

## Deformacija trdnih snovi

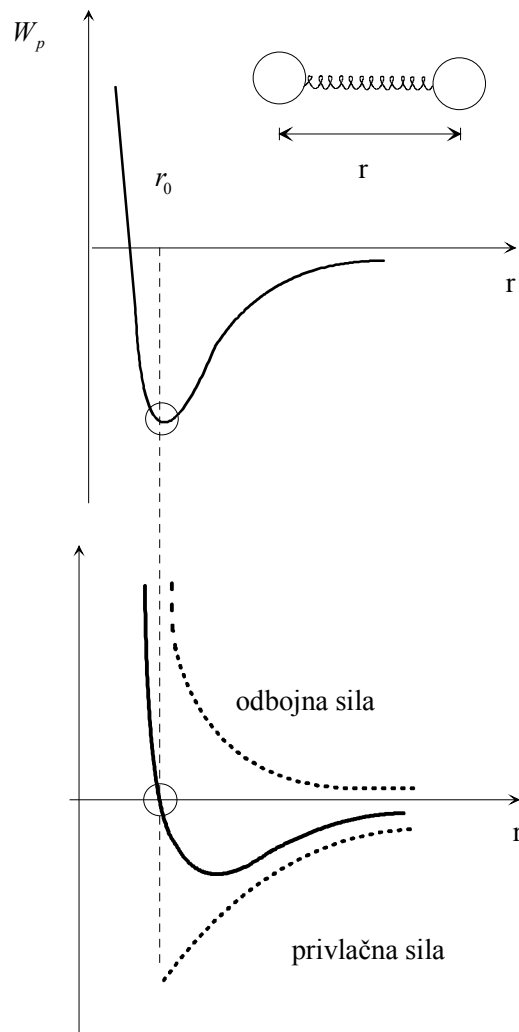
Mrežne točke (vozlišča) v kristalni mreži trdne snovi definirajo samo povprečno lego posameznih atomov, ki sestavljajo kristal trdne snovi. Tako kot v plinu, tudi v kristalu atomi ne mirujejo, ampak se termično gibljejo okrog svoje ravnovesne lege. Amplitude odmika so večje pri večji absolutni temperaturi  $T$ .

Sila med sosednjima atomoma trdne snovi v kristalni mreži je odvisna od razdalje med njima in narašča z razdaljo. Spodnja slika shematsko prikazuje potencialno energijo med dvema

atomoma in ustrezno silo  $F_a = -\frac{\partial W_p}{\partial r}$ . Celotna sila je sestavljena iz privlačnega in odbojnega

dela. Privlačna sila med atomoma je lahko na primer Coulombska privlačna sila med pozitivnim in negativnim atomom, tako kot je to v kristalu NaCl.

Odbojna sila pa je posledica Pauli-jevega izključitvenega načela. Elektroni z enakimi kvantnimi števili gredo na višje energijske nivoje, ko se dva atoma približata. Posledično se med približevanjem dveh atomov njuna energija večja, sila pa postane odbojna (glejte sliko).



slika 1

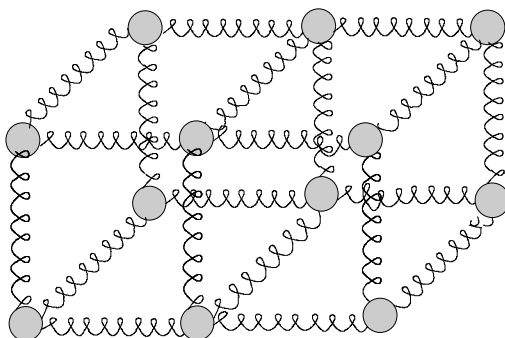
Pri majhnih odmikih od ravnovesne lege ( $|r-r_0| \ll 1$ ) lahko potencialno energijo med atomoma v kristalni mreži v okolici ravnovesne razdalje  $r_0$  aproksimiramo s parabolo (glejte še str. xxx):

$$W_p = \frac{1}{2}k(r-r_0)^2 - C, \quad (1)$$

kjer je  $r$  razdalja med dvema sosednjima atomoma v kristalni mreži (glejte sliko). Ustrezna sila med atomoma v bližini ravnovesne razdalje je potem:

$$F_a = -\frac{\partial W_p}{\partial r} = -k(r-r_0) \quad (2)$$

Vidimo, da je v okolici ravnovesne razdalje med sosednjimi atomi sila med sosednjima atomoma linearno odvisna od razdalje med njima, zato lahko atomske sile med sosednjimi atomi kristalne mreže trdne snovi ponazorimo z vijačnimi vzmetmi, ki povezujejo atome med seboj.



slika 2

Potencialno energijo med dvema sosednjima atomoma v kristalni mreži pa vzporedimo s prožnostno energijo vzmeti.

