Gibanje telesa vedno opazujemo glede na dano okolico, ki za nas običajno miruje. Na to okolico v mislih pritrdimo koordinantni sistem in obravnavamo gibanje telesa v tem sistemu. Pravimo, da **je gibanje relativno**. S tem želimo poudariti, da je gibanje odvisno od koordinatnega sistema, v katerem ga opazujemo. Lahko dobimo povsem drugačno vrsto gibanja, če opazujemo iz drugačnega koordinatnega sistema. Kadarkoli navajamo gibanje telesa, mora biti vedno jasno, na kateri koordinatni sistem (to je na kakšno okolico) se gibanje nanaša. Običajno nas zanima gibanje teles glede na zemeljsko površje. Zemljo torej jemljemo kot koordinatni sistem. To večinoma zadošča. Če pa je pomembno tudi gibanje same Zemlje, npr. ko računamo gibanje medcelinskih raket ali vesoljskih plovil, moramo koordinatni sistem pomakniti dlje v okolico, npr. do Sonca.

Gibanje telesa v prostoru je v splošnem precej zapleteno. Telo se ne le premika po krivem tiru, ampak se lahko tudi vrti, kotali in podobno, tako da se različni deli telesa gibljejo z različnimi hitrostmi in pospeški. Gibanje telesa je posebej zapleteno, če telo ni togo in se vsak njegov del giblje po svoje.

Za začetek se omejimo na najenostavnejšo vrsto gibanja – **translatorno gibanje**, pri katerem ima vsaka točka telesa enako hitrost. Vsak del telesa se giblje enako hitro in v enaki smeri. Telo se sicer lahko giblje po krivem tiru, vendar tako, da ima vsaka točka telesa enako hitrost in enak pospešek. Če se hitrost telesa spreminja s časom, se spreminja za vse dele telesa enako, to je vsak del telesa ima enak pospešek. Translatorno se npr. giblje avto na ravni cesti (če izvzamemo vrteča se kolesa), nihalna kabina žičnice, nihalni sedeži na velikem kolesu, ki se vrti okrog vodoravne osi itd.

Ker se med translatornim gibanjem vsaka točka telesa giblje enako, je gibanje telesa določeno, če vemo, kako se giblje ena sama točka telesa, npr. njegovo težišče (masno središče). Torej zadošča, če si predstavljamo telo kot točko, katere gibanje opazujemo (t. i. **točkasto telo**).

Vektorski zapis gibanja

Gibanje točke v prostoru opazujemo v koordinatnem sistemu, ki ga recimo sestavljajo tri med seboj pravokotne koordinatne osi: os x, os y in os z (slika 1.1). Smeri posameznih osi določajo enotini vektorji $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$ in $\mathbf{e}_z$. Enotin vektor $\mathbf{e}_x$ podaja smer osi x, vektor $\mathbf{e}_y$ smer osi y in $\mathbf{e}_z$ smer osi z. Če koordinatni sistem miruje ali če se giblje enakomerno, so enotini vektorji $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$, $\mathbf{e}_z$ konstantni, se ne spreminjajo s časom.

Trenutno lego točke P v prostoru običajno podamo s krajevnim vektorjem $\mathbf{r}$ točke, ki vodi od koordinatnega izhodišča O do točke:

$$\mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z \qquad (1.1)$$

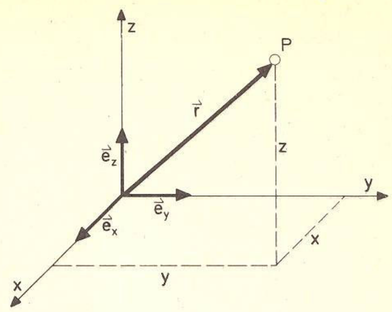
pri čemer so x, y in z projekcije (komponente) krajevnega vektorja $\mathbf{r}$ na posamezne koordinatne osi. Oddaljenost točke P od koordinatnega izhodišča je dana z absolutno vrednostjo (velikostjo) vektorja $\mathbf{r}$, ki jo izračunamo s Pitagorovim izrekom:

$$r = |\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

I. GIBANJE (KINEMATIKA)

Iz koordinatnega izhodišča O lahko pridemo do točke P na poljubno mnogo načinov, npr. direktno v smeri krajevnega vektorja $\mathbf{r}$ (premaknemo se za r) ali postopoma: najprej se v smeri osi x premaknemo za x, nato v smeri osi y za y in končno še v smeri osi z za z (vrstni red je poljuben). Če točka P v prostoru miruje, so komponente x, y in z njenega krajevnega vektorja konstantne. Gibanje točke pa pomeni, da se komponente x, y in z (v splošnem vse tri) spreminjajo s časom, da je krajevni vektor $\mathbf{r}$ točke funkcija časa:

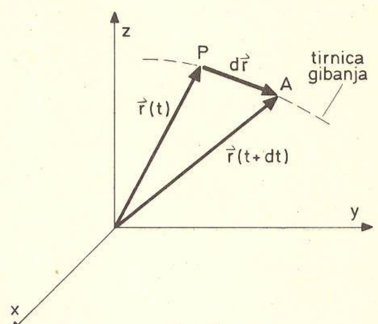
$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{e}_x + y(t)\mathbf{e}_y + z(t)\mathbf{e}_z$$



Slika 1.1

Gibanje točke po tirnici zasledujemo tako, da v zaporednih trenutkih slikamo lego točke in vsakokrat določimo njen krajevni vektor. Recimo, da je v trenutku t krajevni vektor $\mathbf{r}(t)$. Kratek časovni interval dt kasneje se točka P premakne do A (slika 1.2), pri čemer se njen krajevni vektor spremeni od $\mathbf{r}(t)$ do $\mathbf{r}(t + dt)$, to je za

$$d\mathbf{r} = \mathbf{r}(t + dt) - \mathbf{r}(t)$$



Slika 1.2

Če je časovni interval dt dovolj kratek, ima sprememba krajevnega vektorja $\mathbf{r}$, to je $d\mathbf{r}$, smer tangente na tirnico gibanja točke in podaja premik točke v tem časovnem intervalu.

Kvocient premika $d\mathbf{r}$ in časovnega intervala dt, v katerem se premik zgodi, je **hitrost** $\mathbf{v}$ točke:

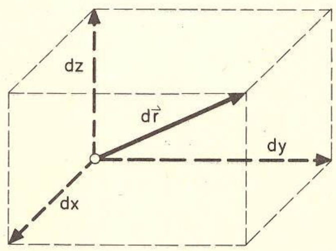
$$\boxed{\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt} \qquad \text{merska enota: m/s ali km/h} \qquad (1.2)$$

1 km/h = 3,6 m/s

ali

$$d\mathbf{r} = \mathbf{v}\, dt$$

Kakor premik $d\mathbf{r}$ ima tudi hitrost $\mathbf{v}$ smer tangente na tirnico gibanja.



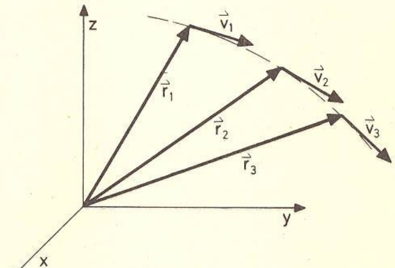
Slika 1.3

Podobno kot vektor $\mathbf{r}$ lahko tudi vektor $\mathbf{v}$ razstavimo v projekcije na posamezne koordinatne osi:

$$\mathbf{v} = \frac{d}{dt}\mathbf{r} = \frac{d}{dt}(x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z) =$$

$$\frac{dx}{dt}\mathbf{e}_x + \frac{dy}{dt}\mathbf{e}_y + \frac{dz}{dt}\mathbf{e}_z \quad \text{ali}$$

$$\mathbf{v} = v_x\mathbf{e}_x + v_y\mathbf{e}_y + v_z\mathbf{e}_z \qquad (1.3)$$



Slika 1.4

kjer so v_x, v_y in v_z projekcije vektorja $\mathbf{v}$ na smeri posameznih koordinatnih osi:

$$v_x = dx/dt, \quad v_y = dy/dt, \quad v_z = dz/dt \qquad (1.4)$$

Premik $d\mathbf{r}$ (to je za dr v smeri tangente na tirnico) je sestavljen iz premika dx v smeri osi x, premika dy v smeri osi y in premika dz v smeri osi z. Velja:

$$(dr)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 \qquad \text{(slika 1.3)}$$

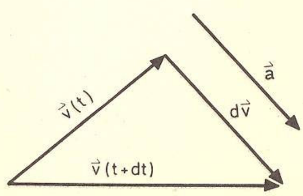
ali (če delimo enačbo z dt^2):

$$(dr/dt)^2 = (dx/dt)^2 + (dy/dt)^2 + (dz/dt)^2$$

oziroma

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \qquad (1.5)$$



Slika 1.5

kar lahko izpeljemo tudi neposredno iz enačbe (1.3), če poiščemo absolutno vrednost vektorja **v**.

Vektor **v** podaja smer in hitrost gibanja točke; pove, kako hitro in v kateri smeri (namreč v smeri tangente na tirnico) se točka giblje. Določimo ga tako, da izmerimo (npr. slikamo) premik (d**r**) točke v kratkem časovnem intervalu dt (npr. v desetinki sekunde) ter premik delimo s časovnim intervalom: $\mathbf{v} = \mathrm{d}\mathbf{r}/\mathrm{d}t$.

V splošnem se vektor **v** med gibanjem spreminja (gibanje je **neenakomerno**), spreminja se njegova smer ali velikost. Če se spreminja smer hitrosti, je gibanje krivočrtno, če se velikost hitrosti povečuje oziroma zmanjšuje, je gibanje pospešeno oziroma pojemajoče. Na sliki (1.4) so označeni vektorji hitrosti za tri različne trenutke. Vidimo, da je to gibanje pospešeno (vektorji so v kasnejših trenutkih daljši) ter krivočrtno – usmerjeno navzdol.

Sprememba vektorja hitrosti (**v**) je v zvezi s pospeškom (**a**). **Pospešek je v zvezi s spremembo hitrosti.** Ker se spreminjata tako smer kot velikost hitrosti, je pospešek vektor.

Recimo, da se točka v trenutku t giblje s hitrostjo $\mathbf{v}(t)$. Po kratkem časovnem intervalu dt se hitrost spremeni na $\mathbf{v}(t+\mathrm{d}t)$. Da ugotovimo spremembo hitrosti (d**v**), vektorja $\mathbf{v}(t)$ in $\mathbf{v}(t+\mathrm{d}t)$ v mislih paralelno premaknemo do skupnega izhodišča (slika 1.5). Vektor spremembe hitrosti (d**v**) je vektor, ki vodi od konice vektorja prvotne hitrosti $\mathbf{v}(t)$ do konice vektorja nove hitrosti $\mathbf{v}(t+\mathrm{d}t)$:

$$\mathrm{d}\mathbf{v} = \mathbf{v}(t+\mathrm{d}t) - \mathbf{v}(t)$$

Vektor spremembe hitrosti (d**v**) delimo s časovnim intervalom dt in dobimo vektor pospeška:

$$\boxed{\mathbf{a} = \mathrm{d}\mathbf{v}/\mathrm{d}t} \quad \text{merska enota: m/s}^2 \tag{1.6}$$

Pospešek je kvocient spremembe hitrosti in časovnega intervala, v katerem se sprememba zgodi; je merilo za spremembo hitrosti v časovni enoti. Čim bolj in v čim krajšem časovnem intervalu se hitrost spremeni, tem večji je pospešek. Ker je pospešek vektor, ga lahko sestavimo iz projekcij:

$$\begin{aligned}\mathbf{a} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{v} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(v_x\mathbf{e}_x + v_y\mathbf{e}_y + v_z\mathbf{e}_z) = \\ &(\mathrm{d}v_x/\mathrm{d}t)\mathbf{e}_x + (\mathrm{d}v_y/\mathrm{d}t)\mathbf{e}_y + (\mathrm{d}v_z/\mathrm{d}t)\mathbf{e}_z = \\ \mathbf{a} &= a_x\mathbf{e}_x + a_y\mathbf{e}_y + a_z\mathbf{e}_z\end{aligned} \tag{1.7}$$

pri čemer so a_x, a_y in a_z projekcije pospeška **a** na smeri posameznih koordinatnih osi:

$$a_x = \mathrm{d}v_x/\mathrm{d}t, \quad a_y = \mathrm{d}v_y/\mathrm{d}t, \quad a_z = \mathrm{d}v_z/\mathrm{d}t \tag{1.8}$$

Velikost pospeška je dana z enačbo:

$$a = |\mathbf{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \tag{1.9}$$

Smer pospeška kaže smer spremembe hitrosti (gl. sliko 1.5). Če je **a** usmerjen navzdol, kaže tja tudi vektor spremembe hitrosti (d**v**), kar pomeni, da se vektorji hitrosti usmerjajo navzdol, tirnica gibanja se zakrivlja navzdol (kot na sliki 1.4). Na sliki (1.6) so narisani vektorji pospeška v različnih trenutkih. Zaradi pospeška $\mathbf{a}_1$ se tirnica zakrivlja navzdol in obenem se hitrost povečuje (ker je pospešek nagnjen v smer gibanja). Zaradi pospeška $\mathbf{a}_2$ pa se tirnica zakrivlja navzgor in hitrost zmanjšuje (ker je pospešek nagnjen nazaj). Kako mora biti usmerjen pospešek, da se tirnica zakrivlja navzgor in obenem hitrost povečuje?

Da ugotovimo, koliko se spreminja smer hitrosti in koliko njena velikost, razstavimo pospešek na projekcijo $\mathbf{a}_t$ v smeri hitrosti **v** (to je v smeri tangente na tirnico) ter na projekcijo $\mathbf{a}_r$, ki je pravokotna na smer hitrosti **v** (slika 1.7). Prva projekcija ($\mathbf{a}_t$) se imenuje **tangentni pospešek**, druga ($\mathbf{a}_r$) pa **radialni pospešek**.

$$\boxed{\mathbf{a} = \mathbf{a}_t + \mathbf{a}_r} \tag{1.10}$$

in

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_r^2}$$

Tangentni pospešek $\mathbf{a}_t$ je tisti del celotnega pospeška **a**, zaradi katerega se spreminja velikost hitrosti (telo se pospešuje oziroma zavira), medtem ko se smer gibanja ne spreminja. Na drugi strani pa se zaradi radialnega pospeška $\mathbf{a}_r$ spreminja smer gibanja (tirnica se zakrivlja). Na **ravnem delu tirnice** ni radialnega pospeška:

$$\mathbf{a}_r = 0 \text{ in } \mathbf{a} = \mathbf{a}_t,$$

drugače pa je radialni pospešek $\mathbf{a}_r$ vedno usmerjen na notranjo stran zakrivljene tirnice. Gibanje po tirnici je pospešeno (hitrost narašča s časom), če ima tangentni pospešek $\mathbf{a}_t$ smer hitrosti **v**, če je torej celoten pospešek **a** nagnjen v smer gibanja. Pri nasprotni smeri tangentnega pospeška pa je gibanje pojemajoče.

S pospeškom izrazimo spremembo hitrosti. Pri pospešku **a** se hitrost **v** spremeni v kratkem časovnem intervalu dt za $\mathrm{d}\mathbf{v} = \mathbf{a}\,\mathrm{d}t$. Celotna sprememba hitrosti ($\Delta\mathbf{v}$) od začetnega trenutka $t = 0$, ko je hitrost $\mathbf{v}_0$, do končne hitrosti **v** v trenutku t, je vsota (oziroma integral) diferencialno majhnih sprememb d**v**, ki se pripete v vmesnih časovnih intervalih dt, to je:

$$\Delta\mathbf{v} = \int \mathrm{d}\mathbf{v} = \int_0^t \mathbf{a}\,\mathrm{d}t = \mathbf{v} - \mathbf{v}_0 \quad \text{ali}$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \int_0^t \mathbf{a}\,\mathrm{d}t \tag{1.11}$$

Hitrost $\mathbf{v}_0$ je t. i. **začetna hitrost**, to je hitrost v začetnem trenutku $t = 0$, ko začnemo opazovati učinek pospeška, oziroma ko se hitrost začne spreminjati. Ker poznamo pospešek **a** (kako se spreminja s časom), lahko iz zgornje enačbe izračunamo vektor hitrosti **v** za poljuben trenutek t.

Brž ko poznamo vektor hitrosti **v** za celotno gibanje (to je kot funkcijo časa), lahko določimo tudi lego točke (njen krajevni vektor **r**) za poljuben trenutek t. Enačba (1.2) podaja spremembo krajevnega vektorja d**r** v časovnem intervalu dt: $\mathrm{d}\mathbf{r} = \mathbf{v}\,\mathrm{d}t$. Celotna sprememba vektorja **r** je vsota (integral) posameznih diferencialnih sprememb d**r**:

$$\Delta\mathbf{r} = \int \mathrm{d}\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) - \mathbf{r}_0 = \int_0^t \mathbf{v}\,\mathrm{d}t \quad \text{ali}$$

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + \int_0^t \mathbf{v}\,\mathrm{d}t \tag{1.12}$$

Vektor $\mathbf{r}_0$ določa začetno lego točke, to je lego točke v začetnem trenutku t = 0.

Najenostavnejša vrsta gibanja je **enakomerno gibanje**, to je gibanje **brez pospeška**: $\mathbf{a} = 0$, vektor hitrosti $\mathbf{v}$ se ne spreminja s časom, ves čas je enak začetni hitrosti $\mathbf{v}_0$:

$\mathbf{a} = 0$, $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0$ **enakomerno gibanje**

Iz enačbe (1.12) sledi za ta primer, da se krajevni vektor $\mathbf{r}$ spreminja s časom linearno:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 t$$

Tirnica gibanja je premica, ki jo določa začetna hitrost $\mathbf{v}_0$. Točka se giblje po tej premici s stalno hitrostjo.

Če pospešek $\mathbf{a}$ ves čas od začetka gibanja deluje v smeri začetne hitrosti $\mathbf{v}_0$, je tudi hitrost $\mathbf{v}$ v poljubnem trenutku v tej smeri (glej enačbo 1.11), kar pomeni, da se točka ves čas giblje po premici. Takšno gibanje je **premo**; spreminja se le velikost hitrosti, njena smer pa ne; ni radialnega pospeška, deluje le tangentni pospešek.

Ni potrebno, da premo gibanje obravnavamo v vektorski obliki. Enostavneje je zasukati koordinatni sistem tako, da ena od koordinatnih osi, npr. os x, kaže v smer gibanja točke. Med gibanjem se potem spreminja le koordinata x, ostali dve (y in z) pa sta ves čas nič. Enakomerno gibanje je vsekakor premo, vendar pa ni vsako premo gibanje tudi enakomerno.

