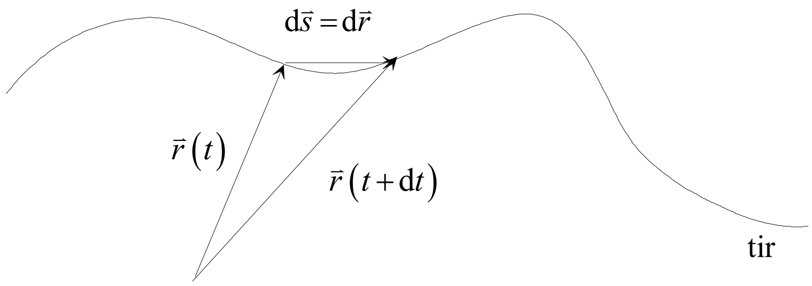
Izrek o kinetični in potencialni energiji

Točkasto telo

Izračunajmo delo (A) rezultante zunanjih sil ($\vec{F}$), ki deluje na točkasto telo z maso m:

$$A = \int \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = \int \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} \ , \tag{1}$$

kjer je $\mathrm{d}\vec{s}$ vektor premika



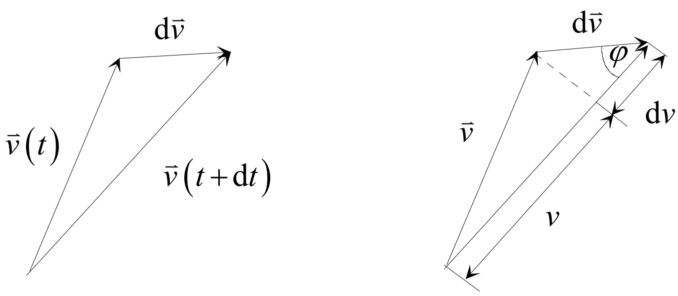
Uporabimo II. Newtonov zakon za gibanje točkastega telesa:

$$\vec{F} = m\,\vec{a} = m \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} \, . \tag{2}$$

Enačbo (2) vstavimo v enačbo (1) in dobimo:

$$A = \int \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int m\,\vec{a} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int m \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int m \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} \cdot \vec{v}\,\mathrm{d}t = \int m\,\mathrm{d}\vec{v} \cdot \vec{v} = m \int \mathrm{d}\vec{v} \cdot \vec{v} \ , \tag{3}$$

kjer smo uporabili definiciji $\mathrm{d}\vec{r} = \vec{v}\,\mathrm{d}t$, $\mathrm{d}\vec{v} = \vec{a}\,\mathrm{d}t$. V nadaljevanju najprej zapišimo malo drugače skalarni produkt $\vec{v} \cdot \mathrm{d}\vec{v}$:



$$|\vec{v}| = v = (\vec{v} \cdot \vec{v})^{\frac{1}{2}}$$

$$|\mathrm{d}\vec{v}| \neq \mathrm{d}(|\vec{v}|) = \mathrm{d}v$$

$$\vec{v} \cdot \mathrm{d}\vec{v} = |\vec{v}| \underbrace{|\mathrm{d}\vec{v}| \cos\varphi}_{\mathrm{d}v} = v\,\mathrm{d}v \tag{4a}$$

ali:

$$\mathrm{d}\left(\vec{v}\cdot\vec{v}\right)=\mathrm{d}\vec{v}\cdot\vec{v}+\vec{v}\cdot\mathrm{d}\vec{v}=2\vec{v}\cdot\mathrm{d}\vec{v},$$

od koder sledi:

$$\vec{v}\cdot\mathrm{d}\vec{v}=\frac{1}{2}\mathrm{d}\left(\vec{v}\cdot\vec{v}\right)=\frac{1}{2}\mathrm{d}\left(v^2\right)=v\mathrm{d}v \tag{4b}$$

Ob upoštevanju enačbe (4a), oziroma (4b) iz enačbe (3) sledi:

$$A=m\int\vec{v}\cdot d\vec{v}=m\int_{v_1}^{v_2}v\,\mathrm{d}v=\frac{1}{2}mv^2\Big|_{v_1}^{v_2}=\frac{1}{2}mv_2^2-\frac{1}{2}mv_1^2. \tag{5}$$

