2. PREKLOPNA ALI BOOLEOVA ALGEBRA

2. 1 Osnove matematične logike

2. 1. 1 Razred

Osnovna in hkrati neodvisna spremenljivka matematične logike je razred. Razred zapišemo takole:

$$x_i \in X$$

Elementi, ki imajo vsaj eno skupno lastnost oziroma značilnost tvorijo razred.

Posamezen element razreda lahko pripada večim razredom hkrati, če ima lastnosti oziroma značilnosti teh posameznih razredov.

Med razredi obstojajo relacije in operacije:

Relacija $Y \subset X$ **; pomeni, da je Y vsebovan v X**

Operacija $Z = X \cap Y$**; pomeni nov razred, ki se imenuje presek**

Operacija $Z = X \cup Y$**; tudi to je nov razred, ki se imenuje unija**

Relacija $Z = \sim X$**; pomeni, da elementi, ki ne spadajo v razred X tvorijo svoj novi razred, ki mu pravimo dopolnilni razred**

Dopolnilni razred:

~X je povsem opredeljen glede na razred X šele ko poznamo tudi univerzalni razred U

Elemente dopolnilnega razreda določamo na osnovi relacije z univerzalnim razredom U:

$$X \cup \sim X = U \qquad \text{in} \qquad X \cap \sim X = 0$$

Posebna razreda sta univerzalni razred 1 in razred 0

$$X \cup \sim X = 1 \qquad \text{in} \qquad X \cup 1 = 1$$

Za razred 0 pa velja :

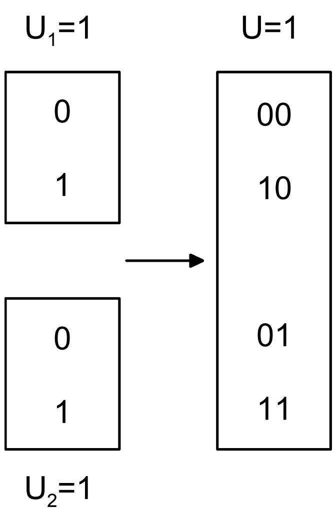
$$X \cap 0 = 0$$

U = 1 je eksistenčnega pomena za Booleovo algebro in s tem tudi teorijo preklopnih funkcij, ker omogoča njihovo obravnavo z matematično logiko.

Univerzalni razred naj ima samo dva elementa: 0,1.

Takšnih univerzalnih razredov U je lahko več, vsi pa so medsebojno neodvisni.

Z njimi lahko tvorimo zopet nov razred, v katerem so vsebovani posamezni razredi.



Na ta način zajamemo stanja več razredov hkrati.

Vzemimo n takšnih univerzalnih razredov, z njimi lahko tvorimo skupni univerzalni razred U = 1.

S po dvema elementoma v vsakem univerzalnem razredu bomo imeli v skupnem univerzalnem razredu *2^n elementov*

2. 1. 2 Ponazarjanje Booleovih spremenljivk z Vennovimi diagrami

Vennov diagram

Koristno grafično ponazoritev Booleovih spremenljivk omogoča Vennov diagram, ki je sestavljen iz pravokotnika, v katerega začrtamo prekrivajoče se kroge. Vsak krog predstavlja eno Booleovo spremenljivko.

Vse točke znotraj kroga X spadajo v razred X, vse točke izven tega kroga pa spadajo v dopolnilni razred ~X.

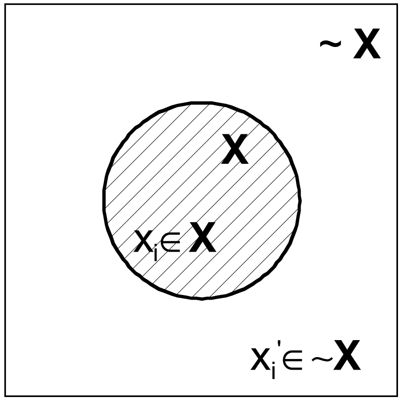
Z oznakami iz teorije množic smo prej pisali:

$$x_i \in X,$$

kar simbolično pomeni, da je x_i element ali član množice X.

Vse točke , ki so izven kroga X, pripadajo množici "ne X" ali ~X

$$x_i' \in \sim X$$



Če obstaja skupina točk y_j, ki so elementi množice Y

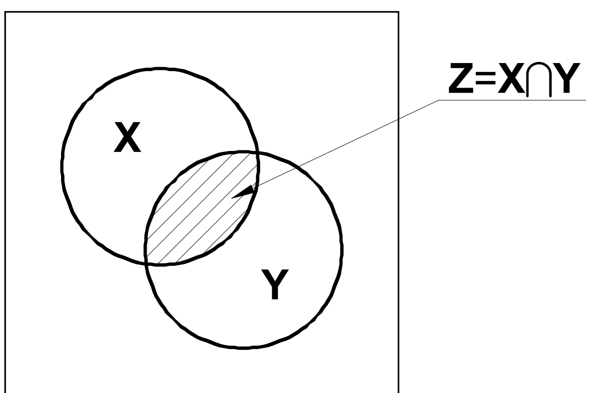
$$y_j \in Y$$

in imajo tudi lastnosti, ki so zahtevane za pripadnost k X, bomo rekli, da je množica Y vsebovana v množici X, kar označimo takole:

$$y \subset X.$$

Možno je seveda, da je le del množice Y vsebovan v X. To so torej točke, ki imajo lastnosti množice X in lastnosti množice Y. Taki množici pravimo presek in jo označimo z:

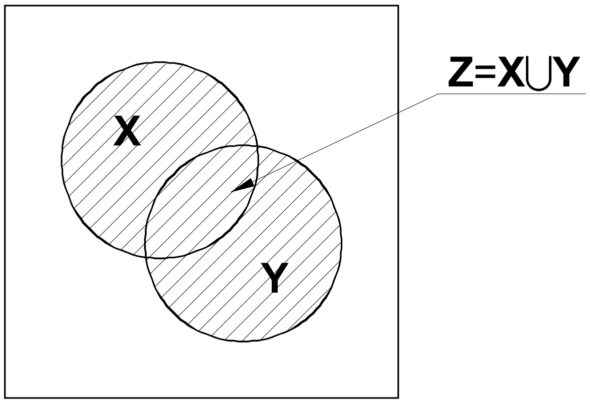
$$Z = X \cap Y$$



Če imajo vse točke v X in vse točke v Y neko skupno lastnost, lahko točke, ki imajo to lastnost, zopet povežemo v množico Z.

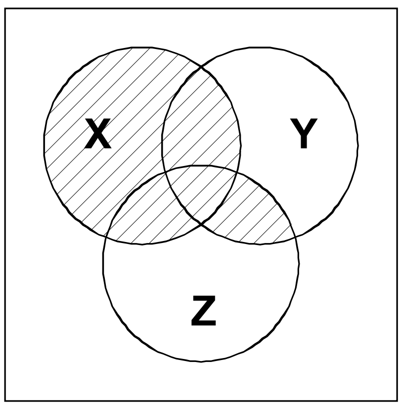
Tej množici smo rekli unija in smo jo simbolično označili kot:

Z = XUY



Z upoštevanjem gornjih definicij moremo nazorno pokazati tudi mešane operacije.

Tako na primer iz naslednje slike vidimo, da je:



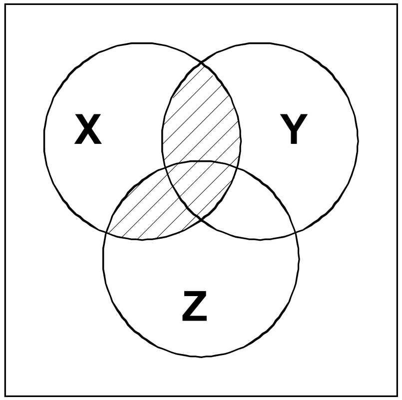
$$\mathbf{X} \cup (\mathbf{Y} \cap \mathbf{Z}) = (\mathbf{X} \cup \mathbf{Y}) \cap (\mathbf{X} \cup \mathbf{Z})$$

Kot bomo kasneje videli, je to ponazoritev postulata 3 Booleove algebre, ki pravi:

$$x + yz = (x + y)\,(x + z).$$

Podobno je iz Vennovega diagrama razvidno, da zavzameta iste točke izraza:

$$\mathbf{X} \cap (\mathbf{Y} \cup \mathbf{Z}) \quad \text{in} \quad (\mathbf{X} \cap \mathbf{Y}) \cup (\mathbf{X} \cap \mathbf{Z})$$

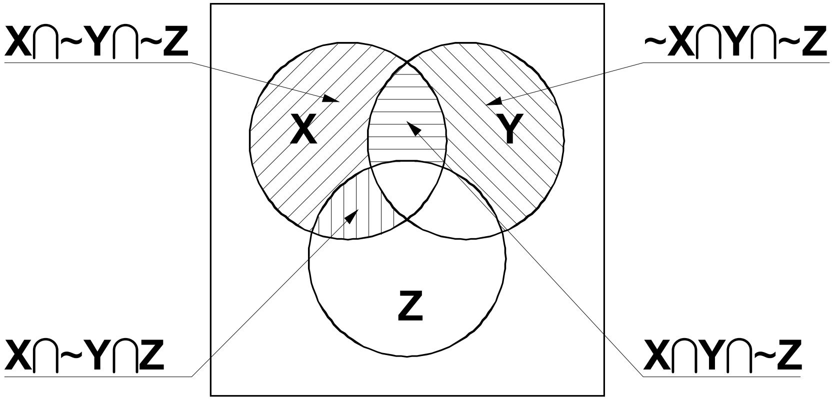


Tako smo dobili grafično ponazoritev za postulat 3´, ki pravi:

$$x(y + z) = xy + xz$$

Zgled: Ponazorite v Vennovem diagramu izraz:

$$(\mathbf{X} \cap \sim \mathbf{Y} \cap \sim \mathbf{Z}) \cup (\sim \mathbf{X} \cap \mathbf{Y} \cap \sim \mathbf{Z}) \cup (\mathbf{X} \cap \sim \mathbf{Y} \cap \mathbf{Z}) \cup (\mathbf{X} \cap \mathbf{Y} \cap \sim \mathbf{Z})$$



Poenostavljeno je to: $(\mathbf{Y} \cap \sim \mathbf{Z}) \cup (\mathbf{X} \cap \sim \mathbf{Y})$

PREKLOPNA VEZJA

2. 1. 3 Izjava

V matematični logiki je poznana tudi logika izjav. V njej lahko računamo in temu računu pravimo izjavni račun.

2. 1. 3. 1 Definicija izjave

Namesto razreda, kot možne logične spremenljivke imamo sedaj izjavo.

logična spremenljivka $\equiv$ izjava

Izjava je v matematični logiki lahko samo pravilna ali nepravilna.

pravilna izjava $\equiv 1$

nepravilna izjava $\equiv 0$

Izjave označujemo s črkami na primer x, y, z.

Vsaka izjava ima v matematični logiki lahko le dve vrednosti:

$$x \in \{0,1\}$$

Zato je možno uvesti zelo preprosto označbo, ki prevede originalno spremenljivko v negirano spremenljivko s tem, da izjavo preprosto zanikamo.

Zanikanje izjave:

x zanikano je $\bar{x}$

Dvojno zanikanje izjave:

$$\bar{\bar{x}} = x$$

PREKLOPNA VEZJA

2. 1. 3. 2 Operacije nad izjavami

V izjavnem računu imamo lahko množico različnih operacij; vendar običajno zajemamo probleme in podajamo rešitve z elementarnimi grupami operacij.

Najbolj razširjena grupa operacij je:

- disjunkcija, logično ALI (angl. OR), simbol V,+
- konjunkcija, logično IN (angl. AND), simbol &,•,
- negacija, logično NE (angl. NO), simbol -

Dve izjavi oziroma spremenljivki, x in y, sta torej disjunktivno povezani takole:

x V y oziroma x + y.

Konjuktivna povezava pa je:

x & y oziroma $x \cdot y$ oziroma $x \wedge y$

Za konjunkcijo bomo pripadajoč simbol v splošnem izpuščali: - dogovor!

V primerih, kjer bi opustitev znaka povzročila dvoumnost, pa bomo uporabili znak "•"

Pravilnost oziroma nepravilnost izjav izkazujemo v izjavnostnih tabelah

V njih lahko prikažemo tudi operacije nad posameznimi izjavami ali med njimi

Operacija disjunkcije na dvema izjavama:

$$x + y = z$$

x (fizika)	y (matematika)	z (vpis)
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Konjunkcija nad izjavama:

$$x \bullet y = z$$

x (fizika)	y (matematika)	z (vpis)
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Skupina operacij +, •, - (V, &, -) ni edina skupina, iz katere moremo izpeljati vsa pravila Booleove algebre.

Prav gotovo pa je to najenostavnejša skupina.

Pozneje bomo videli, da obstajajo še druge operacije, ki so logično ekvivalentne operacijam +, •, - (V, &, -).

2. 1. 4 Osnovni zakoni matematične logike

V matematični logiki veljajo naslednji osnovni zakoni:

1. Zakon komutativnosti: $x \cup y = y \cup x$

$x \cap y = y \cap x$

2. Zakon asociativnosti: $(x \cup y) \cup z = x \cup (y \cup z)$

$(x \cap y) \cap z = x \cap (y \cap z)$

3. Zakon distributivnosti $x \cup (y \cap z) = (x \cup y) \cap (x \cup z)$

$x \cap (y \cup z) = (x \cap y) \cup (x \cap z)$

S tem pa so dani pogoji za algebro! Matematična logika je torej algebra.

Pravimo ji tudi algebra logike, logična algebra ali Booleova algebra.

2. 2 Booleova algebra

Booleova algebra temelji na aksiomih (postulatih), ki so med seboj neodvisni in dosledni (konsistentni).

Pogoj doslednosti zahteva, da en postulat ne izključuje drugega.

Postulate predpostavimo in jih ne dokazujemo.