Ravninsko gibanje dobimo, če sta vektor pospeška $\mathbf{a}$ in vektor začetne hitrosti $\mathbf{v}_0$ stalno v eni in isti ravnini. Tedaj je tudi vektor hitrosti $\mathbf{v}$ za katerikoli trenutek t v tej ravnini. Točka se ves čas giblje v ravnini, ki jo določata $\mathbf{a}$ in $\mathbf{v}_0$.

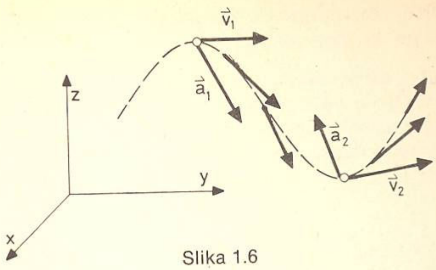
Ravninsko gibanje najenostavneje popišemo, če zasukamo koordinatni sistem tako, da dve njegovi osi, npr. os x in os y, ležita v ravnini gibanja. S časom se potem spreminjata koordinati x in y, tretja koordinata z pa je stalno nič.

V splošnem je **gibanje prostorsko**; pospešek $\mathbf{a}$ se med gibanjem spreminja in ni povezan z začetno hitrostjo $\mathbf{v}_0$, s časom se spreminjajo vse tri koordinate x, y in z.

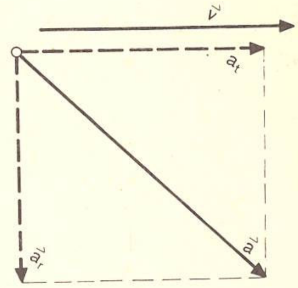
Poseben primer prostorskega gibanja dobimo, če je pospešek $\mathbf{a}$ ves čas pravokoten na smer hitrosti $\mathbf{v}$, če torej ni tangentnega pospeška ($a_t = 0$), če učinkuje le radialni pospešek, ki stalno spreminja smer gibanja. Velikost hitrosti je torej stalna. Točka se sicer giblje po zakrivljeni tirnici (zaradi radialnega pospeška), vendar ves čas enako hitro. Takšno gibanje je npr. enakomerno kroženje.

Premo gibanje

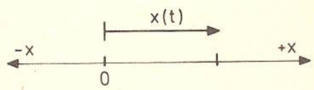
Točka se ves čas giblje v eni in isti ravni črti, npr. v smeri osi x. Lego točke na tej premici povemo s koordinato x, ki jo merimo od izbranega koordinatnega izhodišča 0 (slika 1.8). Če je točka desno od koordinatnega izhodišča, je njena koordinata x pozitivna, levo od 0 pa je negativna: Ker vemo, da se točka giblje vzdolž osi x, lahko na vektorsko naravo gibanja pozabimo in jemljemo hitrost v ter pospešek a kot skalarni količini.



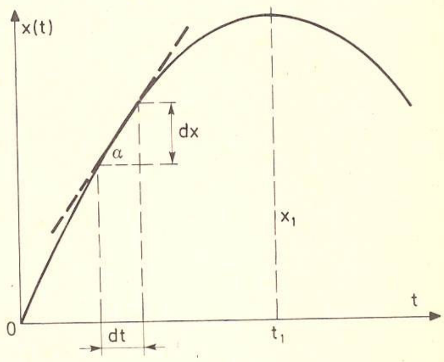
Slika 1.6



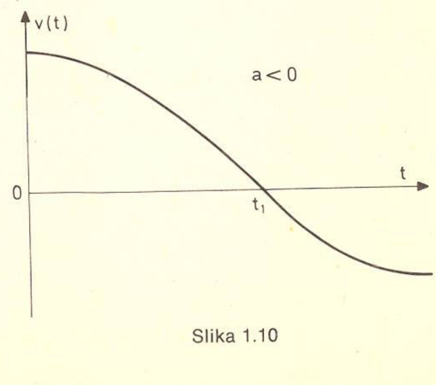
Slika 1.7



Slika 1.8



Slika 1.9



Slika 1.10

Različni smeri hitrosti in pospeška na tej premici upoštevamo s predznakom.

Recimo, da se točka premakne v časovnem intervalu dt za dx. Če se premakne v desno, je $dx > 0$; premiku v levo pa ustreza negativen dx. Kvocient premika dx in časovnega intervala dt, v katerem se premik zgodi, je hitrost točke (gl. 1.4; namesto v_x pišemo kar v):

$$\boxed{v = dx/dt} \qquad (1.13)$$

Vidimo, da je hitrost v pozitivna, če se točka giblje v desno (dx pozitiven, koordinata x vedno bolj pozitivna), in negativna, če se giblje v levo (dx negativen, x vedno bolj negativen oziroma vedno manj pozitiven).

Pospešek a točke pri premem gibanju je dan s kvocientom:

$$\boxed{a = dv/dt} \quad \text{(glej 1.8)} \qquad (1.14)$$

kjer je dv sprememba hitrosti v časovnem intervalu dt. **Pozitiven pospešek** torej **pomeni** pozitiven dv, to je **povečanje pozitivne hitrosti (pospešeno gibanje v desno)** oziroma zmanjšanje negativne hitrosti (pojemajoče gibanje v levo). **Negativen pospešek** pa **pomeni pojemajoče gibanje v desno** oziroma pospešeno gibanje v levo. S predznakom skalarnega pospeška a izrazimo obe možni smeri vektorskega pospeška **a** pri premem gibanju: če je vektor **a** usmerjen v desno (v smer $+x$), je skalarni pospešek a pozitiven; če je **a** usmerjen v levo (v smer $-x$), pa je a negativen.

Premo gibanje točke grafično predstavimo s **časovnim grafom koordinate**, $x(t)$, ki prikazuje odvisnost krajevne koordinate x od časa t. Izmerimo (npr. slikamo) lego točke v različnih trenutkih (npr. x_1 v trenutku t_1, x_2 v trenutku t_2 itd.) in narišemo časovni graf $x(t)$. Na sliki (1.9) smo narisali časovni graf $x(t)$ za primer, da se točka začne gibati iz koordinatnega izhodišča v desno, doseže največjo oddaljenost x_1 v trenutku t_1 in se nato giblje v levo, nazaj h koordinatnemu izhodišču.

Recimo, da je v trenutku t koordinata x. V naslednjem kratkem časovnem intervalu dt se koordinata spremeni za dx. Kvocient dx/dt, ki je hitrost v, lahko predstavimo kot tangens naklonskega kota (α), ki ga tangenta na časovni graf $x(t)$ oklepa s časovno osjo t. Kjer je tangenta usmerjena navzgor (navzdol), je hitrost pozitivna (negativna). Vodoravna tangenta (npr. v zgornji točki grafa, kjer se koordinata ne spreminja s časom) pa pomeni, da je hitrost nič (točka miruje). Strma tangenta pomeni veliko hitrost, položna pa majhno. Hitrost v premega gibanja torej lahko določimo tako, da na časovnem grafu $x(t)$ poiščemo naklonski kot tangente. Matematično to pomeni, da odvajamo koordinato x po času t.

Bodisi z neposrednim merjenjem ali posredno s pomočjo časovnega grafa $x(t)$ določimo hitrost v v različnih trenutkih in narišemo **časovni graf hitrosti**, $v(t)$. Slika (1.10) predstavlja časovni graf hitrosti za gibanje, katerega časovni graf koordinate x je na sliki (1.9). Kakor je hitrost tangens naklonskega kota tangente na časovni graf $x(t)$, tako je pospešek $a = dv/dt$ tangens naklonskega kota tangente na časovni graf hitrosti $v(t)$. V tem grafu poiščemo naklonske kote tangente v različnih trenutkih in dobimo ustrezne pospeške. Kjer je tangenta na graf $v(t)$ usmerjena navzgor (krivulja $v(t)$ se dviga, hitrost narašča s časom), je pospešek pozitiven (pospešeno gibanje v desno). Na padajočem delu grafa $v(t)$ je a negativen. Vodoravni del grafa $v(t)$ pomeni, da se hitrost ne spreminja s časom; tam je pospešek nič (tangenta na graf je vodoravna, tangens naklonskega kota tangente je nič). Na sliki (1.10) je pospešek ves čas negativen (usmerjen v levo). Negativni pospešek se imenuje **pojemek**.

Pospešek je odvod hitrosti po času: $a = dv/dt$. Ker je tudi hitrost dana z odvodom (krajevne koordinate x po času t): $v = dx/dt$, lahko pospešek izrazimo kot odvod odvoda, to je kot drugi odvod:

$$a = dv/dt = d(dx/dt)/dt = d^2x/dt^2 \qquad (1.15)$$

Pospešek je drugi odvod krajevne koordinate po času. Drugi odvod funkcije podaja zakrivljenost grafa te funkcije; na ravnem delu grafa je drugi odvod nič. Pozitiven drugi odvod pomeni navzgor zakrivljen graf, pri negativnem drugem odvodu pa je graf funkcije zakrivljen navzdol. Z grafa $x(t)$ torej lahko poleg hitrosti v razberemo tudi pospešek a: kjer je graf $x(t)$ zakrivljen navzgor, je $a > 0$; na ravnem delu grafa je $a = 0$, na navzdol zakrivljenem grafu pa je $a < 0$ (slika 1.11).

Naklonski kot tangente na graf x(t) podaja hitrost, zakrivljenost grafa pa pospešek.

Primer:

Pri nekem premem gibanju se krajevna koordinata x točke spreminja s časom po enačbi: $x = At^2 - Bt^3$, kjer je $A = 3\ m/s^2$ in $B = 1\ m/s^3$. Kako se hitrost in pospešek točke spreminjata s časom? Kolikšna sta (v_2 in a_2) po času $t_2 = 5$ s od začetka gibanja? Po kolikšnem času (t_1) in kje (x_1) se točka ustavi? Kolikšen je tedaj njen pospešek (a_1)?

Časovni graf koordinate x je na sliki (1.12a). Točka se začne gibati v desno, se po času $t_1 = 2$ s ustavi na oddaljenosti $x_1 = 4$ m desno od izhodišča, nakar se začne gibati v levo (pospešeno) in doseže koordinatno izhodišče ($x = 0$) po 3 sekundah od začetka gibanja.

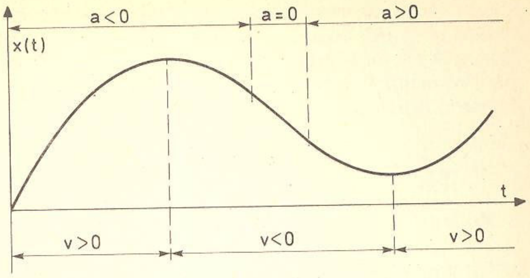
$$v = dx/dt = 2At - 3Bt^2$$

Časovni graf hitrosti je na sliki (1.12b). Hitrost začne naraščati od nič navzgor do največje vrednosti $v_{max} = 3$ m/s, ki jo doseže po častu $t_3 = 1$ s, nakar se zmanjšuje (točka se giblje v desno pojemajoče), dokler se točka v trenutku $t_1 = 2A/3B = 2$ s ne ustavi na oddaljenosti $x_1 = x(t_1) = 4A^3/27B^2 = 4$ m od izhodišča. Od tod naprej postane hitrost negativna in narašča (točka se giblje pospešeno v levo).

$$a = dv/dt = 2A - 6Bt \qquad \text{(gl. sliko 1.12c)}$$

Pospešek upada linearno s časom. Največji je v začetku ($= 2A = 6\ m/s^2$). Do trenutka $t_3 = A/3B = 1$ s je še pozitiven (pospešeno gibanje v desno). Ko v tem trenutku postane nič, doseže hitrost največjo vrednost (v_{max}), nakar je pospešek negativen – hitrost gibanja v desno se zmanjšuje. Ko se točka po času $t_1 = 2$ s ustavi, je njen pospešek takle: $a_1 = 2A - 6Bt_1 = -2A = -6$ m/s^2.

$$v_2 = v(t_2) = 2.3\ \text{ms}^{-2} \cdot 5\ \text{s} - 3.1\ \text{ms}^{-3} \cdot 25\ \text{s}^2 = -45\ \text{m/s}$$
$$a_2 = a(t_2) = 2.3\ \text{ms}^{-2} - 6.1\ \text{ms}^{-3} \cdot 5\ \text{s} = -24\ \text{m/s}^2$$



Slika 1.11

Zgoraj smo računali $v(t)$ in $a(t)$ za gibanje, katerega koordinata x je znana funkcija časa. Zdaj pa vzemimo, da vemo, kako se pospešek točke spreminja s časom, da poznamo $a(t)$ in želimo določiti $v(t)$ ter $x(t)$. (Glej podoben račun za splošno vektorsko gibanje, str. 8)

Pri pospešku a se hitrost v kratkem časovnem intervalu dt spremeni za $dv = adt$. Celotna sprememba hitrosti od začetne v_0 do končne v je dana z integralom (vsoto) diferencialnih sprememb dv:

$$\Delta v = v - v_0 = \int dv = \int_0^t a(t)dt \text{ ali}$$

$$v = v_0 + \int_0^t a(t)dt \qquad (1.16)$$

kjer je v_0 hitrost točke v začetnem trenutku $t = 0$, ko začne delovati pospešek. **Sprememba hitrosti je časovni integral pospeška.**

Spremembo hitrosti zaradi pospeška lahko na časovnem grafu pospeška predstavimo kot ploščino lika pod grafom pospeška (slika 1.13). Ploščina ozkega traku z višino a in širino dt (to je adt) je sprememba hitrosti dv v časovnem intervalu dt. Celotna sprememba $\Delta v = v - v_0$ je vsota ploščin vseh ozkih trakov od prvega pri $t = 0$ do zadnjega pri t; to je ploščina celotnega lika, ki ga graf pospeška objema s časovno osjo. Meji integracije povesta, od kod do kod seštevamo ploščine posameznih trakov.

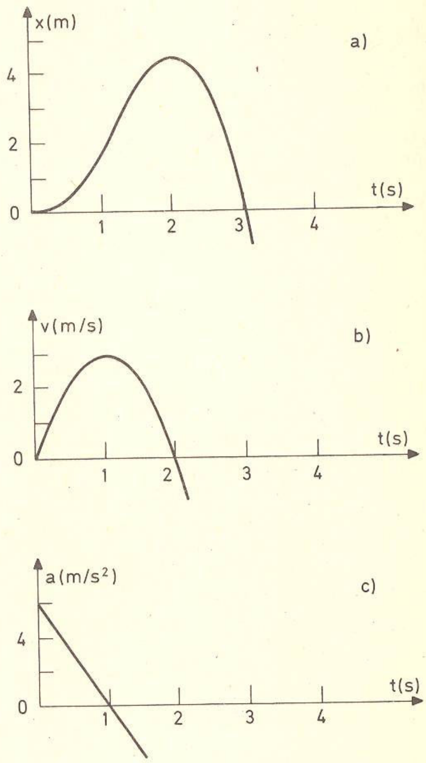
Kakor je sprememba hitrosti dana s ploščino lika pod grafom pospeška, tako je sprememba koordinate x dana s ploščino pod časovnim grafom hitrosti (slika 1.14): $dx = vdt$ ter

$$\Delta x = x - 0 = \int dx = \int_0^t v(t)dt \quad \text{ali}$$

$$x = \int_0^t v(t)dt \qquad (1.17)$$

Sprememba koordinate je časovni integral hitrosti.

Upoštevati moramo, da je ploščina lika nad časovno osjo pozitivna, pod njo pa negativna. Običajno vzamemo, da je telo v začetku v koordinatnem izhodišču, to je $x(0) = 0$.



Slika 1.12

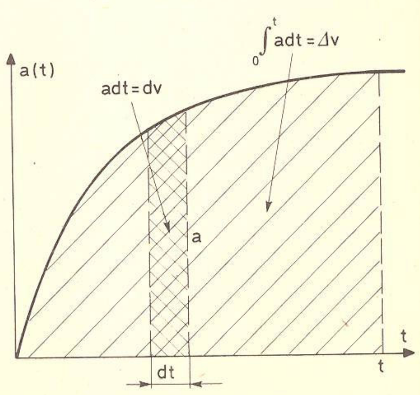
Primer:

Točka se giblje s pospeškom $a = a_0\exp(-bt)$. Kako se njena hitrost v in koordinata x spreminjata s časom, če se gibanje prične v koordinatnem izhodišču brez začetne hitrosti ($v_0 = 0$)?

Pospešek je v začetku največji ($= a_0$), nakar eksponentno pojema s časom in je po zelo dolgem času zanemarljivo majhen (slika 1.15a).

$$v = \int_0^t a(t)dt = a_0 \int_0^t \exp(-bt)dt = -(a_0/b)\exp(-bt)\Big|_0^t =$$

$$v = (a_0/b)[1 - \exp(-bt)]$$



Slika 1.13

Hitrost točke se eksponentno približuje asimptotični končni vrednosti (a_0/b), ki jo doseže po zelo dolgem času (slika 1.15b). Proti koncu (ko je pospešek zanemarljivo majhen) je hitrost praktično konstantna (enakomerno gibanje).

$$x(t) = \int_0^t v(t)dt = (a_0/b)\int_0^t [1 - \exp(-bt)]dt =$$

$$x(t) = (a_0/b)[t - 1/b + (1/b)\exp(-bt)]$$

Za $t = 0$ je x zares enak 0. Po zelo dolgem času se x linearno povečuje s časom (slika 1.15c), kar je značilno za enakomerno gibanje.

Povprečna hitrost

Premo gibanje obravnavati je enostavno, če je hitrost stalna, to je če je gibanje enakomerno; celotno prečeno pot delimo s celotnim časovnim intervalom in dobimo hitrost gibanja. Če pa je gibanje neenakomerno (hitrost se spreminja s časom), nam **kvocient celotne poti in celotnega časa** dá t. i. **povprečno hitrost** ($\bar{v}$), to **je hitrost, s katero bi se telo moralo ves čas** (npr. od 0 do t_1) **gibati, da bi napravilo enako dolgo pot kot pri neenakomernem gibanju.** Povprečno hitrost torej izračunamo z enačbo:

$$\bar{v}t_1 = \int_0^{t_1} v(t)dt \quad \text{ali}$$

$$\bar{v} = (1/t_1)\int_0^{t_1} v(t)dt \qquad (1.18)$$

Na časovnem grafu hitrosti $v(t)$ postavimo povprečno hitrost $\bar{v}$ na tolikšni višini (črtkana vodoravna črta na sliki 1.16), da je ploščina pravokotnika pod to črto enaka ploščini lika pod časovnim grafom hitrosti (torej enaka časovnemu integralu hitrosti). Tako izračunana povprečna hitrost se nanaša na časovni interval od 0 do t_1, v katerem napravi telo pot $\bar{v}t_1$. Vsakemu časovnemu intervalu ustreza posebna povprečna hitrost.

