Preklopna vezja

3. poglavje: Preklopne funkcije in elementi

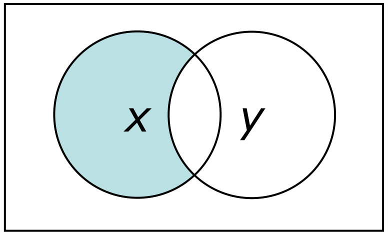
Preklopne funkcije in elementi

Trije načini zapisa Booleove (preklopne) funkcije

- zapis v eksplicitni (analitični) obliki:
  - za preproste funkcije (ena, dve, tri spremenljivke): $f(A,B)$, $f(x,y,z)$
  - za funkcije n spremenljivk: $f(x_1,x_2,x_3,...,x_n)$
- zapis s pravilnostno (izjavnostno) tabelo
- zapis z Vennovim diagramom

$$f(x,y)= x\overline{y}$$

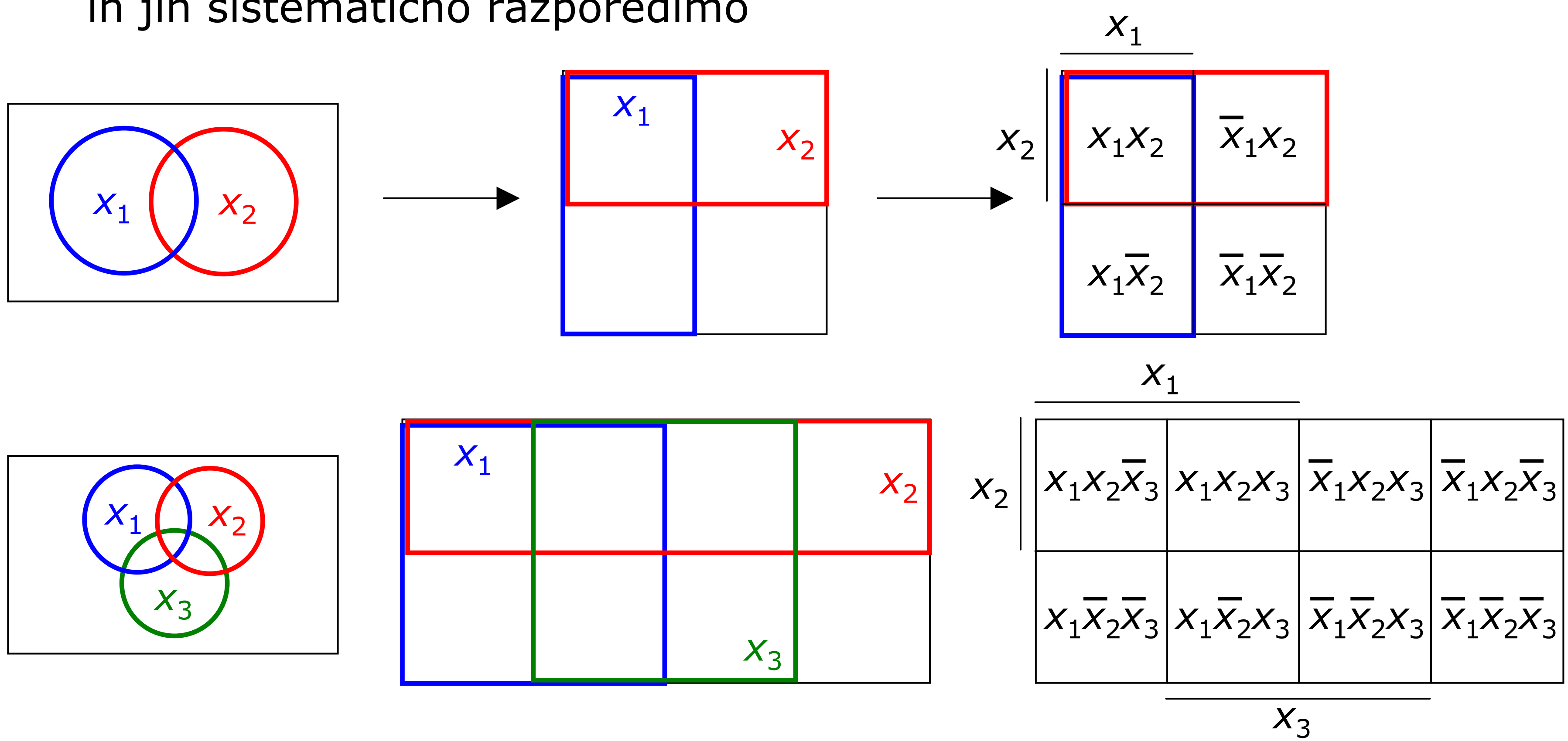
x	y	$f(x,y)$
0	0	0
0	1	0
1	0	1
1	1	0



Preklopne funkcije in elementi

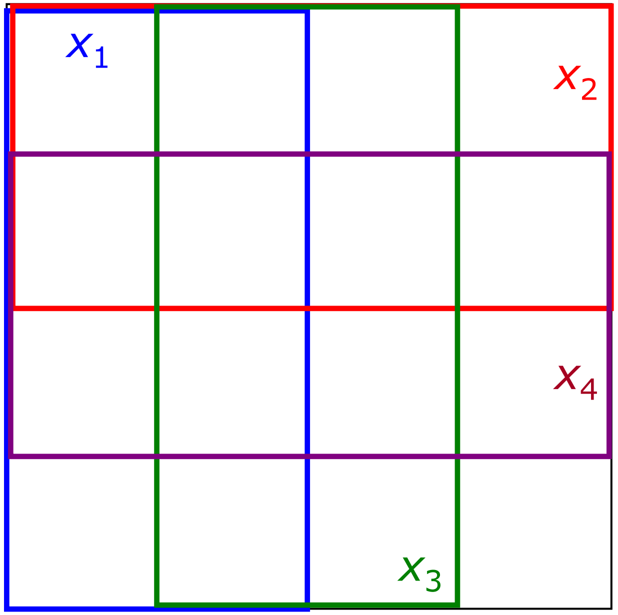
Veitchev diagram

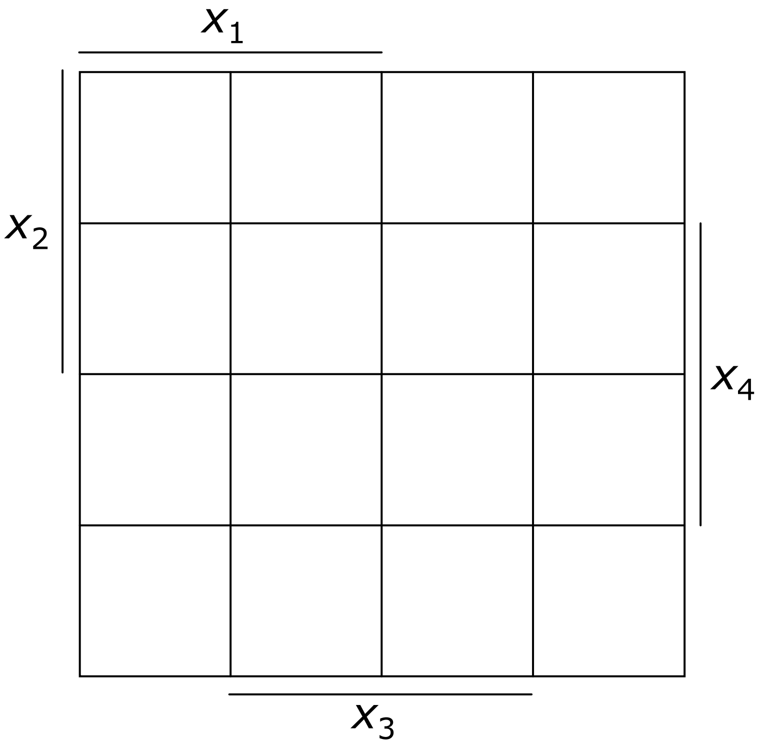
- kroge Vennovega diagrama spremenimo v pravokotnike in jih sistematično razporedimo



Preklopne funkcije in elementi

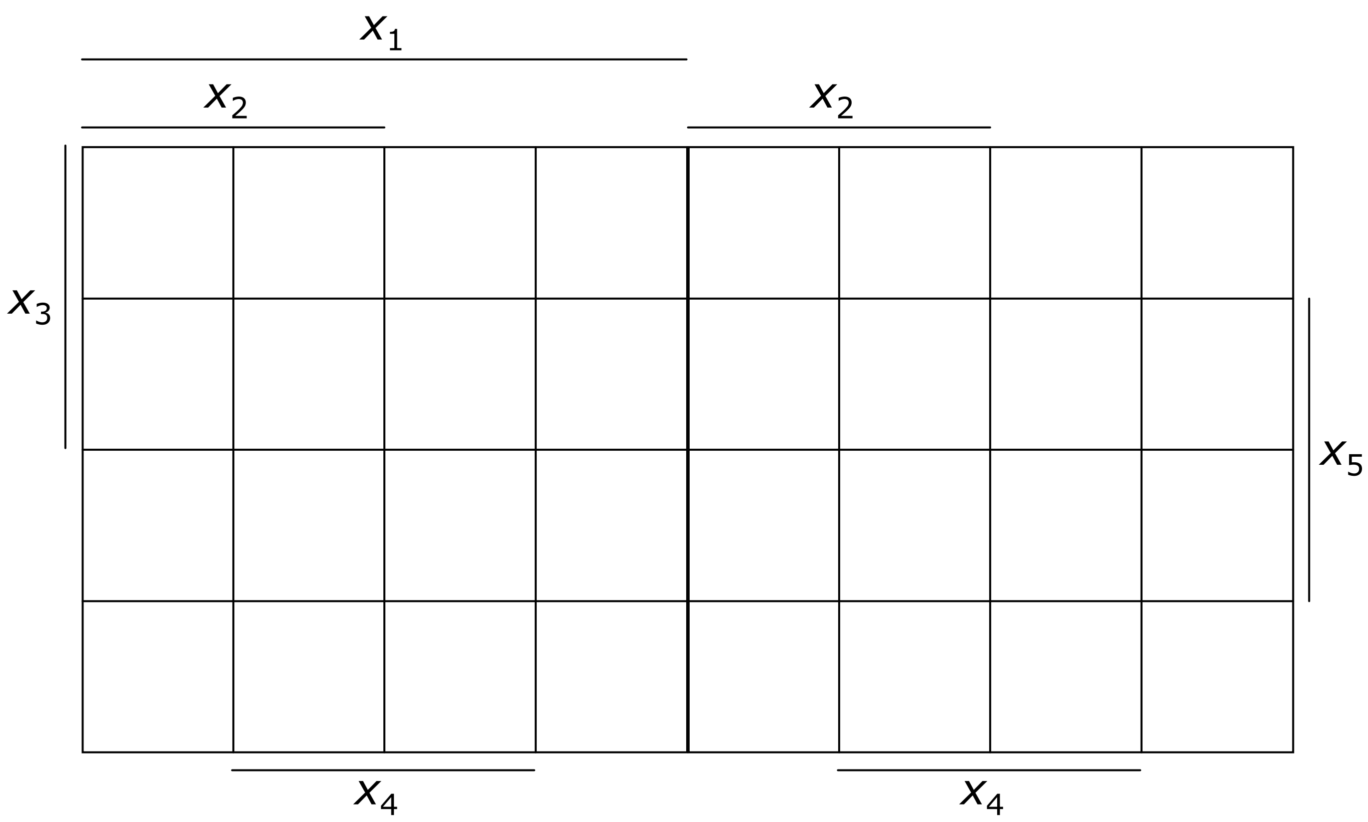
Veitchev diagram





Preklopne funkcije in elementi

Veitchev diagram



Preklopne funkcije in elementi

Minterm in maksterm

minterm funkcije $f(x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n)$: konjunkcija (Booleov produkt) vseh spremenljivk funkcije, v kateri vsaka spremenljivka nastopa enkrat, bodisi v osnovni (nenegirani) ali v negirani obliki

