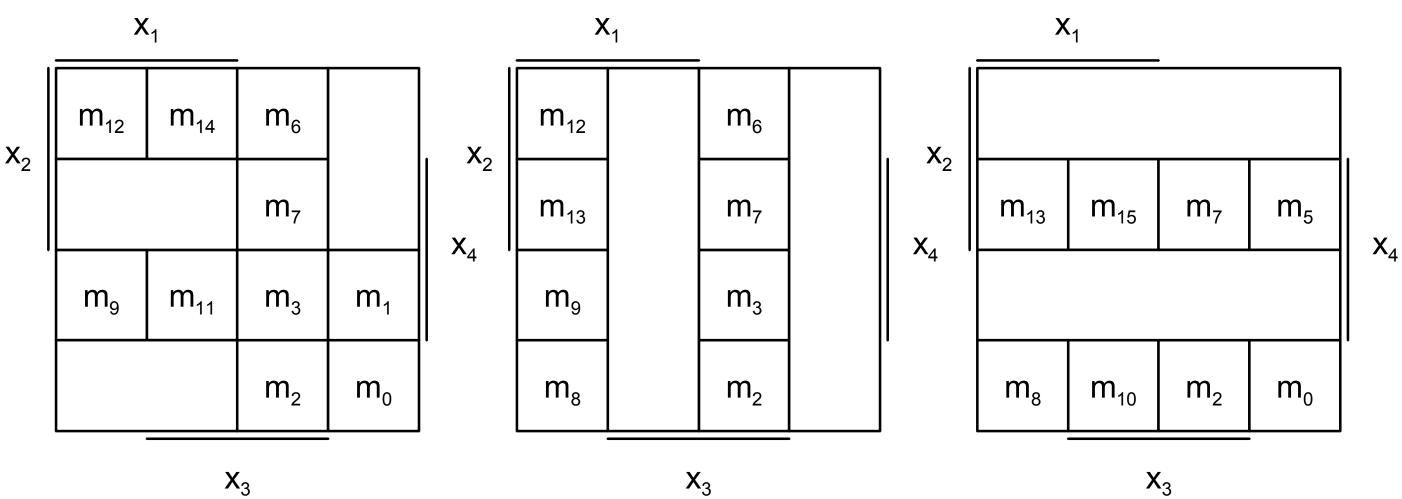

**Združitev dveh sosednih mintermov nam do konjunkcije dolžine $n - 1$.**

**Združitev dveh konjunkcij dolžine $n - 1$ da novo konjunkcijo dolžine $n - 2$ itd.**

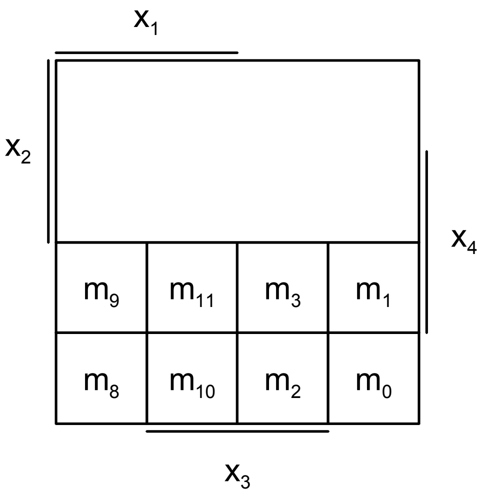
**Upoštevati pa moramo sosednosti robov. Veitchev diagram moramo obravnavati kot zaključeno površino; to je plašč krogle.**