Primeri:

1. Hitrost točke pri nekem neenakomernem gibanju se spreminja s časom po enačbi: $v(t) = A - Bt + Ct^2$, kjer je $A = 2$ m/s, $B = 1$ m/s² in $C = 0{,}6$ m/s³. Kolikšna je povprečna hitrost ($\bar{v}_1$) v prvih 2 sekundah gibanja in kolikšna ($\bar{v}_2$) je v drugih 2 sekundah? (Slika 1.17)

$$t_1 = 2\text{ s}, \quad \bar{v}_1 t_1 = \int_0^{t_1} v(t)dt = \int_0^{t_1}(A - Bt + Ct^2)dt =$$

$$= At_1 - (B/2)t_1^2 + (C/3)t_1^3 \quad \text{ali}$$

$$\bar{v}_1 = A - (B/2)t_1 + (C/3)t_1^2 = 1{,}8\text{ m/s}$$

V prvih 2 sekundah gibanja napravi točka pot $\bar{v}_1 t_1 = 3{,}6$ m.

Drugi del gibanja poteka med trenutkoma $t_1 = 2$ s in $t_2 = 4$ s.

$$\bar{v}_2(t_2 - t_1) = \int_{t_1}^{t_2} v(t)dt = A(t_2 - t_1) - (B/2)(t_2^2 - t_1^2) +$$

$$+ (C/3)(t_2^3 - t_1^3) \quad \text{ter}$$

$$\bar{v}_2 = A - (B/2)(t_2 + t_1) + (C/3)(t_2^2 + t_2 t_1 + t_1^2) = 4{,}6\text{ m/s}$$

Pot točke v drugih dveh sekundah znaša: $\bar{v}_2(t_2 - t_1) = 9{,}2$ m.

Kolikšna je povprečna hitrost ($\bar{v}_3$) v prvih 4 sekundah gibanja, to je od začetka do trenutka t_2?

$$\bar{v}_3 t_2 = \int_0^{t_2} v(t)dt = \int_0^{t_1} v(t)dt + \int_{t_1}^{t_2} v(t)dt = \bar{v}_1 t_1 + \bar{v}_2(t_2 - t_1)$$

oziroma

$$\bar{v}_3 = [\bar{v}_1 t_1 + \bar{v}_2(t_2 - t_1)]/t_2 = (\bar{v}_1 + \bar{v}_2)/2 \quad (\text{ker je } t_2 = 2t_1)$$

$$\bar{v}_3 = 3{,}2\text{ m/s}$$

2. Telo se giblje prvo polovico časa s stalno hitrostjo $v_1 = 40$ km/h, drugo polovico pa s stalno hitrostjo $v_2 = 60$ km/h. Kolikšna je povprečna hitrost v celotnem času?

Telo napravi celotno pot x v času t, torej je $\bar{v} = x/t$. Pot x je sestavljena iz poti $x_1 = v_1 t/2$ (v prvi polovici časa) in poti $x_2 = v_2 t/2$ (v drugi polovici časa). Sledi:

$$x = v_1 t/2 + v_2 t/2 = \bar{v}t \quad \text{ali}$$

$$\bar{v} = (v_1 + v_2)/2 = 50\text{ km/h}$$

3. Podoben primer kot zgoraj, le da se v_1 nanaša na prvo polovico celotne poti, v_2 pa na drugo polovico. Kolikšna je povprečna hitrost v tem primeru?

Celoten čas t, ki ga telo potrebuje za celotno pot x, je sestavljen iz časa $t_1 = (x/2)/v_1$, ko je telo na prvi polovici poti, in časa $t_2 = (x/2)/v_2$, ko je telo na drugi polovici poti:

$$t = t_1 + t_2 = (x/2)(1/v_1 + 1/v_2) = x(v_1 + v_2)/2v_1 v_2 \quad \text{ter}$$

$$\bar{v} = x/t = 2v_1 v_2/(v_1 + v_2) = 48\text{ km/h}$$

Enakomerno pospešeno gibanje

Pospešek je stalen: $a(t) = a$. Iz enačbe (1.16) ugotovimo, da se hitrost v spreminja s časom linearno; časovni graf hitrosti je premica:

$$\boxed{v = v_o + at} \quad (\text{slika } 1.18) \qquad (1.19)$$

Hitrost enakomerno narašča (če je $a > 0$, pospešeno gibanje) oziroma pada (če je $a < 0$, pojemajoče gibanje) s časom; v vsaki naslednji časovni enoti se za enako poveča (zmanjša).

Izraz za $x(t)$ pri enakomerno pospešenem gibanju dobimo, če v enačbi (1.17) vstavimo $v(t) = v_o + at$ in nato integriramo:

$$x = \int_0^t (v_o + at)dt,$$

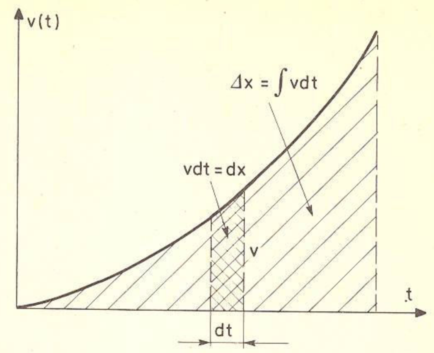
$$\boxed{x = v_o t + at^2/2} \quad (\text{slika } 1.19) \qquad (1.20)$$

Pot x pri enakomerno pospešenem gibanju je sestavljena iz poti $v_o t$ zaradi začetne hitrosti in poti $at^2/2$ zaradi pospeševanja; zadnji del narašča s kvadratom časa.

Večkrat potrebujemo zvezo med hitrostjo v in prečeno potjo x (npr. kolikšno hitrost dobi telo na koncu poti x, če se ves čas giblje s stalnim pospeškom?). To dobimo, če iz enačbe (1.19) izračunamo $t = (v - v_o)/a$ in vstavimo v enačbo (1.20):

$$x = v_o\,(v-v_o)/a + (a/2)\,(v-v_o)^2/a^2 = (v^2 - v_o^2)/2a \text{ ali}$$

$$\boxed{v^2 = v_o^2 + 2ax} \qquad (1.21)$$



Slika 1.14

Primeri:

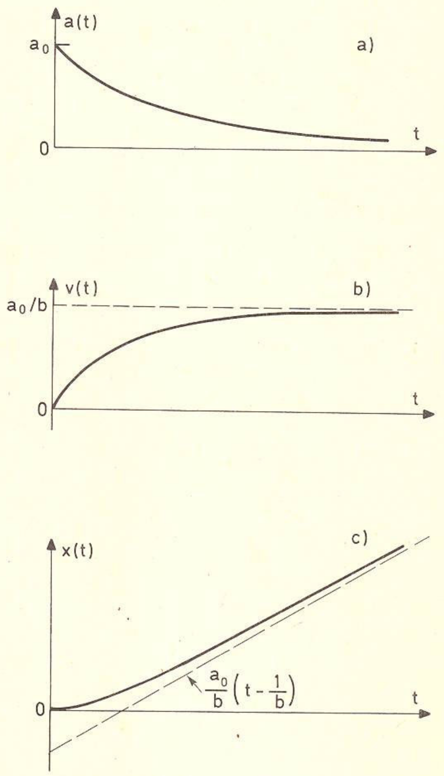
1. Telo se giblje enakomerno pospešeno s pospeškom $a = 2$ m/s^2. Po kolikšnem času (t) in kje (x) doseže hitrost $v = 6$ m/s, če je v začetku mirovalo ($v_o = 0$)?

$$v = v_o + at = at \text{ in } t = v/a = 6\text{ms}^{-1}/2\text{ms}^{-2} = 3 \text{ s}$$
$$x = at^2/2 = v^2/2a = 36\text{m}^2\text{s}^{-2}/4\text{ms}^{-2} = 9 \text{ m}$$

2. Vlak se giblje s stalno hitrostjo $v_o = 30$ m/s, ko začne zavirati s stalnim pojemkom 2 m/s. Po kolikšnem času (t_1) in na kolikšni poti (x_1) od začetka zaviranja se ustavi?

Ker je gibanje enakomerno pojemajoče, je pospešek negativen: $a = -2$ m/s^2.

$$v = v_o + at, \text{ za } t = t_1 \text{ je } v = 0$$
$$0 = v_o + at_1 \text{ ali } t_1 = -v_o/a = 15 \text{ s}$$
$$x_1 = v_o t_1 + at_1^2/2 = -v_o^2/a + (a/2)\,(v_o/a)^2 = -v_o^2/2a$$
$$x_1 = 225 \text{ m}$$



Slika 1.15

3. Vlak se začne gibati z začetne postaje A enakomerno pospešeno s pospeškom $a_1 = 2$ m/s^2. Ko doseže hitrost $v_1 = 72$ km/h, se giblje naprej $t_2 = 5$ minut enakomerno s to hitrostjo. Na oddaljenosti $x_3 = 200$ m pred končno postajo B začne zavirati s pojemkom 1 m/s^2 in se giblje enakomerno pojemajoče do postanka na postaji B. Kolikšna je oddaljenost (x) obeh postaj in koliko časa (t) potrebuje vlak za to pot?

Na prvem delu poti se vlak giblje enakomerno pospešeno t_1 sekund in napravi pot x_1. Za ta del poti velja: $v_1 = a_1 t_1$ ali $t_1 = v_o/a_1 = 20 \text{ ms}^{-1}/2 \text{ ms}^{-2} = 10$ s ter $x_1 = a_1 t_1^2/2 = v_1^2/2a_1 = 100$ m. Med enakomernim gibanjem prevozi pot $x_2 = v_1 t_2 = 20 \text{ ms}^{-1} \cdot 300 \text{ s} = 6000 \text{ m} = 6$ km.

Za zadnji del poti (enakomerno pojemajoče gibanje, pospešek je $a_3 = -1$ m/s^2) potrebuje (gl. 2. primer) čas $t_3 = -v_1/a_3 = 20$ s in pot $x_3 = -v_1^2/2a_3 = 200$ m.

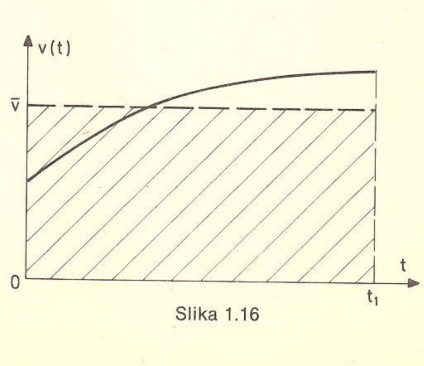
$$x = x_1 + x_2 + x_3 = 100 \text{ m} + 6 \text{ km} + 200 \text{ m} = 6{,}3 \text{ km}$$
$$t = t_1 + t_2 + t_3 = 10 \text{ s} + 5 \text{ min} + 20 \text{ s} = 5{,}5 \text{ min}$$

4. Prosti pad je enakomerno pospešeno gibanje navzdol s pospeškom $g = 9{,}8$ m/s^2, ki je enak za vsa telesa; zračni upor zanemarimo. Telo spustimo z višine h nad tlemi. Po kolikšnem času (t_p) in s kolikšno hitrostjo (v_p) pade na tla? Kolikšno hitrost (v) ima na višini z nad tlemi?

Uporabimo enačbe (1.19 – 1.21) z $a = g$, $x = h - z$ in $v_o = 0$.

$$v_p = gt_p \text{ in } h = gt_p^2/2 = v_p^2/2g \text{ ali}$$

$$v_p = \sqrt{2gh} \quad \text{ter } t_p = \sqrt{2h/g} = v_p/g \qquad (1.22)$$



Slika 1.16

Z višine $h = 10$ m pade kamen na tla s hitrostjo 14 m/s =

= 50 km/h po času t_p = 1,4 s. V resnici je ta čas nekoliko daljši, ker upor zraka zadržuje padanje.

Od začetka padanja do višine z nad tlemi napravi telo pot $x = h - z$; iz enačbe (1.21) potem sledi:

$$v^2 = v_o^2 + 2ax = 2gx = 2g(h - z) \text{ ali}$$

$$v = \sqrt{2g(h - z)}$$

5. Navpični met je enakomerno pojemajoče gibanje navpično navzgor: $a = - g = - 9{,}8$ m/s^2. Enačbe tega gibanja so:

$$v = v_o - gt \qquad (1.23a)$$
$$x = v_o t - gt^2/2 \qquad (1.23b)$$
$$v^2 = v_o^2 - 2gx \qquad (1.23c)$$

pri čemer merimo koordinato x od tal navzgor.

Recimo, da odvržemo telo z začetno hitrostjo v_o navpično navzgor. Na kateri višini (h) in po kolikšnem času (t_d) se telo ustavi?

$$0 = v_o - gt_d \text{ ali } t_d = v_o/g \qquad (1.23č)$$
$$0 = v_o^2 - 2gh \text{ ali } h = v_o^2/2g$$

Ko telo doseže višino h (najvišje mesto), se ustavi in takoj nato začne pospešeno padati (gl. 4. primer). **Na tla pade s hitrostjo $v_p = v_o$, s katero smo ga bili odvrgli navzgor. Čas padanja ($t_p = v_o/g$) je enak času dvigalnja (t_d).**

Po kolikšnem času (t) doseže telo, ki ga odvržemo navzgor z začetno hitrostjo v_o, višino x? Enačbo (1.23b) prepišemo v enačbo:

$$t^2 - (2v_o/g)t + 2x/g = 0$$

ki je kvadratna enačba za neznanko t. Dobimo dve rešitvi:

$$t_1 = v_o/g - \sqrt{v_o^2/g^2 - 2x/g} \text{ ter}$$

$$t_2 = v_o/g + \sqrt{v_o^2/g^2 - 2x/g}$$

Prva rešitev (t_1) ustreza času, v katerem telo doseže višino x med dviganjem; druga (t_2) pa med padanjem. Časa t_1 in t_2 sovpadata in sta enaka v_o/g, če je $v_o^2/g^2 - 2x/g = 0$ ali $x = v_o^2/2g = h$ (višina, na kateri se telo ustavi). Pri $v_o^2 < 2gx$ sta rešitvi t_1 in t_2 kompleksni; telo ne doseže višine x (ima premajhno začetno hitrost).

Padanje z upoštevanjem zračnega upora

Prosto padanje telesa ni povsem enakomerno pospešeno, saj padanje ovira upor zraka, ki narašča s hitrostjo. Hitreje kot telo pada, bolj zrak zavira padanje. V začetku, ko je hitrost padanja še majhna, upor zraka še ni zaznaven in telo pada bolj ali manj enakomerno pospešeno (s pospeškom g); hitrost narašča s časom linearno (= gt). Toda z naraščanjem hitrosti narašča tudi upor zraka in pospešek padanja se zmanjšuje; hitrost narašča s časom počasneje, kot bi med padanjem v vakuumu. Zaradi upora zraka se pospešek padanja bolj in bolj zmanjšuje. Po daljšem času se zmanjša na nič in telo pada naprej enakomerno s skorajda stalno hitrostjo.

Vzemimo, da je pospešek padanja odvisen od hitrosti padanja po enačbi (gl. str. 174):

$$a = g - \alpha v^2 \qquad (1.24)$$

Parameter α podaja upor zraka; odvisen je predvsem od oblike, velikosti in mase telesa ter od gostote zraka; za padalca z 8 metrskim padalom je npr. α = 0,6/m.

Pospešek je odvod hitrosti po času:

$$a = dv/dt = g - \alpha v^2 \text{ ali}$$
$$(g - \alpha v^2)^{-1} dv = dt$$

Enačbo integriramo: na levi strani po hitrosti od 0 (telo v začetku miruje) do v, na desni pa po času od 0 do t. Dobimo:

$$\ln \frac{v + \sqrt{g/\alpha}}{\sqrt{g/\alpha} - v} = 2\sqrt{\alpha g}\ t$$

Novo enačbo antilogaritmiramo in preuredimo člene, da dobimo ekspliciten izraz za v:

$$v = \sqrt{g/\alpha}\ \frac{1 - \exp(-2\sqrt{\alpha g}\ t)}{1 + \exp(-2\sqrt{\alpha g}\ t)} \qquad (1.25)$$

Časovni graf te funkcije je na sliki (1.20). V začetku padanja, ko je t še majhen, lahko zapišemo:

$$\exp(-2\sqrt{\alpha g}\ t) \approx 1 - 2\sqrt{\alpha g}\ t + \dots$$

in dobimo:

$$v = \sqrt{g/\alpha}\ \frac{2\sqrt{\alpha g}\ t - \dots}{2 - \dots} \approx gt - \dots$$

kar velja za prosto padanje brez zračnega upora. Po zelo dolgem času ($t \to \infty$) je $\exp(-2\sqrt{\alpha g}\ t) \to 0$ in

$$v(\infty) \approx \sqrt{g/\alpha}$$

Hitrost se asimptotično približuje končni vrednosti $\sqrt{g/\alpha}$, s katero telo nato pada enakomerno. Pri α = 0,6/m (padalec s padalom) dobimo $v(\infty)$ = 4 m/s = 16 km/h. Padalec torej pade na tla s hitrostjo okrog 16 km/h.

Harmonično nihanje

Kot primer premega gibanja, pri katerem se med gibanjem spreminja tudi predznak pospeška, tako da je gibanje zdaj pospešeno, zdaj pojemajoče, omenimo **nihanje**, in sicer **harmonično nihanje**. Telo niha okrog stabilne ravnovesne lege sem ter tja.

Koordinatno izhodišče 0 na osi x postavimo v stabilno ravnovesno lego (slika 1.21). Koordinata x je odmik telesa iz ravnovesne lege ($+x$ je odmik v desno, $-x$ v levo). Pri nihanju je pospešek vedno usmerjen k ravnovesni legi, tako da je približevanje k ravnovesni legi pospešeno, oddaljevanje od nje pa pojemajoče. Med oddaljevanjem od ravnovesne lege se hitrost zmanjšuje, in to tem bolj, čim bolj je telo oddaljeno. Pri neki največji oddaljenosti ($x = + x_o$) se telo ustavi ($v = 0$), nakar se smer gibanja obrne, telo se začne pospešeno približevati ravnovesni legi. Približevanje je pospešeno, hitrost narašča. Ko telo doseže ravnovesno lego, ima največjo hitrost (v_o); s to hitrostjo švigne skozi ravnovesno lego in se na drugi strani začne oddaljevati od nje; oddaljevanje je pojemajoče. Telo se ustavi v nasprotni skrajni legi ($x = -x_o$), se obrne in se začne pospešeno približevati ravnovesni legi itd. Največji odmik telesa iz ravnovesne lege (x_o) se imenuje **amplituda odmika**. Koordinata x nihajočega telesa se spreminja znotraj intervala med skrajnima vrednostima $-x_o$ in $+x_o$:

$$-x_o \leq x \leq +x_o$$

Značilno za nihanje je, da je pospešek usmerjen k ravnovesni legi in da je tem večji, čim bolj je telo oddaljeno od nje (čim večji je x). V sami ravnovesni legi ($x = 0$) je pospešek nič, največji pa je pri amplitudi ($x = \pm x_o$). Ko je telo desno od ravnovesne lege ($x > 0$), je pospešek usmerjen v levo (je negativen). Levo od ravnovesne lege ($x < 0$) je pospešek usmerjen v desno (je pozitiven). Torej ima pospešek ravno nasproten predznak kot odmik x.