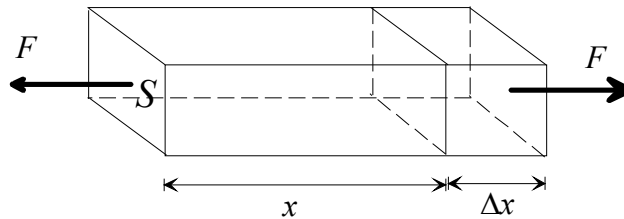
Model vijačnih vzmeti med atomi kristala pojasni tudi Hook-ov zakon. Ko namreč na makroskopsko telo deluje zunanja sila, se telo deformira, ravnovesna (poprečna) razdalja med sosednjimi atomi v kristalni mreži ( $r_0$ ) pa se zato spremeni na vrednost  $r$ . V novem ravnovesju se zato sile med atomi kristala spremenijo. Linearna sprememba sile med atomi (enačba (2))

$$F_a = -k(r-r_0) \quad (2)$$

na mikroskopskem nivoju se odraža tudi na makroskopskem nivoju v linearni zvezi med natezno (kompresijsko) silo  $F$  in podaljškom (skrčkom) telesa  $\Delta x$ :

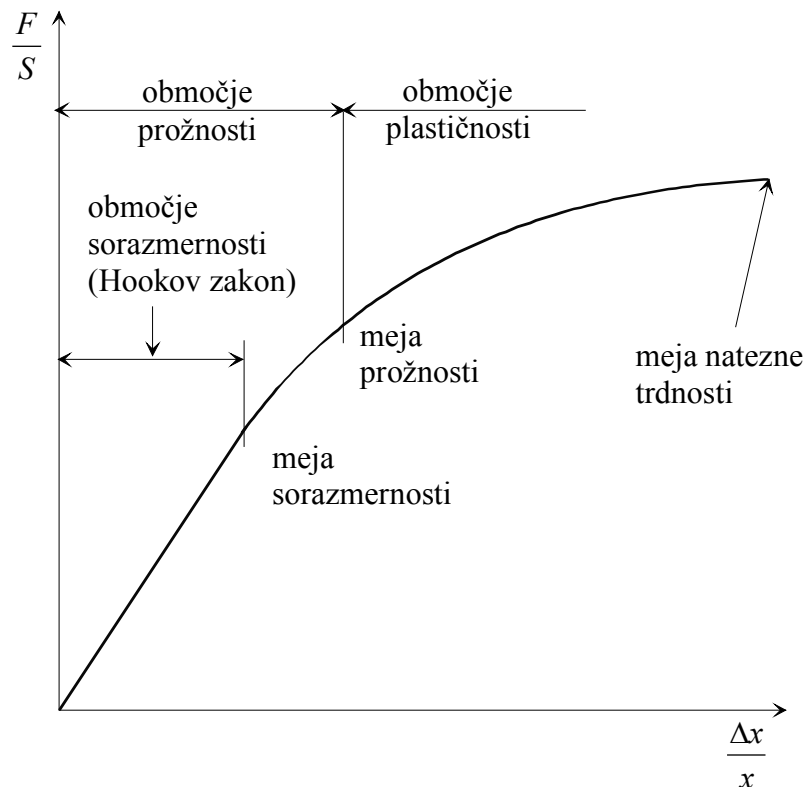
$$\boxed{\sigma_x = \frac{F}{S} = E \frac{\Delta x}{x}}, \quad (3)$$

kjer je  $\varepsilon_x = \frac{\Delta x}{x}$  relativni podaljšek (skrčec),  $\sigma_x = \frac{F}{S}$  natezna ali kompresijska napetost in  $S$  površina preseka na katerega deluje v pravokotni smeri sila  $F$ . Sorazmernostni koeficient  $E$  (Youngov modul) je sorazmeren mikroskopski konstanti  $k$  v enačbi (2). Enačbo (3) imenujemo po Newtonovem sodobniku Robertu Hooku **Hookov zakon**.



slika 3

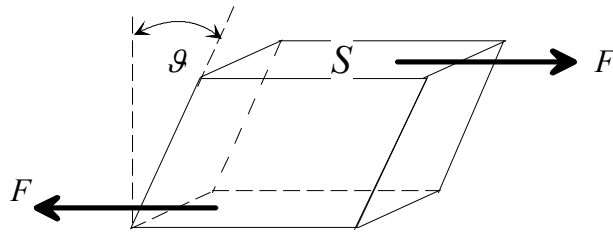
### Območje veljavnosti Hookovega zakona



slika 4

V nadaljevanju naštejemo poleg zgoraj opisane natezne (kompresijske) vzdolžne deformacije še nekatere druge karakteristične deformacije za katere velja linearna zveza med napetostjo in deformacijo.