Postulate, ki jih najpogosteje srečujemo v literaturi, je leta 1904 predlagal Huntington.

Prvi štirje, ki izražajo dualnost Booleove algebre glede na opreraciji + ,• in so potrebni za izpeljavo teoremov, so sledeči:

$$\left.\begin{array}{ll} p_1: & x+0=x \\ p_1': & x \bullet 1=x \end{array}\right\}$$ **nevtralnost**

$$\left.\begin{array}{ll} p_2: & x+y=y+x \\ p_2': & x \bullet y=y \bullet x \end{array}\right\}$$ **komutativnost**

$$\left.\begin{array}{ll} p_3: & x+(y \bullet z)=(x+y) \bullet (x+z) \\ p_3': & x \bullet (y+z)=(x \bullet y)+(x \bullet z) \end{array}\right\}$$ **distributivnost**

$$\left.\begin{array}{ll} p_4: & x+\overline{x}=1 \\ p_4': & x \bullet \overline{x}=0 \end{array}\right\}$$ **komplementarnost**

Na osnovi teh postulatov je sedaj potrebno dokazati teoreme Boole-ove algebre.

a) Teoremi z eno spremenljivko

Teorem T_1: $x+1=1$

Dokaz:

$$\begin{aligned} x+1 &= (x+1)\bullet 1 \Leftarrow \text{zaradi postulata } p_4 \\ &= (x+1)\bullet(x+\overline{x}) \Leftarrow \text{zaradi postulata } p_3 \\ &= x+(1\bullet\overline{x}) \Leftarrow \text{zaradi postulata } p_1' \\ &= x+\overline{x} \Leftarrow \text{zaradi postulata } p_4 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Teorem T_2: $x + x = x$

Dokaz:

$$
\begin{aligned}
x + x &= (x + x) \bullet 1 \Leftarrow p_4 \\
&= (x + x) \bullet (x + \overline{x}) \Leftarrow p_3 \\
&= x + (x \bullet \overline{x}) \Leftarrow p_4' \\
&= x + 0 \Leftarrow p_1 \\
&= x
\end{aligned}
$$

Teorem T_3: $x \bullet x = x$

Dokaz:

$$
\begin{aligned}
x \bullet x &= x \bullet x + 0 \Leftarrow p_4' \\
&= x \bullet x + x \bullet \overline{x} \Leftarrow p_3' \\
&= x \bullet (x + \overline{x}) \Leftarrow p_4 \\
&= x \bullet \mathbf{1} \Leftarrow p_1' \\
&= x
\end{aligned}
$$

Teorem T_4: $\overline{\overline{x}} = x$ **Tega teorema ni potrebno dokazovati**

TeoremT_5: $x \bullet 0 = 0$

Dokaz:

$$
\begin{aligned}
x \bullet 0 &= x \bullet 0 + 0 \Leftarrow p_4 \\
&= x \bullet 0 + x \bullet \overline{x} \Leftarrow p_3 \\
&= x \bullet (0 + \overline{x}) \Leftarrow p_1 \\
&= x \bullet \overline{x} \Leftarrow p_4' \\
&= 0
\end{aligned}
$$

PREKLOPNA VEZJA

b) Teoremi z dvema spremenljivkama

Teorem T_6 $\quad x + xy = x$

Dokaz:

$$
\begin{aligned}
x + xy &= x \bullet 1 + x \bullet y \Leftarrow p_3{}' \\
&= x \bullet (1 + y) \Leftarrow T_1 \\
&= x \bullet 1 \Leftarrow p_1{}' \\
&= x
\end{aligned}
$$

Teorem T_7: $\quad x \bullet (x + y) = x$

Dokaz:

$$
\begin{aligned}
x \bullet (x + y) &= x \bullet x + x \bullet y \Leftarrow T_3 \\
&= x + x \bullet y \Leftarrow T_6 \\
&= x
\end{aligned}
$$

Teorem T_8: $\quad (x + \overline{y}) \bullet y = x \bullet y$

Dokaz:

$$
\begin{aligned}
(x + \overline{y}) \bullet y &= y \bullet (x + \overline{y}) \Leftarrow p_3{}' \\
&= y \bullet x + y \bullet \overline{y} \Leftarrow p_4{}' \\
&= y \bullet x + 0 \Leftarrow p_1 \\
&= x \bullet y
\end{aligned}
$$

Teorem T_9: $(x \bullet \overline{y}) + y = x + y$

Dokaz:
$$\begin{aligned}(x \bullet \overline{y}) + y &= y + (x \bullet \overline{y}) \Leftarrow p_3 \\ &= (y + x) \bullet (y + \overline{y}) \Leftarrow p_4 \\ &= (y + x) \bullet 1 \Leftarrow p_1' \\ &= y + x\end{aligned}$$

Teorem T_{10}: $(x + y) + \overline{x} = 1$

Dokaz:
$$\begin{aligned}(x + y) + \overline{x} &= (x + \overline{x}) + y \Leftarrow \text{zaradi } p_2 \text{ in asociativnosti} \\ &= (x + \overline{x}) + y \Leftarrow p_4 \\ &= 1 + y \Leftarrow T_1 \\ &= 1\end{aligned}$$

Teorem T_{11}: $(\overline{x} \bullet \overline{y}) \bullet x = 0$

Dokaz:
$$\begin{aligned}(\overline{x} \bullet \overline{y}) \bullet x &= (\overline{x} \bullet x) \bullet \overline{y} \text{ zaradi } p_2 \text{ in asociativnosti} \\ &= (\overline{x} \bullet x) \bullet \overline{y} \Leftarrow p_4 \\ &= 0 \bullet \overline{y} \Leftarrow p_2 \\ &= \overline{y} \bullet 0 \Leftarrow T_5 \\ &= 0\end{aligned}$$

Teorem T_{12}: $\overline{x+y}=\bar{x}\bullet\bar{y}\Rightarrow$ **1. De Morganov teorem**

Dokaz:

Da dokažemo gornji, t. i. 1. De Morganov teorem, bomo najprej dokazali, da velja:

$$(x+y)+\bar{x}\bullet\bar{y}=1$$

in da je: $$(x+y)\bullet\bar{x}\bullet\bar{y}=\mathbf{0}$$

Zaradi 3. postulata moremo prvo enačbo razširiti takole:

$$(x+y)+\bar{x}\bullet\bar{y}=\underbrace{\left[(x+y)+\bar{x}\right]}_{1}\bullet\underbrace{\left[(x+y)+\bar{y}\right]}_{1}=1$$

Za desni del enačbe je očitno, da je enak 1, kar je bilo treba dokazati.

Za drugo enačbo velja razširitev:

$$(x+y)\bullet\bar{x}\bullet\bar{y}=\underbrace{\left[x\bullet\bar{x}\bullet\bar{y}\right]}_{0}+\underbrace{\left[y\bullet\bar{x}\bullet\bar{y}\right]}_{0}=0$$

Tudi tu zlahka spoznamo, da je desni del enak 0. če privzamemo:

$x+y=A$ in $\bar{x}\bullet\bar{y}=B$, smo torej ugotovili, da je:

$A + B = 1$ in $A \bullet B = 0$

Kadar za dve spremenljivki A in B veljata gornji enačbi, pravimo, da sta si komplementarni. Tedaj velja:

$\bar{A}=B$ oziroma $A=\bar{B}$

Z upoštevanjem dogovora oznak za A in B sledi 1. De Morganov teorem:

$\overline{x+y}=\bar{x}\bullet\bar{y}$ **ki smo ga s tem dokazali !!!**

PREKLOPNA VEZJA

Teorem T_{13}: $\overline{x \bullet y} = \overline{x} + \overline{y}$

To je 2, t. i. dualni De Morganov teorem

Dokaz:

V T 12 smo ugotovili, da velja splošno:

$$\overline{a + b} = \overline{a} \bullet \overline{b}$$

Naj bo:

$$x = \overline{a},\; y = \overline{b}; \quad \text{oziroma } \overline{x} = a,\; \overline{y} = b$$

Tedaj iz prejšnjega teorema sledi:

$$\overline{\overline{x} + \overline{y}} = x \bullet y$$

Če negiramo obe strani enačbe, dobimo:

$$\overline{\overline{\overline{x} + \overline{y}}} = \overline{x \bullet y}$$

Ker pa je negacija negacije prvotna spremenljivka, dobimo:

$$\overline{x} + \overline{y} = \overline{x \bullet y}$$

Kar je bilo potrebno dokazati !!!

De Morganova teorema lahko dokažemo tudi neposredno z izjavnostno tabelo.

Prav tako lahko oba De Morganova teorema dokažemo tudi v Vennovih diagramih

2. 3 Funkcija Booleovih spremenljivk ali preklopna funkcija

Definicija preklopne funkcije

Predstavljajmo si množico Booleovih spremenljivk, ki jo sestavljajo spremenljivke:

$$x_1, x_2, \ldots, x_n$$

Takšna neodvisna spremenljivka lahko zavzame v našem primeru samo dve vrednosti in z "n" neodvisnimi spremenljivkami lahko naredimo zato 2^n različnih kombinacij.

Če vsaki od teh možnih kombinacij pripišemo oziroma dodelimo le eno od obeh vrednosti, smo ustvarili neko funkcijo teh spremenljivk.

Ali povedano drugače, izraz v Booleovi algebri, ki vsebuje neodvisne spremenljivke in njihove negacije ali komplementarne spremenljivke ter operaciji konjunkcije in disjunkcije, se imenuje Booleova ali preklopna funkcija.

Preklopne funkcije bomo pisali v naslednji obliki:

$$f(x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots, x_n),$$

ki zavzamejo le vrednosti ali 0 ali 1. Veljata torej področji:

$$0 \le x_i \le 1; \quad i = 1, 2, \ldots\ldots\ldots, n$$

in

$$0 \le f(x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots, x_n) \le 1.$$

Preklopne funkcije so funkcije algebre logike, zato jih imenujemo tudi logične funkcije. Ker je algebra logike Booleova algebra, jih bomo imenovali Booleove funkcije.

Ker lahko preklopne funkcije zavzamejo le dve različni vrednosti, pravimo, da sodijo v takoimenovano množico dvovrednostnih funkcij, kar zapišemo z izrazom:

$f(x_1,x_2,........,x_n) \in P_2$ - odvisne spremeljnivke ali funkcije

in

$x_1, x_2,..., x_n$ – neodvisne spremenljivke

V množici P_2 so torej prav vse dvojiške preklopne funkcije.

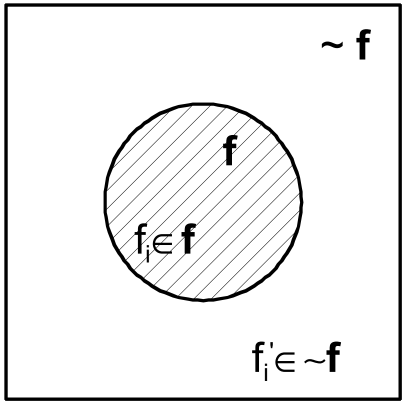
$f_1\ (x_1, x_2,..., x_n), f_2\ (x_1, x_2,..., x_n), f_3\ (x_1, x_2,..., x_n),.....;$

V algebri logike pa obstojajo še druge preklopne funkcije, ki lahko zavzamejo več različnih vrednosti. Tem funkcijam pravimo večvrednostne logične funkcije in jih zapisujemo s splošnim izrazom:

$f(x_1,x_2,........,x_n) \in P_k$; pri čemer je $k > 2$

Vendar je potrebno že na tem mestu poudariti, da so zaenkrat računalniške strukture oziroma sistemi grajeni na osnovi dvojiških preklopnih funkcij.

Podobno kot smo Booleove spremenljivke predstavili v Vennovem diagramu, lahko storimo tudi s funkcijami Booleovih spremenljivk.



Poljubno preklopno funkcijo:

$$f(x_1,x_2,........,x_n)$$

lahko podamo tudi tabelarično; na ta način pridemo do pravilnostne tabele, ki smo jo spoznali pri izjavah.

Neodvisna spremenljivka x_i naj zavzame samo vrednost 0 ali 1

"n" spremenljivk na vhodu z dvema vrednostima da 2^n različnih vhodnih kombinacij.

Vsako teh kombinacij lahko predstavimo kot vektor! Tako imamo na vhodu

lahko 2^n različnih vektorjev.

$\mathbf{w_i} = w_{i1}, w_{i2},..., w_{in}$ **; kjer je:**

w_{ij} **i-ta vrednost spremenljivke x_j ;** $j = 1,2,..., n$

Funkcijo $f\ (x_1, x_2,..., x_n)$ lahko sedaj zapišemo kot:

$$f(w_i) \in \{0,1\}$$

Z vektorskim zapisom je izjavnostna tabela takšna:

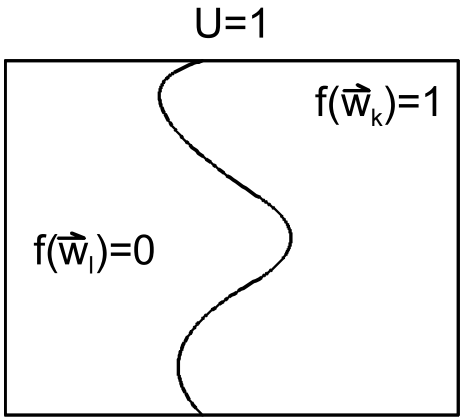
$x_1, x_2,\ldots, x_n$	$f(x_1, x_2,\ldots, x_n)$
w_0	$f(w_0)$
w_1	$f(w_1)$
w_2	$f(w_2)$
.	.
.	.
.	.
w_{2^n-2}	$f(w_{2^n-2})$
w_{2^n-1}	$f(w_{2^n-1})$

V splošnem zavzame funkcija pri k vektorjih vrednost 1 in pri l vektorjih vrednost 0.

$$f(w_k) = 1$$

$$f(w_l) = 0$$

S tem je univerzalni razred U = 1 razdeljen na dva dela. Preklopna funkcija je torej "odločila" kaj spada v razred funkcijskih vrednosti 1 in kaj v razred funkcijskih vrednosti 0.