Izberemo takšno vrsto nihanja, pri katerem je pospešek premo sorazmeren z vsakokratnim odmikom: $a(t) = -$ *konst* $x(t)$. Pozitivna sorazmernostna konstanta ima dimenzijo s^{-2}; običajno jo napišemo v obliki ω^2 (kvadrat zato, da je zares pozitivna, da ima a zares drugačen predznak kot x). Videli bomo, da je nova konstanta ω v zvezi s frekvenco nihanja. Za naše nihanje torej velja:

$$\boxed{a = -\omega^2 x} \tag{1.26}$$

Vemo, kako se pospešek spreminja s koordinato x. Toda kako se spreminja s časom? Kakšni funkciji časa sta koordinata x in hitrost v pri tem gibanju?

$$a = -\omega^2 x = \frac{dv}{dt} = \frac{dx\,dv}{dx\,dt} = v\frac{dv}{dx} \quad (v = dx/dt)$$

ali

$$-\omega^2 x dx = v dv$$

Dobljeno enačbo integriramo, pri čemer upoštevamo, da je hitrost nič, ko je telo najbolj odmaknjeno od ravnovesne lege: za $x = x_o$ je $v = 0$. Meji integracije sta zato: na levi strani enačbe od x_o do x, na desni pa od 0 do v. Dobimo:

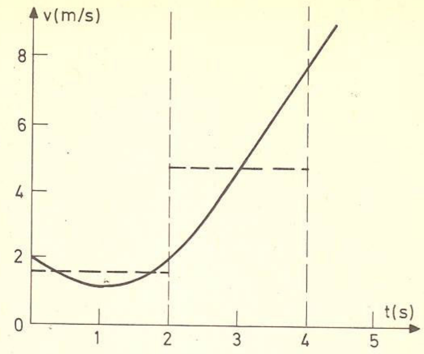
$$-(\omega^2/2)(x^2 - x_o^2) = v^2/2 \text{ ali:}$$

$$v = \omega\sqrt{x_o^2 - x^2} \quad -x_o \leq x \leq x_o \tag{1.27}$$

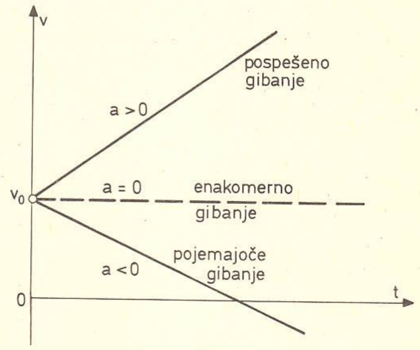
Histrost je največja v ravnovesni legi ($x = 0$); označimo jo z v_o. Sledi:

$$\boxed{v_o = x_o\omega} \tag{1.28}$$

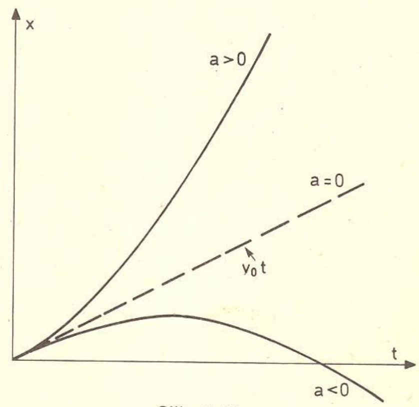
Največja hitrost v_o (amplituda hitrosti), s katero nihajoče telo švigne skozi ravnovesno lego, **je premo sorazmerna z amplitudo odmika** x_o.



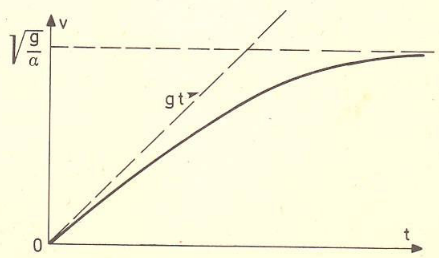
Slika 1.17



Slika 1.18



Slika 1.19



Slika 1.20

$$v = \frac{dx}{dt} = \omega \sqrt{x_o^2 - x^2} \quad \text{ali}$$

$$(x_o^2 - x^2)^{-1/2} dx = \omega\, dt$$

Da lahko to enačbo integriramo, se moramo odločiti, v katerem trenutku začnemo šteti čas ($t = 0$). Običajno se domenimo, da začne čas teči ($t = 0$) v trenutku, ko je telo v ravnovesni legi: za $t = 0$ je torej $x = 0$. Zato sta meji integracije na desni strani enačbe od 0 do t, na levi pa od 0 do x

$$\int_0^x (x_o^2 - x^2)^{-1/2} dx = \omega \int_0^t dt$$

$$\arcsin(x/x_o) = \omega t \quad \text{ali}$$

$$\boxed{x = x_o \sin(\omega t)} \qquad (1.29)$$

Za vajo poišči $x(t)$ za primer, da začnemo šteti čas v trenutku, ko se telo ustavi: $t = 0$ za $x = x_o$. Rezultat: $x(t) = x_o \cos(\omega t)$.

Če je **pospešek nihajočega telesa premo sorazmeren z odmikom iz ravnovesne lege (in ima nasproten predznak), se odmik spreminja s časom harmonično (kot sinusna ali kosinusna funkcija časa),** zato se takšno nihanje imenuje **harmonično nihanje**.

Sinusna funkcija $\sin(\omega t)$ je periodična funkcija. Njen argument (ωt) se imenuje **faza** (φ) in je brez dimenzije:

$$\varphi = \omega t \qquad (1.30)$$

Perioda te funkcije je 2π, kar pomeni, da je ob vsakokratni spremembi faze za 2π vrednost funkcije enaka.

Časovni graf odmika x za harmonično (sinusno) nihanje je na sliki (1.22). Nihanje se ponovi po nihajnem času t_0. Po preteku nihajnega časa t_0 je telo spet na enakem mestu in ima enako hitrost v enaki smeri. Sprememba časa za t_0 potemtakem ustreza spremembi faze φ za 2π:

$$\varphi(t+t_0) = \varphi(t) + 2\pi \quad \text{ali}$$
$$\omega.(t+t_0) = \omega t + 2\pi \quad \text{ter}$$
$$\omega = 2\pi/t_0$$

Obratna vrednost nihajnega časa je **frekvenca nihanja** (ν):

$$\boxed{\nu = 1/t_0} \quad \text{ter} \quad \boxed{\omega = 2\pi\nu} \qquad (1.31)$$

Parameter ω se imenuje **krožna frekvenca nihanja**; je merilo za frekvenco nihanja oziroma za nihajni čas. Čim večji je ω, tem krajši je nihajni čas, tem hitreje se nihanje ponavlja.

Zdaj, ko poznamo odmik x kot funkcijo časa, lahko poiščemo časovno odvisnost hitrosti (gl. 1.29):

$$v(t) = dx/dt = x_0\omega \cos(\omega t) \quad \text{ali}$$
$$v(t) = v_0 \cos(\omega t), \quad v_0 = x_0\omega \qquad (1.32)$$

Če se odmik x spreminja s časom kot sinusna funkcija, se hitrost v spreminja kot kosinusna funkcija (in obratno). Ko je odmik največji ($x = x_0$), je hitrost nič. Pri odmiku nič (v ravnovesni legi) pa je hitrost največja ($= v_0 = x_0\omega$). Časovni graf hitrosti je na sliki (1.23).

Pospešek a se spreminja s časom podobno kot odmik x (le da z nasprotnim predznakom, saj sta ti količini premo sorazmerni (gl. 1.26):

$$a = -\omega^2 x = -x_0\omega^2 \sin(\omega t)$$
$$a = -a_0 \sin(\omega t) \qquad (1.33)$$

Največji pospešek $a_0 = x_0\omega^2$ ima telo v trenutku, ko se ustavi v skrajni legi ($x = \pm x_0$); tedaj se spremeni smer gibanja.

Osnovne enačbe harmoničnega nihanja so:

$$x = x_0 \sin(\omega t), \quad \omega = 2\pi\nu = 2\pi/t_0$$
$$v = dx/dt = x_0\omega \cos(\omega t), \quad v_0 = x_0\omega$$
$$a = dv/dt = -x_0\omega^2 \sin(\omega t) = -a_0 \sin(\omega t), \quad a_0 = x_0\omega^2$$
$$a = -\omega^2 x$$

Nihajni čas t_0 nihajočega telesa je skrit v parametru ω, ki je sorazmernostni faktor med pospeškom in odmikom. Velika frekvenca pri danem odmiku pomeni velik pospešek.

Primeri:

1. Telo niha z amplitudo $x_0 = 5$ cm in nihajnim časom $t_0 = 2$ s. Kolikšen je odmik (x_1) telesa po času $t_1 = 5$ s, če začnemo šteti čas v trenutku, ko gre skozi ravnovesno lego? Po kolikšnem času (t_2) od začetka nihanja je telo oddaljeno 2 cm levo od ravnovesne lege ($x_2 = -2$ cm)?

$$\omega = 2\pi/t_0 = 2\pi/2\text{s} = \pi/\text{s}$$
$$x_1 = x_0 \sin(\omega t_1) = 5\text{ cm} \sin(\pi\text{s}^{-1}\, 5\text{ s}) =$$
$$= 5\text{ cm} \sin(5\pi) = 0$$

Po 5 sekundah od začetka nihanja je nihajoče telo točno v ravnovesni legi. V kateri smeri se giblje? Levo ali desno? Začne se gibati v desno; po nihajnem času $t_0 = 2$ s se spet giblje v desno, po $2t_0 = 4$ s spet v desno. Preostane še 1 s, kar je pol nihajnega časa: giblje se v levo.

$$x_2 = x_0 \sin(\omega t_2) \quad \text{ali}$$
$$t_2 = (1/\omega)\arcsin(x_2/x_0) = (\text{s}/\pi)\arcsin(-0{,}4) =$$
$$= 0{,}13\text{ s} + 1\text{ s}$$
$$t_2 = 1{,}13\text{ s}$$

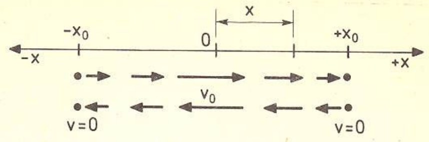
2. Telo niha s frekvenco $\nu = 10$ Hz. Kolikšna je amplituda x_0, če ima pri odmiku $x = 4$ cm hitrost $v = 2$ m/s? S kolikšno hitrostjo (v_0) telo zaniha skozi ravnovesno lego?

$$\omega = 2\pi\nu = 20\pi/\text{s}$$
$$v = \omega \sqrt{x_0^2 - x^2} \quad \text{ali}$$
$$x_0 = \sqrt{x^2 + (v/\omega)^2} = 5{,}1\text{ cm}$$
$$v_0 = x_0\omega = 3{,}2\text{ m/s}$$

3. Telo niha z amplitudo $x_0 = 10$ cm. Kolikšna sme biti največja hitrost (v_0), s katero telo zaniha skozi ravnovesno lego, da njegov pospešek ne preseže vrednosti $10g = 98$ m/s^2?

$v_0 = x_0\omega$
$a_0 = x_0\omega^2 = v_0^2/x_0$ ali

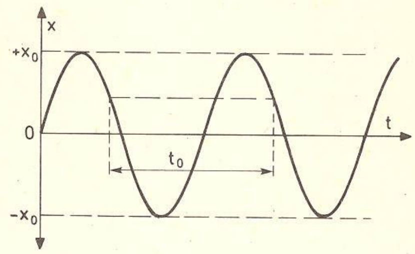
$$v_0 = \sqrt{a_0 x_0} = \sqrt{98\ \mathrm{ms^{-2}} \cdot 0{,}1\ \mathrm{m}} = 3{,}1\ \mathrm{m/s}$$



Slika 1.21

Ravninsko gibanje

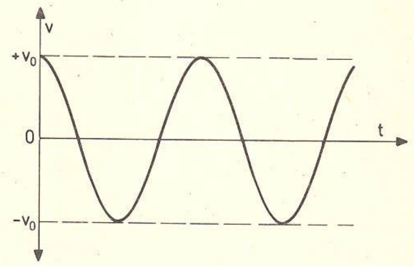
Telo se giblje v dani ravnini. V ravnino gibanja položimo pravokotni koordinatni osi x in y. Koordinatno izhodišče 0 in smer osi izberemo tako, da je opis gibanja telesa čim enostavnejši in preglednejši; po možnosti naj bosta koordinati x, y telesa ves čas med gibanjem pozitivni (slika 1.24).



Slika 1.22

Med gibanjem se koordinati telesa spreminjata s časom. Kako se telo giblje, je odvisno od tega, kakšni funkciji časa sta njegovi koordinati: $x(t)$ in $y(t)$. Če je $y = 0$ in $x = x(t)$, imamo premo gibanje vzdolž osi x. Za $x = 0$ in $y = y(t)$ pa dobimo premo gibanje vzdolž osi y. V splošnem se s časom spreminjata tako koordinata x kot koordinata y, pa se telo giblje po krivulji (tirnici) $y(x)$. V trenutku t_1 je npr. na mestu P_1 (gl. sliko 1.24), v kasnejšem trenutku t_2 na mestu P_2 itd. S časom t določimo lego telesa na tirnici ali drugače: **čas t je parameter tirnice** $y(x)$, po kateri se telo giblje. Če je gibanje telesa podano z enačbama:

$$x = x(t)$$
$$y = y(t)$$

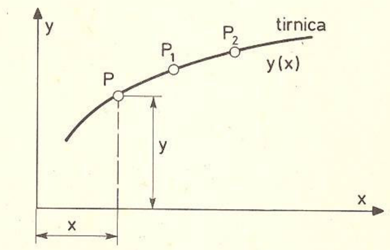


Slika 1.23

je enačba tirnice dana v **parametrični obliki**. Enačbo tirnice v **eksplicitni obliki** pa dobimo, če iz zgornjih enačb izločimo (eliminiramo) čas t in povežemo y z x:

$y = y(x)$ **Enačba tirnice v eksplicitni obliki**

Opazovati gibanje telesa v ravnini x–y, se pravi, opazovati premikanje njegove sence na osi x in istočasno premikanje sence na osi y. Senca telesa na osi x ima v trenutku t koordinato $x(t)$ in se giblje vzdolž te osi s hitrostjo $v_x = dx/dt$, kar pomeni da se v časovnem intervalu dt premakne za $dx = v_x dt$. Obenem se senca na osi y, ki se giblje v smeri osi y s hitrostjo $v_y = dy/dt$, premakne v smeri te osi za $dy = v_y dt$ (slika 1.25). Oba premika skupaj sta v zvezi s premikom telesa vzdolž tirnice za ds. Velja:



Slika 1.24

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 = (v_x^2 + v_y^2)(dt)^2 \text{ ali}$$
$$ds = dt\sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

Torej se telo premakne v smeri tangente na tirnico s hitrostjo:

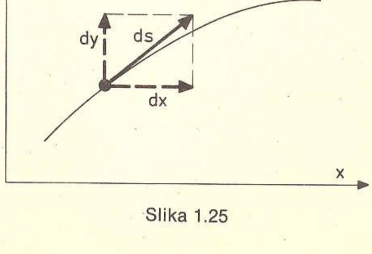
$$v = ds/dt = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

ki je vektorska vsota hitrosti premikanja senc na koordinatnih oseh x in y:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_x + \mathbf{v}_y \tag{1.34}$$

Tudi pospešek $\mathbf{a}$ ravninskega gibanja lahko razstavimo na projekciji vzdolž koordinatnih osi (slika 1.26):

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y \tag{1.35}$$



Slika 1.25

kjer je $a_x = dv_x/dt = d^2x/dt^2$ pospešek, s katerim se vzdolž osi x giblje senca telesa na tej osi. Pospešek $a_y = dv_y/dt = d^2y/dt^2$ pa je pospešek sence na osi y (gl. str. 10).

Enačbi (1.34,35) matematično izražata dejstvo, da je **ravninsko gibanje sestavljeno iz dveh pravokotnih premih gibanj**: iz premega gibanja v smeri osi x in premega gibanja v smeri osi y. Kakšno je gibanje telesa v ravnini x–y, je torej odvisno od tega, kakšni premi gibanji v smeri koordinatnih osi x in y sestavimo v ravninsko gibanje.

Kot prvi primer sestavimo pravokotni enakomerni gibanji. Recimo, da opazujemo plavanje plavalca prek reke. Reka teče s hitrostjo v_0, plavalec se zaganja pravokotno prek reke s stalno hitrostjo v_1. Kje in po kolikšnem času doseže plavalec nasprotni breg reke? S kolikšno hitrostjo se giblje glede na breg?

Koordinatno izhodišče položimo na breg, od koder plavalec začne plavati; os x ima smer rečnega toka, os y je usmerjena k nasprotnemu bregu (to je v smer zaganjanja plavalca, slika 1.27). Če bi voda mirovala, bi plavalec plaval v smeri osi y s stalno hitrostjo $v_y = v_1$ in bi dosegel nasprotni breg (širina reke je d) na mestu A po času $t_1 = d/v_1$. Ker pa reka odnaša plavalca s hitrostjo v_0 vzdolž toka, se hitrosti $\mathbf{v}_1$ v smeri osi y rektorsko prišteje hitrost $\mathbf{v}_0$ v smeri osi x in plavalec plava s hitrostjo $v = \sqrt{v_1^2 + v_0^2}$ v nizvodni smeri in doseže nasprotni breg na mestu B. Reka ne vpliva na gibanje plavalca v smeri osi y, zato plavalec plava prek reke enako dolgo (t_1), kot če reka ne bi tekla. Med plavanjem reka odnese plavalca nizvodno za $x = v_0t_1 = v_0d/v_1$. Plavalec zaradi rečnega toka sicer opravi daljšo pot $s = \sqrt{d^2 + x^2} = (d/v_1)\sqrt{v_0^2 + v_1^2}$, zato pa plava z večjo hitrostjo v, tako da je čas enak (t_1).