mintermi funkcije $f(x,y)$: $m_3=xy$, $m_2=x\overline{y}$, $m_1=\overline{x}y$ in $m_0=\overline{x}\,\overline{y}$

maksterm funkcije $f(x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n)$: disjunkcija (Booleova vsota) vseh spremenljivk funkcije, v kateri vsaka spremenljivka nastopa enkrat, bodisi v osnovni (nenegirani) ali v negirani obliki

makstermi funkcije $f(x,y)$: $M_3=x+y$, $M_2=x+\overline{y}$, $M_1=\overline{x}+y$ in $M_0=\overline{x}+\overline{y}$

Preklopne funkcije in elementi

Minterm in maksterm v Veitchevem diagramu

	x_1	x_1		
x_2	$x_1x_2\overline{x}_3$	$x_1x_2x_3$	$\overline{x}_1x_2x_3$	$\overline{x}_1x_2\overline{x}_3$
	$x_1\overline{x}_2\overline{x}_3$	$x_1\overline{x}_2x_3$	$\overline{x}_1\overline{x}_2x_3$	$\overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3$
		x_3	x_3	

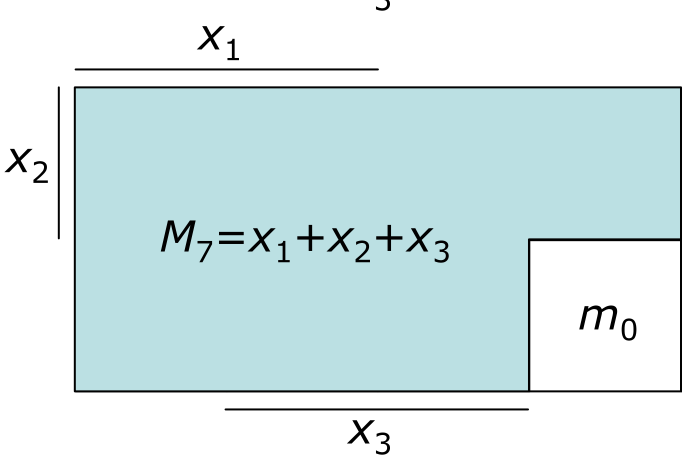
	x_1	x_1		
x_2	m_6	m_7	m_3	m_2
	m_4	m_5	m_1	m_0
		x_3	x_3	

- vsak minterm predstavlja eno polje Veitchevega diagrama (odtod tudi ime – člen, ki ustreza minimalni površini)

Preklopne funkcije in elementi

Minterm in maksterm v Veitchevem diagramu

	x_1	x_1		
x_2	$x_1x_2\bar{x}_3$	$x_1x_2x_3$	$\bar{x}_1x_2x_3$	$\bar{x}_1x_2\bar{x}_3$
	$x_1\bar{x}_2\bar{x}_3$	$x_1\bar{x}_2x_3$	$\bar{x}_1\bar{x}_2x_3$	$\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3$
		x_3	x_3	



- vsak minterm predstavlja eno polje Veitchevega diagrama (odtod tudi ime – člen, ki ustreza minimalni površini)
- vsak maksterm predstavlja vsa polja Veitchevega diagrama razen enega (člen, ki ustreza maksimalni površini)
- negacija vsakega minterma je eden od makstermov, negacija vsakega maksterma pa eden od mintermov:

  $\overline{m}_i = M_{2n\text{-}1\text{-}i}$, $\overline{M}_i = m_{2n\text{-}1\text{-}i}$

Preklopne funkcije in elementi

Popolni normalni (kanonični) obliki zapisa preklopne funkcije

popolna disjunktivna normalna oblika (PDNO): vsota mintermov

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=0}^{2^n-1} \alpha_i m_i \,, \quad \alpha_i \in \{0,1\}$$

popolna konjunktivna norm. oblika (PKNO): produkt makstermov

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \prod_{i=0}^{2^n-1} (\beta_i + M_i), \quad \beta_i \in \{0,1\}$$

Preklopne funkcije in elementi

Pretvorba iz PDNO v PKNO in obratno

$$\sum_{i=0}^{2^n-1} \alpha_i m_i = \prod_{i=0}^{2^n-1} \left(\alpha_i + M_{2^n-1-i}\right)$$

$$\prod_{i=0}^{2^n-1} \left(\beta_i + M_i\right) = \sum_{i=0}^{2^n-1} \beta_i m_{2^n-1-i}$$

$f(x_1,x_2,x_3) = m_1 + m_4 + m_7$

m	0	1	2	3	4	5	6	7
M	7	6	5	4	3	2	1	0

$f(x_1,x_2,x_3,x_4) = M_1 M_4 M_7 M_{11} M_{12} M_{14} M_{15}$

$= m_{15} + m_{13} + m_{12} + m_{10} + m_9 + m_7 + m_6 + m_5 + m_2$

M	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
m	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0

Preklopne funkcije in elementi

Zapis PDNO in PKNO iz pravilnostne tabele

x	y	z	$f(x,y,z)$
0	0	0	0
0	0	1	$\boxed{1}$
0	1	0	$\boxed{1}$
0	1	1	$\boxed{1}$
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	$\boxed{1}$
1	1	1	$\boxed{1}$

- PDNO: poiščemo vse vrstice, v katerih funkcija zavzame vrednost 1; zapišemo vsoto njim ustreznih mintermov (0 - sprem. negiramo, 1 - ne negiramo)

$$f(x,y,z) = \overline{x}\,\overline{y}z + \overline{x}y\overline{z} + \overline{x}yz + xy\overline{z} + xyz$$
$$= m_1 + m_2 + m_3 + m_6 + m_7$$

Preklopne funkcije in elementi

Zapis PDNO in PKNO iz pravilnostne tabele

x	y	z	$f(x,y,z)$
0	0	0	$\boxed{0}$
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	$\boxed{0}$
1	0	1	$\boxed{0}$
1	1	0	1
1	1	1	1

- PDNO: poiščemo vse vrstice, v katerih funkcija zavzame vrednost 1; zapišemo vsoto njim ustreznih mintermov (0 - sprem. negiramo, 1 - ne negiramo)

$$f(x,y,z) = \overline{x}\overline{y}z + \overline{x}y\overline{z} + \overline{x}yz + xy\overline{z} + xyz$$
$$= m_1 + m_2 + m_3 + m_6 + m_7$$

- PKNO: poiščemo vse vrstice, v katerih funkcija zavzame vrednost 0; zapišemo produkt njim ustreznih makstermov (1 - sprem. negiramo, 0 - ne negiramo)

$$f(x,y,z) = (x+y+z)(\overline{x}+y+z)(\overline{x}+y+\overline{z})$$
$$= M_7M_3M_2$$

Preklopne funkcije in elementi

Zapis PDNO in PKNO iz Veitchevega diagrama

	x_1	x_1		
x_2	1	0	1	1
	0	1	0	0
		x_3	x_3	

- PDNO: poiščemo vsa polja, v katerih je zapisana vrednost 1; zapišemo vsoto mintermov, ki jih predstavljajo ta polja

$$f(x_1,x_2,x_3) = x_1x_2\bar{x}_3+\bar{x}_1x_2x_3+\bar{x}_1x_2\bar{x}_3+x_1\bar{x}_2x_3 = m_6 + m_3 + m_2 + m_5$$

- PKNO: poiščemo vsa polja, v katerih je zapisana vrednost 0; zapišemo produkt makstermov, ki jih predstavljajo komplementi teh polj

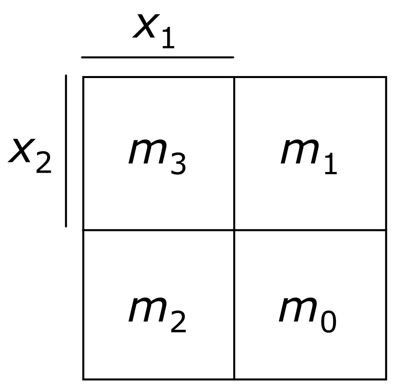
$$f(x_1,x_2,x_3) =$$

$$= (\bar{x}_1+\bar{x}_2+\bar{x}_3)(\bar{x}_1+x_2+x_3)(x_1+x_2+\bar{x}_3)(x_1+x_2+x_3)$$