## Strižna deformacija

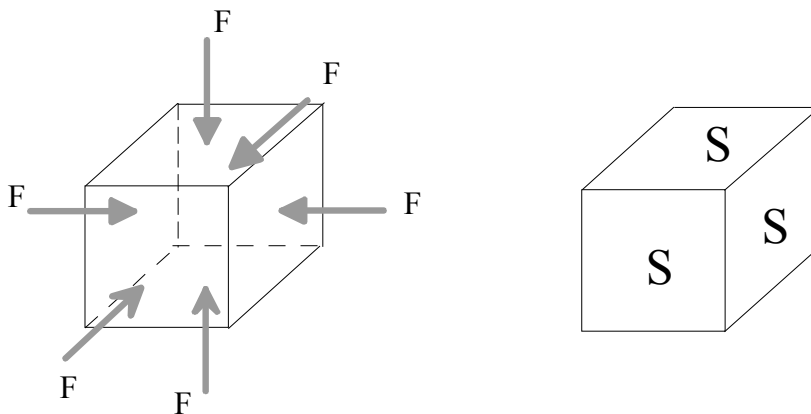


V primeru strižne deformacije deluje sila  $F$  na zgornjo in spodnjo ploskev vzdolž ploskve, to je v smeri pravokotno na normalo ploskve:

$$\boxed{\tau = \frac{F}{S} = G \vartheta}, \quad (4)$$

kjer je  $\tau$  strižna napetost,  $G$  strižni modul, pomen deformacijskega kota  $\vartheta$  in površine  $S$  pa je razviden iz zgornje slike.

## Vsestransko stiskanje (razpenjanje)



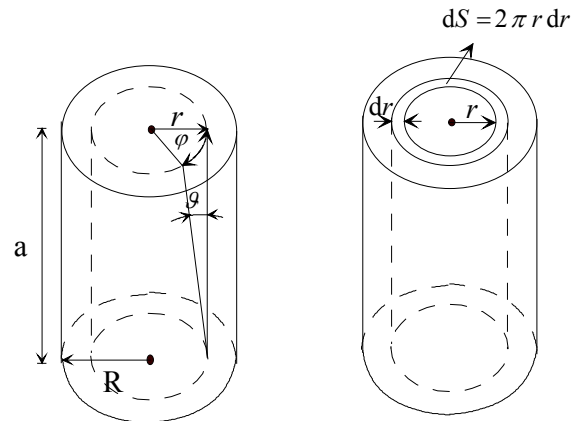
slika 5

$$\boxed{\frac{\Delta V}{V} = -\chi \frac{F}{S}}, \quad (5)$$

kjer  $\Delta p = \frac{F}{S}$  sprememba tlaka, ki deluje na površino telesa,  $\frac{\Delta V}{V}$  relativna sprememba volumna in  $\chi$  stisljivost. Obratno vrednost stisljivosti  $\chi^{-1}$  imenujemo stisljivostni modul.

## Torzija

$$r \varphi = a \vartheta \Rightarrow \vartheta = \varphi \frac{r}{a}$$



slika 6

Torzija je poseben primer strižne deformacije (glejte sliko):

$$\frac{dF}{dS} = G \vartheta, \quad (6)$$

kjer je  $dS = 2 \pi r dr$ ,  $\vartheta = \varphi \frac{r}{a}$  in  $G$  strižni modul, od koder sledi:

$$\frac{dF}{2 \pi r dr} = G \varphi \frac{r}{a}, \quad (7)$$

oziroma:

$$dF = \left( \frac{2 \pi G \varphi}{a} \right) r^2 dr. \quad (8)$$

Izračunajmo navor  $dM$  s katerim deluje sila  $dF$  na cevasti izrez palice s polmerom  $r$ :

$$dM = r dF = \left( \frac{2 \pi G \varphi}{a} \right) r^3 dr \quad (9)$$

Celoten navor je potem:

$$M = \int dM = \int_0^R \left( \frac{2 \pi G \varphi}{a} \right) r^3 dr = \left( \frac{2 \pi G \varphi}{a} \right) \frac{R^4}{4}. \quad (10)$$