Če plavalec želi (kljub rečnemu toku) plavati v smeri pravokotno na reko, mora zaplavati s hitrostjo v_1 poševno proti toku reke, npr. pod kotom α glede na breg (slika 1.28), tako da je: $\cos\alpha = v_0/v_1$.

Poševni met

Telo se začne gibati poševno navzgor z začetno hitrostjo v_0 pod kotom φ glede na vodoravna tla. Ravnina gibanja je tokrat navpična. Koordinatno izhodišče postavimo na mesto, od koder telo odleti; os y je usmerjena navpično navzgor, os x je vodoravna (slika 1.29).

Če zanemarimo upor zraka, je gibanje v vodoravni smeri enakomerno (brez pospeška), v navpični smeri pa deluje težni pospešek g v smeri navzdol. Hitrost v vodoravni smeri (v_x) je zato stalna, v navpični smeri (v_y) pa se med dviganjem zmanjšuje, med padanjem pa povečuje (kot pri navpičnem metu oziroma prostem padu):

$$v_x = konst. = v_0\cos\varphi$$
$$v_y = v_0\sin\varphi - gt \tag{1.36}$$

Celotna hitrost $\mathbf{v}$ je vektorska vsota hitrosti $\mathbf{v}_x$ in $\mathbf{v}_y$ in je tangentna na tirnico gibanja (slika 1.29).

Ker je $v_x = dx/dt$ in $v_y = dy/dt$, izračunamo iz enačb (1.36) enačbo tirnice v parametrični obliki:

$$x = v_0\cos\varphi t$$
$$y = v_0\sin\varphi t - gt^2/2 \tag{1.37}$$

Iz prve enačbe izračunamo $t = x/v_0\cos\varphi$ in vstavimo v drugo enačbo; dobimo enačbo tirnice v eksplicitni obliki:

$$y = x\mathrm{tg}\varphi - x^2g/(2v_0^2\cos^2\varphi) \tag{1.38}$$

To je **enačba parabole.** Pri poševnem metu se telo giblje po paraboli. Najvišja točka parabole je na višini h nad tlemi. V tej točki je hitrost vodoravna, navpična projekcija hitrosti je nič. Telo doseže najvišjo točko parabole po času t_1 od začetka meta.

$$v_y(t_1) = 0 = v_0\sin\varphi - gt_1 \quad \text{ali}$$
$$t_1 = v_0\sin\varphi/g \tag{1.39}$$
$$h = y(t_1) = v_0\sin\varphi t_1 - gt_1^2/2$$
$$h = v_0^2\sin^2\varphi/2g$$

Čas dviganja (od začetka do najvišje točke parabole) t_1 in največja višina h sta enaka kot pri navpičnem metu z začetno hitrostjo $v_0\sin\varphi$ (glej 1.23č). Telo pade na tla ($y = 0$) po času t_2 od začetka meta; ta čas izračunamo iz enačbe (1.37):

$$0 = v_0\sin\varphi t_2 - gt_2^2/2$$

Ta enačba ima dve rešitvi. Rešitve $t_2 = 0$ ne upoštevamo, ker se ta nanaša na začetek gibanja ($y = 0$ za $t = 0$). Druga rešitev je:

$$t_2 = 2v_0\sin\varphi/g = 2t_1 \tag{1.40}$$

Celoten čas poševnega meta (t_2) je razdeljen na čas dviganja (t_1) in na čas padanja. Vidimo, da je **čas dviganja enak času padanja** (podobno kot velja za navpični met in prosti pad, gl. str.14). Nasploh je padajoči del parabole simetričen z dvigajočim se delom. Telo pade na tla z enako hitrostjo v_0 in pod enakim kotom glede na tla, kot smo ga bili odvrgli.

Domet (d), to je razdalja, na kateri telo pade na tla, izračunamo ali iz enačbe $d = v_0\cos\varphi t_2 = 2v_0^2\cos\varphi \cdot \sin\varphi/g$ ali iz enačbe (1.38) za $y = 0$:

$$0 = d\mathrm{tg}\varphi - d^2g/(2v_0^2\cos^2\varphi)$$
$$d = (v_0^2/g)\sin(2\varphi) \tag{1.41}$$

Recimo, da telo odvržemo z dano hitrostjo v_0. V kateri smeri (pod kolikšnim kotom φ) ga moramo odvreči, da je **domet najdaljši**? Če ga odvržemo strmo navzgor (velik φ), je telo sicer dolgo v zraku, zato pa ima majhno vodoravno hitrost in je domet majhen (slika 1.30). Če pa ga odvržemo pod majhnim kotom φ, ima telo veliko vodoravno hitrost, zato pa majhno višino in je domet spet majhen. Torej je domet največji pri nekem vmesnem metnem kotu. Iz enačbe (1.41) je razvidno, da je d največji pri $\sin(2\varphi) = 1$, to je pri $2\varphi = 90°$ ali $\varphi = 45°$. **Pri naklonu meta $\varphi = 45°$ je domet najdaljši:**

$$d_{max} = v_0^2/g \tag{1.41a}$$

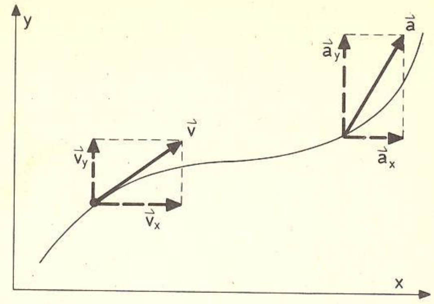
Poglejmo, kolikšno hitrost v ima telo na višini y. Najprej ugotovimo (zaradi simetričnosti parabole), da je ta hitrost na dvigajočem se delu parabole enako velika kot na padajočem delu (slika 1.31a). Velja:

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 = (v_0\cos\varphi)^2 + (v_0\sin\varphi - gt)^2 =$$
$$= v_0^2 + g^2t^2 - 2v_0gt \cdot \sin\varphi =$$
$$= v_0^2 - 2g(v_0\sin\varphi \cdot t - gt^2/2) =$$
$$= v_0^2 - 2gy \quad \text{(gl. 1.37)} \tag{1.42}$$

Hitrost v na višini y je neodvisna od kota φ; vseeno je, v kateri smeri odvržemo telo, lahko tudi navpično navzgor (gl. enačbo 1.23c in sliko 1.31b).

V najvišji točki parabole ($y = h$, gl. sliko 1.29) je hitrost vodoravna ($v_y = 0$ in $v_x = v$). V tej točki velja:

$$v^2 = v_0^2 - 2gh = v_0^2 - 2gv_0^2\sin^2\varphi/2g = v_0^2\cos^2\varphi \quad \text{ali}$$
$$v = v_0\cos\varphi$$



Slika 1.26

Primeri:

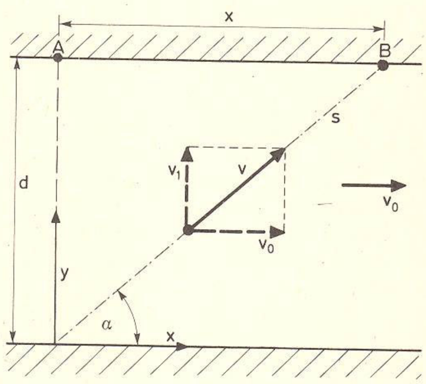
1. Kamen odvržemo z začetno hitrostjo $v_0 = 20$ m/s pod kotom $\varphi = 60°$ glede na vodoravna tla. Do kolikšne višine prileti? Kolikšna je tedaj njegova hitrost (v_1)? Po kolikšnem času (t_2), s kolikšno hitrostjo (v_2) in na kateri oddaljenosti (d) pade na tla?

$$h = \frac{v_0^2\sin^2\varphi}{2g} = 15{,}3 \text{ m}$$
$$v_1 = v(t_1) = v_0\cos\varphi = 10 \text{ m/s}$$
$$t_2 = 2t_1 = 2v_0\sin\varphi/g = 3{,}5 \text{ s}$$
$$v_2 = v_0 = 20 \text{ m/s}$$
$$d = v_0\cos\varphi t_2 = (v_0^2/g)\sin(2\varphi) = 35{,}3 \text{ m}$$

2. Enak primer kot zgoraj, le da kamen leti proti $x_1 =$ = 20 m oddaljeni navpični steni. Na kolikšni višini (y_1), s kolikšno hitrostjo (v_1) in pod kakšnim kotom (φ_1) udari obnjo?

$$y_1 = x_1\mathrm{tg}\varphi - \frac{g}{2v_0^2\cos^2\varphi}x_1^2 = 14{,}6 \text{ m}$$
$$v_1^2 = v_0^2 - 2gy_1, \; v_1 = 10{,}4 \text{ m/s}$$
$$v_x = v_0\cos\varphi = 10 \text{ m/s}$$
$$v_y = v_0\sin\varphi - gt_1 = v_0\sin\varphi - gx_1/(v_0\cos\varphi) = -2{,}7 \text{ m/s}$$
$$\mathrm{tg}\varphi_1 = v_y/v_x = -0{,}27, \; \varphi_1 = -15°$$

Kamen udari ob steno pod kotom 15° glede na njeno pravokotnico.



Slika 1.27

3. Pod kakšnim kotom (φ) glede na vodoravna tla moramo odvreči telo z začetno hitrostjo $v_0 = 20$ m/s, da pade na tla na oddaljenosti $x_1 = 20$ m?

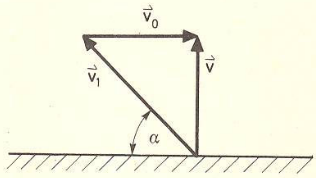
$$y = x_1\mathrm{tg}\varphi - \frac{g}{2v_0^2\cos^2\varphi}x_1^2 = 0$$

Ker je $1/\cos^2\varphi = 1 + \mathrm{tg}^2\varphi$, dobimo za $\mathrm{tg}\varphi$ kvadratno enačbo:

$$\mathrm{tg}^2\varphi - (2v_0^2/gx_1)\mathrm{tg}\varphi + 1 = 0$$

ki ima dve rešitvi:

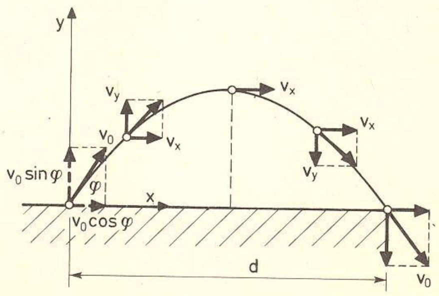
$$\mathrm{tg}\varphi_1 = (v_0^2/gx_1) + \sqrt{(v_0^2/gx_1)^2 - 1} \quad \text{ter}$$
$$\mathrm{tg}\varphi_2 = (v_0^2/gx_1) - \sqrt{(v_0^2/gx_1)^2 - 1}$$



Slika 1.28

Torej telo pade na isto mesto v dveh primerih: če ga odvržemo pod kotom φ_1 ali pod kotom φ_2 (gl. sliko 1.30). Eno samo rešitev ($\varphi_1 = \varphi_2 = 45°$) dobimo, če je:

$$(v_0^2/gx_1)^2 - 1 = 0 \quad \text{ali} \quad x_1 = v_0^2/g = d_{max}$$



Slika 1.29

torej če je oddaljenost x_1 enaka največjemu dometu pri tej začetni hitrosti (gl. 1.41a). Pri $x_1 > v_0^2/g$ ne dobimo realne rešitve za iskani kot φ, saj kamen ne doseže te oddaljenosti.

4. Z balona, ki se dviga s stalno hitrostjo $v_1 = 10$ m/s, odvržemo na višini $h = 20$ m kamen s hitrostjo $v_2 = 20$ m/s v vodoravni smeri (slika 1.32). Kje (x), s kolikšno hitrostjo (v), po kolikšnem času (t) in pod kakšnim kotom (φ) pade na tla?

Začetna hitrost kamna (v_0) je sestavljena iz navpične projekcije v_1 zaradi dviganja balona in iz vodoravne projekcije v_2 zaradi odmeta. Koordinatni sistem postavimo na tla, izhodišče 0 je ob vznožišču balona. V začetku ($t = 0$) je $x = 0$ in $y = h$, po času t pa:

$$x = v_2t$$
$$y = h + v_1t - gt^2/2$$

Čas leta t izračunamo iz druge enačbe za $y = 0$:

$$0 = h + v_1t - gt^2/2 \quad \text{ali} \quad t^2 - (2v_1/g)t - 2h/g = 0$$

Od obeh realnih rešitev te enačbe upoštevamo rešitev s pozitivnim korenom, ki dá pozitiven čas t:

$$t = v_1/g + \sqrt{(v_1/g)^2 + 2h/g} = 3{,}3 \text{ s}$$
$$x = v_2t = 66 \text{ m}$$
$$v^2 = v_0^2 + 2gh = v_1^2 + v_2^2 + 2gh, \ v = 30 \text{ m/s}$$
$$v_x = v_2 = 20 \text{ m/s}, \ v_y = v_1 - gt = -22 \text{ m/s}$$
$$\mathrm{tg}\varphi_1 = v_x/v_y = -0{,}91, \ \varphi_1 = -42°$$

Kamen udari ob tla po času 3,3 s na vodoravni oddaljenosti 66 m od vznožišča balona, in sicer udari s hitrostjo 30 m/s pod kotom 42° glede na navpičnico.

5. Kanon je usmerjen k tarči, ki visi na višini h in na vodoravni oddaljenosti b od kanona (slika 1.33). V trenutku, ko izstrelek izleti iz kanona, začne tarča padati. Dokaži, da izstrelek vedno zadene padajočo tarčo, ne glede na hitrost v_0, s katero izleti iz kanona.

Izstrelek doseže navpičnico tarče po času $t = b/(v_0\cos\varphi)$ na višini $y = b\mathrm{tg}\varphi - gb^2/(2v_0^2\cos^2\varphi)$ (gl. 1.38), kjer je $\mathrm{tg}\varphi = h/b$. Med tem časom se tarča spusti za $gt^2/2 = gb^2/(2v_0^2\cos^2\varphi)$, kar pomeni, da pade do višine $h - gt^2/2 = h - gb^2/(2v_0^2\cos^2\varphi) = y$ nad tlemi, enako kot izstrelek. Dobljeni rezultat je neodvisen od velikosti začetne hitrosti v_0 izstrelka. Če je ta večja, zadene izstrelek tarčo prej in na večji višini, kot če je manjša; vedno pa prideta do istega mesta v istem trenutku. Pogoj je le, da je kanon usmerjen proti začetnemu mestu tarče, ko ta začne padati.

Kolikšna mora biti začetna hitrost izstrelka (v_0), da zadene ob tarčo v vodoravni smeri? Razdalja b mora biti enaka polovici dometa, to je (gl. 1.41): $b = (v_0^2/g)\sin\varphi\cos\varphi = (v_0^2/g)\mathrm{tg}\varphi/(1 + \mathrm{tg}^2\varphi)$ ali $v_0^2 = gb(1 + \mathrm{tg}^2\varphi)/\mathrm{tg}\varphi = g(b^2 + h^2)/h$.

Vodoravni met

je poseben primer poševnega meta s $\varphi = 0$. Telo odleti z začetno hitrostjo v_0 v vodoravni smeri. Ker ves čas pada, je ugodno, če navpično os koordinatnega sistema (os y) zasukamo navzdol, tako da je koordinata y telesa med padanjem ves čas pozitivna (slika 1.34). Velja:

$$v_x = v_0, \ v_y = gt \quad \text{ter}$$
$$x = v_0t, \ y = gt^2/2 \tag{1.43}$$

Iz enačb (1.43) eliminiramo čas t in dobimo enačbo parabole, ki opisuje vodoravni met:

$$y = gx^2/2v_0^2 \tag{1.44}$$

Ta se ujema s parabolo poševnega meta (1.38), če vzamemo $\varphi = 0$ in upoštevamo, da je koordinatni sistem obrnjen.

Hitrost v na globini y je:

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 = v_0^2 + g^2t^2 = v_0^2 + 2gy$$

kar že poznamo (gl. 1.42)

Primera:

1. Reaktivno letalo leti na višini $h = 500$ m s hitrostjo $v_0 = 720$ km/h v vodoravni smeri, ko sprosti bombo. Po kolikšnem času, kje in s kolikšno hitrostjo udari bomba na tla? Kje je tedaj letalo? Upor zraka zanemarimo.

Ko se bomba na višini h loči od letala, začne prosto padati z začetno hitrostjo v_0 v vodoravni smeri. Na tla pade po času $t = \sqrt{2h/g} = 10$ s (gl. 1.43) in sicer na oddaljenosti $x = v_0t = 2$ km od vznožišča letala ob sprostitvi bombe. Hitrost bombe ob udarcu je $v = \sqrt{v_0^2 + 2gh} = 220$ m/s. Bomba leti v vodoravni smeri enako hitro kot letalo (ker zanemarimo upor zraka), torej je letalo ves čas tik nad njo.

2. Tovorni vagon (njegova dolžina je $b = 10$ m) pelje s stalno hitrostjo $v_1 = 20$ m/s. V trenutku, ko je sprednji del vagona pod mostom, odvržemo z mostu kamen z začetno hitrostjo v_0 v smeri vožnje. Kolikšna mora biti največja in najmanjša začetna hitrost kamna, da kamen pade na vagon? Most je na višini $h = 5$ m nad vagonom.

Najprej ugotovimo, da mora biti $v_0 < v_1$, saj bi drugače kamen prehitel vagon in padel pred njim na tla. Kamen pada do tal $t = \sqrt{2h/g} = 1$ s. Med tem časom se v vodoravni smeri premakne za v_0t, sprednji del vagona pa v enaki smeri za v_1t. Kamen še pade na vagon, če je:

$$v_1t - b < v_0t \quad \text{ali}$$
$$v_0 > v_1 - b/t = 10 \text{ m/s}$$

Kamen moramo odvreči najmanj s hitrostjo 10 m/s in največ s hitrostjo 20 m/s.