S pomočjo De Morganovih teoremov lahko dokažemo, da iz vsake funkcije f dobimo njej pripadajočo funkcijo $\overline{f}$ tako, da namesto originalnih neodvisnih spremenljivk vzamemo komplementarne, operatorje konjunkcije in disjunkcije pa medsebojno zamenjamo.

K vsaki Booleovi funkciji lahko določimo tudi njeno dualno funkcijo, ki je definirana takole:

$$f_d(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \overline{f}(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n)$$

To funkcijo dobimo preprosto tako, da v prvotni funkciji f medsebojno zamenjamo operatorja konjunkcije in disjunkcije.

Pripomnimo še to, da sta tudi obe možni vrednosti funkcije druga drugi dualni. Torej: 0 je dualna vrednost k vrednosti 1 in 1 je dualna vrednost k vrednosti 0.

2. 4 Kanonične ali popolne normalne oblike Boole-ovih funkcij, mintermi in makstermi

2.4.1 Definicija minterma in maksterma

Definicija

$$x^{w} = \begin{cases} x, & \text{če je } w = 1 \\ \overline{x}, & \text{če je } w = 0 \end{cases}$$

Definicija:

Minterm "n" spremenljivk je Booleov produkt ali konjunkcija maksimalne dolžine teh n spremenljivk, ki zavzame vrednost 1 samo pri "i – ti" kombinaciji vhodnih spremenljivk oziroma "i – tem" vhodnem vektorju.

Pri tem se vsaka spremenljivka lahko pojavi v resnični ali negirani obliki.

$$m_i = x_1^{w_{i1}} \bullet x_2^{w_{i2}} \bullet\bullet\bullet x_n^{w_{in}} \qquad i = 0,\ 1,\ \ldots\ 2^n - 1$$

Definicija:

Maksterm "n" spremenljivk je Booleova vsota ali disjunkcija maksimalne dolžine teh "n" spremenljivk, ki zavzame vrednost 0 samo pri "i – ti" kombinaciji vhodnih spremenljivk oziroma "i – tem" vhodnem vektorju.

Pri tem se vsaka spremenljivka lahko pojavi v svoji resnični ali negirani obliki.

Minterme označujemo z "m_i", maksterme pa z "M_i". Vrednost indeksa pišemo kot dekadno število, ki izraža dvojiško vrednost vektorja, kateremu pripada m_i ali M_i.

$$x_1 x_2 x_3;\ [1,1,1] \quad i = 1\times 2^0 + 1\times 2^1 + 1\times 2^2 = 7 \Rightarrow m_7;\ \text{oziroma } M_7$$

$$\overline{x}_1 \overline{x}_2 \overline{x}_3;\ [0,0,0] \quad i = 0\times 2^0 + 0\times 2^1 + 0\times 2^2 = 0 \Rightarrow M_0;\ \text{oziroma } m_0$$

Z "n" spremenljivkami dobimo "2^n" mintermov in "2^n" makstermov !!!

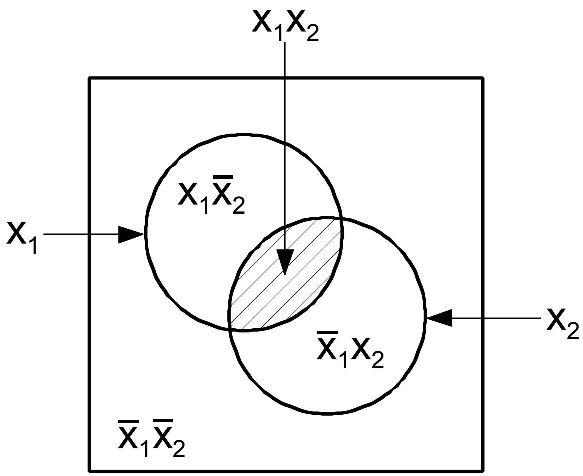
Vendar njihovi indeksi tečejo od "0" do "$2^n - 1$" !!!

Za tri spremenljivke x_1, x_2, x_3 imamo naslednje mi, Mi:

spremenljivke	mintermi	makstermi
000	$\bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3$	$\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3$
001	$\bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3$	$\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + x_3$
•••	•••	•••
111	$x_1 x_2 x_3$	$x_1 + x_2 + x_3$

Za Boole-ove funkcije, ki so izražene z vsoto mintermov ali produktom makstermov, pravimo, da so v popolni normalni ali kanonični obliki.

Minterme lahko nazorno pokažemo v Vennovih diagramih :



2. 4. 2 Kanonična ali popolna disjunktivna normalna oblika

Ta oblika Booleove funkcije je, kot smo že omenili, vsota mintermov v konjunkciji s funkcijsko vrednostjo:

$$f(x_1 x_2 \ldots x_n) = \sum_{i=0}^{2^n - 1} f_i m_i$$

Simbol predstavlja disjunkcije (oziroma logično vsoto), f_i pa je lahko 0 ali 1.

2. 4. 3 Kanonična ali popolna konjuktivna normalna oblika

Analogno definiramo kanonično ali popolno konjuktivno normalno obliko Booleove funkcije. To je produkt makstermov v disjunkciji s funkcijsko vrednostjo:

$$f(x_1 x_2 \ldots x_n) = \prod_{i=0}^{2^n - 1} (f_i + M_i).$$

Simbol predstavlja konjunkcije (logični produkt), f_i pa funkcijsko vrednost, ki je lahko 0 ali 1. če je funkcija v disjunktivni obliki, se v vsoti pojavljajo le členi, ki imajo:

f_i = 1, če pa je v konjunktivni obliki, pa le členi z f_i = 0.

Zgled

$$f(x_1 x_2 x_3) = 1 \bullet \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 + 1 \bullet x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 + 1 \bullet x_1 x_2 x_3$$

Kakšni so f_i pri disjunktivni kanonični obliki?

Prvi člen vsebuje m_0, drugi m_4, tretji pa m_7, torej so f_0 = f_4 = f_7 = 1, ostali f_i pa so 0.

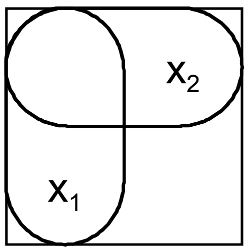
Funkcijo moremo torej izpisati:

$f(x_1,x_2,x_3) = 1m_0 + 0m_1 + 0m_2 + 0m_3 + 1m_4 + 0m_5 + 0m_6 + 1m_7 = m_0 + m_4 + m_7$

Zadnji zapis je dogovor, ki se ga moramo zavedati, kadar funkcijo pišemo v tej obliki.

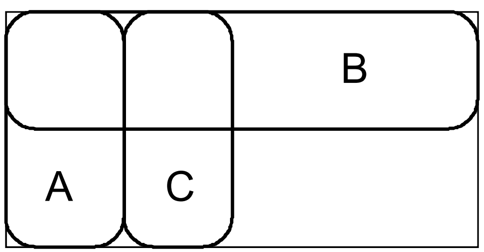
2. 5 Veitchev diagram

Posebna vrsta Venn-ovega diagrama je *Veitchev* diagram. Iz Venn-ovega diagrama nastane Veitchev diagram, če kroge spremenimo v pravokotnike, ki jih sistematično razporedimo.



→

x_1x_2	$\bar{x}_1x_2$
$x_1\bar{x}_2$	$\bar{x}_1\bar{x}_2$



→

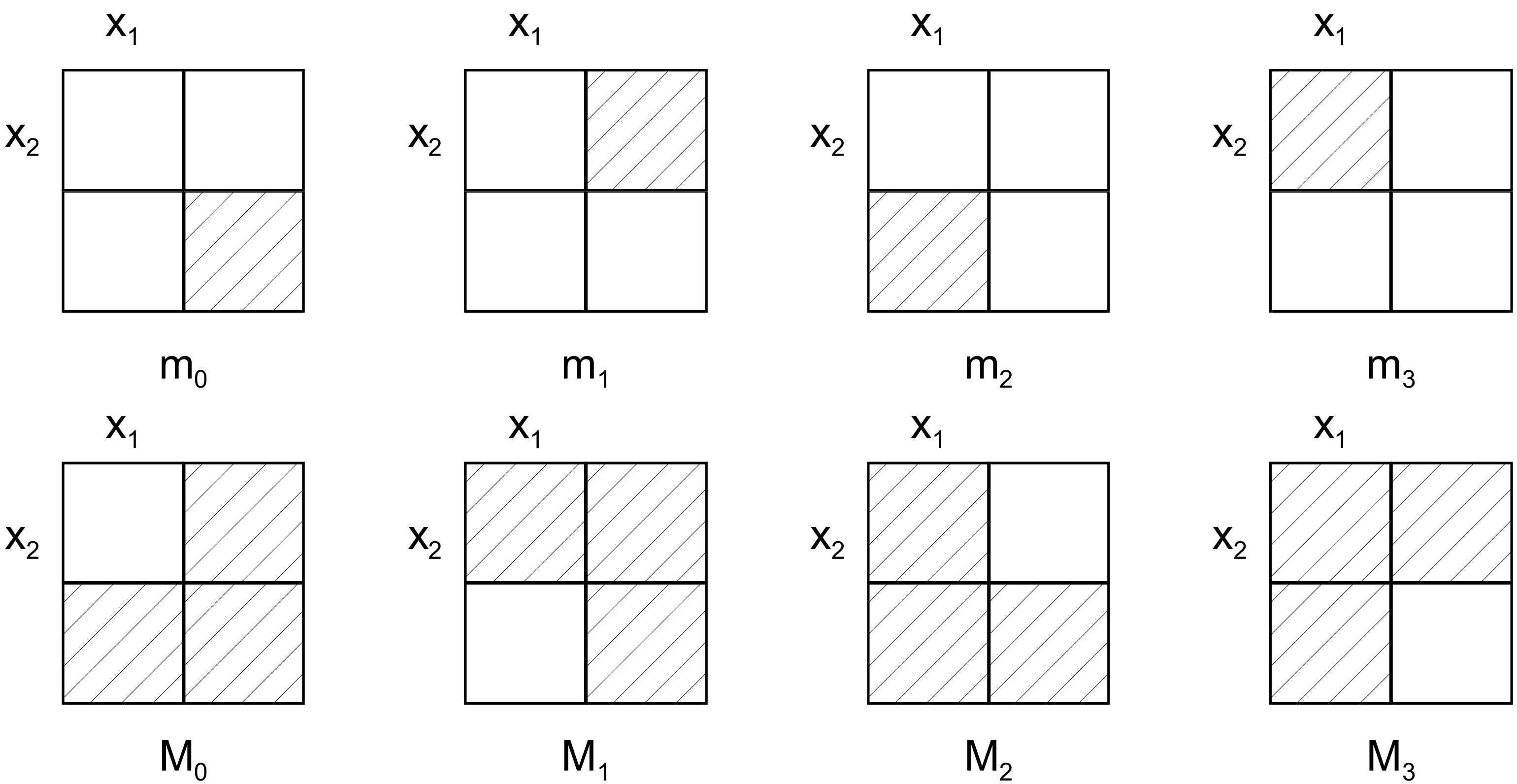
	A	A		
B	ABC m_6	ABC m_7	ABC m_3	ABC m_2
	ABC m_4	ABC m_5	ABC m_1	ABC m_0
		C	C	

Na robove diagrama napišemo spremenljivke, ki se v ustreznem stolpcu ali vrstici pojavijo v svoji originalni vrednosti.

Zlahka opazimo, da predstavlja vsak kvadrat en minterm.

Minterm moremo torej tolmačiti kot najmanjšo površino Veitchevega diagrama.

Maksterm pa je (razen celotne površine) **največja** površina, ki jo ločimo v Vitchevem diagramu.



$M_0 = \bar{x}_1 + \bar{x}_2$ $\quad$ $M_1 = \bar{x}_1 + x_2$ $\quad$ $M_2 = x_1 + \bar{x}_2$ $\quad$ $M_3 = x_1 + x_2$

Iz gornjih prikazov mintermov zlahka ugotovimo, da veljajo naslednje enakosti:

$$\overline{M_0} = m_3$$

$$\overline{M_1} = m_2$$

$$\overline{M_2} = m_1$$

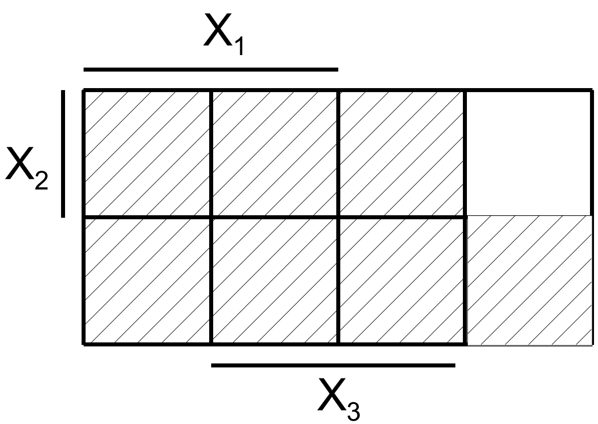
$$\overline{M_3} = m_0$$

Enakosti med negacijami makstermov in mintermi lahko dokažemo med drugim tudi s pomočjo De Morganovih teoremov.

Še prej pa si poglejmo primer s tremi spremenljivkami:

$X_1 + \overline{X}_2 + X_3 = \mathbf{M_5}$**; kar ostane je minterm:**

$\overline{X}_1\ X_1\ \overline{X}_1 = \mathbf{m_2}$



$$x_1x_2\overline{x}_3 + x_1x_2x_3 + \overline{x}_1x_2x_3 + x_1\overline{x}_2\overline{x}_3 + x_1\overline{x}_2x_3 + \overline{x}_1\overline{x}_2x_3 + \overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3 = x_1x_2 + \overline{x}_1x_3 + x_1\overline{x}_2 + \overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3 =$$
$$= x_1 + \overline{x}_1(x_3 + \overline{x}_2\overline{x}_3) = x_1 + \overline{x}_1(x_3 + \overline{x}_2) = x_1 + \overline{x}_2 + x_3$$

Zadnji dve poenostavitvi smo izvršili zaradi 9. teorema Booleove algebre.