Vidimo torej, da je navor, ki je potreben za torzijski zasuk palice za kot  $\varphi$  sorazmeren kotu zasuka:

$$\boxed{M = D \varphi}, \quad (11)$$

kjer je

$$D = \frac{\pi G R^4}{2a} \quad (12)$$

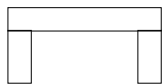
**Vrednosti elastičnih konstant za nekatere trdne snovi in kapljevine\* :**

SNOV	E(Young-ov modul) $\left[ \frac{N}{m^2} \right]$	G (strižni modul) $\left[ \frac{N}{m^2} \right]$	$\chi^{-1}$ $\left[ \frac{N}{m^2} \right]$
aluminij	$7 \cdot 10^{10}$	$2.5 \cdot 10^{10}$	$7 \cdot 10^{10}$
jeklo	$20 \cdot 10^{10}$	$8.4 \cdot 10^{10}$	$16 \cdot 10^{10}$
voda	-	-	$0.21 \cdot 10^{10}$
steklo	$7 \cdot 10^{10}$	$3 \cdot 10^{10}$	$5 \cdot 10^{10}$
živo srebro	-	-	$2.8 \cdot 10^{10}$

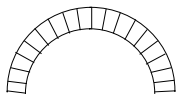
\* kapljevine se razlikujejo od trdne snovi po tem, da ne prenašajo strižnih napetosti

### Upogib nosilca

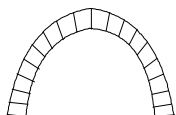
Poznavanje deformacij in napetosti pri upogibu nosilcev je zelo pomembno pri konstrukciji strojev in zgradb. Ravni nosilci (preklade) na vhodih, vratih in oknih so izpostavljeni velikim upogibnim napetostim, zato so že v antičnih časih preklado nadomestili z lokom (obokom):



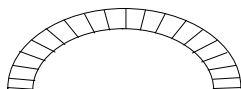
preklada v Mikenah (stara Grčija)



staro rimski lok



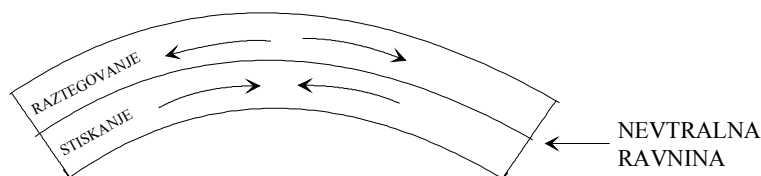
gotski lok



tudorski lok

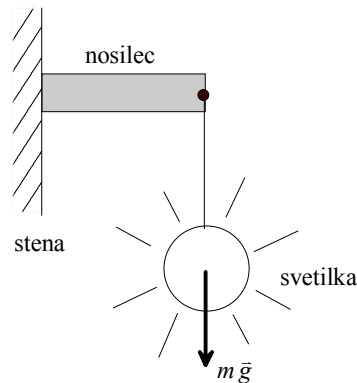
slika 7

Pri čistem upogibu nosilca obstaja tako imenovana nevtralna ravnina, ki pri upogibni deformaciji ohrani svojo površino. Nad nevtralno ravnino se nosilec razteguje, pod nevtralno ravnino pa je izpostavljen stiskanju. Pojav lahko opazujemo tudi pri upognjeni leskovi palici, kjer se na notranji strani loka lubje naguba, na zunanji strani pa napne.