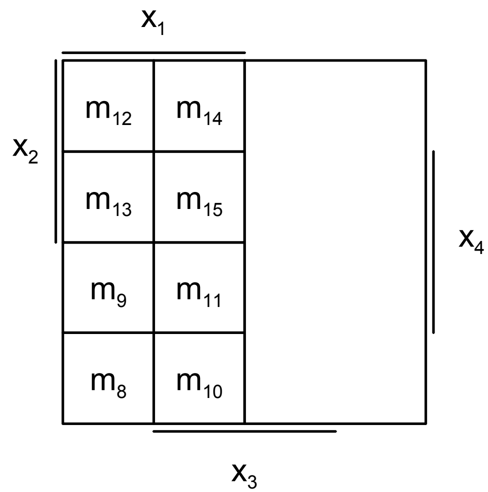


## Primeri sosednosti v Veitchevem diagramu: Konjunkcije reda 3 in 2

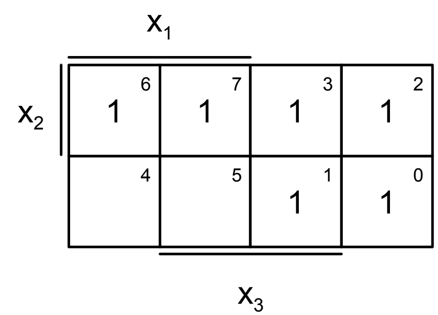


## Konjunkciji reda 1:




$$f(x_1, x_2, x_3) = \overline{x}_1 + x_1 x_2 \overline{x}_3 + x_1 x_2 x_3$$




## Sosedi k mintermu:

$m_6$: $m_2$, $m_7$

$m_7$: $m_3$, $m_6$

$m_3$: $m_1$, $m_2$, $m_7$

$m_2$ : $m_o$, $m_3$, $m_6$

$m_1$: $m_o$, $m_3$

$m_o$: $m_1$, $m_2$

**Poglejmo, če imajo poenostavljeni izrazi še vedno kakšne sosede?**

**Iz primerjav:**

$(m_6 + m_7) : (m_2 + m_3)$

$(m_6 + m_2) : (m_7 + m_3)$

.

.

.

$(m_1 + m_o) : (m_2 + m_3)$,

**vidimo torej, da imajo tudi vsi okrajšani izrazi (konjunkcije) svoje sosede.**

**Izolirane konjunkcije se pojavijo šele pri dolžini n – 2.**

**Zato disjunktivna povezava sosednih mintermov da:**

$$m_2 + m_3 + m_6 + m_7 = x_2$$

$$m_0 + m_1 + m_2 + m_3 = \overline{x}_1$$

**Minimalna disjunktivna oblika funkcije je zato:**

$$f\,(x_1, x_2, x_3) = \overline{x}_1 + x_2$$

**Iz tega razčlenjenega primera lahko povzamemo splošen postopek minimizacije v Veitch-evem diagramu:**

1. Obravnavano funkcijo vnesemo v Veitchev diagram

2. Vsak kvadratek s funkcijsko vrednostjo "1" primerjamo na sosednost z ostalimi kvadratki, ki imajo funkcijsko vrednost "1".

3. Kvadratki, ki nimajo sosedov so glavni vsebovalniki in hkrati tudi potrebni glavni vsebovalniki. Vsak tak kvadratek "1" vnese v MDNO en minterm.

4. Kvadratke, ki imajo sosede formiramo v pravokotnike, ki predstavljajo konjunkcije dolžine n – 1.

Če imajo tako formirani pravokotniki sosede, ni nobeden od njih glavni vsebovalnik

Pravokotnik, ki nima soseda je glavni vsebovalnik; potreben pa je samo, če vsebuje enega ali več mintermov, ki niso vsebovani v nobenem drugem glavnem vsebovalniku.

5. Pravokotnike sestavimo v kvadrate, ki predstavljajo konjunkcije dolžine n – 2. Za vse kvadrate, ki imajo sosede se postopek združevanja nadaljuje v smeri n – 3, n – 4 ....

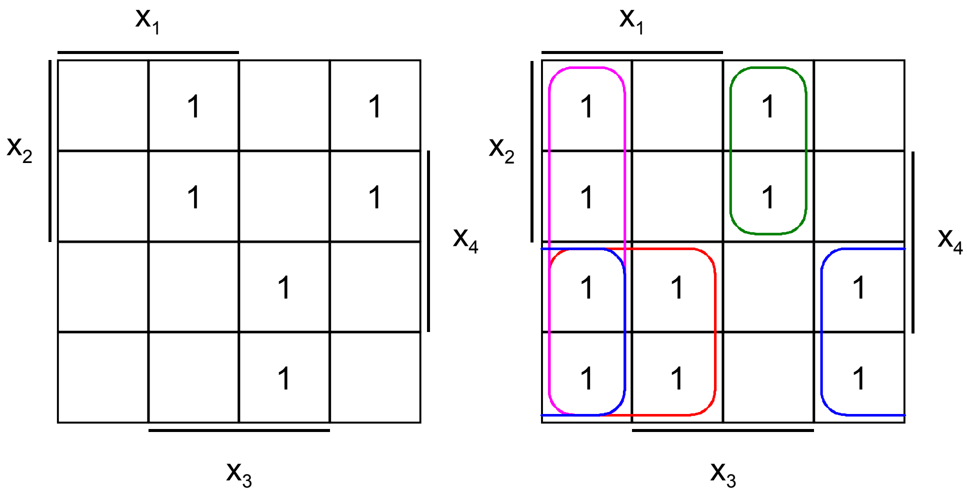
Kvadrati, ki nimajo sosedov so glavni vsebovalniki in morda tudi potrebni glavni vsebovalniki.