Enakomerno kroženje

je gibanje po krožnici (polmer r) s stalno obodno hitrostjo v (slika 1.35). Kót φ, ki ga radij r oklepa z izbrano smerjo, npr. z osjo x, linearno narašča s časom:

$$\varphi = \omega t$$

kjer je ω **kotna hitrost**, to je kót, ki ga radij opiše v časovni enoti (merska enota je s^{-1}). Med enim obhodom t_0 opiše radij polni kot 2π (radianov), torej je:

$$\omega = 2\pi/t_0 = 2\pi\nu \qquad (1.45)$$

Tu je ν **frekvenca kroženja**, število obhodov v časovni enoti (sekundi):

$$\nu = 1/t_0$$

Kotna hitrost ω je premo sorazmerna z obodno hitrostjo v. V kratkem časovnem intervalu dt se radij zasuče za kót $d\varphi = \omega dt$, telo na krožnici pa se premakne za ločni element $ds = r d\varphi$. Velja:

$$v = ds/dt = r d\varphi/dt = r\omega \quad \text{ali} \quad \omega = v/r \qquad (1.46)$$

Ker je obodna hitrost stalna, ni tangentnega pospeška (gl. str. 8): $a_t = 0$. Celoten pospešek $\mathbf{a}$ telesa je pravokoten na tirnico (krožnico); to je radialni pospešek a_r, tako da se telo giblje po krožnici. V kratkem časovnem intervalu dt se radij r zasuče za kót $d\varphi = = \omega dt$; za tolikšen kót se zasuče tudi vektor hitrosti $\mathbf{v}$ (slika 1.36a). Vidimo, da je sprememba hitrosti $d\mathbf{v}$ usmerjena k središču kroženja, v smer radialnega pospeška $\mathbf{a}_r$. Velikost te spremembe izračunamo iz trikotnika na sliki (1.36b): $d\mathbf{v}$ je kratek lok na krogu s polmerom v, zato velja $d\mathbf{v} = v d\varphi = a_r dt$ ali

$$a_r = v d\varphi/dt = v\omega$$

Telo, ki enakomerno kroži s stalno obodno hitrostjo v po krogu s polmerom r, se giblje z radialnim pospeškom:

$$a_r = v\omega = v^2/r = r\omega^2 \qquad (1.47)$$

ki ima smer k središču kroženja.

Enakomerno kroženje lahko sestavimo iz dveh pravokotnih harmoničnih nihanj – sinusnega in kosinusnega.

Recimo, da senca krožečega telesa na koordinatni osi x niha kosinusno, npr.:

$$x = r\cos(\omega t) \qquad (1.48a)$$

senca na osi y pa sinusno:

$$y = r\sin(\omega t) \qquad (1.48b)$$

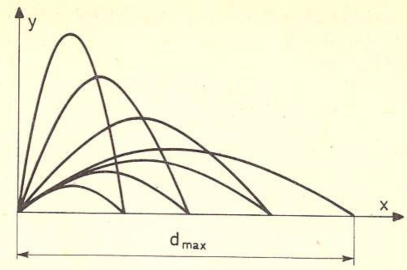
Velja:

$$x^2 + y^2 = r^2 [\sin^2(\omega t) + \cos^2(\omega t)] = r^2$$

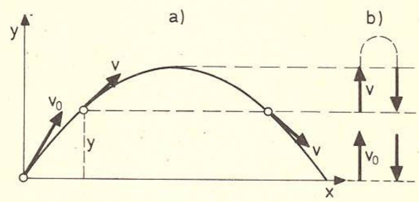
kar je enačba kroga s polmerom r in središčem v koordinatnem izhodišču. Telo se torej zares zadržuje na krožnici. Poglejmo še, kako se po njej giblje.

$$v_x = dx/dt = -r\omega\sin(\omega t)$$
$$v_y = dy/dt = r\omega\cos(\omega t) \qquad \text{(slika 1.37)}$$
$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 = r^2\omega^2 \quad \text{ali}$$

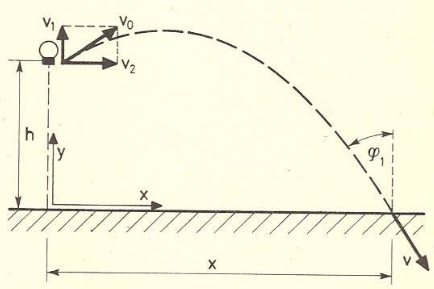
$$\boxed{v = r\omega}$$



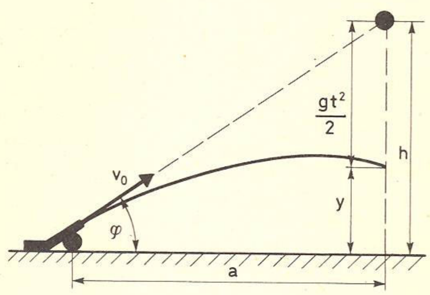
Slika 1.30



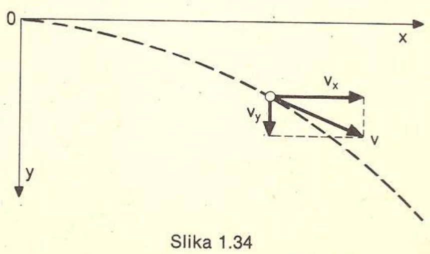
Slika 1.31



Slika 1.32



Slika 1.33



Slika 1.34

Dobili smo že znani rezultat: hitrost enakomerno krožečega telesa je stalna (neodvisna od časa). Da je ta hitrost zares tangentna na krožnico, dokažemo z enačbo: $\mathbf{r} \cdot \mathbf{v} = 0$, kjer je $\mathbf{r}$ krajevni vektor telesa (gl. 1.1), ki ima v našem primeru obliko:

$$\mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y = r\cos(\omega t)\,\mathbf{e}_x + r\sin(\omega t)\,\mathbf{e}_y$$
$$\mathbf{v} = v_x\mathbf{e}_x + v_y\mathbf{e}_y = -r\omega\sin(\omega t)\,\mathbf{e}_x + r\omega\cos(\omega t)\,\mathbf{e}_y$$
$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{v} = r^2\omega\,[\cos(\omega t)\,\mathbf{e}_x + \sin(\omega t)\,\mathbf{e}_y] \cdot [-\sin(\omega t)\,\mathbf{e}_x + \cos(\omega t)\,\mathbf{e}_y]$$

Ker sta enotina vektorja $\mathbf{e}_x$ in $\mathbf{e}_y$ pravokotna drug na drugega, velja:

$$\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_y = 0 \quad \text{ter} \quad \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_x = \mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e}_y = 1$$

in dobimo rezultat $\mathbf{r} \cdot \mathbf{v} = 0$, kar smo želeli dokazati.

Pokažimo še, da je pospešek $\mathbf{a}$ enakomerno krožečega telesa usmerjen k središču kroženja.

$$a_x = \mathrm{d}v_x/\mathrm{d}t = -r\omega^2\cos(\omega t)$$
$$a_y = \mathrm{d}v_y/\mathrm{d}t = -r\omega^2\sin(\omega t)$$
$$\mathbf{a} = a_x\mathbf{e}_x + a_y\mathbf{e}_y = -r\omega^2\,[\cos(\omega t)\,\mathbf{e}_x + \sin(\omega t)\,\mathbf{e}_y]$$

$$\boxed{\mathbf{a} = -\omega^2\mathbf{r}}$$

Pospešek $\mathbf{a}$ ima nasprotno smer kot radij $\mathbf{r}$, torej je zares usmerjen k središču kroženja.

Dokazali smo, da lahko enakomerno kroženje predstavimo kot kombinacijo dveh pravokotnih harmoničnih nihanj (sinusnega in kosinusnega) z enako frekvenco; amplituda nihanja določa polmer kroženja, krožna frekvenca pa kotno hitrost. Nihajni čas sestavljenega nihanja se ujema z obhodnim časom nastalega kroženja (ko senca na koordinatni osi zaniha za en nihaj, napravi krožeče telo en obhod). Velja tudi obratno: če **projiciramo enakomerno kroženje na steno, ki je pravokotna na ravnino kroženja, dobimo harmonično nihanje.**

Primer:

Telo kroži enakomerno po krogu s polmerom $r = 10$ cm; v eni minuti napravi 120 vrtljajev. Kolikšni sta obodna in kotna hitrost? Za kolikšen kót se zavrti radij v 0,5 sekunde? Kolik je radialni pospešek?

$$\nu = 120/1\,\mathrm{min} = 120/60\,\mathrm{s} = 2/\mathrm{s}$$
$$\omega = 2\pi\nu = 4\pi\ \mathrm{rad/s} = 12{,}6\ \mathrm{rad/s}$$
$$v = r\omega = 10\ \mathrm{cm} \cdot 12{,}6/\mathrm{s} = 1{,}26\ \mathrm{m/s}$$

Frekvenca 2/s pomeni, da telo v eni sekundi napravi dva obhoda, torej se radij v 0,5 sekunde zasuče za 360° (en obhod), kar izračunamo tudi iz enačbe:

$$\varphi = \omega t = 4\pi\ \mathrm{rad/s} \cdot 0{,}5\ \mathrm{s} = 2\pi\ \mathrm{rad} = 360^\circ$$
$$a_r = v^2/r = 1{,}26^2\mathrm{m^2s^{-2}}/10\ \mathrm{cm} = 15{,}8\ \mathrm{m/s^2}$$

Neenakomerno kroženje

Poleg radialnega pospeška imamo tudi **tangentni pospešek** a_t, tako da se spreminja velikost obodne hitrosti v (gl. str. 8) in s tem tudi kotna hitrost ω. Zaradi tangentnega pospeška kroženje ni enakomerno, obodna in kotna hitrost se spreminjata s časom. Če ima tangentni pospešek smer obodne hitrosti, se ta povečuje s časom – kroženje je pospešeno. Pri nasprotni smeri tangentnega pospeška pa je kroženje pojemajoče, obodna in kotna hitrost se s časom zmanjšujeta.

$$a_t = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(r\omega)}{\mathrm{d}t} = r\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = r\alpha \qquad (1.49)$$

$$\boxed{\alpha = \mathrm{d}\omega/\mathrm{d}t} \qquad (1.50)$$

Kvocient spremembe kotne hitrosti ($\mathrm{d}\omega$) in časovnega intervala ($\mathrm{d}t$), v katerem se ta sprememba zgodi, se imenuje **kotni pospešek** (α); pove spremembo kotne hitrosti v časovni enoti, merska enota je rad/s² ali kar /s². Pri enakomernem kroženju je kotni pospešek nič:

$\alpha = 0$ **enakomerno kroženje**

Tangentni pospešek je povezan s kotnim pospeškom, oba skupaj pa sta v zvezi z neenakomernim kroženjem (pospešenim ali pojemajočim). Če je tangentni pospešek ves čas enako velik ($a_t = konst$), je **konstanten** tudi **kotni pospešek**; takšno kroženje je **enakomerno pospešeno** (oziroma pojemajoče): kotna hitrost enakomerno narašča (pojema) s časom:

$$\alpha = \mathrm{d}\omega/\mathrm{d}t = konst. = (\omega - \omega_0)/t \ \text{ali}$$

$$\boxed{\omega = \omega_0 + \alpha t} \qquad (1.51)$$

ω_0 je začetna kotna hitrost, to je kotna hitrost v trenutku $t = 0$, ko začne delovati kotni pospešek.

$$\omega = \mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}t \quad \text{ali}$$
$$\mathrm{d}\varphi = \omega\mathrm{d}t = (\omega_0 + \alpha t)\mathrm{d}t$$
$$\varphi = \int \mathrm{d}\varphi = \int_0^t (\omega_0 + \alpha t)\mathrm{d}t$$

$$\boxed{\varphi = \omega_0 t + \alpha t^2/2} \qquad (1.52)$$

Enačbi (1.51,52) združimo, da dobimo zvezo med kotno hitrostjo ω in kotom φ. Iz prve enačbe izrazimo t in ga vstavimo v drugo enačbo (glej podobno izpeljavo za premo gibanje, str. 13). Dobimo:

$$\boxed{\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha\varphi} \qquad (1.53)$$

Kotne količine φ, ω in α imajo pri kroženju podobno vlogo kot količine x, v in a pri premem gibanju.

Primera:

1. Telo začne krožiti s stalnim kotnim pospeškom. Po času 5 s se njegova kotna hitrost poveča na 4,5 rad/s. Kolikšen je kotni pospešek? Kolikšen kót opiše radij v tem času? Kolikšen tangentni pospešek je potreben za takšno kroženje, če je polmer kroženja 20 cm?

$$\omega_0 = 0$$
$$\alpha = (\omega - \omega_0)/t = \omega/t = 4{,}5\ \mathrm{rad \cdot s^{-1}}/5\mathrm{s} = 0{,}9\ \mathrm{rad/s^2}$$
$$\varphi = \omega_0 t + \alpha t^2/2 = \alpha t^2/2 = 0{,}9\ \mathrm{rad \cdot s^{-2}} \cdot 25\ \mathrm{s^2}/2 =$$
$$= 11{,}25\ \mathrm{rad} = 645^\circ = 360^\circ + 285^\circ \ \text{(en obhod in približno tričetrt)}$$
$$a_t = r\alpha = 20\ \mathrm{cm} \cdot 0{,}9/\mathrm{s^2} = 18\ \mathrm{cm/s^2}$$

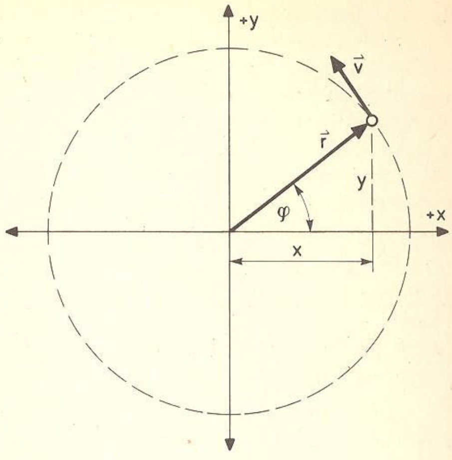
2. Ventilator se vrti s frekvenco $\nu_0 = 10/s$, ko v trenutku $t = 0$ izključimo motor. Od tedaj naprej se ventilator vrti enakomerno pojemajoče. Kolikšen je kotni pojemek, če se ventilator po 25 vrtljajih še vedno vrti s kotno hitrostjo $\omega = 5\pi$ rad/s? Po kolikšnem času (t) od izključitve motorja se ventilator ustavi?

Začetna kotna hitrost je $\omega_0 = 2\pi\nu_0 = 20\pi$ rad/s, po 25 vrtljajih (to je po kotu $\varphi = 25.2\pi$ rad) pa znaša ω. Velja (gl. 1.53):

$$\omega^2 = \omega_0^2 - 2\alpha\varphi \text{ (α je tu kotni pojemek)}$$
$$\alpha = (\omega_0^2 - \omega^2)/2\varphi = 3{,}8\pi/s^2$$

Ko se ventilator ustavi, je $\varphi = 0$ in:

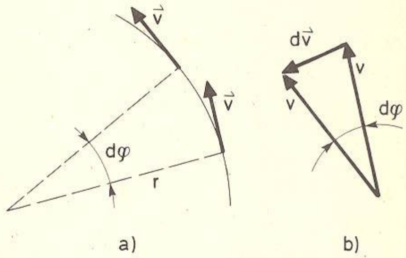
$$0 = \omega_0 - \alpha t \text{ ali } t = \omega_0/\alpha = 5{,}3 \text{ s}$$



Slika 1.35

Kotne količine kot vektorji

Pri vsakem gibanju je pomembna smer, zato so količine, ki opisujejo gibanje, vektorji. Tudi kotnim količinam φ, ω in α, s katerimi obravnavamo kroženje telesa, lahko pripišemo vektorsko naravo. Medtem ko je smer vektorjev **r**, **v** in **a** pri premem gibanju bolj ali manj očitna, pa se moramo o vektorskem značaju kotnih količin še dogovoriti.



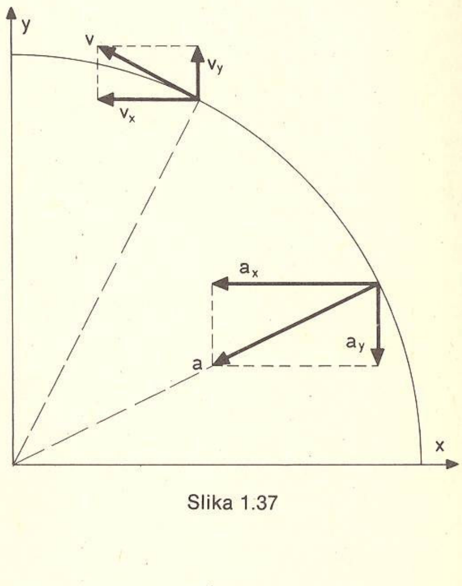
Slika 1.36

Usmerjenost ravnine kroženja (ravnine x–y) v prostoru izrazimo s smerjo vektorja kota $\boldsymbol{\varphi}$. Ta ima po dogovoru smer osi kroženja, to je pravokotno na ravnino kroženja (slika 1.38). Ali je $\boldsymbol{\varphi}$ usmerjen navzgor ali navzdol, ugotovimo s pomočjo desnosučnega vijaka. Če vijak zavrtimo v enaki smeri, kot v ravnini kroženja merimo kót φ, se premakne v smeri vektorja $\boldsymbol{\varphi}$. Velikost vektorja $\boldsymbol{\varphi}$ je kót φ, ki ga v ravnini kroženja opiše radij krožečega telesa.

Vektor kotne hitrosti $\boldsymbol{\omega}$ je dan z enačbo:

$$\boldsymbol{\omega} = d\boldsymbol{\varphi}/dt \qquad (1.53a)$$

kar pomeni, da ima smer spremembe vektorja $\boldsymbol{\varphi}$. Običajno je ravnina kroženja v prostoru stalna, zato ima $\boldsymbol{\varphi}$ ves čas enako smer, spreminja se (narašča) le njegova velikost. Zato ima vektor $\boldsymbol{\omega}$ enako smer kot $\boldsymbol{\varphi}$, to je smer krožilne osi (slika 1.39). Smer vektorja $\boldsymbol{\omega}$ ugotovimo z desnim vijakom ali z desno roko. Če zakrivljene prste desne roke usmerimo v loku vzdolž smeri kroženja, kaže iztegnjen palec smer vektorja $\boldsymbol{\omega}$.



Slika 1.37

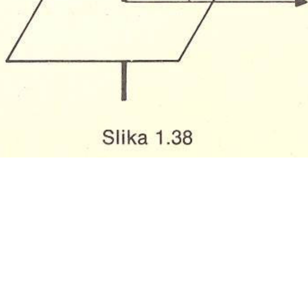
Tudi vektor kotnega pospeška:

$$\boldsymbol{\alpha} = d\boldsymbol{\omega}/dt \qquad (1.53b)$$

ima smer krožilne osi, in sicer enako smer kot $\boldsymbol{\omega}$, če je kroženje pospešeno (slika 1.40a), ter nasprotno smer, če je kroženje pojemajoče (slika 1.40b).

Obodno hitrost **v** krožečega telesa lahko izrazimo z vektorskim produktom:

$$\boxed{\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}} \qquad (1.53c)$$



Slika 1.38

kjer je **r** krajevni vektor telesa, merjen iz poljubne točke na vrtilni osi (gl. sliko 1.40c). S tem produktom je pravilno podana tako velikost (gl. 1.46) kot smer obodne hitrosti krožečega telesa.