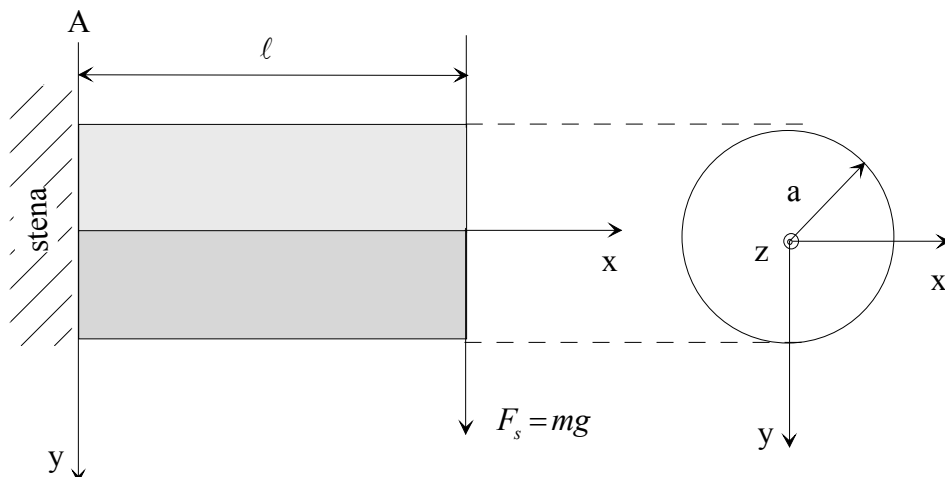
slika 8

Kot primer v nadaljevanju analiziramo napetosti in deformacije v zelo lahkem nosilcu s krožnim presekom s polmerom  $a$ , ki je na levem koncu vpet v steno, na desnem koncu nosilca pa je z lahko žico pritrjena svetilka z maso  $m$ .



slika 9

Izhodišče koordinatnega sistema postavimo v središče. Sila teže svetilke  $\vec{F}_s = m \vec{g}$  upogiba nosilec. Vpliv lastne teže nosilca na njegov upogib zanemarimo. Zaradi sile  $F_s$  nosilec upogne v ravnini  $x, y$  izbranega koordinatnega sistema.



Slika 10

Zato se različni deli nosilca vzdolž osi  $y$  različno raztegujejo. Znotraj nosilca obstaja na os  $y$  pravokotna plast, ki se ne raztegne ali skrči. Kot že omenjeno jo imenujemo nevtralna plast (ravnina). Vzdolž te ravnine (plasti) merimo od koordinate  $x$  odvisnost ukrivljenost (glejte sliko 11):

$$C_0 = \frac{1}{R_0}, \quad (13)$$

kjer je  $R_0$  krivinski radij nevtralne ravnine na mestu  $x$ . Nad nevtralno plastjo se elementi vzdolžne plasti zaradi navora sile  $\vec{F}_s$  raztegnejo (ali skrčijo), pod to plastjo pa se skrčijo (ali raztegnejo), odvisno pač od predznaka ukrivljenosti  $C(x)$  (glejte še sliko 11):

$$\varepsilon_x = \frac{ds - ds_r}{ds_r} = \frac{(R_0(x) + d) \cdot d\vartheta - R_0(x) \cdot d\vartheta}{R_0(x) \cdot d\vartheta}, \quad (14)$$

torej:

$$\varepsilon_x = \frac{d}{R_0(x)} = C(x) \cdot d, \quad (15)$$

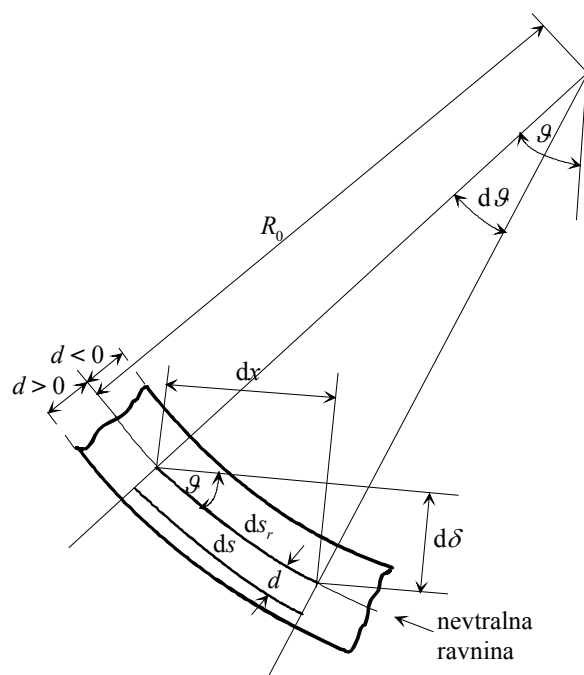
kjer je  $d$  razdalja obravnavanega elementa nosilca od nevtralne ravnine,  $ds_r$  in  $ds$  dolžini tega elementa pred oziroma po upogibu nosilca, pomen kotov  $\vartheta$  in  $d\vartheta$  pa je razviden iz slike 11.

Vrednost  $d$  na sliki 11 je pozitivna, če se ravnina nahaja pod nevtralno ravnino in negativna, če se obravnavana ravnina nahaja nad nevtralno ravnino.