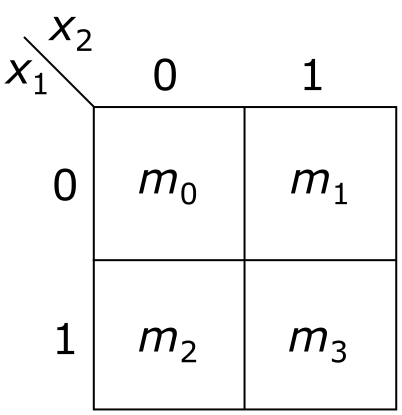
$$= M_0M_3M_6M_7$$

Preklopne funkcije in elementi

Karnaughov diagram

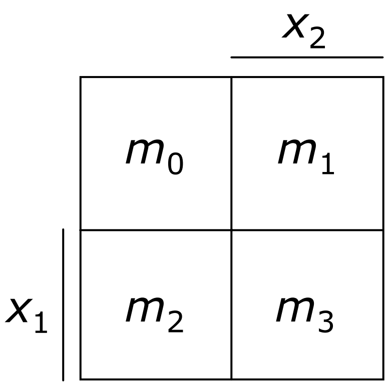


Veitchev diagram
za $f(x_1,x_2)$



Karnaughov diagram
za $f(x_1,x_2)$

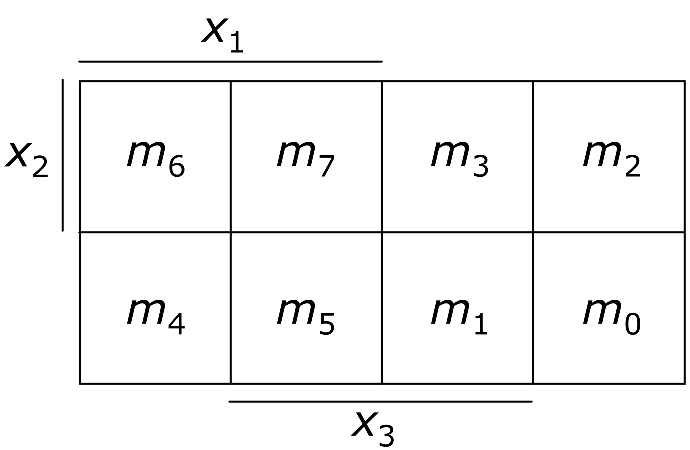
=



Veitchev zapis

Preklopne funkcije in elementi

Karnaughov diagram



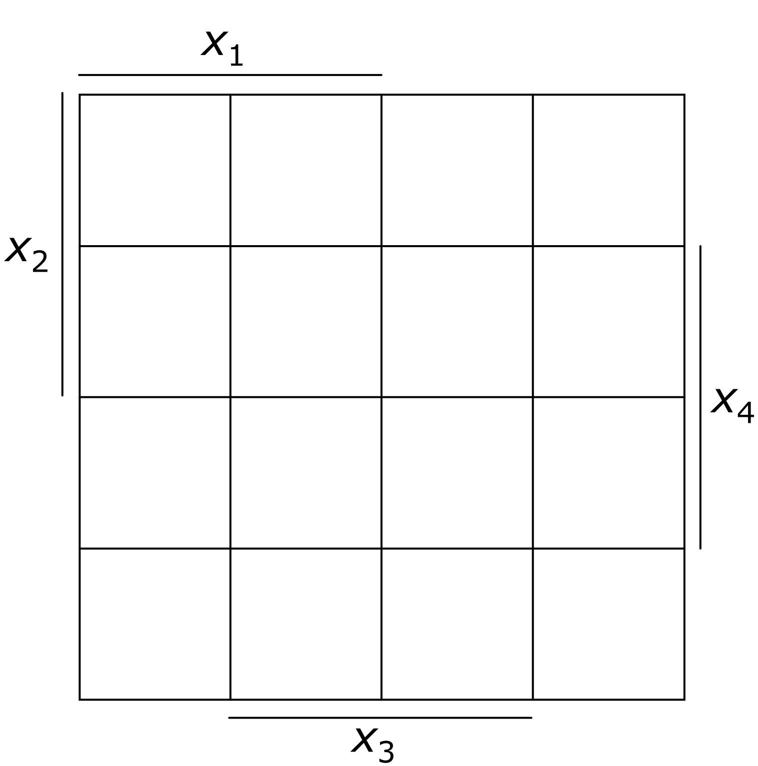
Veitchev diagram
za $f(x_1,x_2,x_3)$

$x_1 \backslash x_2x_3$	00	01	11	10
0	m_0	m_1	m_3	m_2
1	m_4	m_5	m_7	m_6

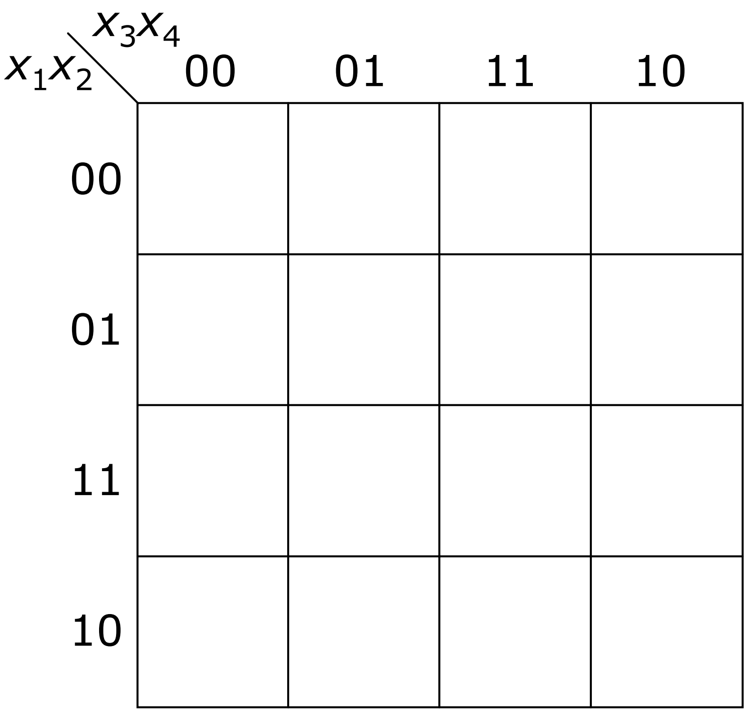
Karnaughov diagram
za $f(x_1,x_2,x_3)$

Preklopne funkcije in elementi

Karnaughov diagram



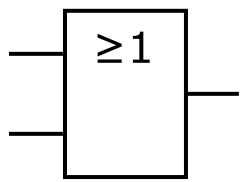
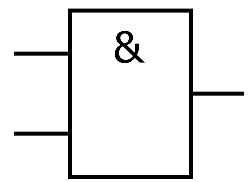
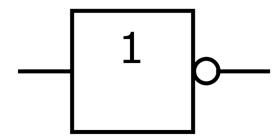
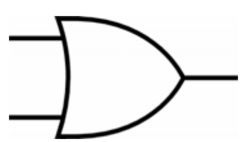
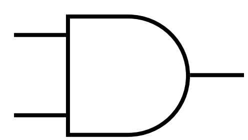
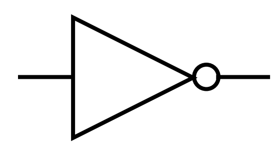
Veitchev diagram
za $f(x_1,x_2,x_3,x_4)$



Karnaughov diagram
za $f(x_1,x_2,x_3,x_4)$

Preklopne funkcije in elementi

Zapis preklopnih funkcij s simbolno shemo

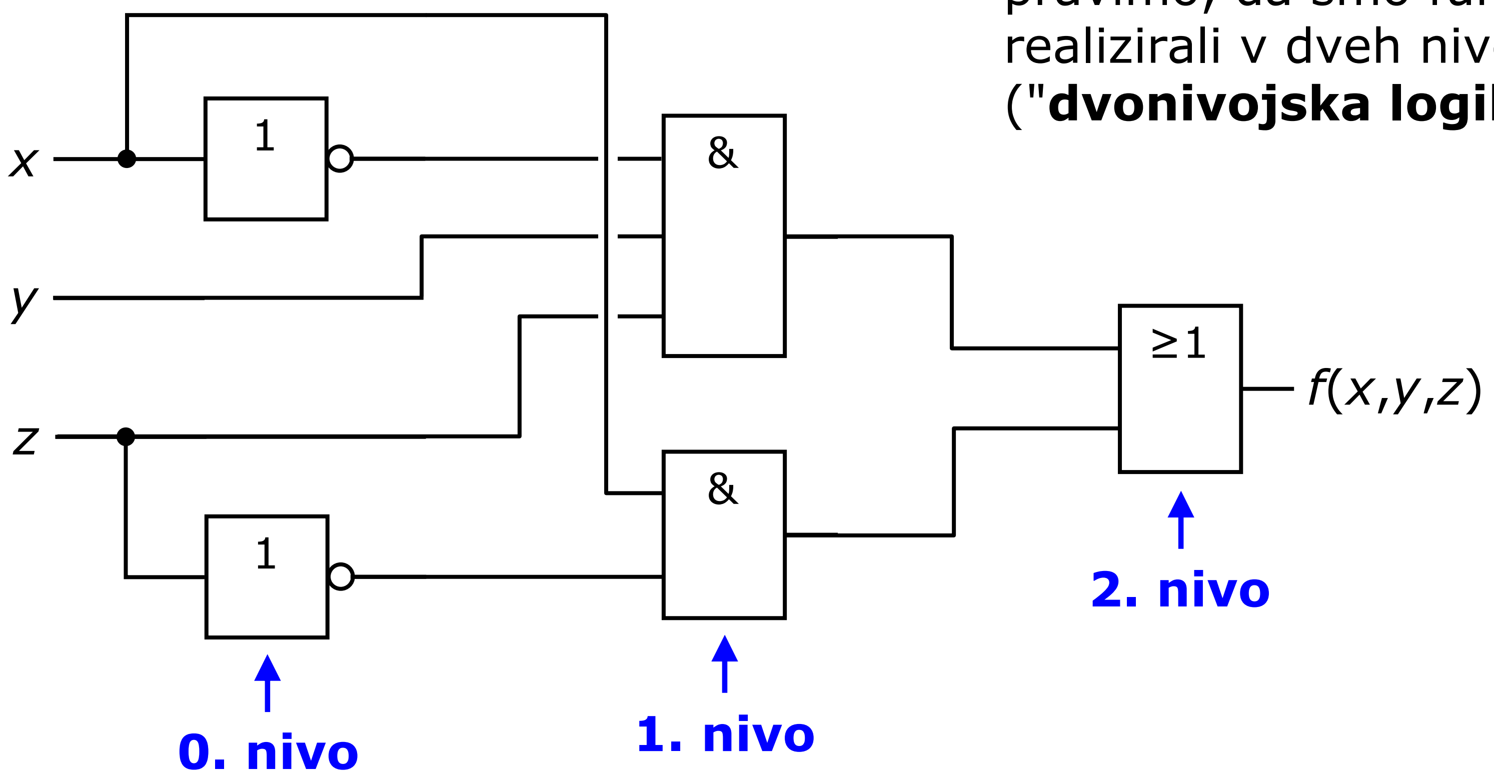
	disjunkcija (ALI, OR)	konjunkcija (IN, AND)	negacija (NE, NOT)
mednarodni standard IEC 617-12			
ameriški standard MIL 806			

Preklopne funkcije in elementi

Zapis preklopnih funkcij s simbolno shemo

$f(x,y,z) = x\bar{z} + \bar{x}yz$

pravimo, da smo funkcijo realizirali v dveh nivojih ("**dvonivojska logika**")