Iz tega sledi, da je komplementarni (to je negirani) del vsakega minterma en maksterm in obratno.

Veitchev diagram za več spremenljivk dobimo tako, da za vsako novo spremenljivko podvojimo površino diagrama.

x_1

x_2	m_6	m_7	m_3	m_2
	m_4	m_5	m_1	m_0

x_3

x_1

x_2	m_{12}	m_{14}	m_6	m_4	
	m_{13}	m_{15}	m_7	m_5	x_4
	m_9	m_{11}	m_3	m_1	
	m_8	m_{10}	m_2	m_0	

x_3

x_1

x_2

	m_{28}	m_{30}	m_{22}	m_{20}
	m_{29}	m_{31}	m_{23}	m_{21}
	m_{25}	m_{27}	m_{19}	m_{17}
x_4	m_{24}	m_{26}	m_{18}	m_{16}

x_3

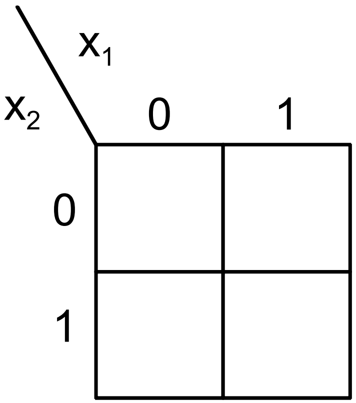
$\bar{x}_1$

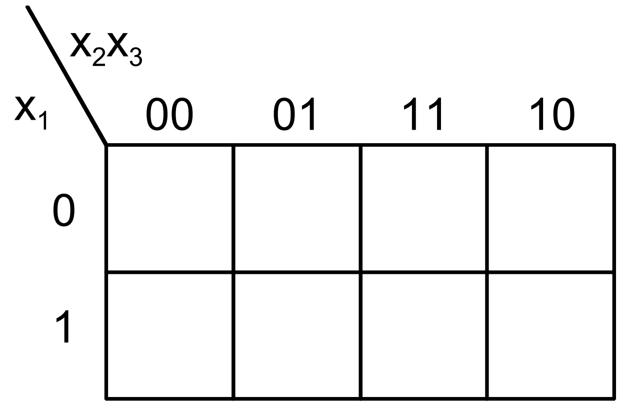
x_2

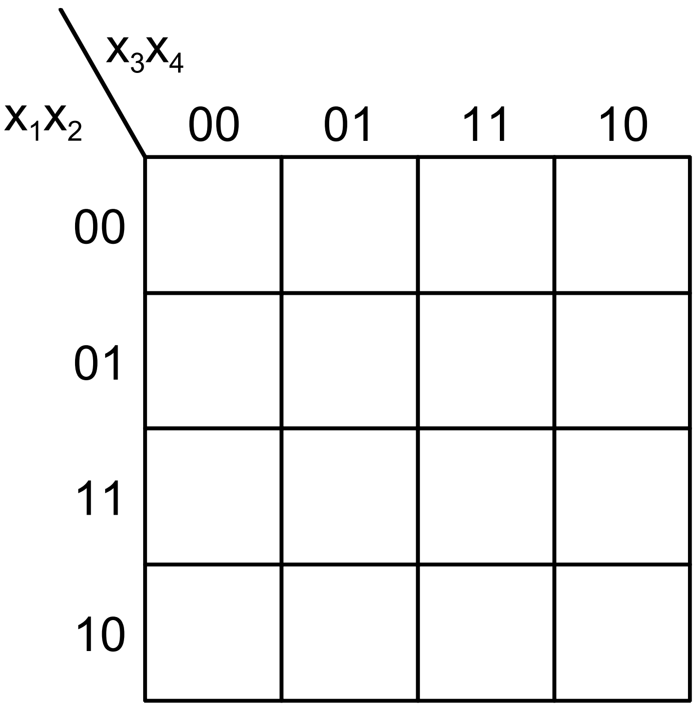
m_{12}	m_{14}	m_6	m_4	
m_{13}	m_{15}	m_7	m_5	
m_9	m_{11}	m_3	m_1	x_5
m_8	m_{10}	m_2	m_0	

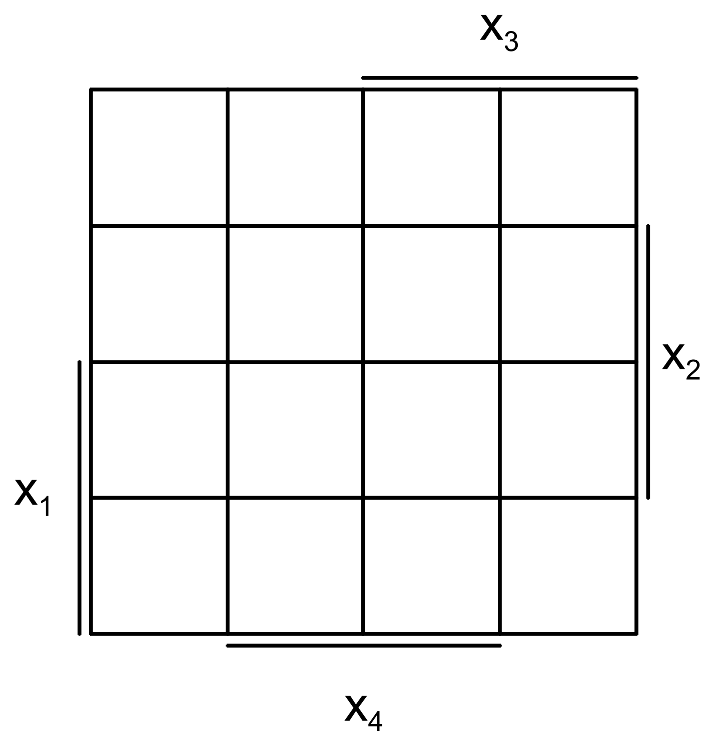
x_3

Veitchovem digramu podoben je Karnaughjev diagram, ki uporablja drugo razporeditev neodvisnih spremenljivk, kar je prikazano na spodnji sliki.









2. 6 Povezave med mintermi in makstermi

Kar smo videli že na konkretnih zgledih iz Veitchevega diagrama, velja tudi splošno:
negacija minterma m_i je enaka :

$$\bar{m}_i = M_{2^n-1-i}$$

ali $\bar{m}_i = M_j$

Podobno je negacija makstermov enaka:

$$\bar{M}_i = m_{2^n-1-i}$$

Ob negaciji mintermov se osnovne vrednosti spremenljivke pretvorijo v svoje negacije.

Vsota indeksov je splošno $2^n -1$, zato velja:

$i+j = 2^n -1$ in iz tega je:

$j = 2n - 1 - i$.

Prav tako lahko pokažemo, da je vsota vseh mintermov enaka 1.

$$\sum_{i=0}^{2^n-1} m_i = 1$$

Dokažemo ga s posploševanjem:

$$A + \bar{A} = 1$$

$$\left(A+\bar{A}\right)\left(B+\bar{B}\right) = AB + \bar{A}B + A\bar{B} + \bar{A}\bar{B} = 1$$

$$\left(A+\bar{A}\right)\left(B+\bar{B}\right)\left(C+\bar{C}\right) = ABC + AB\bar{C} + \ldots = 1$$

PREKLOPNA VEZJA

Izraz:

$$\sum_{i=0}^{2^n-1} m_i = 1$$

Imenujemo tudi preklopna konstanta 1

če poiščemo komplementarno vrednost gornje enačbe, dobimo:

$$\prod_{i=0}^{2^n-1} M_i = 0$$

Ta izraz pravi, da je produkt vseh makstermov enak nič.

Dokaz: $m_0 + m_1 + m_2 \ldots + m_{2^n-1} = 1$

Negirajmo obe strani enačbe :

$$\overline{m_0 + m_1 + m_2 \ldots + m_{2^n-1}} = \overline{1}$$

$$\overline{m}_0 \bullet \overline{m}_1 \bullet \overline{m}_2 \bullet \ldots \bullet \overline{m}_{2^n-1} = 0$$

$$M_{2^n-1} \bullet M_{2^n-2} \bullet M_{2^n-3} \bullet \ldots \bullet M_0 = 0, \text{torej:}$$

$$\prod_{i=0}^{2^n-1} M_i = 0,$$

Podobno imenujemo izraz:

$$\prod_{i=0}^{2^n-1} M_i = 0$$

Preklopna konstanta 0

PREKLOPNA VEZJA

Iz Veitchevega diagrama pa lahko razberemo še naslednje zveze:

$m_i m_j = 0$ za $i \neq j$; $M_i + M_j = 1$ za $i \neq j$

$m_i + M_{2^n-1-i} = 1$ $m_i M_{2^n-1-i} = 0$

Zaradi komutativnosti konjunkcije in disjunkcije lahko gornja izraza zapišemo tudi takole:

$M_i + m_{2^n-1-i} = 1$ $M_i m_{2^n-1-i} = 0$

2.7. Dodatni načini predstavitve Booleove funkcije

Že doslej smo spoznali, da preklopno funkcijo lahko podamo na različne načine:

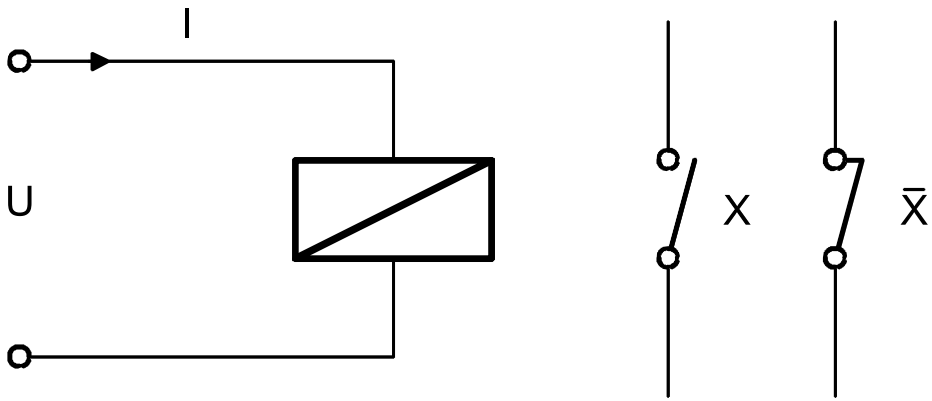
- analitični zapis,

- izjavnostna tabela,

- grafični prikaz v Vennovem oziroma Veitchevem diagramu,

Poleg teh poznamo še nekatere druge načine, ki prispevajo k nazornosti ali praktičnosti pri fizikalni realizaciji preklopne funkcije.

2. 7. 1 Ponazarjanje Booleovih funkcij s kontakti



Naj ponazarja sklenjen kontakt 1, odprt pa 0.

če označimo z X = 1 dejstvo, da teče skozi navitje releja tok, pri X = 0 pa toka ni, moremo delovne kontakte označiti z X, mirovne pa z $\overline{X}$.

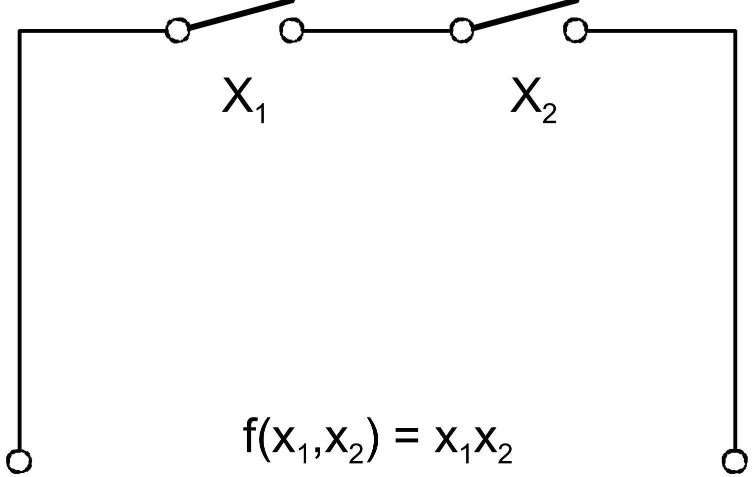
Pri vseh kontaktnih shemah velja, da so vsi kontakti risani v položaju, ko je spremenljivka X = 0 in negirana spremenljivka = 1.