6. Vse potrebne glavne vsebovalnike iz točk 2, 3, 4 in 5 povežemo disjunktivno, kar nam da MDNO obravnavane funkcije.

## 3. 3 Minimalne konjunktivne oblike preklopnih funkcij

$f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ ; $\bar{f}(x_1, x_2, \ldots x_n)$ dopolnilna funkcija

$$f(x_1, x_2, \ldots x_n) + \bar{f}(x_1, x_2, \ldots x_n) = 1$$




$$\bar{f}_{min} = x_1 \bar{x}_3 + \bar{x}_2 \bar{x}_3 + x_1 \bar{x}_2 + \bar{x}_1 x_2 x_3$$

$$f_{min} = \overline{(x_1 \bar{x}_3) + (\bar{x}_2 \bar{x}_3) + (x_1 \bar{x}_2) + (\bar{x}_1 x_2 x_3)}$$

$$f_{min} = (\bar{x}_1 + x_3)(x_2 + x_3)(\bar{x}_1 + x_2)(x_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3)$$

## 3 .4 Minimizacija nepopolno opredeljenih preklopnih funkcij

### 3. 4. 1 Nepopolnost preklopnih funkcij

$f(x_1, x_2, \ldots x_n) = f(w_i)$

število možnih vhodnih vektorjev je $2^n$

$w_i$ ne more nastopiti $\rightarrow$ $m_i = 0$

$w_i$ z pogojem $m_i=0$ je pogojni vektor (don't cary condition)

### 3.4.2 Poenostavljanje nepopolno opredeljenih preklopnih funkcij

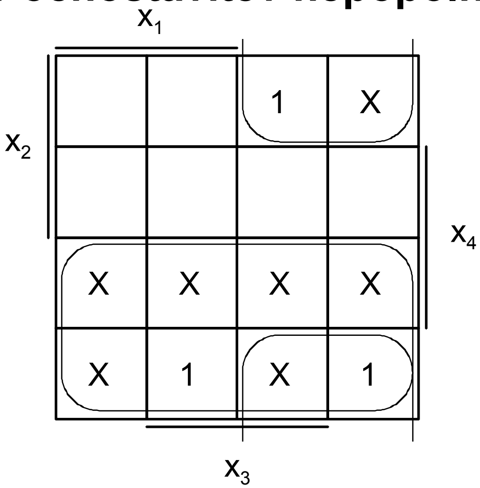
Poenostavljanje takšnih funkcij upošteva tudi pogojne vektorje.

$w_i=0$ sledi da je tudi $m_i f_i = 0$

Na to mesto v Veitchevem diagramu lahko vpišemo "0" ali 1", zato na tem mestu vpišemo znak "X", ki ga nato pri minimizaciji upoštevamo kot "1", če to prinese enostavnejši oziroma krajši glavni vsebovalnik.

MDNO je tista, ki upošteva kar največ pogojev $w_i=0$.