Preklopne funkcije in elementi

Preklopne funkcije dveh spremenljivk (operatorji)

x_1	x_2	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
		0	$\downarrow$	$\overline{\leftarrow}$	$\overline{x}_1$	$\overline{\rightarrow}$	$\overline{x}_2$	$\oplus$	$\uparrow$	$\bullet$	$\equiv$	x_2	$\rightarrow$	x_1	$\leftarrow$	$+$	1
0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
0	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1

trivialne funkcije: dejansko konstante ali funkcije ene spremenljivke

osnovne funkcije: + (OR), • (AND), ↓ (NOR), ↑ (NAND)

izpeljane funkcije: ⊕ (XOR), ≡ (EQU), dve implikaciji in dve negirani implikaciji

Preklopne funkcije in elementi

Funkcijsko polni sistemi

- **funkcijsko poln sistem:** nabor preklopnih funkcij dveh spremenljivk, ki omogoča zapis poljubne preklopne funkcije
- ker ima vsaka preklopna funkcija svojo pravilnostno tabelo, iz vsake pravilnostne tabele pa lahko zapišemo funkcijo v PDNO, **je sistem $\{+, \cdot, \overline{\ }\}$ funkcijsko poln – to je elementarni FPS**
- tudi **sistem $\{+, \overline{\ }\}$ je funkcijsko poln**, saj lahko vsako konjunkcijo nadomestimo s kombinacijo disjunkcije in negacije:

$$\overline{xy} = \overline{x} + \overline{y} \qquad \text{in odtod} \qquad xy = \overline{\overline{x} + \overline{y}}$$

- prav tako je **$\{\cdot, \overline{\ }\}$ funkcijsko poln sistem**, saj lahko disjunkcijo nadomestimo s kombinacijo konjunkcije in negacije:

$$\overline{x + y} = \overline{x}\,\overline{y} \qquad \text{in odtod} \qquad x + y = \overline{\overline{x}\,\overline{y}}$$

Preklopne funkcije in elementi

Funkcijsko polni sistemi

- Ali obstajajo funkcijsko polni sistemi z eno samo funkcijo?
- **sistem {↑} je funkcijsko poln – Shefferjev FPS:**
  - negacija: $x \uparrow x = \overline{x\,x} = \overline{x} + \overline{x} = \overline{x}$
  - disjunkcija: $(x \uparrow x) \uparrow (y \uparrow y) = \overline{x} \uparrow \overline{y} = \overline{\overline{x}\,\overline{y}} = \overline{\overline{x + y}} = x + y$
  - konjunkcija: $(x \uparrow y) \uparrow (x \uparrow y) = \overline{(x \uparrow y)} = \overline{\overline{x\,y}} = x\,y$
- tudi **sistem {↓} je funkcijsko poln – Peirceov FPS:**
  - negacija: $x \downarrow x = \overline{x + x} = \overline{x}\,\overline{x} = \overline{x}$
  - konjunkcija: $(x \downarrow x) \downarrow (y \downarrow y) = \overline{x} \downarrow \overline{y} = \overline{\overline{x} + \overline{y}} = x\,y$
  - disjunkcija: $(x \downarrow y) \downarrow (x \downarrow y) = \overline{(x \downarrow y)} = x + y$

Preklopne funkcije in elementi

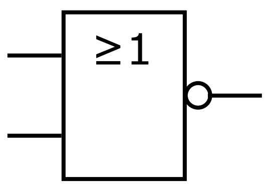
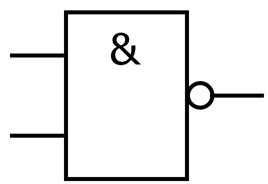
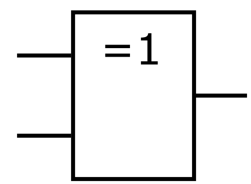
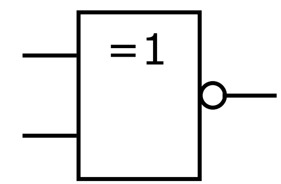
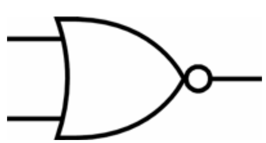
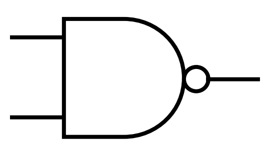
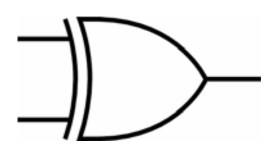
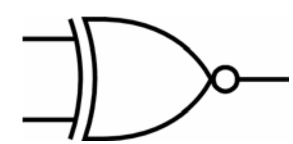
Funkcijsko polni sistemi

- poljubno preklopno funkcijo je torej mogoče realizirati izključno z vrati NAND, pa tudi izključno z vrati NOR
- poleg sistemov $\{\uparrow\}$, $\{\downarrow\}$, $\{\bullet, \overline{\ }\}$ in $\{+, \overline{\ }\}$, za katere smo že pokazali, da so FPS, sta takšna tudi sistema $\{\equiv, +, 0\}$ in $\{\oplus, \bullet, 1\}$
- podobne dualne povezave, kot sta de Morganova teorema pri paru $(\bullet, +)$, imamo tudi pri paru $(\uparrow, \downarrow)$ in pri paru $(\equiv, \oplus)$, pri slednjem paru pa sta funkciji hkrati še negaciji druga druge:

$(\bullet, +)$	$(\uparrow, \downarrow)$	$(\equiv, \oplus)$
$\overline{x+y} = \overline{x} \bullet \overline{y}$	$\overline{x \uparrow y} = \overline{x} \downarrow \overline{y}$	$\overline{x \equiv y} = \overline{x} \oplus \overline{y} = x \oplus y$
$\overline{x \bullet y} = \overline{x} + \overline{y}$	$\overline{x \downarrow y} = \overline{x} \uparrow \overline{y}$	$\overline{x \oplus y} = \overline{x} \equiv \overline{y} = x \equiv y$

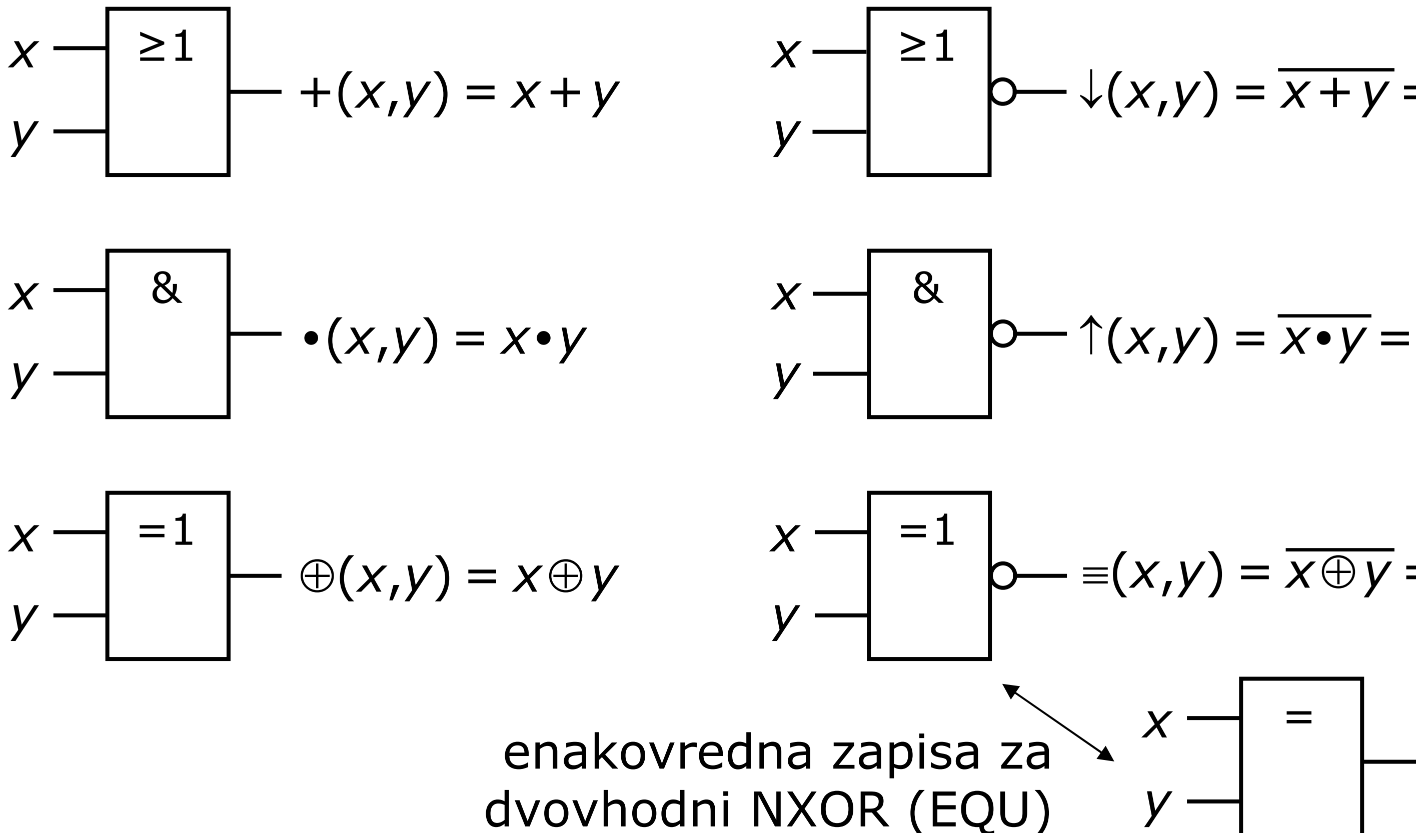
Preklopne funkcije in elementi

Zapis preklopnih funkcij s simbolno shemo (nadaljevanje)

	NOR	NAND	XOR (EXOR)	NXOR (XNOR, EQU)
IEC 617-12				
MIL 806				

Preklopne funkcije in elementi

Dvovhodna logična vrata



$$+(x,y) = x + y$$

$$\downarrow(x,y) = \overline{x + y} = x \downarrow y$$

$$\bullet(x,y) = x \bullet y$$

$$\uparrow(x,y) = \overline{x \bullet y} = x \uparrow y$$

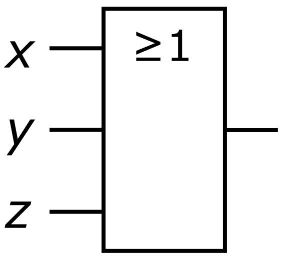
$$\oplus(x,y) = x \oplus y$$

$$\equiv(x,y) = \overline{x \oplus y} = x \equiv y$$

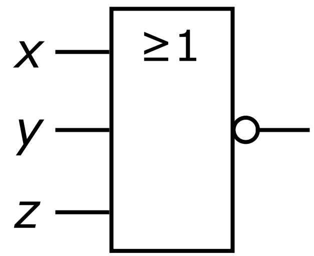
enakovredna zapisa za dvovhodni NXOR (EQU)