D e l o v n i kontakt

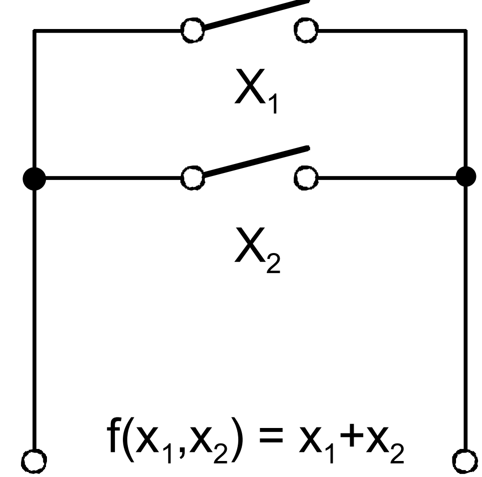
delovni kontakt

M i r o v n i kontakt

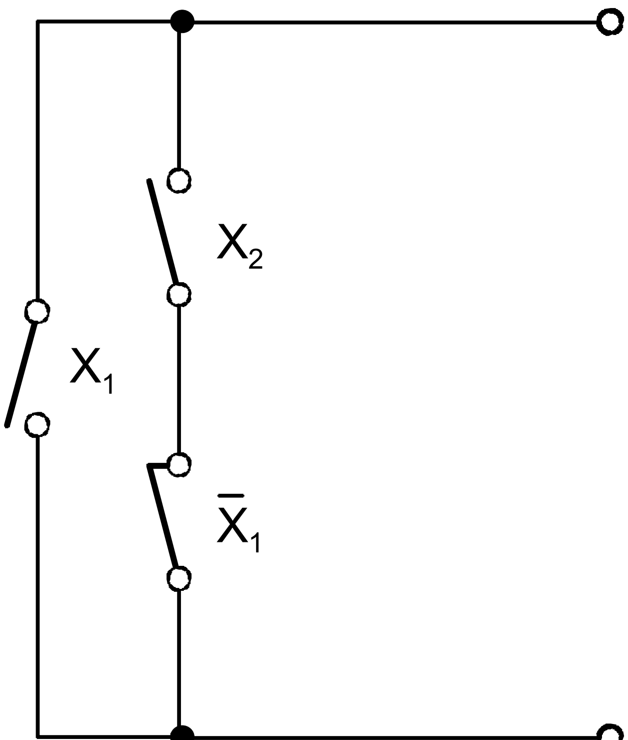
mirovni kontakt



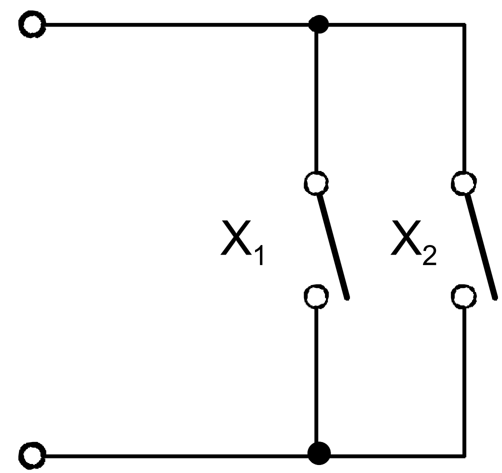
$f(x_1,x_2) = x_1x_2$

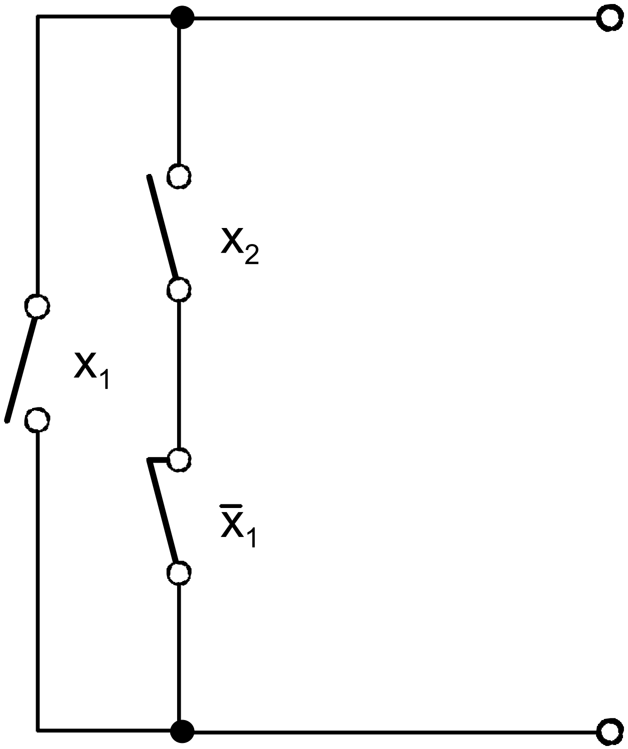


$f(x_1,x_2) = x_1+x_2$

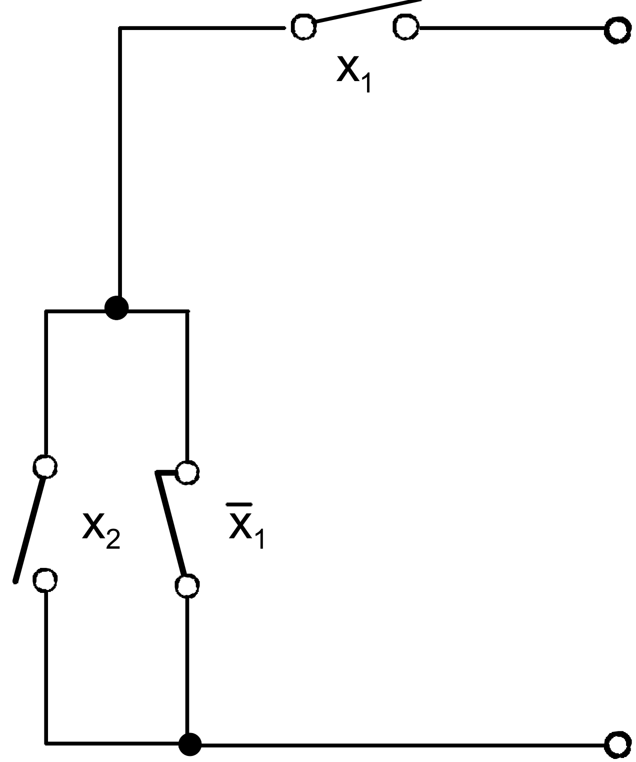


$f(x_1,x_2) = x_1+\bar{x}_1x_2 = x_1+x_2$





$f = x_1 + \bar{x}_1 x_2 = x_1 + x_2$



$f = x_1(\bar{x}_1 + x_2) = x_1 x_2$

Leva poenostavitev sledi iz 9. teorema. V logičnem smislu $\bar{x}_1$ torej ničesar ne prispeva h kontaktni kombinaciji. Desna pa predstavlja 8. teorem Booleove algebre.

Zgled:

Realizirati je treba vezje, ki naj zaključi tokokrog za X_0, če pritegneta dva ali pa eden izmed relejev X_1 X_2 X_3, nasprotno pa naj ostane tokokrog odprt, če ne pritegne nobeden ali pa vsi trije releji.

Kontakti so x_1, x_2, x_3. Pogoji za sklenjen tokokrog pa so:

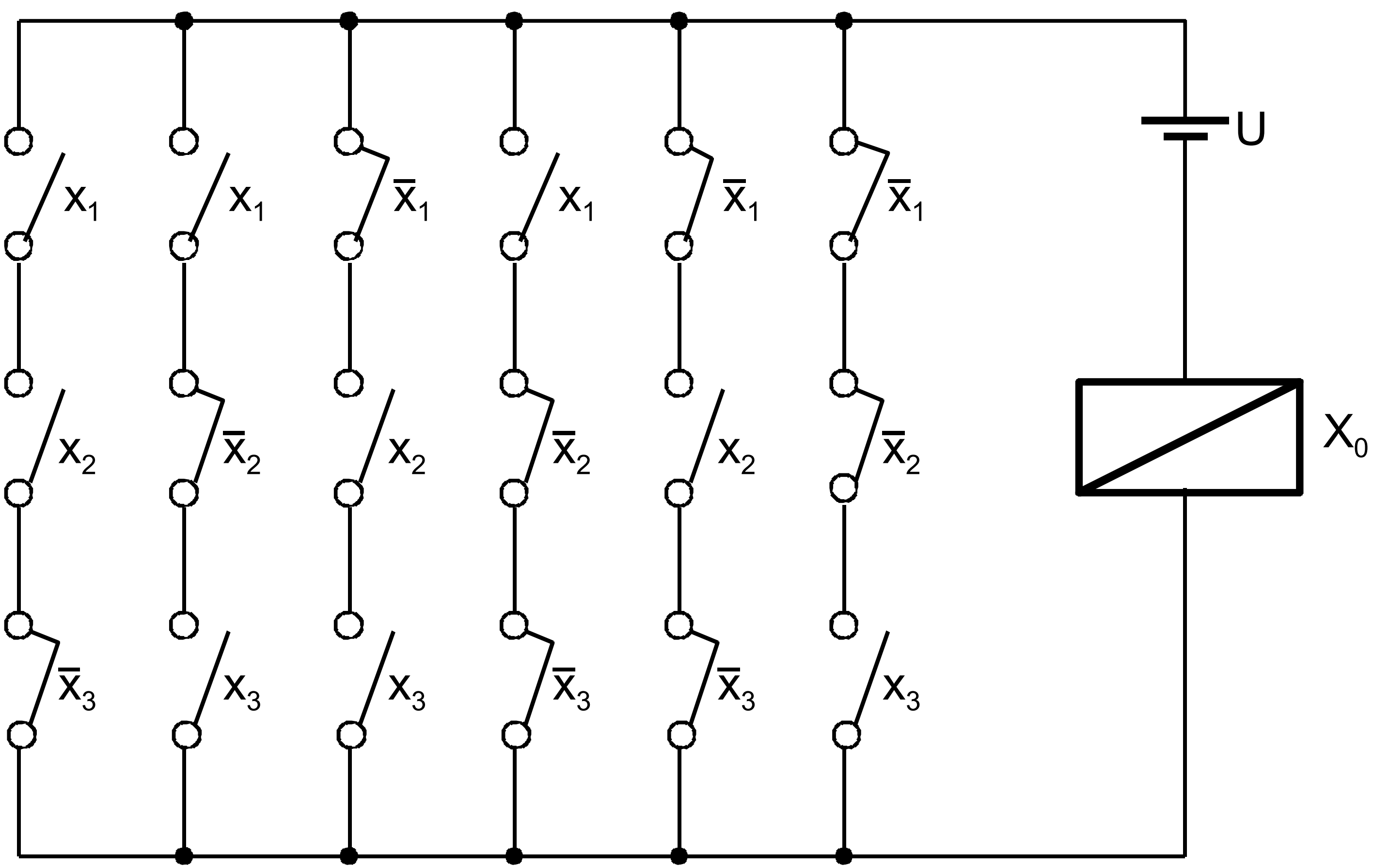
$x_1 x_2 \bar{x}_3$, $x_1 \bar{x}_2 x_3$, $\bar{x}_1 x_2 x_3$, $x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3$, $\bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3$, $\bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3$

Rele bo pritegnil, če bo izpolnjen katerikoli zgornji pogoj, kar moremo izraziti z disjunkcijo:

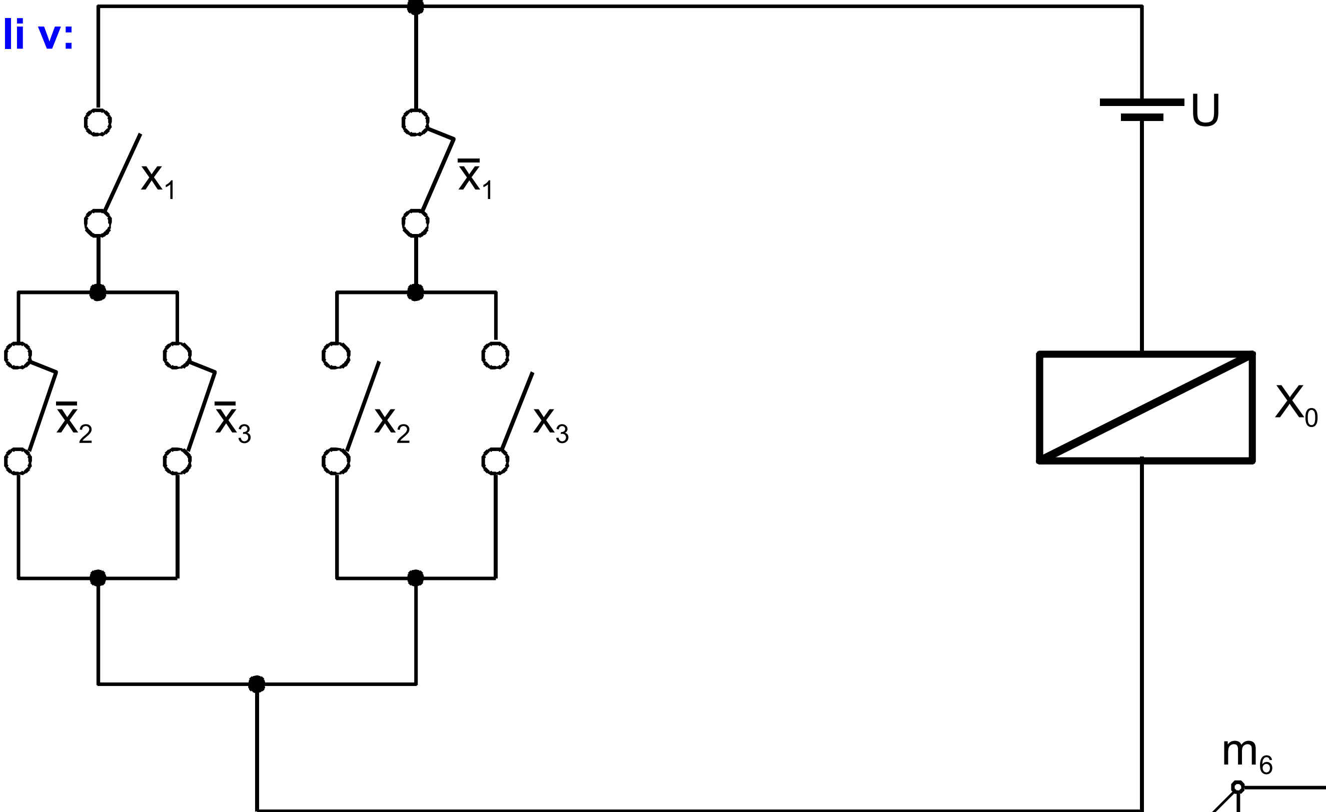
$$f(x_1,x_2,x_3) = X_0 = x_1x_2\overline{x}_3 + x_1\overline{x}_2x_3 + \overline{x}_1x_2x_3 + x_1\overline{x}_2\overline{x}_3 + \overline{x}_1x_2\overline{x}_3 + \overline{x}_1\overline{x}_2x_3$$

Z uporabo teoremov in postulatov Booleove algebre lahko gornji izraz znatno poenostavimo.