**Poenostavitev nepopolno opredeljene preklopne funkcije:**

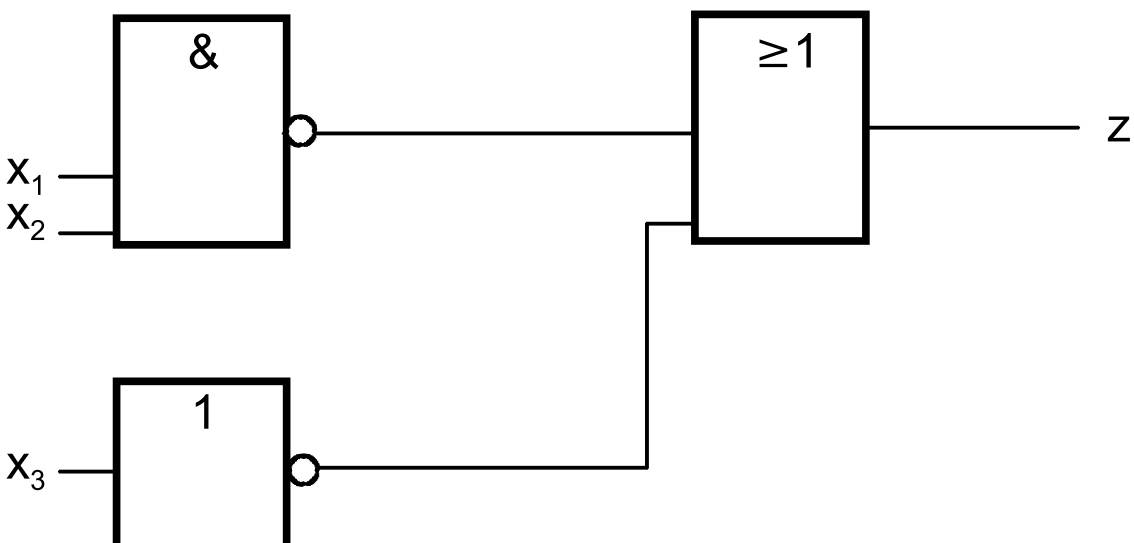



$f_{min} = \bar{x}_2 + \bar{x}_1 \bar{x}_4$; **realizacijski par (2,4) oziroma (5,7)**

$f_{minizh} = \bar{x}_1 x_2 x_3 \bar{x}_4 + x_1 x_2 \bar{x}_3 x_4 + \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4$; **realizacijski par (4,15) oziroma (7,18)**

**Zgled:**

**Pretvorite spodnje vezje, izraženo z disjunkcijo, konjunkcijo in negacijo, v vezje, sestavljeno iz NAND elementov.**



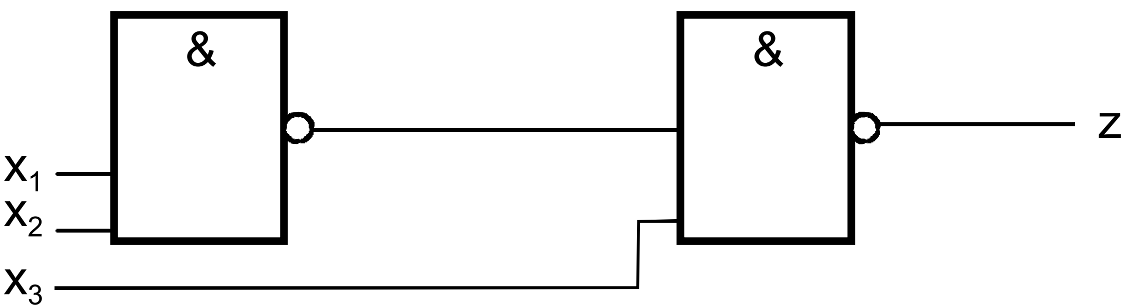
**Vezje opravlja logično operacijo:**

$$z = x_1 x_2 + \overline{x}_3$$

**Z upoštevanjem povezav, ki smo jih izpeljali v odstavku o operatorjih, lahko gornji zapis pretvorimo v obliko:**

$$z = x_1 x_2 + \overline{x}_3 = \overline{\overline{x_1 x_2}} + \overline{x}_3 = \overline{\overline{(x_1 x_2)}\, x_3}$$

**Ta oblika nam omogoča neposredno risanje vezja z NAND elementi, ki ga vidimo na spodnji skici:**




**Gornji zgled je preprost, zato je tudi pretvorba v ustrezno obliko enostavna. Če pa moramo pretvarjati kompleksnejše izraze, rajši uporabljamo grafične metode, ki ne zahtevajo toliko spretnosti in so tudi bolj pregledne.**