Preklopne funkcije in elementi

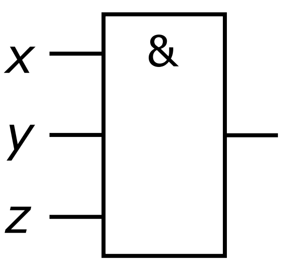
Tri- in večvhodna logična vrata



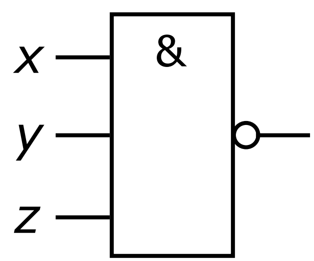
$$+(x,y,z) = x+y+z$$



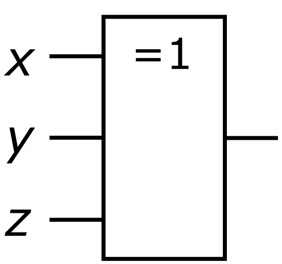
$$\downarrow(x,y,z) = \overline{x+y+z}$$
$$\neq (x\downarrow y)\downarrow z$$
$$= \overline{x+y}\downarrow z$$
$$= \overline{\overline{x+y}+z}$$



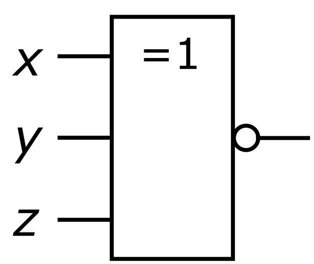
$$\bullet(x,y,z) = x\bullet y\bullet z$$



$$\uparrow(x,y,z) = \overline{x\bullet y\bullet z}$$
$$\neq (x\uparrow y)\uparrow z$$



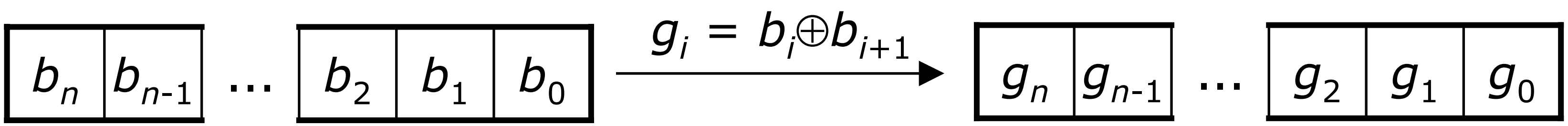
$$\oplus(x,y,z) = x\oplus y\oplus z$$



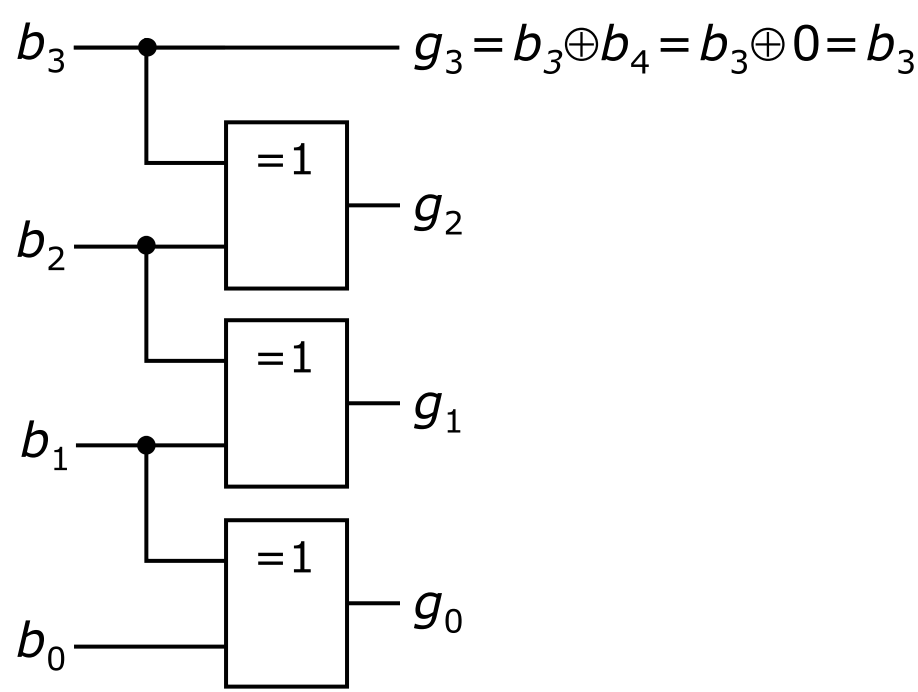
$$\equiv(x,y,z) = \overline{x\oplus y\oplus z}$$
$$\neq (x\equiv y)\equiv z$$

Preklopne funkcije in elementi

Pretvorba binarnega zapisa števila v Grayevo kodo



binarna	Grayeva
0 0 0 0	0 0 0 0
0 0 0 1	0 0 0 1
0 0 1 0	0 0 1 1
0 0 1 1	0 0 1 0
0 1 0 0	0 1 1 0
…	…
1 1 1 0	1 0 0 1
1 1 1 1	1 0 0 0



Preklopne funkcije in elementi

Razredi preklopnih funkcij – pet zaprtih razredov

- **funkcije, ki ohranjajo ničlo (R_0):** $f(0,0,\ldots,0) = 0$
- **funkcije, ki ohranjajo enico (R_1):** $f(1,1,\ldots,1) = 1$
- **sebi dualne funkcije (R_S):** $\overline{f}(\overline{x}_1,\overline{x}_2,\ldots,\overline{x}_n) = f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$
- **linearne funkcije (R_L):**
  $f(x_1,x_2,\ldots,x_n) = a_0 \oplus a_1x_1 \oplus a_2x_2 \oplus \ldots \oplus a_nx_n\,,\;\; a_i \in \{0,1\}$
- **pozitivno monotone funkcije (R_M):**
  $x_1 \leq y_1,\; x_2 \leq y_2,\; \ldots,\; x_n \leq y_n \Rightarrow f(x_1,x_2,\ldots,x_n) \leq f(y_1,y_2,\ldots,y_n)$

Preklopne funkcije in elementi

Zaprti razredi preklopnih funkcij – primer uporabe

- nabor funkcij $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ je FPS, če nobeden od petih zaprtih razredov ne vsebuje vseh funkcij nabora
- elementarni sistem $\{+, \bullet, \overline{}\}$:

	$f(x,y) = x+y$	$f(x,y) = x \bullet y$	$f(x) = \overline{x}$
R_0			
R_1			
R_S			
R_L			
R_M			

Preklopne funkcije in elementi

Zaprti razredi preklopnih funkcij – primer uporabe

- nabor funkcij $\{f_1,f_2,\ldots,f_n\}$ je FPS, če nobeden od petih zaprtih razredov ne vsebuje vseh funkcij nabora
- elementarni sistem $\{+, \bullet, \overline{\ }\}$:

	$f(x,y) = x+y$	$f(x,y) = x \bullet y$	$f(x) = \overline{x}$
R_0	$f(0,0) = 0+0 = 0$	$f(0,0) = 0 \bullet 0 = 0$	$f(0) = 1$
R_1			
R_S			
R_L			
R_M			

Preklopne funkcije in elementi

Zaprti razredi preklopnih funkcij – primer uporabe

- nabor funkcij $\{f_1,f_2,...,f_n\}$ je FPS, če nobeden od petih zaprtih razredov ne vsebuje vseh funkcij nabora
- elementarni sistem $\{+, \bullet, \overline{}\}$:

	$f(x,y) = x+y$	$f(x,y) = x \bullet y$	$f(x) = \overline{x}$
R_0	$f(0,0) = 0+0 = 0$	$f(0,0) = 0 \bullet 0 = 0$	$f(0) = 1$
R_1	$f(1,1) = 1+1 = 1$	$f(1,1) = 1 \bullet 1 = 1$	$f(1) = 0$
R_S			
R_L			
R_M			

Preklopne funkcije in elementi

Zaprti razredi preklopnih funkcij – primer uporabe

- nabor funkcij $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ je FPS, če nobeden od petih zaprtih razredov ne vsebuje vseh funkcij nabora
- elementarni sistem $\{+, \bullet, \overline{\ }\}$:

	$f(x,y) = x+y$	$f(x,y) = x \bullet y$	$f(x) = \overline{x}$
R_0	$f(0,0) = 0+0 = 0$	$f(0,0) = 0 \bullet 0 = 0$	$f(0) = 1$
R_1	$f(1,1) = 1+1 = 1$	$f(1,1) = 1 \bullet 1 = 1$	$f(1) = 0$
R_S	$\overline{f}(\overline{x},\overline{y}) = \overline{(\overline{x}+\overline{y})} = xy$	$\overline{f}(\overline{x},\overline{y}) = \overline{(\overline{x} \bullet \overline{y})} = x+y$	$\overline{f}(\overline{x}) = \overline{\overline{\overline{x}}} = \overline{x}$
R_L			
R_M			

Preklopne funkcije in elementi

Zaprti razredi preklopnih funkcij – primer uporabe

- nabor funkcij $\{f_1,f_2,...,f_n\}$ je FPS, če nobeden od petih zaprtih razredov ne vsebuje vseh funkcij nabora
- elementarni sistem $\{+,\bullet,\overline{\ }\}$:

	$f(x,y) = x+y$	$f(x,y) = x\bullet y$	$f(x) = \overline{x}$
R_0	$f(0,0) = 0+0 = 0$	$f(0,0) = 0\bullet 0 = 0$	$f(0) = 1$
R_1	$f(1,1) = 1+1 = 1$	$f(1,1) = 1\bullet 1 = 1$	$f(1) = 0$
R_S	$\overline{f}(\overline{x},\overline{y}) = \overline{(\overline{x}+\overline{y})} = xy$	$\overline{f}(\overline{x},\overline{y}) = \overline{(\overline{x}\bullet\overline{y})} = x+y$	$\overline{f}(\overline{x}) = \overline{\overline{\overline{x}}} = \overline{x}$
R_L	$x+y \neq a_0 \oplus a_1x \oplus a_2y$ za vsak nabor a_i	$x\bullet y \neq a_0 \oplus a_1x \oplus a_2y$ za vsak nabor a_i	$\overline{x} = 1 \oplus x$
R_M			