Tako smo vezje:

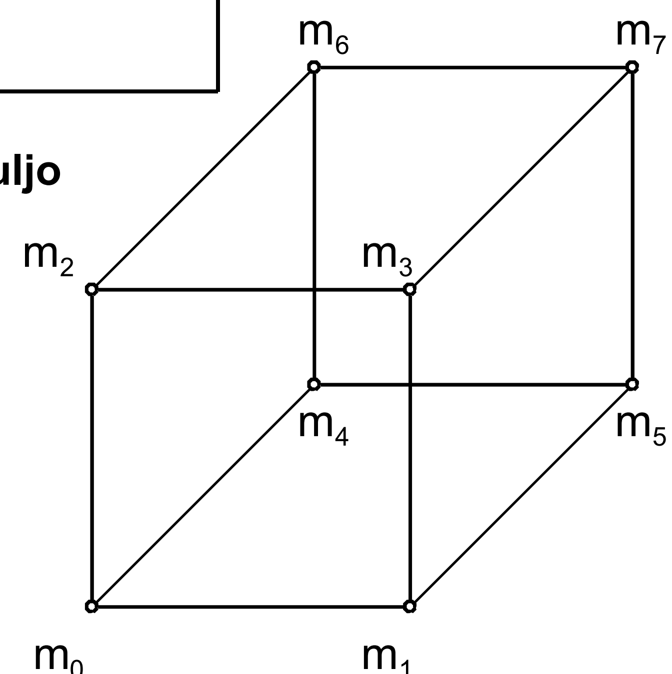


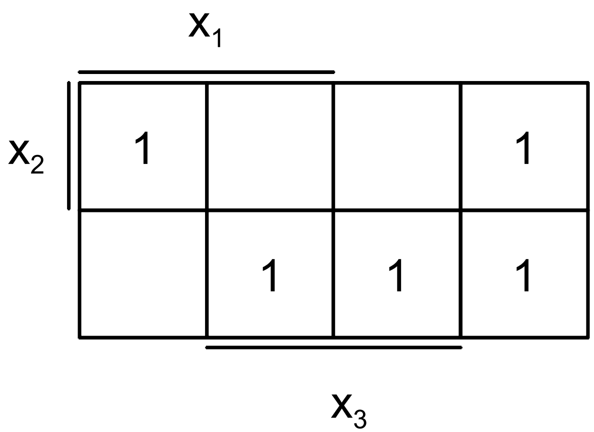
poenostavili v:

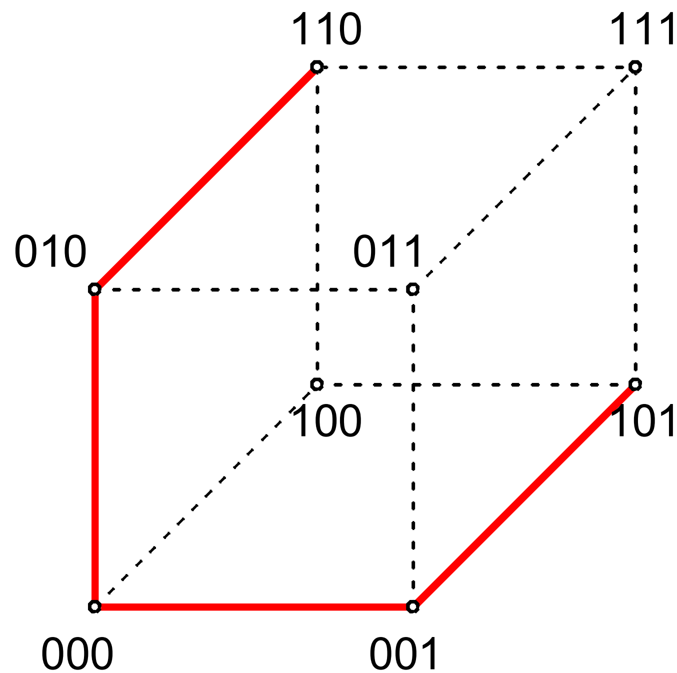


2. 7. 2 Predstavitev preklopne funkcije s prostorsko krivuljo

	x_1	x_1		
x_2	m_6	m_7	m_3	m_2
	m_4	m_5	m_1	m_0
		x_3	x_3	







2. 7. 3 Numerične sheme preklopnih funkcij

Preklopno funkcijo lahko predstavimo z numerično shemo. čeprav v principu lahko za to uporabimo katerokoli številsko osnovo, uporabljamo v praksi v ta namen le osnovi 2 in 10.

Vzemimo preklopno funkcijo, ki ima naslednjo PDNO:

$$f\,(x_1, x_2, x_3, x_n) = m_2 + m_3 + m_6 + m_{10} + m_{11} + m_{14} + m_{15}$$

To funkcijo lahko zapišemo zgolj z indeksi, ki pomenijo indekse mintermov ali makstermov, kadar gre za PKNO.

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = {}^{4}V\,(2, 3, 6, 10, 11, 14, 15)$$

To isto funkcijo pa lahko zapišemo tudi takole:

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=\begin{bmatrix}0010\\0011\\0110\\1010\\1011\\1110\\1111\end{bmatrix}$$

V vrstici nastopajo vhodni vektorji pri katerih zavzame funkcija vrednost "1", zapis pa je dvojiški.

Takšnemu zapisu pravimo tudi pokritje (cover) preklopne funkcije.

Vsaka vrstica predstavlja eno ogljišče (cub) preklopne funkcije.

2. 7. 4 Simbolne sheme preklopnih funkcij

2. 7. 4. 1 Standardi na področju preklopnih vezij

Za grafično podajanje strukture preklopnih vezij se uporabljajo posebni simboli.

V literaturi lahko najdemo zelo različne vrste teh simbolov, kar pogosto povzroča težave pri analizi in sintezi vezij.

Uporabljeni standardni simboli so:

IEEE – standard,

MIL – standard,

DIN – standard,

IEC – mednarodni standard, ki ga izdaja mednarodni komite za elektrotehniko

IEEE standard je standard ameriškega elektrotehniškega društva. Ta standard ima za področje preklopnih vezij oznako: ANSI Y32, Vol. 14 iz leta 1973.

MIL standard je ameriški vojaški standard, ki ima za to področje oznako 806B.

Pri nas se je v preteklosti uporabljalo tudi nemške standarde DIN.

Poenotenje, ki je na tem področju nujno, sicer poteka, vendar zelo počasi. To poenotenje je omogočeno s sprejetjem IEC standardov za področje digitalne tehnike.

Obstojata dva ločena standarda za to področje:

IEC -Publication 617-12, ki določa simbole in

IEC -Publication 113-7, ki določa sheme, diagrame in tabele.

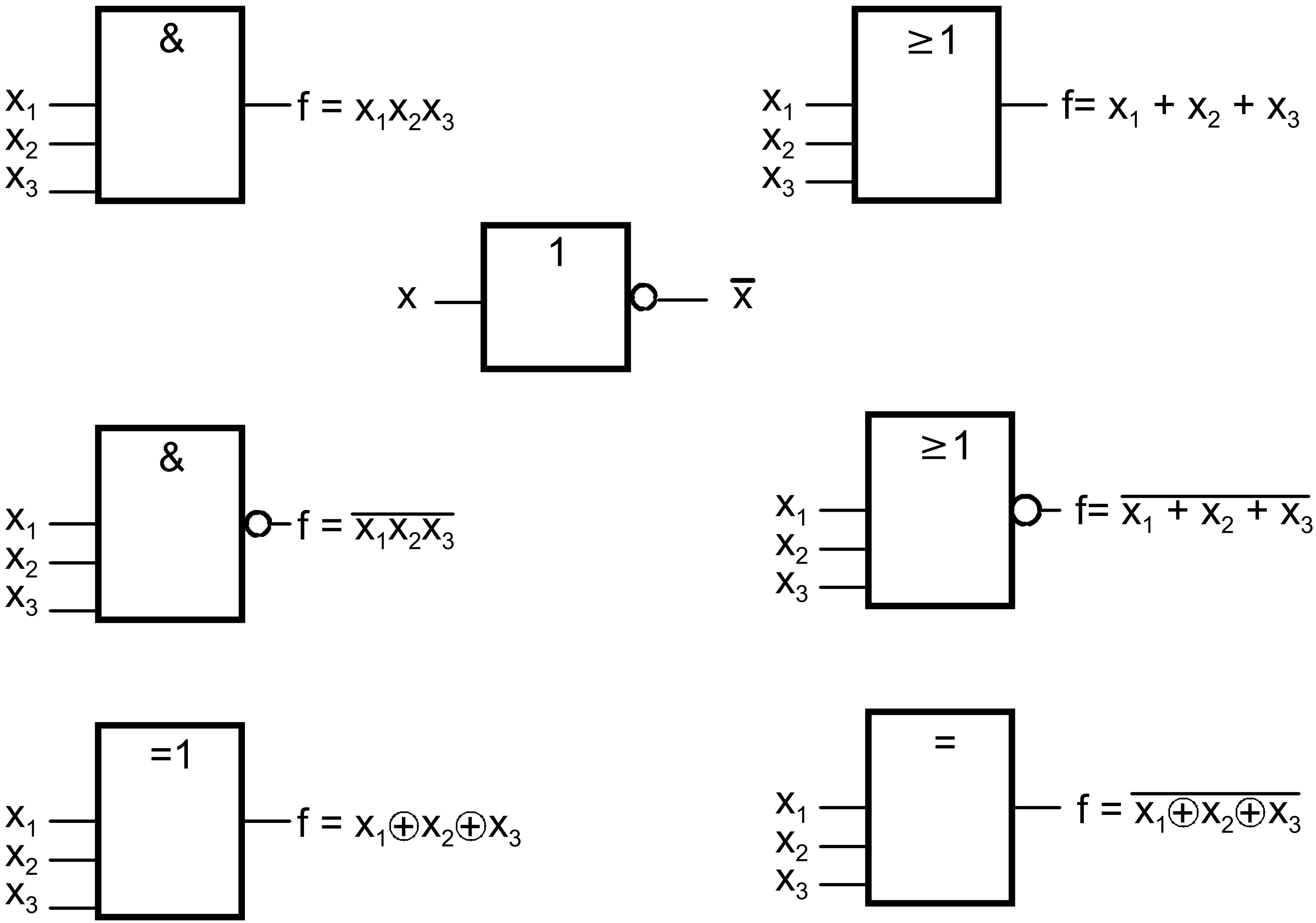
Standard IEC –Publication 617-12 je nastal na osnovi osnutka IEC –Publication 117-15, izdan je bil leta 1983

standard IEC –Publication 113-7 pa na osnovi osnutkov IEC –Publication 113-3 in IEC –Publication 113-4, izdan pa je bil leta 1981.

Glede na to, da je k tem standardom pristopila že bivša država, Republika Slovenija pa to prevzela kot nasledstvo, sta ta dva standarda pri nas obvezna !!!

2. 7. 4. 2 Standardni simboli

Na spodnji sliki so podani ti simboli za nekaj vezij, ki opravljajo elementarne operacije.



2. 8 Pretvarjanje Booleovih funkcij iz disjunktivne v konjuktivno obliko

Denimo, da imamo Booleovo funkcijo podano v obliki:

$$f = \sum_{i=0}^{2^n-1} f_i m_i$$

Zanima nas, kako lahko tako funkcijo izrazimo z ustreznimi makstermi. Negacijo gornje enačbe lahko pišemo takole:

$$\overline{f} = \sum_{i=0}^{2^n-1} \overline{f}_i m_i$$

kajti mintermi, ki se pojavijo v f, se ne morejo pojaviti v $\overline{f}$. Če namreč neki minterm povzroči $f_i = 1$, ne more povzročiti $f_i = 0$.

Če negirano funkcijo izpišemo, dobimo:

$$\overline{f} = \overline{f}_0 m_0 + \overline{f}_1 m_1 + \overline{f}_2 m_2 + \overline{f}_3 m_3 + \ldots$$

Negacija te enačbe nam da prvotno funkcijo:

$$\overline{\overline{f}} = f = \overline{\overline{f}_0 m_0 + \overline{f}_1 m_1 + \overline{f}_2 m_2 + \overline{f}_3 m_3 + \ldots}$$

$$f = \overline{\left(\overline{f}_0 m_0\right)}\;\overline{\left(\overline{f}_1 m_1\right)}\;\overline{\left(\overline{f}_2 m_2\right)}\;\overline{\left(\overline{f}_3 m_3\right)}\;\overline{\left(\quad\ldots\right)}$$

$$f = (f_0 + \overline{m}_0)\,(f_1 + \overline{m}_1)\,(f_2 + \overline{m}_2)\,(f_3 + \overline{m}_3)\,(\ldots)$$

Že prej pa smo ugotovili, da je:

$$\overline{m}_i = M_{2^n-1-i},$$

zato lahko izrazimo našo funkcijo v konjunktivni obliki takole:

$$f = \prod_{i=0}^{2^n-1} \left(f_i + M_{2^n-1-i}\right)$$

Zgled:

Za podano Booleovo funkcija treh spremenljivk x_1, x_2, x_3 poišči f in $\overline{f}$!

x_1	x_2	x_3	f	$\overline{f}$
0	0	0	0	1
0	0	1	1	0
0	1	0	0	1
0	1	1	0	1
1	0	0	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	0	1
1	1	1	1	0

$$f = \overline{x}_1\overline{x}_2x_3 + x_1\overline{x}_2x_3 + x_1x_2x_3$$

$$\overline{f} = \overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3 + \overline{x}_1x_2\overline{x}_3 + \overline{x}_1x_2x_3 + x_1\overline{x}_2\overline{x}_3 + x_1x_2\overline{x}_3$$

Če pišemo splošno , je ta za naš zgled:

$$f = 0m_0 + 1m_1 + 0m_2 + 0m_3 + 0m_4 + 1m_5 + 0m_6 + 1m_7$$

Analogno sledi iz izjavnostne tabele:

$$\overline{f} = 1m_0 + 0m_1 + 1m_2 + 1m_3 + 1m_4 + 0m_5 + 1m_6 + 0m_7$$

Ta izraz bi dobili tudi iz obrazca:

$$\overline{f} = \sum_{i=0}^{2^n-1} \overline{f}_i m_i$$

Negacija funkcije, izražena z vsoto mintermov, je enaka vsoti mintermov, ki so manjkali v prvotni funkciji.