Pri upogibu nosilca pod vplivom sile  $\vec{F}$  so od nič različne tudi nekatere strižne deformacije, ki pa jih bomo v tej fazi napetostne analize nosilca zanemarili. V nadaljnji analizi napetosti v nosilcu bomo predpostavili, da Hookov zakon v obliki enačbe (3) velja tudi za posamezne zelo tanke elemente vzdolžnih plasti v nosilcu na izbrani razdalji  $d$  od referenčne plasti. Torej, če vstavimo  $\varepsilon_x$  iz enačbe (15) v Hookov zakon  $\sigma_x = E \varepsilon_x$  dobimo:

$$\sigma_x = E \varepsilon_x = E \cdot C(x) d, \quad (16)$$

kjer je  $d$  pozitiven za plasti, ki se pri upogibu raztegnejo in negativen za plasti, ki se pri upogibu skrčijo.



$$\begin{aligned} ds_r &= R_0 d\vartheta \\ \operatorname{tg} \vartheta &= \frac{d\delta}{dx} \\ (ds_r)^2 &= (dx)^2 + (d\delta)^2 \end{aligned}$$

slika 11

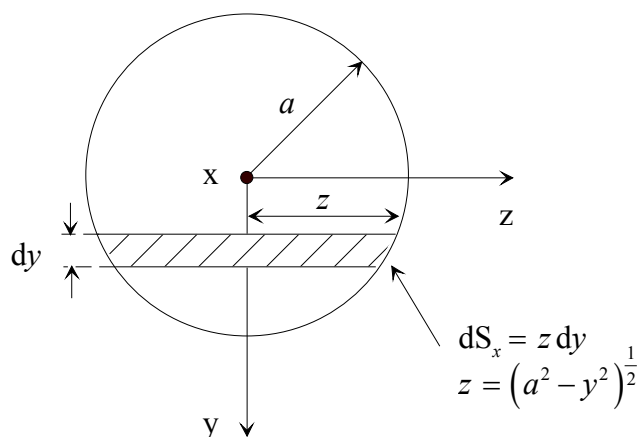
Zaradi upogiba nosilca pod vplivom navora sile  $\vec{F}$  se element nosilca z dolžino  $ds_r$  na razdalji  $d$  od nevtralne ravnine raztegne na dolžino  $ds$ . Simbol  $R_0$  označuje krivinski radij nevtralne ravnine v izbrani točki,  $\delta$  pa je vertikalni odmik izbrane točke v nevtralni ravnini od stanja v katerem je navor sile  $\vec{F}_s$  enak nič.



V ravnovesju se morajo v vsakem delu nosilca sile zaradi notranjih napetosti uravnovesiti z zunanji silami. Ker v smeri  $x$ -osi na nosilec ne deluje nobena sila, mora biti vsota vseh sil zaradi notranjih napetosti po prerezu nosilca enaka nič:

$$\int \sigma_x dS_x = 0, \quad (17)$$

kjer je  $dS_x$  infinitezimalni element površine preseka nosilca v ravnini  $y, z$  (glejte še sliko 10):



slika 12

Če vstavimo izraz za  $\sigma_x$  iz enačbe (16) v enačbo (17) dobimo:

$$\int_{S_x} E C(x) d d S_x = 0 \quad (18)$$

Iz enačbe (18)

$$\int d d S_x = 0. \quad (19)$$

Ob upoštevanju definicije  $d$ -ja in definicije predznaka krivinskega radija  $R_0$  (glejte sliko 11) tako iz enačbe (19) sledi:

$$d = y, \quad (20)$$

saj zaradi simetrije velja (glejte sliki 11 in 12)

$$\int_{S_x} y d S_x = 0, \quad (21)$$

pri čemer se nevtralna ravnina ujema  $x, z$  ravnino.