Preklopne funkcije in elementi

Zaprti razredi preklopnih funkcij – primer uporabe

- nabor funkcij $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ je FPS, če nobeden od petih zaprtih razredov ne vsebuje vseh funkcij nabora
- elementarni sistem $\{+, \bullet, \overline{\ }\}$:

	$f(x,y) = x+y$	$f(x,y) = x \bullet y$	$f(x) = \overline{x}$
R_0	$f(0,0) = 0+0 = 0$	$f(0,0) = 0 \bullet 0 = 0$	$f(0) = 1$
R_1	$f(1,1) = 1+1 = 1$	$f(1,1) = 1 \bullet 1 = 1$	$f(1) = 0$
R_S	$\overline{f}(\overline{x},\overline{y}) = \overline{(\overline{x}+\overline{y})} = xy$	$\overline{f}(\overline{x},\overline{y}) = \overline{(\overline{x} \bullet \overline{y})} = x+y$	$\overline{f}(\overline{x}) = \overline{\overline{\overline{x}}} = \overline{x}$
R_L	$x+y \neq a_0 \oplus a_1 x \oplus a_2 y$ za vsak nabor a_i	$x \bullet y \neq a_0 \oplus a_1 x \oplus a_2 y$ za vsak nabor a_i	$\overline{x} = 1 \oplus x$
R_M	$0+0 \leq 0+1 \leq 1+1$ $0+0 \leq 1+0 \leq 1+1$	$0 \bullet 0 \leq 0 \bullet 1 \leq 1 \bullet 1$ $0 \bullet 0 \leq 1 \bullet 0 \leq 1 \bullet 1$	$f(0) > f(1)$

Preklopne funkcije in elementi

Zaprti razredi preklopnih funkcij – primer uporabe

- nabor funkcij $\{f_1,f_2,\ldots,f_n\}$ je FPS, če nobeden od petih zaprtih razredov ne vsebuje vseh funkcij nabora
- iz tabele je razvidno, da sta tudi $\{+,\overline{\ }\}$ in $\{\bullet,\overline{\ }\}$ FPS:

	$f(x,y) = x+y$	$f(x,y) = x\bullet y$	$f(x) = \overline{x}$
R_0	$f(0,0) = 0+0 = 0$	$f(0,0) = 0\bullet 0 = 0$	$f(0) = 1$
R_1	$f(1,1) = 1+1 = 1$	$f(1,1) = 1\bullet 1 = 1$	$f(1) = 0$
R_S	$\overline{f}(\overline{x},\overline{y}) = \overline{(\overline{x}+\overline{y})} = xy$	$\overline{f}(\overline{x},\overline{y}) = \overline{(\overline{x}\bullet\overline{y})} = x+y$	$\overline{f}(\overline{x}) = \overline{\overline{\overline{x}}} = \overline{x}$
R_L	$x+y \neq a_0 \oplus a_1 x \oplus a_2 y$ za vsak nabor a_i	$x\bullet y \neq a_0 \oplus a_1 x \oplus a_2 y$ za vsak nabor a_i	$\overline{x} = 1 \oplus x$
R_M	$0+0 \leq 0+1 \leq 1+1$ $0+0 \leq 1+0 \leq 1+1$	$0\bullet 0 \leq 0\bullet 1 \leq 1\bullet 1$ $0\bullet 0 \leq 1\bullet 0 \leq 1\bullet 1$	$f(0) > f(1)$

Preklopne funkcije in elementi

Zaprti razredi preklopnih funkcij – primer uporabe

- nabor funkcij $\{f_1,f_2,...,f_n\}$ je FPS, če nobeden od petih zaprtih razredov ne vsebuje vseh funkcij nabora
- sistem $\{\uparrow\}$:

	$f(x,y) = x \uparrow y$
R_0	
R_1	
R_S	
R_L	
R_M	

Preklopne funkcije in elementi

Zaprti razredi preklopnih funkcij – primer uporabe

- nabor funkcij $\{f_1,f_2,\ldots,f_n\}$ je FPS, če nobeden od petih zaprtih razredov ne vsebuje vseh funkcij nabora
- sistem $\{\uparrow\}$:

	$f(x,y) = x \uparrow y$
R_0	$f(0,0) = 0 \uparrow 0 = 1$
R_1	$f(1,1) = 1 \uparrow 1 = 0$
R_S	
R_L	
R_M	

Preklopne funkcije in elementi

Zaprti razredi preklopnih funkcij – primer uporabe

- nabor funkcij $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ je FPS, če nobeden od petih zaprtih razredov ne vsebuje vseh funkcij nabora
- sistem $\{\uparrow\}$:

	$f(x,y) = x \uparrow y$
R_0	$f(0,0) = 0 \uparrow 0 = 1$
R_1	$f(1,1) = 1 \uparrow 1 = 0$
R_S	$\overline{f}(\overline{x},\overline{y}) = \overline{(\overline{x} \uparrow \overline{y})} = x \downarrow y$
R_L	
R_M	

Preklopne funkcije in elementi

Zaprti razredi preklopnih funkcij – primer uporabe

- nabor funkcij $\{f_1, f_2, ..., f_n\}$ je FPS, če nobeden od petih zaprtih razredov ne vsebuje vseh funkcij nabora
- sistem $\{\uparrow\}$:

	$f(x,y) = x \uparrow y$
R_0	$f(0,0) = 0 \uparrow 0 = 1$
R_1	$f(1,1) = 1 \uparrow 1 = 0$
R_S	$\overline{f}(\overline{x},\overline{y}) = \overline{(\overline{x} \uparrow \overline{y})} = x \downarrow y$
R_L	$x \uparrow y \neq a_0 \oplus a_1 x \oplus a_2 y$ za vsak nabor a_i
R_M	

Preklopne funkcije in elementi

Zaprti razredi preklopnih funkcij – primer uporabe

- nabor funkcij $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ je FPS, če nobeden od petih zaprtih razredov ne vsebuje vseh funkcij nabora
- sistem $\{\uparrow\}$:

	$f(x,y) = x \uparrow y$
R_0	$f(0,0) = 0 \uparrow 0 = 1$
R_1	$f(1,1) = 1 \uparrow 1 = 0$
R_S	$\overline{f}(\overline{x},\overline{y}) = \overline{(\overline{x} \uparrow \overline{y})} = x \downarrow y$
R_L	$x \uparrow y \neq a_0 \oplus a_1 x \oplus a_2 y$ za vsak nabor a_i
R_M	$f(1,0) = 1 \uparrow 0 = 1$ $> f(1,1) = 1 \uparrow 1 = 0$

Preklopne funkcije in elementi

Poenostavljanje preklopnih funkcij

- PDNO in PKNO je preprosto zapisati in pretvarjati iz druge v drugo, a za realizacijo z logičnimi vrati potrebujemo veliko število le-teh, in to kar treh različnih vrst (AND, OR, NOT)
- v praksi želimo preklopno funkcijo realizirati čim bolj preprosto:
(i) s čim manjšim skupnim številom vrat in/ali
(ii) s čim manj različnimi vrstami vrat
- za (i) **minimiziramo funkcijo**; pri PDNO uporabimo teorem

$$xy + x\overline{y} = x(y + \overline{y}) = x$$

  v pomoč pa nam je tudi Veitchev ali Karnaughov diagram
- za (ii) **prevedemo operatorje**; FPS $\{+, \bullet, \overline{\ \ }\}$ nadomestimo z bolj primernim za realizacijo obravnavane funkcije: $\{\bullet, \overline{\ \ }\}$, $\{+, \overline{\ \ }\}$, $\{\uparrow\}$ ali $\{\downarrow\}$, včasih tudi $\{\oplus, \bullet, 1\}$ (npr. pretvorba binarno-Gray) ali $\{\equiv, +, 0\}$

Preklopne funkcije in elementi

Minimizacija

- **sosednja minterma:** minterma (konjunktivna izraza), ki se razlikujeta po negaciji natanko ene spremenljivke
- sosednja minterma lahko skrajšamo v konjunktivni izraz, ki vsebuje eno spremenljivko manj:

$$x_1x_2x_3 + x_1\bar{x}_2x_3 = x_1x_3(x_2 + \bar{x}_2) = x_1x_3$$

$$\bar{x}_1x_2\bar{x}_3x_4 + \bar{x}_1x_2x_3x_4 = \bar{x}_1x_2x_4(\bar{x}_3 + x_3) = \bar{x}_1x_2x_4$$

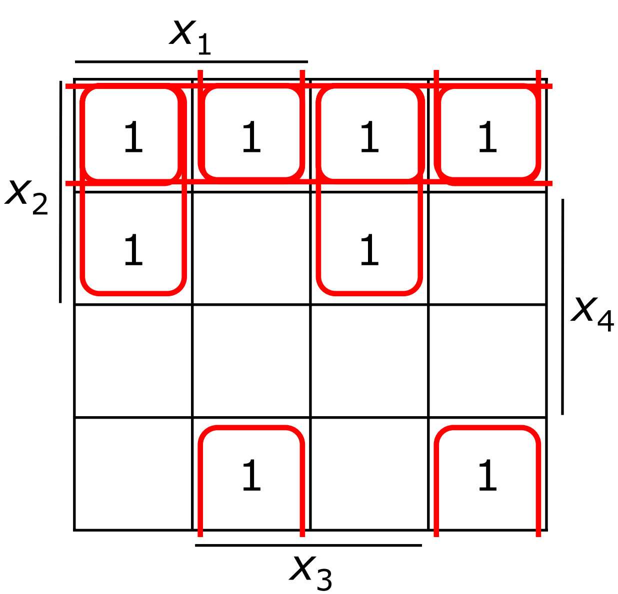
- če krajši izraz še vedno vsebuje člena, ki se razlikujeta po eni sami negaciji, lahko postopek ponovimo:

$$\begin{aligned}&\bar{x}_1x_2\bar{x}_3 + \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 + \bar{x}_1x_2x_3 + \bar{x}_1\bar{x}_2x_3\\ &= \bar{x}_1\bar{x}_3(x_2 + \bar{x}_2) + \bar{x}_1x_3(x_2 + \bar{x}_2) = \bar{x}_1\bar{x}_3 + \bar{x}_1x_3\\ &= \bar{x}_1(x_3 + \bar{x}_3) = \bar{x}_1\end{aligned}$$