Zgled:

Za spodnjo izjavnostno tabelo poiščite $f(x_1, x_2, x_3)$ v disjunktivni in konjunktivni obliki!

	x_1	x_2	f	$\overline{f}$	f_i	i
m_0	0	0	1	0	$f_0 = 1$	0
m_1	0	1	0	1	$f_1 = 0$	1
m_2	1	0	1	0	$f_2 = 1$	2
m_3	1	1	0	1	$f_3 = 0$	3

$$f = \sum_{i=0}^{2^n-1} f_i\, m_i = 1\overline{x}_1\overline{x}_2 + 0\overline{x}_1 x_2 + 1x_1\overline{x}_2 + 0x_1x_2$$

$$= \underbrace{\overline{x}_1\overline{x}_2}_{m_0} + \underbrace{x_1\overline{x}_2}_{m_2} = \overline{x}_2$$

$$f = \prod_{i=0}^{2^n-1}\left(f_i + M_{2^n-1-i}\right) = \left(f_0 + M_3\right)\left(f_1 + M_2\right)\left(f_2 + M_1\right)\left(f_3 + M_0\right)$$

$$f = \left(1 + M_3\right)\left(0 + M_2\right)\left(1 + M_1\right)\left(0 + M_0\right) = M_2 M_0$$

$$f = \left(x_1 + \overline{x}_2\right)\ \left(\overline{x}_1 + \overline{x}_2\right) = x_1\overline{x}_1 + x_1\overline{x}_2 + \overline{x}_2\overline{x}_1$$

$$f = \overline{x}_1\overline{x}_2 + x_1\overline{x}_2 + \overline{x}_2 = \overline{x}_1\overline{x}_2 + \overline{x}_2 = \overline{x}_2$$

2. 9 Pretvarjanje Booleovih funkcij iz konjunktivne v disjunktivno obliko

Denimo, da je Booleova funkcija izražena z makstermi, pa bi jo želeli dobiti v disjunktivni obliki, izraženo z mintermi.

$$f = \prod_{i=0}^{2^n-1} \left(f_i + M_i\right).$$

Po negaciji konjunktivne oblike dobimo:

$$\overline{f} = \prod_{i=0}^{2^n-1} \left(\overline{f}_i + M_i\right)$$

$$\overline{f} = \left(\overline{f}_0 + M_0\right)\left(\overline{f}_1 + M_1\right)\left(\overline{f}_2 + M_2\right)(.....)$$

Ponovna negacija prinese:

$$\overline{\overline{f}} = f = \overline{\left(\overline{f}_0 + M_0\right)\left(\overline{f}_1 + M_1\right)\left(\overline{f}_2 + M_2\right)\left(\quad ....\right)}$$

$$f = \overline{\left(\overline{f}_0 + M_0\right)} + \overline{\left(\overline{f}_1 + M_1\right)} + \overline{\left(\overline{f}_2 + M_2\right)} + ...$$

$$f = f_0 \overline{M}_0 + f_1 \overline{M}_1 + f_2 \overline{M}_2 + ...$$

$$f = \sum_{i=0}^{2^n-1} f_i \overline{M}_1$$

Zaradi: $\overline{M}_i = m_{2^n-1-i}$ **dobimo končno:** $f = \sum_{i=0}^{2^n-1} f_i m_{2^n-1-i}$

Zgled:

$$f = (A + B + C)\ (\overline{A} + \overline{B} + \overline{C})$$

Poiščite f v popolni disjunktivni normalni obliki!

V gornji enačbi je f_0 = 0 in f_7 = 0 Zato bo:

$$f = 0 \bullet m_7 + 1 \bullet m_6 + 1 \bullet m_5 + 1 \bullet m_4 + 1 \bullet m_3 + 1 \bullet m_2 + 1 \bullet m_1 + 0 \bullet m_0$$

2. 10 Pregled binarnih operatorjev

2. 10.1 Elementarni in psevdo-elementarni operatorji

Doslej smo postulate Booleove algebre definirali z operatorji disjunkcije, konjunkcije in negacije, ker so to tudi v vsakdanjem življenju najbolj običajne logične izjave.

Mimo tega je bilo s Huntingtonovimi postulati možno razmeroma nazorno prikazati dualno naravo operatorjev OR in AND.

Že v začetku poglavja pa smo omenili, da postulati in operatorji V, & in - niso edini, s katerimi je mogoče definirati Booleovo algebro.

Ti operatorji predstavljajo resda naraven in logičen - vendarle samo posebni primer iz večje skupine operatorjev, ki lahko povezujejo dve spremenljivki

2 spremenljivki $\Rightarrow$ 4kombinacije $\Rightarrow$ za vsako kombinacijo 2 vrednosti

Tako dobimo 2^4 različnih možnosti, ki jim pravimo elementarni oziroma psevdo-elementarni operatorji.

		SIMBOL	OPIS OPERATORJA
x_1	1 1 0 0		
x_2	1 0 1 0		
f_0	0 0 0 0	0	konstanta 0
f_1	0 0 0 1	$x_1 \downarrow x_2$	Pierce - ova funkcija - NOR
f_2	0 0 1 0	$\overline{x_2 \rightarrow x_1}$	negacija implikacije x_2 v x_1
f_3	0 0 1 1	$\overline{x}_1$	negacija x_1
f_4	0 1 0 0	$\overline{x_1 \rightarrow x_2}$	negacija implikacije x_1 v x_2
f_5	0 1 0 1	$\overline{x}_2$	negacija x_2
f_6	0 1 1 0	$x_1 \oplus x_2$	vsota po modulu 2 - XOR
f_7	0 1 1 1	$x_1 \mid x_2$	Scheffer - jeva funkcija -NAND
f_8	1 0 0 0	$x_1 \bullet x_2$	konjunkcija - AND
f_9	1 0 0 1	$x_1 \equiv x_2$	ekvivalenca - EQU
f_{10}	1 0 1 0	x_2	spremenljivka x_2
f_{11}	1 0 1 1	$x_1 \rightarrow x_2$	implikacija x_1 v x_2
f_{12}	1 1 0 0	x_1	spremenljivka x_1
f_{13}	1 1 0 1	$x_2 \rightarrow x_1$	implikacija x_2 v x_1
f_{14}	1 1 1 0	$x_1 + x_2$	disjunkcija - OR
f_{15}	1 1 1 1	1	konstanta 1

Definicije za te tri funkcije izhajajo iz prejšnje tabele:

$$f_1 = \bar{x}_1 \bullet \bar{x}_2.$$

Ta funkcija je po De Morganovem teoremu tudi

$$f_1 = \overline{x_1 + x_2},$$

in od tod tudi kratica: NO - OR = NOR, oziroma negirana ALI funkcija.

$$f_6 = x_1\bar{x}_2 + \bar{x}_1 x_2 = x_1 \oplus x_2$$

Zaradi te lastnosti jo imenujemo izključna ALI funkcija – EX – OR, EXOR

$$f_7 = \bar{x}_1\bar{x}_2 + \bar{x}_1 x_2 + x_1\bar{x}_2 = \bar{x}_1 + x_1\bar{x}_2 = \bar{x}_1 + \bar{x}_2$$

Z upoštevanjem De Morganovega teorema je:

$$f_7 = \bar{x}_1 + \bar{x}_2 = \overline{x_1 \bullet x_2},$$

in zato tudi kratica NO - AND = NAND.

Zgled:

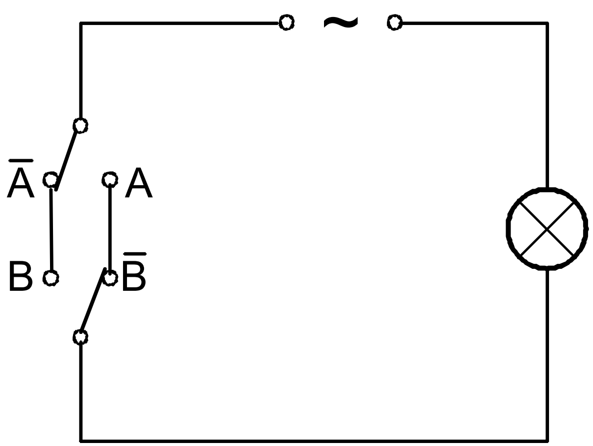
Določite Booleovo funkcijo za prižiganje žarnice z dvema stikaloma A in B!

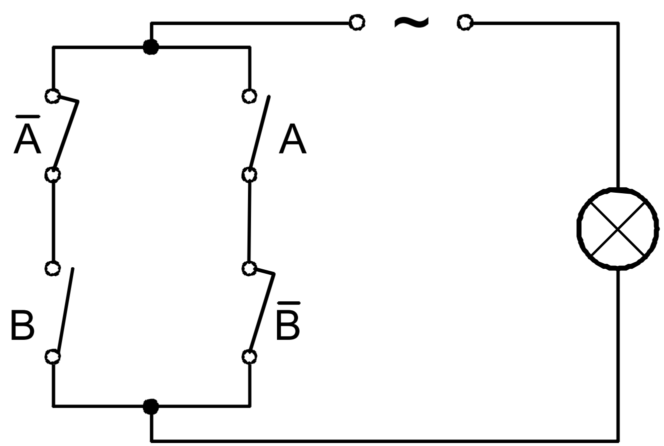
L = 1 žarnica sveti

Najprej po logičnem premisleku napišemo izjavnostno tabelo:

stikalo A	stikalo B	žarnica L
0	0	0
0	1	1
1	1	0
1	0	1

$$L = \overline{A}B + A\overline{B} = A \oplus B$$





Vidimo torej, da je rešitev zastavljene naloge funkcija izključna ALI funkcija oziroma EX-OR.

2. 10. 2 Povezava med Pierceovim in Schefferjevim operatorjem

Pogosto se srečujemo s problemom, da je treba neko Booleovo funkcijo, ki je definirana z +, & in - povezavami, pretvoriti v funkcijo, ki je logično sicer ekvivalentna, izražena pa je z drugačnimi funkcijami –oziroma operatorji.

Vsaki množici funkcij, ki zmore opisati poljubno Booleovo funkcijo, pravimo, da je funkcijsko polna.

Tako moremo ugotoviti, da sta za opis poljubne Booleove funkcije zadostna že samo operatoja x_1x_2 in negacija. Manjkajočo disjunkcijo dobimo lahko z negacijo in konjunkcijo:

$$\overline{\overline{x}_1 \bullet \overline{x}_2} = x_1 + x_2$$

Prav tako predstavljata poln sistem disjunkcija in negacija, saj dobimo "manjkajočo" konjunkcijo ponovno z negacijo in tokrat disjunkcijo.

$$\overline{\overline{x}_1 + \overline{x}_2} = x_1 x_2$$

Še večkrat pa potrebujemo povezave med +, & in - operatorji in Schefferjevo oziroma Pierceovo funkcijo.

Po definiciji je Schefferjeva funkcija oziroma Schefferjev operator:

$$x_1 | x_2 = \overline{x_1 x_2} = \overline{x}_1 + \overline{x}_2.$$

Če sta: $x_1 = x_2 = x$, dobimo s to operacijo negacijo $x|x = \overline{x} + \overline{x} = \overline{x}$

Disjunkcijo dobimo z naslednjo Schefferoperacijo:

$$(x_1|x_1)\,|\,(x_2|x_2) = \overline{x}_1 | \overline{x}_2 = \overline{\overline{x}}_1 + \overline{\overline{x}}_2 = x_1 + x_2$$

Po podobni poti dobimo konjunkcijo:

$$(x_1 | x_2) | (x_1 | x_2) = \overline{x_1 x_2} \,|\, \overline{x_1 x_2} = \overline{\overline{x_1 x_2}} = x_1 x_2$$

Povezave Pierceove NOR funkcije z operatorji +, & in - pa so take:

$$x \downarrow x = \overline{x + x} = \bar{x} \bullet \bar{x} = \bar{x}$$

$$(x_1 \downarrow x_2) \downarrow (x_1 \downarrow x_2) = \overline{(x_1 + x_2)} \downarrow \overline{(x_1 + x_2)} = (\overline{\overline{x_1 + x_2}}) = x_1 + x_2$$

$$(x_1 \downarrow x_1) \downarrow (x_2 \downarrow x_2) = \bar{x}_1 \downarrow \bar{x}_2 = \overline{\bar{x}_1 + \bar{x}_2} = x_1 x_2$$

Včasih potrebujemo tudi povezave med Pierceovo in Schefferjevo funkcijo.

$$\overline{(x_1 \downarrow x_2)} = \overline{\overline{x_1 + x_2}} = x_1 + x_2$$

Prav tako pa velja:

$$\bar{x} | \bar{x} = \overline{\bar{x}_1 \bullet \bar{x}_2} = x_1 + x_2$$

Torej mora veljati tudi:

$$\overline{\mathbf{x}_1 \downarrow \mathbf{x}_2} = \bar{\mathbf{x}}_1 | \bar{\mathbf{x}}_2$$

Podobno dobimo za dualno povezavo:

$$\overline{x_1 | x_2} = \overline{\overline{x_1 \; x_2}} = x_1 \, x_2$$

$$\bar{x}_1 \downarrow \bar{x}_2 = \overline{\bar{x}_1 + \bar{x}_2} = \bar{\bar{x}}_1 \bar{\bar{x}}_2 = x_1 x_2$$

Iz česar sledi:

$$\overline{x_1 | x_2} = \bar{x}_1 \downarrow \bar{x}_2$$

Poznavanje funkcijsko polnih sistemov ter gornjih povezav je pri praktičnem delu izredno koristno, saj omogoča konstrukcijo določenega sistema z različnimi vezji oziroma komponentami.