Elastične sile v prečnem prerezu nosilca s površino  $S_x$  povzročajo navor, ki ima od nič različno komponento samo v smeri  $z$ -osi. Navor elastičnih sil namreč nasprotuje zakrivljanju nosilca zaradi navora sile  $\vec{F}_S$ , ki ima tudi samo  $z$ -komponento različno od nič. Navor

elastičnih sil  $M$  skuša nosilec izravnati, zato ga imenujejo tudi upogibni navor elastičnih sil. S pomočjo enačb (16) in (20) dobimo:

$$M(x) = \int_{S_x} y \sigma_x dA_x = \int_{S_x} y (E C(x) y) dS_x = E C(x) I \quad (22)$$

kjer smo upoštevali enačbo (21) in kjer je

$$I = \int_{S_x} y^2 dS_x \quad (23)$$

upogibni vztrajnostni moment prereza nosilca. Ker se ukrivljenost nosilca vzdolž osi  $x$  spreminja, je tudi elastični upogibni navor funkcija koordinate  $x$ . Prečni presek nosilca ima obliko kroga z radijem  $a$ , katerega središče pravokotno prebada  $x$ -os izbranega koordinatnega sistema (glejte še sliki 10 in 12).

Torej:

$$I = \int_{S_x} y^2 dS_x = \int_{-a}^{+a} y^2 z dy = \int_{-a}^{+a} y^2 (a^2 - y^2)^{\frac{1}{2}} dy = \frac{\pi a^4}{4}. \quad (24)$$

Če iz enačbe (22) izraženo ukrivljenost

$$C(x) = \frac{M(x)}{E I}, \quad (25)$$

vstavimo v enačbo (16) ter upoštevamo identiteto (20) dobimo:

$$\sigma_x = \left( \frac{M(x)}{I} \right) y. \quad (26)$$

Poiščimo še eksplicitni izraz za ukrivljenost  $C(x)$ . S slike 11 je razvidno, da je

$$ds_r = R_0 d\vartheta, \quad (27')$$

od koder sledi:

$$C(x) = \frac{1}{R_0(x)} = -\frac{d\vartheta}{ds_r}. \quad (27)$$

Ker je  $\frac{d\delta}{dx} = \operatorname{tg} \vartheta$  in  $(ds_r)^2 = (dx)^2 + (d\delta)^2$ , iz enačbe (27) sledi

$$C(x) = -\frac{\frac{d^2\delta}{dx^2}}{\left[ 1 + \left( \frac{d\delta}{dx} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} \quad (28)$$

Ker je ukrivljenost nosilca zaradi navora sile  $\vec{F}_s$  pri vseh  $x$  zelo majhna približno velja

$$C(x) = -\frac{d^2\delta}{dx^2} \quad (29)$$


---

▪ **Dokaz relacije (28)** (glejte še sliko 11):

$$\circ \quad ds_r = \left[ (dx)^2 + (d\delta)^2 \right]^{\frac{1}{2}} = dx \left[ 1 + \left( \frac{d\delta}{dx} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (29a)$$

$$\circ \quad \operatorname{tg} \vartheta = \frac{d\delta}{dx} \Rightarrow d(\operatorname{tg} \vartheta) = d\left( \frac{d\delta}{dx} \right)$$

$$\frac{1}{\cos^2 \vartheta} d\vartheta = \frac{d^2\delta}{dx^2} dx$$

$$d\vartheta = \cos^2 \vartheta \frac{d^2\delta}{dx^2} dx$$

$$d\vartheta = \frac{\frac{d^2\delta}{dx^2} dx}{1 + \operatorname{tg}^2 \vartheta} = \frac{\frac{d^2\delta}{dx^2} dx}{1 + \left( \frac{d\delta}{dx} \right)^2} \quad (29b)$$

V izraz

$$C(x) = -\frac{d\vartheta}{ds_r}$$

vstavimo enačbi (29a) in (29b) in dobimo enačbo (28):

$$C(x) = -\frac{d\vartheta}{ds_r} = \frac{\frac{d^2\delta}{dx^2}}{\left[ 1 + \left( \frac{d\delta}{dx} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} \quad (28)$$


---

Če kombiniramo enačbi (25) in (29) dobimo:

$$\frac{d^2\delta}{dx^2} = -\frac{M(x)}{EI} \quad (30)$$

Iz enačbe (30) izražen  $M_z(x)$  vstavimo v enačbo (26). Tako dobimo:

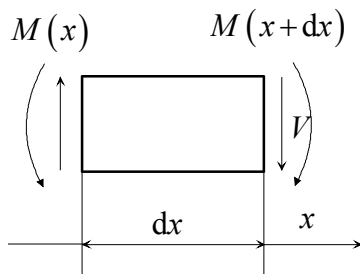
$$\sigma_x = -E y \frac{d^2 \delta}{dx^2}. \quad (31)$$