Relativno gibanje

Uvodoma smo omenili, da je gibanje telesa odvisno od koordinatnega sistema, v katerem ga opazujemo. Lahko dobimo povsem drugačno sliko gibanja, če opazujemo iz drugačnega koordinatnega sistema. Zato mora biti vedno jasno, na kateri koordinatni sistem se opis nekega gibanja nanaša.

Opazovalec meri relativne oddaljenosti telesa (v različnih trenutkih) od osi koordinatnega sistema, v katerem opazuje gibanje telesa. Privzame, da njegov koordinatni sistem miruje. Tudi če se koordinatni sistem v resnici giblje glede na okolico, se z njim vred giblje tudi sam, zato tega gibanja ne upošteva.

Zgodi se, da gibanje telesa opazujejo različni opazovalci iz različnih koordinatnih sistemov, ki se različno gibljejo. Vsak opazovalec opazuje gibanje iz lastnega koordinatnega sistema (kot da bi ta miroval) in njegove ugotovitve se nanašajo na njegov sistem opazovanja. Problem nastopi, če je treba izjave posameznih opazovalcev o vrsti gibanja medsebojno primerjati.

Recimo, da neko gibanje opazujeta opazovalec iz »mirujočega« koordinatnega sistema (x, y – npr. na zemeljskih tleh) ter opazovalec iz koordinatnega sistema (x', y' – npr. na vlaku ali ladji), ki se glede na prvi sistem giblje translatorno s hitrostjo $\mathbf{v}_0$ (slika 1.41). Če telo za gibajočega se opazovalca miruje, pomeni, da se telo giblje enako kot koordinatni sistem, to je s hitrostjo $\mathbf{v}_0$ glede na mirujoči sistem. Mirujoči opazovalec v tem primeru trdi, da se telo giblje s hitrostjo $\mathbf{v}_0$. V splošnem se telo v gibajočem se sistemu giblje. Opazovalec v tem sistemu npr. izmeri hitrost $\mathbf{v}'$; to je **relativna hitrost** telesa glede na gibajoči se koordinatni sistem. Opazovalec iz oddaljenega mirujočega sistema pa mora tej hitrosti prišteti hitrost $\mathbf{v}_0$ gibajočega se sistema, da dobi hitrost $\mathbf{v}$, s katero se telo giblje v njegovem, mirujočem sistemu:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{v}_0 \qquad (1.54)$$

Velikost te hitrosti izračunamo iz enačbe:

$$v^2 = v'^2 + v_0^2 + 2v'v_0\cos\varphi \qquad (1.54a)$$

kjer je φ kót, ki ga oklepata relativna hitrost $\mathbf{v}'$ in hitrost $\mathbf{v}_0$.

Primeri:

1. Plavanje plavalca prek deroče reke smo obravnavali na strani 19. Gledano iz koordinatnega sistema, ki se giblje skupaj z deročo reko s stalno hitrostjo v_0 vzdolž brega, se plavalec giblje enakomerno s hitrostjo v_1 proti nasprotnemu bregu; ta hitrost je torej relativna hitrost (v') plavalca glede na gibajoči se sistem.

Opazovalec z brega pa hitrosti $\mathbf{v}_1$ prišteje hitrost reke $\mathbf{v}_0$ in dobi celotno hitrost $\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{v}_0$, s katero se plavalec giblje glede na breg. Ker je tu $\varphi = 90°$, je $v^2 = v_0^2 + v_1^2$, kar že poznamo.

2. Letalo leti s stalno hitrostjo v_0 v vodoravni smeri. V danem trenutku letalec odvrže bombo. Za opazovalca na tleh bomba pada po paraboli vodoravnega meta (gl. primer na strani 20). Kako pa vidi bombo padati letalec iz letala? Ker je stalno pod njim in ker se pospešeno oddaljuje od njega, se mu zdi, da bomba pada enakomerno pospešeno navpično navzdol kot pri navadnem prostem padu. Tu je $v' = gt$ v smeri navzdol, v_0 pa je vodoraven. Hitrost bombe glede na tla torej znaša: $v = (v_0^2 + g^2t^2)^{1/2}$.

3. Ladja plove proti severu s stalno hitrostjo v_0, ki jo želimo določiti. Če ni drugih pripomočkov, si lahko pomagamo s podatki o hitrosti vetra na ladji. Recimo, da mirujoči potnik na ladji ugotovi, da veter piha proti severu s hitrostjo $v_1 = 10$ m/s (zastava na jamboru plapola v smeri vožnje). Potem ladja podvoji hitrost plovbe proti severu; tedaj se smer vetra na ladji obrne – veter piha proti jugu s hitrostjo $v_2 = 5$ m/s. (Kako plapola zastava na jamboru). Zanima nas hitrost in smer pihanja vetra glede na obalo.

Veter piha s hitrostjo v proti severu. V prvem primeru je $\varphi = 0°$, v drugem pa 180°, zato velja (gl. 1.54a):

$$v^2 = v_1^2 + v_0^2 + 2v_1v_0 = v_2^2 + (2v_0)^2 - 2v_2 \cdot 2v_0 \text{ ali}$$
$$v = v_0 + v_1 = 2v_0 - v_2$$

Sledi: $v_0 = v_1 + v_2 = 15$ m/s ter $v = 2v_1 + v_2 = 25$ m/s.

4. Iz avtomobila, ki vozi po vodoravni cesti, opazujemo padajoče snežinke. Če avto vozi s hitrostjo $v_0 = 15$ m/s, vidimo snežinke padati nazaj pod kotom $\alpha_1 = 30°$ glede na navpičnico (slika 1.42a). Ko se hitrost avtomobila podvoji, se kót padanja snežink poveča na $\alpha_2 = 49°$ (slika 1.42b). S kolikšno hitrostjo (v) in v kateri smeri snežinke padajo glede na tla?

Snežinke padajo s hitrostjo $\mathbf{v}$ pod kotom α glede na navpičnico na tla, glede na vozeči avto pa z relativno hitrostjo $\mathbf{v}_1'$ v prvem primeru in s hitrostjo $\mathbf{v}_2'$ v drugem. Velja:

$$\mathbf{v}_1' + \mathbf{v}_0 = \mathbf{v} = \mathbf{v}_2' + 2\mathbf{v}_0$$

Ti enačbi napišemo posebej za navpične projekcije hitrosti in posebej za vodoravne. Za prvo enačbo dobimo:

$$v_1'\cos\alpha_1 = v\cos\alpha$$
$$v_1'\sin\alpha_1 = v\sin\alpha + v_0$$

Dobljeni enačbi delimo, da se neznani v_1' krajša:

$$\mathrm{tg}\alpha_1 = (v\sin\alpha + v_0)/(v\cos\alpha)$$

Za drugi primer, ko se v_0 poveča na $2v_0$ in α_1 na α_2, pa velja:

$$\mathrm{tg}\alpha_2 = (v\sin\alpha + 2v_0)/(v\cos\alpha)$$

Iz zadnjih dveh enačb izračunamo:

$$v\cos\alpha = v_0/(\mathrm{tg}\alpha_2 - \mathrm{tg}\alpha_1) = 26 \text{ m/s}$$
$$v\sin\alpha = v_0(2\mathrm{tg}\alpha_1 - \mathrm{tg}\alpha_2)/(\mathrm{tg}\alpha_2 - \mathrm{tg}\alpha_1) = 0{,}11$$

in dobimo:

$$\mathrm{tg}\alpha = 2\mathrm{tg}\alpha_1 - \mathrm{tg}\alpha_2 = 0{,}00 \text{ ter } \alpha = 0° \text{ ter } v = 26 \text{ m/s}$$

Snežinke padajo navpično navzdol s hitrostjo 26 m/s.

Relativni pospešek

Zgoraj smo obravnavali relativno hitrost v', to je hitrost, ki jo izmeri opazovalec v gibajočem se koordinatnem sistemu. Koliko se ta razlikuje od hitrosti **v**, ki jo izmeri opazovalec v »mirujočem« sistemu, je odvisno od hitrosti $\mathbf{v}_0$, s katero se koordinatni sistem giblje glede na mirujoči sistem. Velja: $\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{v}_0$.

Različni koordinatni sistemi se gibljejo z različnimi hitrostmi v različnih smereh. Če je hitrost $\mathbf{v}_0$ koordinatnega sistema stalna, to je če se **koordinatni sistem giblje enakomerno**, se koordinatni sistem imenuje **inercialni koordinatni sistem**. Inercialni koordinatni sistem se giblje premočrtno in ves čas enako hitro, npr. letalo, ki leti v ravni črti s stalno hitrostjo, vlak na ravni progi itd. Hitrost je poljubna (lahko tudi zelo velika), vendar se ne sme spreminjati. Koordinatni sistem je **neinercialen**, če se njegova **hitrost spreminja s časom**; sistem se npr. giblje pospešeno ali pojemajoče, kroži ali se vrti in podobno. Zemlja je neinercialni koordinatni sistem tako zaradi dnevnega vrtenja okrog lastne osi kot zaradi letnega kroženja okrog Sonca. Vlak na ravnem tiru je na začetku vožnje, ko pospešuje, neinercialni koordinatni sistem, ravno tako na koncu, ko se ustavlja; na vmesnem delu poti, ko vozi enakomerno, pa je inercialni koordinatni sistem. Kakšen koordinatni sistem je vlak, ko vozi skozi ovinek? Kaj pa dvigalo med dviganjem in spuščanjem?

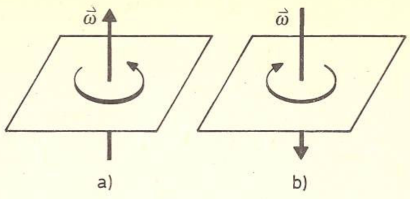
Poleg relativne hitrosti nas zanima tudi **relativni pospešek**. Kolikšen pospešek **a**$'$ izmeri opazovalec v gibajočem se koordinatnem sistemu in kako se ta razlikuje od pospeška **a**, ki ga za isto telo izmeri opazovalec v mirujočem sistemu? Očitno je razlika med njima odvisna od pospeška $\mathbf{a}_0$. gibajočega se koordinatnega sistema. Podobno enačbi (1.54) za relativno hitrost napišemo tudi enačbo za relativni pospešek:

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}' + \mathbf{a}_0 \qquad (1.55)$$

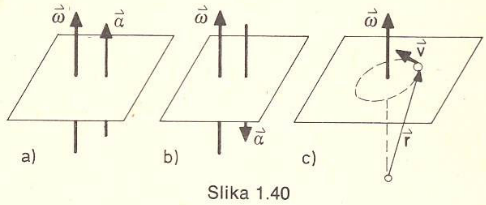
V zvezi z relativnim pospeškom izstopajo inercialni koordinatni sistemi, ki se gibljejo brez pospeška: $\mathbf{a}_0 = 0$. Zanje torej velja: $\mathbf{a}' = \mathbf{a}$. **Pospešek telesa je v vseh inercialnih koordinatnih sistemih enak.** Ne glede na to, iz katerega inercialnega koordinatnega sistema merimo pospešek, dobimo enak rezultat. Vsi inercialni koordinatni sistemi (neodvisno od njihove hitrosti) so, kar se pospeškov tiče, enakovredni. Zato tudi ni pomembno, s kolikšno hitrostjo se giblje koordinatni sistem, v katerem opazujemo gibanje, dokler je ta stalna. Razlika pa je bistvena, če se hitrost koordinatnega sistema spreminja, to je če je koordinatni sistem neinercialen.

Primer:

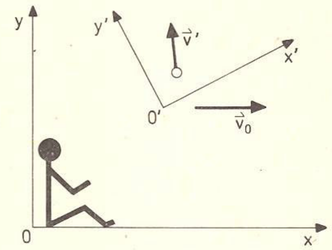
Opazovalec v dvigalu, katero prosto pada (recimo, da se pretrga nosilna vrv dvigala), spusti telo in opazuje njegovo padanje k tlom dvigala. Telo pada glede na Zemljo (ki jo imamo za mirujoči koordinatni sistem) s pospeškom prostega pada: $a = g$. Z enakim pospeškom pada tudi dvigalo, to je gibajoči se koordinatni sistem: $a_0 = g$. Opazovalec v dvigalu torej trdi, da ima prosto telo v dvigalu pospešek $a' = a - a_0 = g - g = 0$. Spuščeno telo se ne spusti k tlom dvigala, kot da nanj teža ne bi delovala, »lebdi« v zraku. Opazovalcu v



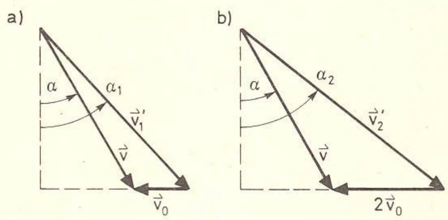
Slika 1.39



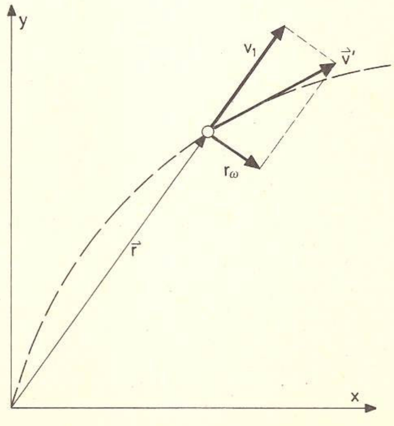
Slika 1.40



Slika 1.41



Slika 1.42



Slika 1.43

padajočem dvigalu se zdi, da so vsa telesa v dvigalu (skupaj z njim samim) v breztežnem stanju. Zunanji opazovalec pa ve, da to ne drži. Telo v resnici prosto pada, toda enako padajo tudi tla dvigala, zato se razdalja med telesom in tlemi ne spreminja – telo »lebdi« nad tlemi. Podobne razmere so v vesoljski ladji, ki kroži okrog Zemlje. Ladja (in vsa telesa v njej) sicer prosto pada, vendar se obenem giblje tudi v vodoravni smeri, tako da kljub prostemu padanju ne pade na tla, ampak se giblje okrog Zemlje.

Vrtenje koordinatnega sistema

Translatorno gibanje neinercialnega koordinatnega sistema ne povzroča posebnih težav. Ker se vsak del koordinatnega sistema giblje z enakim pospeškom $\mathbf{a}_0$, je razlika med pospeškoma $\mathbf{a}'$ in $\mathbf{a}$ ne glede na lego telesa dana z enačbo (1.55): $\mathbf{a} = \mathbf{a}' + \mathbf{a}_0$. Bolj se je treba potruditi, če se koordinatni sistem vrti, torej če moramo upoštevati radialni pospešek koordinatnega sistema, ki pa je za različne dele koordinatnega sistema različen.

Kot primer vrtečega se koordinatnega sistema vzemimo krožno ploščo, ki se vrti okrog simetrijske osi s stalno kotno hitrostjo ω. Na ploščo položimo telo. Njegovo gibanje opazujeta opazovalec, ki sedi na plošči in se skupaj z njim vrti, ter zunanji – mirujoči opazovalec. V čem se njuni ugotovitvi o gibanju telesa razlikujeta?

Najprej si mislimo, da telo na plošči miruje. Opazovalec na plošči trdi, da telo miruje, da sta njegova relativna hitrost in pospešek nič: $v' = 0$ in $a' = 0$. Zunanji opazovalec pa vidi, da se telo vrti na oddaljenosti r od osi s stalno kotno hitrostjo ω, da se torej giblje z obodno hitrostjo $v = r\omega$ in z radialnim pospeškom $a = r\omega^2$.

Pri drugem poskusu zalučamo telo s stalno hitrostjo v_1 vzdolž radija proč od osi vrtenja. Zunanji opazovalec zatrjuje, da se telo giblje enakomerno s stalno hitrostjo v_1 radialno navzven, plošča pod njo pa se vrti. Pospešek telesa v mirujočem sistemu je torej nič: $a = 0$.

Kakšno gibanje pa zazna opazovalec na plošči? Ali drugače, kakšno tirnico zariše telo na plošči? Ploščo npr. počrnimo s sajami, tako da telo pusti za sabo sled, ki jo nato analiziramo.

Med časom t, ko se telo oddalji od osi za $r = v_1 t$, se plošča zasuče za kót $\varphi = \omega t$. Obliko tirnice, ki jo pri tem telo zariše na plošči, najlažje ugotovimo, če si mislimo, da plošča miruje in da se radij vektor $\mathbf{r}$, vzdolž katerega telo potuje s stalno hitrostjo v_1, suče s kotno hitrostjo ω v nasprotni smeri, kot se zares vrti plošča. Opazovalec na plošči »vidi«, da se telo ne le oddaljuje od osi, ampak obenem tudi kroži s kotno hitrostjo ω, tako da je:

$$r = v_1 t = (v_1/\omega)\varphi$$

Oddaljenost kroglice od osi se povečuje premo sorazmerno z zasukom φ plošče. Opazovalec na plošči vidi, da je hitrost telesa na plošči (to je relativna hitrost $\mathbf{v}'$) sestavljena iz hitrosti v_1 v smeri radija in tangentne hitrosti $r\omega$, to je:

$$v' = \sqrt{v_1^2 + (r\omega)^2} \quad \text{(Slika 1.43)} \qquad (1.56)$$

Smer te relativne hitrosti je tangentna na tirnico, ki je zarisana na plošči.