2. 11 Funkcijsko polni sistemi preklopnih funkcij

2. 11. 1 Zaprti razredi in polni sistemi

M - množica preklopnih funkcij

element te množice:

$f(x_1, x_2, ..., x_n) \in M$

$f(x_1, x_2, ..., x_n)$ **vstavimo namesto x**

Če pade rezultat vedno v množico M je ta množica »zaprti razred« – ne moremo priti iz razreda z nobeno funkcijo.

Matematiki so dokazali, da obstaja v matematični logiki le 5 zaprtih razredov.

Ti razredi so označeni z: $\mathscr{R}_0, \mathscr{R}_1, \mathscr{R}_s, \mathscr{R}_L, \mathscr{R}_M$

2. 11. 2 Razred ohranjanja konstante "0" – $\mathscr{R}_0$

$f \in \mathscr{R}_0$: $f(0, 0, 0, ...,0) = 0.$

$m_o \notin f,$ $M_o \in f.$

2. 11. 3 Razred ohranjanja konstante "1" – $\mathscr{R}_1$.

$f \in \mathscr{R}_1$: $f(1, 1, 1, ...,1) = 1.$

$m_{2^n-1} \in f,$ $M_{2^n-1} \notin f$

PREKLOPNA VEZJA

2. 11. 4 Razred sebi-dualnih preklopnih funkcij:

$f \in \mathscr{R}_s$: $\overline{f}(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n) = f(x_1, x_2, \ldots x_n)$

2. 11. 5 Razred linearnih preklopnih funkcij:

$f \in \mathscr{R}_L$: $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_o \oplus a_1x_1 \oplus a_2x_2 \oplus \ldots \oplus a_nx_n$

2. 11. 6 Razred popolnoma monotonih preklopnih funkcij:

$f \in \mathscr{R}_M$: $x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{in} \leq x_{j1}, x_{j2}, \ldots, x_{jn}$, potem tudi:

$f(x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{in}) \leq f(x_{j1}, x_{j2}, \ldots, x_{jn})$

Sistem preklopnih funkcij je funkcijsko poln, če velja naslednje:

$\mathscr{F} = \{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$

je funkcijsko poln sistem preklopnih funkcij, če ne pripada nobenemu zaprtemu razredu:

$f \notin \mathscr{F}$

1. $f \notin \mathscr{R}_0$
2. $f \notin \mathscr{R}_1$
3. $f \notin \mathscr{R}_s$
4. $f \notin \mathscr{R}_L$
5. $f \notin \mathscr{R}_M$

S funkcijsko polnim sistemom **"odpremo"** vse funkcijske **zaprtosti**, kar pomeni da z:

$f \in \mathscr{F}$

lahko realiziramo katerokoli preklopno strukturo v okviru“človeške logike“ oziroma matematične logike. V njej torej ni mogoče najti postopka, ki ga ne bi mogli realizirati z $f \in \mathscr{F}$.

To je izredno pomembna ugotovitev.

$\{+, \&, -\} = \mathscr{F}$

2. 11. 7 Pregled tipičnih funkcijsko polnih sistemov preklopnih funkcij

$\mathscr{F}$	$x_1 + x_2$	$x_1 \bullet x_2$	$\bar{x}$
$+, \overline{\ }$	$x_1 + x_2$	$\overline{\bar{x}_1 + \bar{x}_2}$	$\bar{x}$
$\bullet, \overline{\ }$	$\overline{\bar{x}_1 \bullet \bar{x}_2}$	$x_1 \bullet x_2$	$\bar{x}$
$\downarrow$	$(x_1 \downarrow x_2) \downarrow (x_1 \downarrow x_2)$	$(x_1 \downarrow x_1) \downarrow (x_2 \downarrow x_2)$	$x \downarrow x$
$\vert$	$(x_1 \vert x_1) \vert (x_2 \vert x_2)$	$(x_1 \vert x_2) \vert (x_1 \vert x_2)$	$x \vert x$
$\oplus, \bullet, 1$	$(x_1 \oplus 1) \bullet (x_2 \oplus 1) \oplus 1$	$x_1 \bullet x_2$	$x \oplus 1$
$\equiv, +, 0$	$x_1 + x_2$	$(x_1 \equiv 0) + (x_2 \equiv 0) \equiv 0$	$x \equiv 0$

PREKLOPNA VEZJA

2. 12 Nenormalne oblike preklopnih funkcij

Splošna preklopna funkcija v PDNO je:

$$f(x_1, x_2,\dots x_{n-1}, x_n) = f_0\ \overline{x}_1\ \overline{x}_2\dots\ \overline{x}_{n-1}\ \overline{x}_n\ +\ f_1\ \overline{x}_1\ \overline{x}_2\dots\ \overline{x}_{n-1}x_n\ +\ f_2\ \overline{x}_1\ \overline{x}_2\dots x_{n-1}\ \overline{x}_n\ +\ \dots +$$

$$+\ f_{p-1}\ \overline{x}_1 x_2\ \dots\ x_{n-1}x_n\ +\ f_p x_1\ \overline{x}_2\ \dots\ \overline{x}_{n-1}\ \overline{x}_n\ +\dots +\ f_{2p-1}\, x_1x_2\dots\ x_{n-1}x_n$$

$p = 2^n/2$

Pri prvi polovici mintermov lahko izpostavimo $\overline{x}_1$, pri drugi polovici pa x_1, kar da:

$$f(x_1, x_2, \dots x_n) = \overline{x}_1(f_0\ \overline{x}_2\ \overline{x}_3\ \dots\ \overline{x}_n\ +\ f_1\ \overline{x}_2\ \overline{x}_3\ \dots x_n\ +\ \dots\ +$$

$$+\ f_{p-2}\, x_2x_3\ \dots\ \overline{x}_n\ +\ f_{p-1}\, x_2x_3\ \dots\ x_n\ )\ +\dots+$$

$$+\ x_1(f_p\ \overline{x}_2\ \overline{x}_3\ \dots\ \overline{x}_n\ +\ f_{p+1}\ \overline{x}_2\ \overline{x}_3\ \dots\ x_n\ +\ \dots\ +$$

$$+\ f_{2p-2}\, x_2x_3\ \dots\ \overline{x}_n\ +\ f_{2p-1}\, x_2x_3\ \dots\ x_n)$$

Funkcija $f\ (x_1, x_2,\dots x_n)$ tako razpade v dva dela:

$f\ (0, x_2, x_3,\dots x_n) = g_0\ (x_2, x_3,\dots x_n)$

$f\ (1, x_2, x_3,\dots x_n) = g_1\ (x_2, x_3,\dots x_n)$

Obe zgornji funkciji sta v PDNO z n-1 spremenljivk.

Prvotno funkcijo lahko sedaj zapišemo takole:

$$f\ (x_1, x_2,\dots x_n) = \overline{x}_1 g_0\ (x_2, x_3,\dots x_n) + x_1 g_1\ (x_2, x_3,\dots x_n)$$

Funkciji g_0 in g_1 dobimo torej tako, da vstavimo za x_1 vrednosti 0 oziroma 1.

$g_0 \rightarrow x_1 = 0$

$g_1 \rightarrow x_1 = 1$

Prikazano delitev funkcije v dva dela imenujemo Shannon-ov teorem o preklopni funkciji.

Postopek lahko po tem vzorcu nadaljujemo s spremenljivko x_2 itd. Kot osnovo vzamemo sedaj funkcijo g_0 oz. g_1.

$$g_0 (x_2, x_3,..., x_n) = \overline{x}_2 g_{00} (x_3, x_4,..., x_n) + x_2 g_{01} (x_3, x_4,...x_n)$$

$$g_1 (x_2, x_3,..., x_n) = \overline{x}_2 g_{10} (x_3, x_4,..., x_n) + x_2 g_{11} (x_3, x_4,..., x_n)$$

Prvotna funkcija se sedaj izraža takole:

$$f (x_1, x_2,... x_n) = \overline{x}_1 \overline{x}_2 g_{00} (x_3, x_4,... x_n) + \overline{x}_1 x_2 g_{01} (x_3, x_4,... x_n) +$$

$$+ x_1 \overline{x}_2 g_{10} (x_3, x_4,... x_n) + x_1 x_2 g_{11} (x_3, x_4,... x_n)$$

Postopek lahko nadaljujemo na primer do k-te spremenljivke.

V ta namen vpeljimo naslednjo označbo:

$$f (w_j, x_2, x_3,... x_n) = g_j (x_2, x_3,... x_n)$$

$w_j \in \{0,1\}$ j = 0,1,2,… - dvojiško

$$f(x_1, x_2, \dots x_n) = \sum_{j=0}^{2^k-1} x_1^{wj1} x_2^{wj2} \dots x_k^{wjk} f(w_{j1}, w_{j2}, \dots w_{jk}, x_{k+1}, x_{k+2}, \dots x_n)$$

Če je k=n pridemo zopet do PDNO, kjer ustavljamo le še konstante, ki so sedaj funkcijske vrednosti preklopne funkcije.

Na podoben način pridemo tudi do dualnega izraza v konjunktivni obliki:

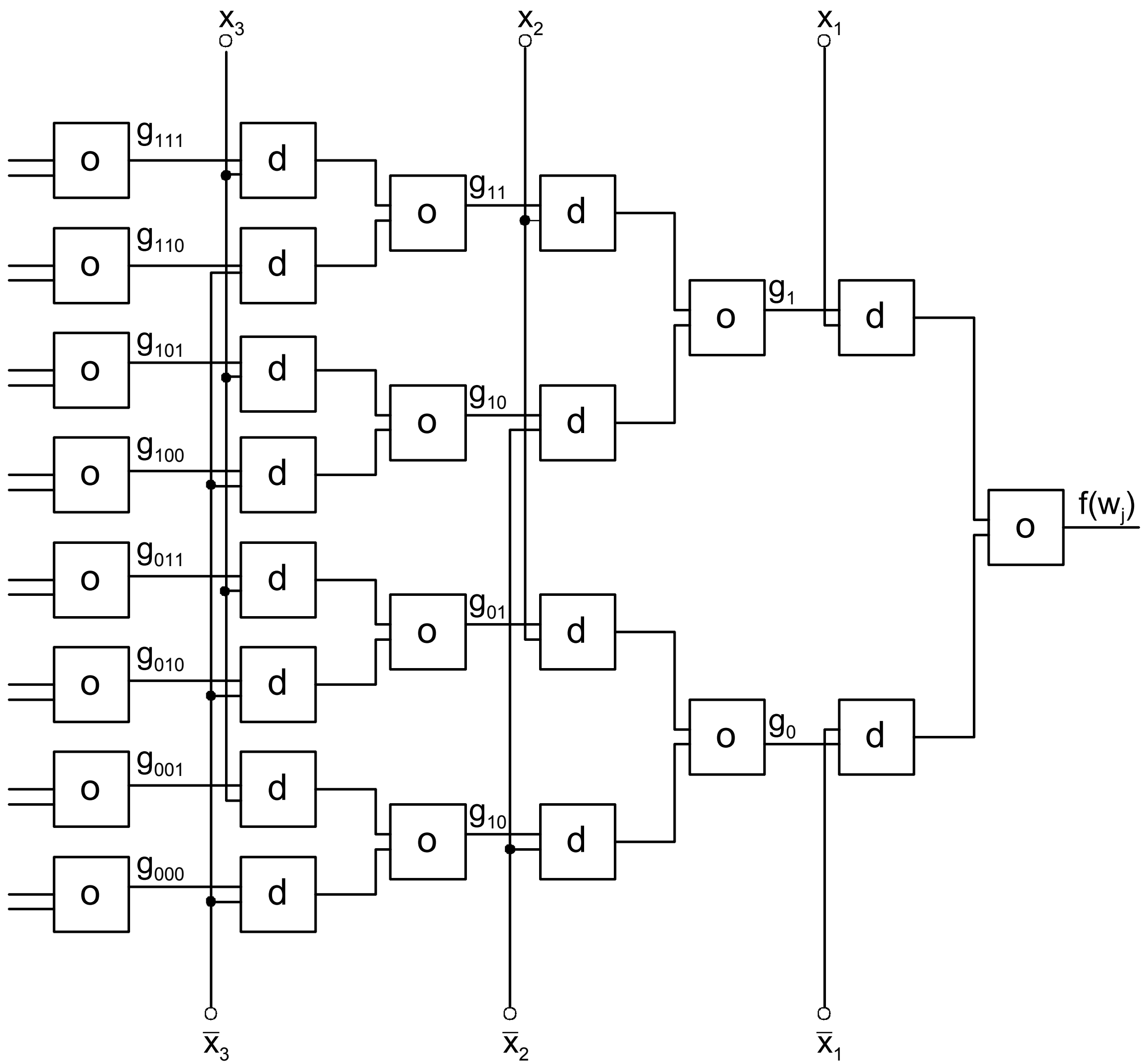
$$f(x_1, x_2, \dots x_n) = \mathop{\&}_{j=0}^{2^k-1} [x_1^{wj1} + x_2^{wj2} + \dots x_k^{wjk} + f(\overline{w}_{j1}, \overline{w}_{j2}, \dots \overline{w}_{jk}, x_{k+1}, \dots x_n)]$$

Za izpeljavo tega obrazca moramo izhajati iz PKNO. Prikazani postopek imenujemo ločenje preklopne funkcije po spremenljivkah; včasih pa tudi razširjanje (expansion).

Ločenje preklopne funkcije po spremenljivkah nam da posebno topološko strukturo pri realizaciji takšne funkcije.

Ne glede na to katero izmed obeh oblik vzamemo za izhodišče, se vedno pojavlja eden izmed obeh operatorjev kot osnovni, drugi pa kot dualni operator.

V primeru, da vzamemo za osnovni operator disjunkcijo, bo topološka struktura predstavljala popolno disjunktivno normalno obliko funkcije.


x_3
x_2
x_1
g_{111}
g_{110}
g_{101}
g_{100}
g_{011}
g_{010}
g_{001}
g_{000}
g_{11}
g_{10}
g_{01}
g_{10}
g_1
g_0
o
d
$f(w_j)$
$\overline{x}_3$
$\overline{x}_2$
$\overline{x}_1$