Ker je elastični upogibni navor  $M$  funkcija koordinate  $x$  se v prerezu nosilca poleg natezne sile pojavi tudi rezultantna strižna sila  $V$ , saj mora biti v ravnovesju vsota navorov, ki delujejo na izbran element nosilca dolžine  $dx$  enak nič:

$$M(x) - M(x+dx) + V(x)dx = 0, \quad (32')$$

$$M(x) - \left( M(x) + \frac{dM}{dx} dx \right) + V(x)dx = 0, \quad (32)$$

kjer smo upoštevali  $M(x+dx) = M(x) + \frac{dM}{dx} dx$ .



$$V(x) = V(x+dx) = V = \text{konst.}$$

slika 13

Tudi vsota vseh sil v smeri  $y$  osi mora biti enaka nič, torej

$$V = \text{konst.} \quad (33)$$

Iz enačbe (32) dobimo zvezo med  $V$  in  $M$ ,

$$V = \frac{dM}{dx} \quad (34)$$

S pomočjo enačb (30), (33) in (34) pa dobimo

$$V = -EI \frac{d^3 \delta}{dx^3} \quad (35)$$

in

$$EI \frac{d^4 \delta}{dx^4} = 0, \quad (36)$$

kjer smo upoštevali  $\frac{dV}{dx} = 0$ , ker je  $V$  konstanta. Diferencialno enačbo (36) rešujemo za primer predstavljen na slikah 9 in 10. Enačbo (36) štirikrat integriramo na obeh straneh enačaja:

$$EI \delta = \alpha_1 x^3 + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x + \alpha_4 \quad (37)$$

kjer so  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  in  $\alpha_4$  konstante, ki jih določimo iz robnih pogojev. Iz robnih pogojev pri  $x = 0$ :

$$\delta(x=0)=0, \quad \frac{d\delta}{dx}(x=0)=0, \quad (38)$$

sledi:

$$\alpha_3 = \alpha_4 = 0 \quad (39)$$

Iz robnega pogoja pri  $x = \ell$ ,

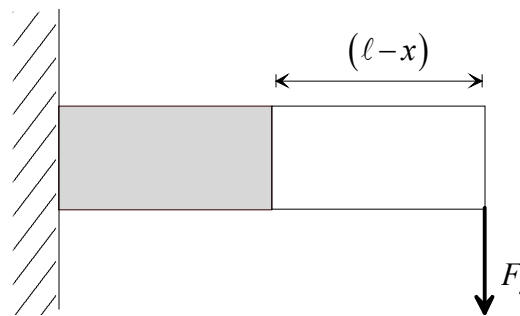
$$-V(x=\ell) + F_s = 0, \quad (40)$$

sledi:

$$\alpha_1 = -\frac{F_s}{6}. \quad (41)$$

Levi pritrjeni del nosilca prek prereza deluje na desni del z navorom  $M = -EI \frac{d^2\delta}{dx^2}$  (enačba (30) in ga skuša zavrteti navzgor. Sila  $\vec{F}_s$  pa ga želi zavrteti navzdol z navorom  $(\ell - x)F_s$ :

$$M(x) + (\ell - x)F_s = 0. \quad (42)$$



slika 14

V enačbo (42) vstavimo  $M(x) = -EI \frac{d^2\delta}{dx^2}$  iz enačbe (30) in dobimo:

$$-EI \frac{d^2\delta}{dx^2} + (\ell - x)F_s = 0 \quad (43)$$

Vstavimo  $\delta(x)$  iz enačbe (37) v enačbo (43):

$$-6\alpha_1 x - 2\alpha_2 + (\ell - x)F_s = 0, \quad (44)$$

za  $\alpha_1$  vstavimo izraz  $\alpha_1 = -\frac{F_s}{6}$  (enačba (41)) in dobimo:

$$-2\alpha_2 + F_s \ell = 0,$$

oziroma:

$$\alpha_2 = \frac{F_s \ell}{2} \quad (45)$$

Sedaj ko poznamo konstante  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\alpha_3$  in  $\alpha_4$  lahko zapišemo celotno rešitev (enačba (37)):

$$\delta(x) = \frac{\left(-\frac{F_s}{6}x^3 + \frac{1}{2}F_s \ell x^2\right)}{EI}. \quad (46)$$

Od tod lahko izračunamo s pomočjo enačbe (30):

$$M(x) = F_s(x - \ell) \quad (47)$$

in s pomočjo enačbe (31):

$$\sigma_x(x) = \frac{F_s y (x - \ell)}{I}, \quad (48)$$

kjer je  $I = \frac{\pi a^4}{4}$ .