Nekoliko bolj se je treba potruditi, da dobimo relativni pospešek $\mathbf{a}'$ telesa na plošči. Tega razstavimo na normalni pospešek $\mathbf{a}_n$, ki kaže v smeri radija k osi, in na komponento $\mathbf{a}_p$ v smeri pravokotno na radij (slika 1.44). Radialni pospešek $\mathbf{a}_n$ suka smer obodne hitrosti $r\omega$, zato je usmerjen k osi in enak $r\omega \cdot \omega = r\omega^2$ (gl. 1.47). Pravokotna komponenta relativnega pospeška ($\mathbf{a}_p$) je sestavljena iz dveh deležev: zaradi spremembe velikosti obodne hitrosti $r\omega$ odpade delež $d(r\omega)/dt = \omega dr/dt = \omega v_1$, zaradi sukanja smeri radialne hitrosti $\mathbf{v}_1$ pa delež $v_1\omega$, to je skupaj: $a_p = 2\omega v_1$. Celoten relativni pospešek torej znaša:

$$a' = \sqrt{(r\omega^2)^2 + (2\omega v_1)^2} \qquad (1.57)$$

Po tem uvodu si oglejmo, kako se gibanje telesa v vrtečem se koordinatnem sistemu obravnava v splošnem – v vektorski obliki. Inercialni koordinatni sistem (x, y, z) miruje, neinercialni sistem (x', y', z') pa se vrti s kotno hitrostjo $\boldsymbol{\omega}$ npr. okrog osi z'. Zaradi matematične preglednosti vzamemo, da koordinatni izhodišči obeh sistemov sovpadata $(0 = 0')$, ravno tako tudi osi z in z'. V začetku $(t = 0)$ se osi obeh koordinatnih sistemov pokrivajo ($\mathbf{e}_x = \mathbf{e}_x'$, $\mathbf{e}_y = \mathbf{e}_y'$, $\mathbf{e}_z = \mathbf{e}_z'$). Enotini vektorji $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$ in $\mathbf{e}_z$ mirujočega koordinatnega sistema so konstantni, vektorji $\mathbf{e}_x'$, $\mathbf{e}_y'$ in $\mathbf{e}_z'$ pa spreminjajo smer. Po času t se osi x' in y' zasučeta za kót $\varphi = \omega t$, zato je (gl. sliko 1.45):

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_x' &= \mathbf{e}_x\cos(\omega t) + \mathbf{e}_y\sin(\omega t) \\ \mathbf{e}_y' &= -\mathbf{e}_x\sin(\omega t) + \mathbf{e}_y\cos(\omega t) \\ \mathbf{e}_z' &= \mathbf{e}_z \end{aligned} \qquad (1.58)$$

Vrtenje koordinatnega sistema x', y', z' okrog osi z' najmočneje vpliva na relativno gibanje telesa v ravnini $x' - y'$, zato opazujemo gibanje telesa v tej ravnini; vzamemo $z = z' = 0$. Krajevni vektor $\mathbf{r}(t)$ *telesa P* v ravnini $x' - y'$ oziroma v ravnini $x - y$ je v mirujočem koordinatnem sistemu izražen s komponentama $x(t)$ in $y(t)$, v vrtečem se koordinatnem sistemu pa s komponentama $x'(t)$ in $y'(t)$, zato velja (gl. sliko 1.46):

$$\mathbf{r} = x\,\mathbf{e}_x + y\,\mathbf{e}_y = x'\,\mathbf{e}_x' + y'\,\mathbf{e}_y' \qquad (1.59)$$

Vektorja hitrosti $\mathbf{v}$ in pospeška $\mathbf{a}$ telesa v mirujočem koordinatnem sistemu sta enostavno izražena z enačbama 1.3 in 1.7 (ker so enotini vektorji $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$ in $\mathbf{e}_z$ konstantni):

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= d\mathbf{r}/dt = (dx/dt)\mathbf{e}_x + (dy/dt)\mathbf{e}_y = v_x\mathbf{e}_x + v_y\mathbf{e}_y \\ \mathbf{a} &= d\mathbf{v}/dt = (d^2x/dt^2)\mathbf{e}_x + (d^2y/dt^2)\mathbf{e}_y = a_x\mathbf{e}_x + a_y\mathbf{e}_y \end{aligned} \qquad (1.60)$$

Podoben izraz lahko napišemo tudi za relativno hitrost $\mathbf{v}'$ in relativni pospešek $\mathbf{a}'$, le da uporabimo količine, ustrezne za vrteči se neinercialni koordinatni sistem:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}' &= (dx'/dt)\mathbf{e}_x' + (dy'/dt)\mathbf{e}_y' \\ \mathbf{a}' &= (d^2x'/dt^2)\mathbf{e}_x' + (d^2y'/dt^2)\mathbf{e}_y' \end{aligned} \qquad (1.61)$$

Zanima nas zveza med $\mathbf{v}$ in $\mathbf{v}'$ ter med $\mathbf{a}$ in $\mathbf{a}'$. Hitrost $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$ izrazimo s komponentami v vrtečem se koordinatnem sistemu (gl. 1.59) in dobimo:

$$\mathbf{v} = (dx'/dt)\mathbf{e}_x' + (dy'/dt)\mathbf{e}_y' + x'(d\mathbf{e}_x'/dt) + y'(d\mathbf{e}_y'/dt)$$

Enotina vektorja $\mathbf{e}'_x$ in $\mathbf{e}'_y$ zadoščata enačbama (1.58), zato velja:

$$d\mathbf{e}'_x/dt = -\,\omega\sin(\omega t)\,\mathbf{e}_x + \omega\cos(\omega t)\,\mathbf{e}_y = \omega\mathbf{e}'_y$$
$$d\mathbf{e}'_y/dt = -\,\omega\cos(\omega t)\,\mathbf{e}_x - \omega\sin(\omega t)\,\mathbf{e}_y = -\,\omega\mathbf{e}'_x$$

in dobimo:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \omega x'\mathbf{e}'_y - \omega y'\mathbf{e}'_x$$

Ker je vektor kotne hitrosti $\boldsymbol{\omega}$ v smeri osi z' ($\boldsymbol{\omega} = \omega\mathbf{e}'_z$) in ker je vektorski produkt $\mathbf{e}'_z \times \mathbf{e}'_x = \mathbf{e}'_y$ ter $\mathbf{e}'_z \times \mathbf{e}'_y = -\mathbf{e}'_x$, lahko zadnja člena na desni strani zgornje enačbe izrazimo z vektorskim produktom $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$, tako da je:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \qquad (1.62)$$

Dobljeni rezultat se ujema z rezultatom (1.56), ki smo ga izpeljali za poseben primer, da se telo v mirujočem sistemu giblje s stalno hitrostjo v_1 v radialni smeri, to je za $\mathbf{v} = v_1\,(\mathbf{r}/r)$.

Zvezo med absolutnim in relativnim pospeškom izpeljemo takole:

$$\begin{aligned}
\mathbf{a} &= d\mathbf{v}/dt = d\mathbf{v}'/dt + \omega d(x'\mathbf{e}'_y - y'\mathbf{e}'_x)/dt = \\
&= (d^2x'/dt^2)\mathbf{e}'_x + (d^2y'/dt^2)\mathbf{e}'_y + (dx'/dt)(d\mathbf{e}'_x/dt) + \\
&+ (dy'/dt)(d\mathbf{e}'_y/dt) + \omega(dx'/dt)\mathbf{e}'_y + \omega x'(d\mathbf{e}'_y/dt) - \\
&- \omega(dy'/dt)\mathbf{e}'_x - \omega y'(d\mathbf{e}'_x/dt) = \\
\mathbf{a} &= \mathbf{a}' + 2\omega(dx'/dt)\mathbf{e}'_y - 2\omega(dy'/dt)\mathbf{e}'_x - \omega^2 x'\mathbf{e}'_x - \omega^2 y'\mathbf{e}'_y \\
\mathbf{a} &= \mathbf{a}' + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' - \omega^2\mathbf{r} \qquad (1.63)
\end{aligned}$$

ali obrnjeno:

$$\mathbf{a}' = \mathbf{a} + 2\mathbf{v}' \times \boldsymbol{\omega} + \omega^2\mathbf{r} \qquad (1.63a)$$

Opazovalec v vrtečem se koordinatnem sistemu mora k pospešku $\mathbf{a}$, ki ga izmeri zunanji, mirujoči opazovalec, dodati še člena $2\mathbf{v}' \times \boldsymbol{\omega}$ in $\omega^2\mathbf{r}$, da dobi relativni pospešek $\mathbf{a}'$, kakršen se kaže v njegovem koordinatnem sistemu. Prvi dodatek ($2\mathbf{v}' \times \boldsymbol{\omega}$) se imenuje Coriolisov pospešek $\mathbf{a}_c$, drugi ($\omega^2\mathbf{r}$) pa **centrifugalni pospešek**.

$$\mathbf{a}_{cf} = \omega^2\mathbf{r} \qquad (1.64)$$

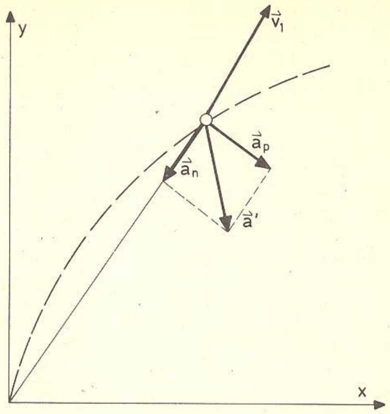
Zadnji je usmerjen proč od osi vrtenja.

Coriolisov pospešek

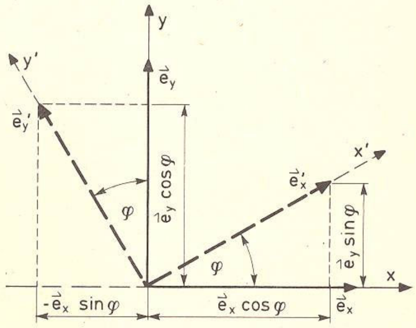
je tisti del relativnega pospeška v vrtečem se koordinatnem sistemu, ki je odvisen od relativne hitrosti; definiran je z enačbo (gl. zgoraj):

$$\boxed{\mathbf{a}_c = 2\mathbf{v}' \times \boldsymbol{\omega}} \qquad (1.65)$$

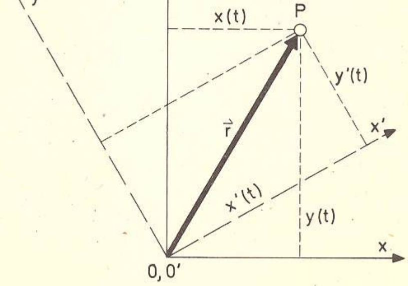
Coriolisov pospešek upoštevamo le, če se telo v vrtečem se koordinatnem sistemu giblje (če je $v' \neq 0$). Na »mirujoče« telo (to je za $v' = 0$) Coriolisov pospešek »ne deluje«. Ravno tako ni tega pospeška, če se telo giblje vzdolž rotacijske osi, torej če je $\mathbf{v}'$ vzporeden kotni hitrosti $\boldsymbol{\omega}$ (vektorski produkt $\mathbf{v}' \times \boldsymbol{\omega}$ je tedaj nič), tako da je oddaljenost telesa od osi ves čas enaka. Coriolisov pospešek nastopi, če se telo ali približuje osi ali oddaljuje od nje, kar pomeni, če se giblje skozi mesta, ki imajo zaradi vrtenja koordinatnega sistema različne obodne hitrosti. Coriolisov pospešek je naj-



Slika 1.44



Slika 1.45



Slika 1.46

večji pri telesih, ki se gibljejo v ravnini, pravokotno na os vrtenja. Smer Coriolisovega pospeška je pravokotna tako na smer relativne hitrosti **v**′ kot na smer rotacijske osi (**ω**), in sicer kaže v desno, če gledamo v smeri relativne hitrosti **v**′ (slika 1.47).

Učinek Coriolisovega pospeška nazorno pojasnimo takole: Recimo, da se telo giblje proti osi (slika 1.47). V začetku je telo še daleč od osi in ima razmeroma veliko obodno hitrost v desno (enako kot koordinatni sistem na tej oddaljenosti). Nato se giblje skozi mesta koordinatnega sistema, ki imajo vse manjšo obodno hitrost v desno, samo pa še obdrži prvotno veliko obodno hitrost. Torej telo »prehiteva« bližnja mesta koordinatnega sistema (tal) v desno. To relativno zavijanje telesa v desno popiše Coriolisov pospešek.

Poglejmo, kako telo prosto pada v navpičnem jašku, ki je npr. skopan na ekvatorju (slika 1.48). Kamen spustimo nad sredino jaška. Pričakovali bi, da bo med padanjem ves čas nad sredino jaška in da bo padel na sredino jaškovega dna. Pa ni tako. Kamen pade na dno vzhodneje od sredine. Če je jašek dovolj globok, se zgodi, da kamen zadene ob vzhodno steno jaška, še preden doseže dno. Ta odklon od navpičnega padanja je posledica vrtenja Zemlje; razložimo ga s Coriolisovim pospeškom.

V začetku (ko ga spustimo) se kamen giblje (enako kot zemeljska tla) proti vzhodu z vodoravno (obodno) hitrostjo $R\omega$ (R je polmer Zemlje = 6400 km, ω je kotna hitrost dnevnega vrtenja Zemlje = $2\pi/24\text{h} = 7{,}3.10^{-5}/\text{s}$). Navpična projekcija hitrosti (v'_y) se med pospešenim padanjem enakomerno povečuje: $v'_y = gt$, vodoravna pa ostaja stalna. Stena navpičnega jaška se na globini y giblje proti vzhodu z obodno hitrostjo $\omega(R-y)$, torej kamen na globini y prehiteva steno z relativno hitrostjo v'_x, ki jo določimo s Coriolisovim pospeškom $a_c = 2v'_y\omega = 2\omega gt = \mathrm{d}v'_x/dt$ ter $\mathrm{d}v'_x = 2\omega gt\mathrm{d}t$ oziroma $v'_x = \omega gt^2 = \mathrm{d}x'/\mathrm{d}t$. Vzhodni premik kamna na globini y znaša: $x' = \omega gt^3/3$. V prvem približku (če zanemarimo centrifugalni pospešek v primerjavi s težnim) lahko zapišemo: $y = gt^2/2$ in dobimo:

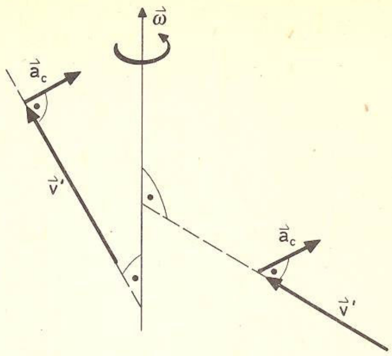
$$x' = (\omega/3)\sqrt{8y^3/g}$$

Za $y = 100$ m dobimo $x' = 2{,}2$ cm.

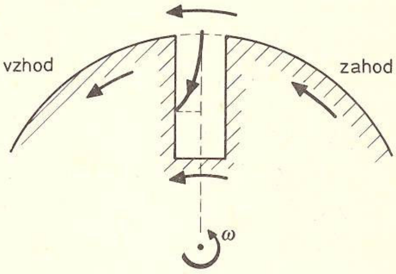
Gibanje teles glede na zemeljsko površje, posebno gibanje velikih razsežnosti (ki segajo npr. čez kontinente) pravilno pojasnimo, če upoštevamo Coriolisov pospešek. Pasatni vetrovi, ki na severni polobli pihajo proti jugu (proti ekvatorju), se zaradi Coriolisovega pospeška odklanjajo proti zahodu (slika 1.49), saj prihajajo na območja, ki imajo večjo vzhodno obodno hitrost kot sami, zato zaostajajo – se odklanjajo proti zahodu. Podobno se odklanjajo južni pasatni vetrovi, ki se z južne poloble približujejo ekvatorju.

Anticiklon (A) so vetrovi na območju visokega zračnega tlaka. Ako se Zemlja ne bi vrtela, bi se zračni tokovi širili radialno navzven iz centra A visokega zračnega tlaka (črtkane črte na sliki 1.50a). Vrtenje Zemlje pa »povzroči« Coriolisov pospešek, zaradi katerega vetrovi zavijejo bolj v desno (polne črte na sliki 1.50a). Ciklonski vetrovi se širijo proti središču (C) nizkega zračnega tlaka (črtkane črte na sliki 1.50b), zaradi Coriolisovega pospeška pa se odklanjajo v desno (polne črte na sliki 1.50b) in tvorijo značilen vrtinec.

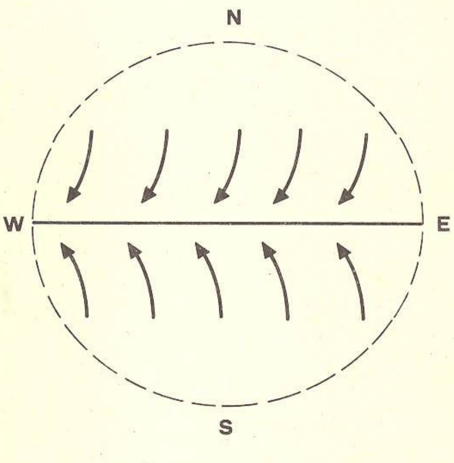
Coriolisov pospešek je posledica vrtenja Zemlje. Z opazovanjem gibanja, ki je v zvezi s Coriolisovim pospeškom, lahko torej sklepamo o vrtenju Zemlje, npr. merimo njeno kotno hitrost. Lep primer te vrste je **Foucaultovo nihalo,** to je zelo dolgo nitno nihalo z zelo dolgim nihajnim časom (v nekaterih naravoslovnih muzejih sega to nihalo skozi vsa nadstropja od strehe do tal). Nihalo niha z dolgimi nihaji. Zaradi vrtenja Zemlje se ravnina nihanja navidezno (glede na zemeljska tla) suče v smeri sukanja urnega kazalca s kotno hitrostjo $\omega\sin\varphi$, pri čemer je ω kotna hitrost dnevnega vrtenja Zemlje, φ pa geografska širina kraja. To sukanje najhitreje dojamemo, če je nihalo na severnem polju ($\varphi = 90°$). Nihajna ravnina nihala je tedaj ves čas enaka, toda Zemlja pod nihalom se vrti s kotno hitrostjo ω (v obratni smeri kot urni kazalec), zato opazovalec na tleh vidi, da se nihajna ravnina nihala vrti v smeri vrtenja urinega kazalca s kotno hitrostjo ω. Na ekvatorju ($\varphi = 0°$) se nihajna ravnina Fuucaultovega nihala ne vrti glede na zemeljska tla. Za tla na vmesni geografski širini φ razstavimo vektor kotne hitrosti **ω** vrtenja Zemlje na navpično komponento $\omega\sin\varphi$ (pravokotno na tla) in na komponento $\omega\cos\varphi$ v smeri zemeljske vrtilne osi. Komponenta $\omega\cos\varphi$ je kotna hitrost, s katero se vzhodno obzorje spušča, zahodno pa dviga, oziroma s katero se nebesni svod nad nami pomika od vzhoda proti zahodu. Za Foucaultovo nihalo je pomembna navpična komponenta kotne hitrosti – $\omega\sin\varphi$. S to kotno hitrostjo se namreč tla na geografski širini φ vrtijo okrog navpične osi (pravokotno na tla) v obratni smeri vrtenja urnega kazalca (velja za severno poloblo).



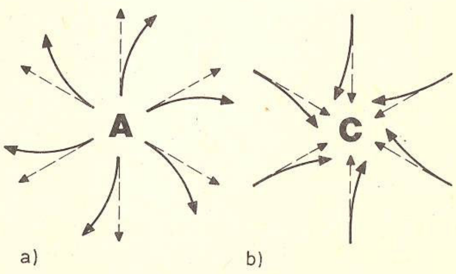
Slika 1.47



Slika 1.48



Slika 1.49



Slika 1.50