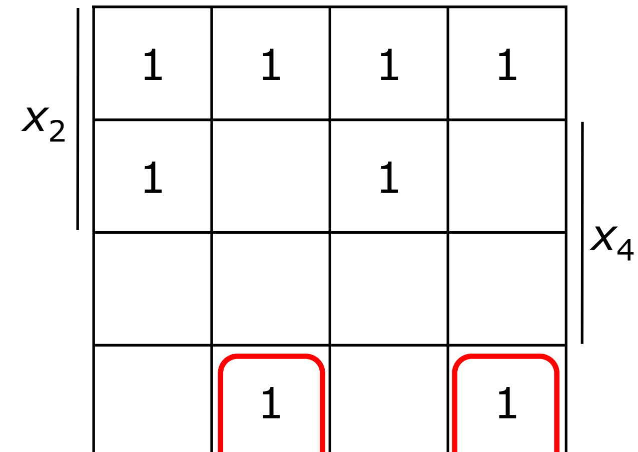
Preklopne funkcije in elementi

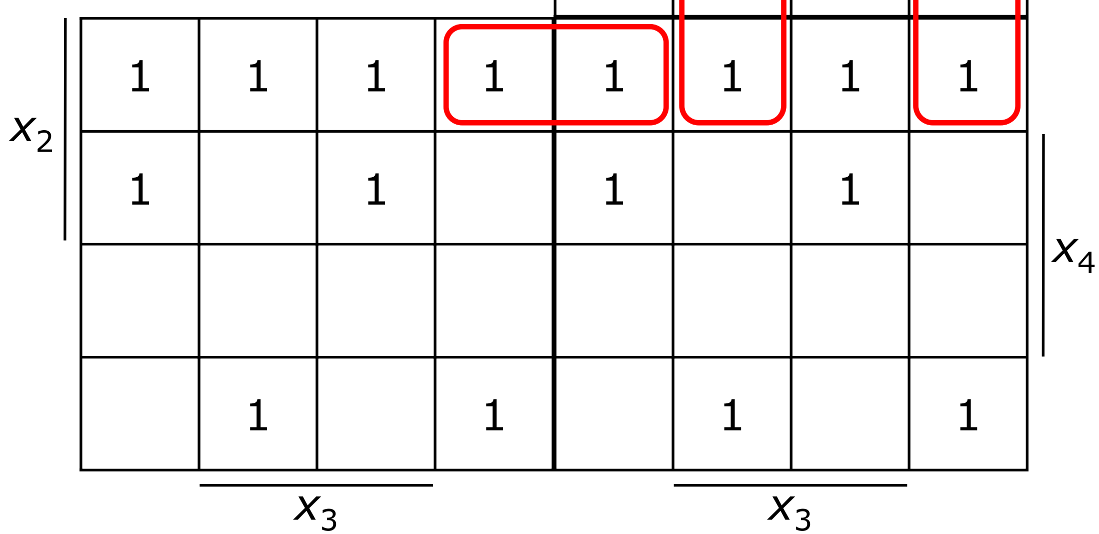
Sosednost v Veitchevem diagramu

- sosednji polji, ki obe vsebujeta enici, sta sosednja minterma:
- tudi preko robov:



- sosednost preko robov je jasno razvidna, če diagramu dodamo še dve njegovi kopiji:

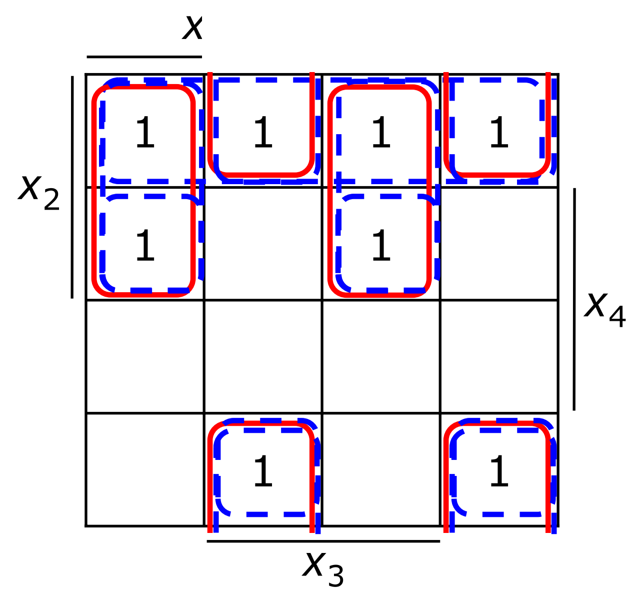




Preklopne funkcije in elementi

Minimizacija z Veitchevim diagramom

- **glavni vsebovalnik (GV):** 2^k sosednjih mintermov v skupini celic, ki je pravokotne oblike; tudi minterm brez sosedov je GV
- postopek minimizacije:
  1. funkcijo zapišemo z Veitchevim diagramom,
  2. med nabori GV, ki pokrijejo vse minterme (enice), izberemo tiste, v katerih vsak GV vsebuje kak minterm, ki ga drugi ne vsebujejo
  3. zapišemo vsoto mintermov v najmanjšem med temi nabori; to je **minimalna disjunktivna normalna oblika (MDNO) preklopne funkcije**



$$f(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_1x_2\overline{x}_3 + x_1x_3\overline{x}_4 + \overline{x}_1x_2x_3 + \overline{x}_1\overline{x}_3\overline{x}_4$$

Preklopne funkcije in elementi

Prevedba operatorjev iz $\{+, \cdot, \overline{\ }\}$ v $\{\uparrow\}$

- za prevedbo iz DNO uporabimo naslednji formuli (teorema):

$$
\begin{aligned}
& x_1x_2x_3\ldots x_k + y_1y_2y_3\ldots y_m + \ldots + z_1z_2z_3\ldots z_n \\
&= \overline{\overline{x_1x_2x_3\ldots x_k}} + \overline{\overline{y_1y_2y_3\ldots y_m}} + \ldots + \overline{\overline{z_1z_2z_3\ldots z_n}} \\
&= \overline{\overline{x_1x_2x_3\ldots x_k} \bullet \overline{y_1y_2y_3\ldots y_m} \bullet \ldots \bullet \overline{z_1z_2z_3\ldots z_n}} \\
&= \uparrow(\overline{x_1x_2x_3\ldots x_k}, \overline{y_1y_2y_3\ldots y_m}, \ldots, \overline{z_1z_2z_3\ldots z_n}) \\
&= \uparrow(\uparrow(x_1,x_2,x_3,\ldots,x_k), \uparrow(y_1,y_2,y_3,\ldots,y_m), \uparrow(z_1,z_2,z_3,\ldots,z_n))
\end{aligned}
$$

in $\bar{x} = x \uparrow x$

- primer: $f(x_1,\ldots,x_4) = x_1x_2\bar{x}_3 + x_1x_3\bar{x}_4 + \bar{x}_1x_2x_3 + \bar{x}_1\bar{x}_3\bar{x}_4$

$$
\begin{aligned}
&= \uparrow(\uparrow(x_1,x_2,\bar{x}_3),\uparrow(x_1,x_3,\bar{x}_4),\uparrow(\bar{x}_1,x_2,x_3),\uparrow(\bar{x}_1,\bar{x}_3,\bar{x}_4)) \\
&= \uparrow(\uparrow(x_1,x_2,\uparrow(x_3,x_3)),\uparrow(x_1,x_3,\uparrow(x_4,x_4)), \\
&\qquad \uparrow(\uparrow(x_1,x_1),x_2,x_3),\uparrow(\uparrow(x_1,x_1),\uparrow(x_3,x_3),\uparrow(x_4,x_4)))
\end{aligned}
$$

Preklopne funkcije in elementi

Simetrične funkcije

lokalno simetrične funkcije glede na x_i in x_j:

$f(x_1,x_2,\ldots,x_i,\ldots,x_j,\ldots,x_n) = f(x_1,x_2,\ldots,x_j,\ldots,x_i,\ldots,x_n)$ (pišemo $x_i \sim x_j$)

ali $f(x_1,x_2,\ldots,x_i,\ldots,x_j,\ldots,x_n) = f(x_1,x_2,\ldots,\overline{x}_j,\ldots,\overline{x}_i,\ldots,x_n)$ (pišemo $x_i \sim \overline{x}_j$)

globalno simetrične funkcije: simetrične glede na vsak par $\{x_i,x_j\}$, t.j. za vsak par $\{x_i,x_j\}$ velja $x_i \sim x_j$ ali pa $x_i \sim \overline{x}_j$

zapis: $S_{a,b,\ldots}(x_1,x_2,\ldots x_n)$ – funkcija, ki v PDNO vsebuje vse minterme z a nenegiranimi spremenljivkami, vse minterme z b nenegiranimi spremenljivkami, ...

$S_3(x_1,x_2,x_3) = x_1x_2x_3$ $\quad S_1(x_1,x_2,x_3) = \overline{x}_1\overline{x}_2x_3 + \overline{x}_1x_2\overline{x}_3 + x_1\overline{x}_2\overline{x}_3$

$$S_{0,3}(x_1,x_2,x_3,x_4) = \overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3\overline{x}_4 + \overline{x}_1x_2x_3x_4 + x_1\overline{x}_2x_3x_4 + x_1x_2\overline{x}_3x_4 + x_1x_2x_3\overline{x}_4$$

$$S_{0,3}(x_1,\overline{x}_2,x_3,x_4) = \overline{x}_1x_2\overline{x}_3\overline{x}_4 + \overline{x}_1\overline{x}_2x_3x_4 + x_1x_2x_3x_4 + x_1\overline{x}_2\overline{x}_3x_4 + x_1\overline{x}_2x_3\overline{x}_4$$

Preklopne funkcije in elementi

Pragovne funkcije in elementi

- **pragovna funkcija:** $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, za katero obstajata takšna množica celih števil $\{w_1,w_2,\ldots,w_n\}$ in takšno celo število P, da velja

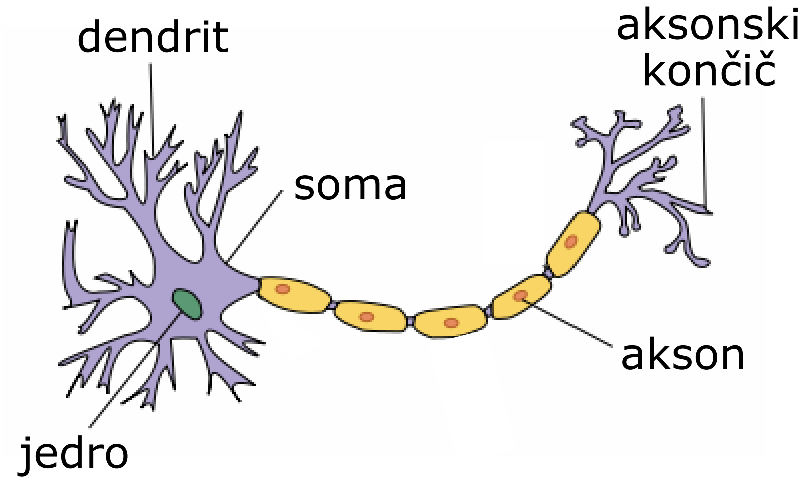
$$f(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\begin{cases}0, & \text{če } \sum_{i=1}^{n} w_i x_i < P\\ 1, & \text{če } \sum_{i=1}^{n} w_i x_i \geq P\end{cases}$$

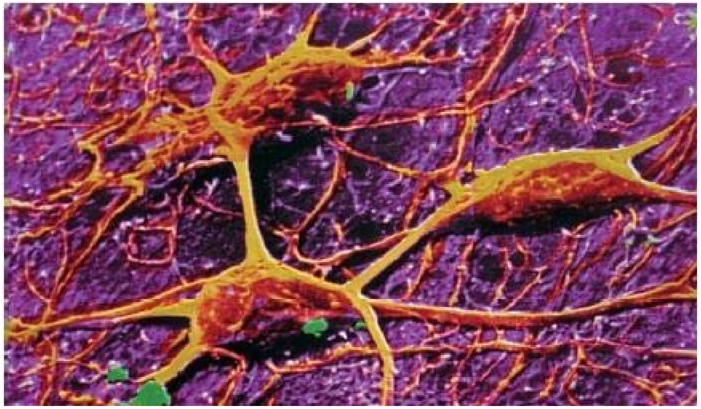
- **pragovni element:** skupina logičnih vrat, katere izhod f je pragovna funkcija vhodov $\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$

Preklopne funkcije in elementi

Živčna celica (nevron)

- dve stanji: aktivno (oddaja signal) in pasivno (ne oddaja)
- povezave med nevroni so sinapse; na eni strani je končič aksona, na drugi dendrit
- prevajanje vselej v smeri dendrit → soma → akson
- sinapse ekscitacijske (signal na aksonu - signal na dendritu) ali inhibicijske (signal "negirajo")
- soma glede na signale z dendritov in glede na svoj prag pošlje živčni signal naprej v akson (aktivira nevron) ali ne



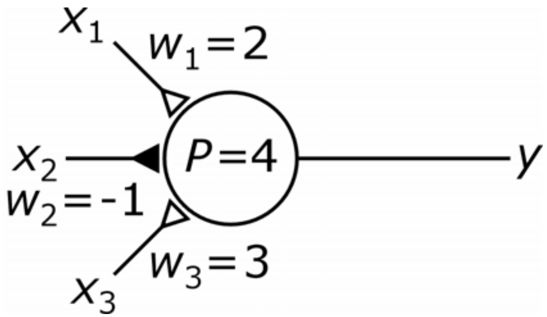


trije nevroni v človeških možganih

Preklopne funkcije in elementi

Formalni nevron – pragovni model nevrona

- formalni nevron je pragovni element, s katerim lahko približno opišemo ali simuliramo obnašanje dejanskega biološkega nevrona
- izberemo število sinaps (n), njihovo naravo (torej množico $\{w_1,w_2,...,w_n\}$, kjer za ekscitacijske sinapse izberemo $w_i > 0$, za inhibicijske $w_i < 0$) in prag aktivacije nevrona (P)
- zapišemo pravilnostno tabelo, iz nje DNO in odtod realizacijo z logičnimi vrati – torej realizacijo pragovnega elementa



x_1	x_2	x_3	$\Sigma w_i x_i$	y
0	0	0	0	0
0	0	1	3	0
0	1	0	-1	0
0	1	1	2	0
1	0	0	2	0
1	0	1	5	1
1	1	0	1	0
1	1	1	4	1

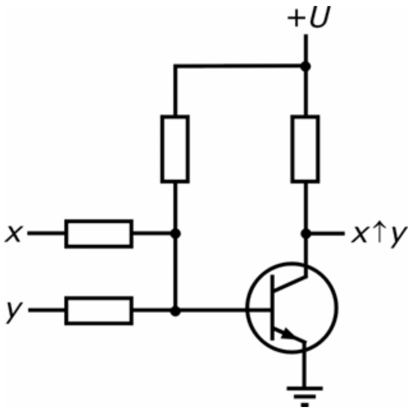
Preklopne funkcije in elementi

Tehnološke izvedbe preklopnih funkcij

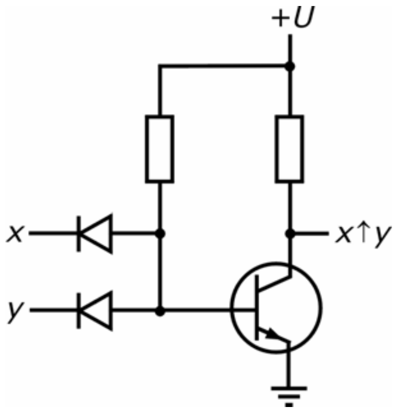
- tehnološke izvedbe preklopnih funkcij temeljijo na polprevodniških nelinearnih elementih, ki delujejo kot električno krmiljena stikala: **diode**, **bipolarni tranzistorji** in **unipolarni tranzistorji**
- **RTL tehnologija (Resistor-Transistor Logic)**: logična vrata zgrajena iz uporov in bipolarnih tranzistorjev; od sredine 1950ih
- **DTL (Diode-Transistor Logic):** vrata zgrajena iz diod, bipolarnih tranzistorjev in uporov; od konca 1950ih
- **TTL (Transistor-Transistor Logic)**: iz bipolarnih tranzistorjev in uporov; od začetka 1960ih, zaradi višje hitrosti in manjših elementov danes že povsem izrinila RTL in DTL
- **CMOS (Complementary Metal Oxide Semiconductor):** samo iz unipolarnih tranzistorjev (MOSFET = M. O. S. Field-Effect Transistor); od konca 1960ih, porabijo manj moči kot TTL, a so bolj občutljivi (npr. na statično napetost); od 1990ih počasi izrinjajo TTL

Preklopne funkcije in elementi

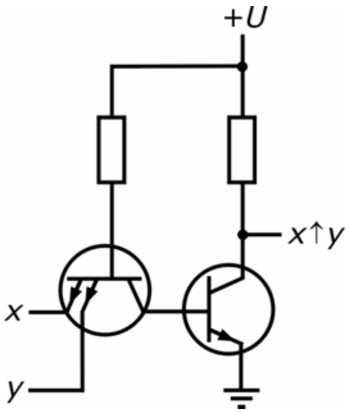
Tehnološke izvedbe preklopnih funkcij



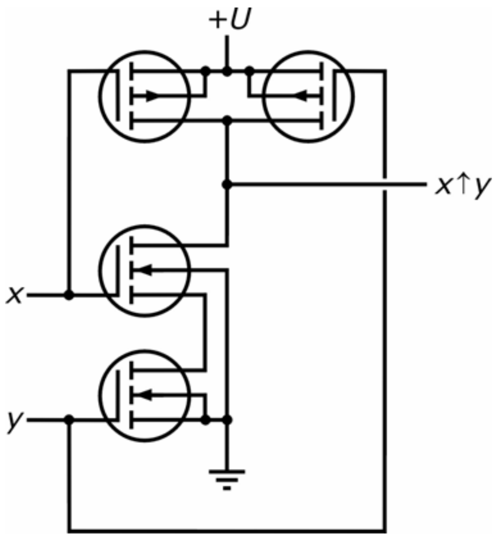
vrata NAND v
RTL tehnologiji
(prototip)



vrata NAND v
DTL tehnologiji
(prototip)



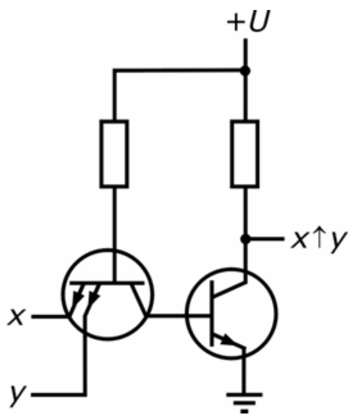
vrata NAND v
TTL tehnologiji
(prototip)



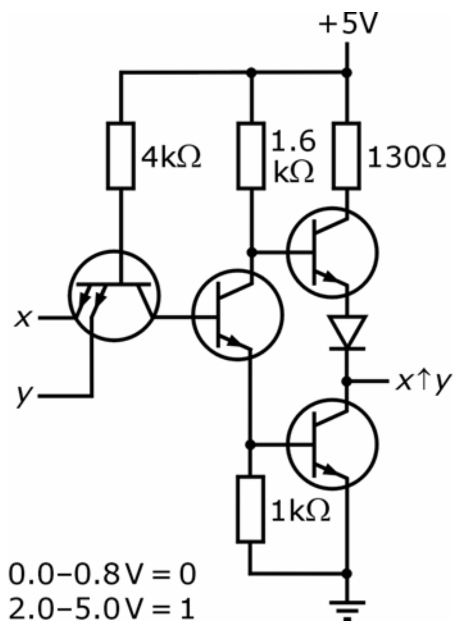
vrata NAND v
CMOS tehnologiji
(prototip)

Preklopne funkcije in elementi

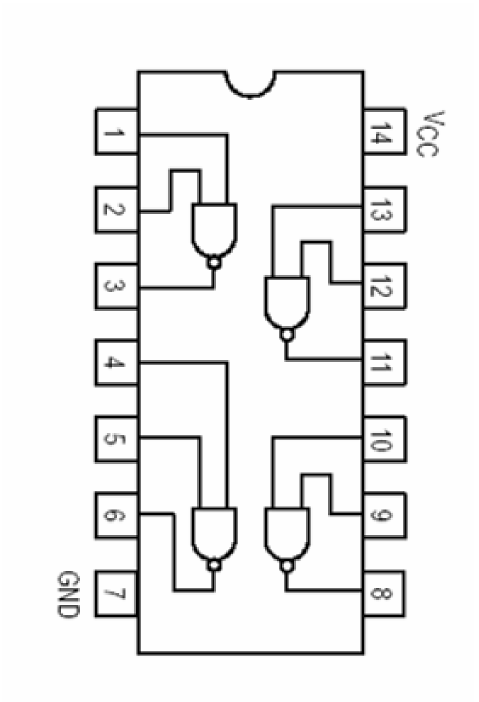
Tehnološke izvedbe preklopnih funkcij



vrata NAND v TTL tehnologiji (prototip)



vrata NAND v TTL tehnologiji (dejanska izvedba v vezju Fairchild Semiconductor DM74LS00)



razporeditev vrat NAND v vezju DM74LS00