Definiramo kinetično energijo točkastega telesa:

$$\boxed{W_k=\frac{1}{2}mv^2}, \tag{6}$$

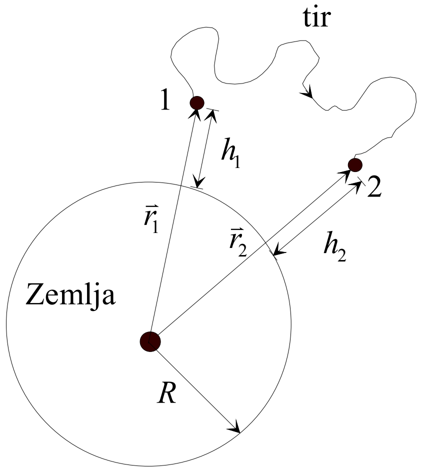
torej:

$$\boxed{A=\int\vec{F}\cdot d\vec{s}=\Delta W_k}. \tag{7}$$

Relacijo (7) imenujemo izrek o kinetični energiji za točkasto telo.

V nadaljevanju rezultanto vseh zunanji sil razdelimo na rezultanto vseh ostalih zunanjih sil razen sile teže $\left(\vec{F}_{\mathrm{ost}}\right)$ in silo teže (gravitacijsko silo) $\vec{F}_g$:

$$\vec{F}_g=-G\frac{mM_z}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}, \tag{8}$$



R = polmer Zemlje
h = nadmorska višina

kjer je G gravitacijska konstanta, M_z masa Zemlje in r razdalja od središča Zemlje do točkastega telesa z maso m. Torej:

$$\vec{F} = \vec{F}_{ost} + \vec{F}_g \ , \tag{9}$$

oziroma:

$$A = \int \left(\vec{F}_{ost} + \vec{F}_g \right) \cdot d\vec{s} = \int \left(\vec{F}_{ost} + \vec{F}_g \right) \cdot d\vec{r} = \Delta W_k \ . \tag{10}$$

Iz enačbe (10) sledi:

$$A_{ost} = \int \vec{F}_{ost} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \Delta W_k - \int \vec{F}_g \cdot \mathrm{d}\vec{r} \ . \tag{11}$$

Zadnji člen v enačbi (11) predstavlja negativno delo sile teže. V nadaljevanju negativno delo sile teže ob upoštevanju enačbe (8) izrazimo malce drugače.

$$\begin{aligned} -\int \vec{F}_g \cdot \mathrm{d}\vec{r} &= \int G \frac{m M_z}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = G m M_z \int \frac{1}{r^3} \vec{r} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \\ &= G m M_z \int \frac{1}{r^3} r \, \mathrm{d}r = G m M_z \int_{r_1}^{r_2} \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{r}^2} = -G m M_z \left(-\frac{1}{r} \right) \Big|_{r_1}^{r_2} = \\ &= -G \frac{m M_z}{r} \Big|_{r_1}^{r_2} = -G \frac{m M_z}{r_2} - \left(-G \frac{m M_z}{r_1} \right) . \end{aligned} \tag{12}$$

Če definiramo gravitacijsko potencialno energijo točkaste mase m kot:

$$\boxed{W_p = -G \frac{m M_z}{r}} \ , \tag{13}$$

lahko zapišemo enačbo (12) v obliki:

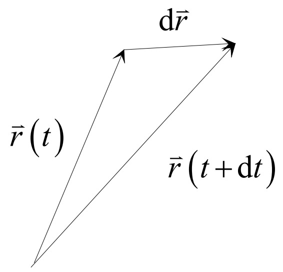
$$-\int \vec{F}_g \, \mathrm{d}\vec{r} = W_{p,2} - W_{p,1} = \Delta W_p \ , \tag{14}$$

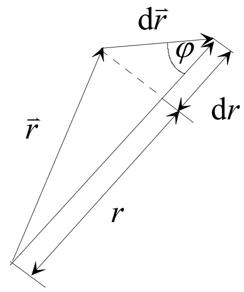
enačbo (11) pa kot:

$$\boxed{A_{ost} = \Delta W_k + \Delta W_p} \ . \tag{15}$$

Enačbo (15) imenujemo izrek o kinetični in potencialni energiji za točkasto telo.

Pri izpeljavi enačbe (12) smo upoštevali:





$$\left|\vec{r}\right| = r = \left(\vec{r}\cdot\vec{r}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\left|d\vec{r}\right| \neq d\left(\left|\vec{r}\right|\right) = dr$$

$$\vec{r}\cdot d\vec{r} = \left|\vec{r}\right|\underbrace{\left|d\vec{r}\right|\cos\varphi}_{dr} = r\,dr \tag{16a}$$

ali

$$d\left(\vec{r}\cdot\vec{r}\right) = d\vec{r}\cdot\vec{r} + \vec{r}\cdot d\vec{r} = 2\,\vec{r}\cdot d\vec{r}\,,$$

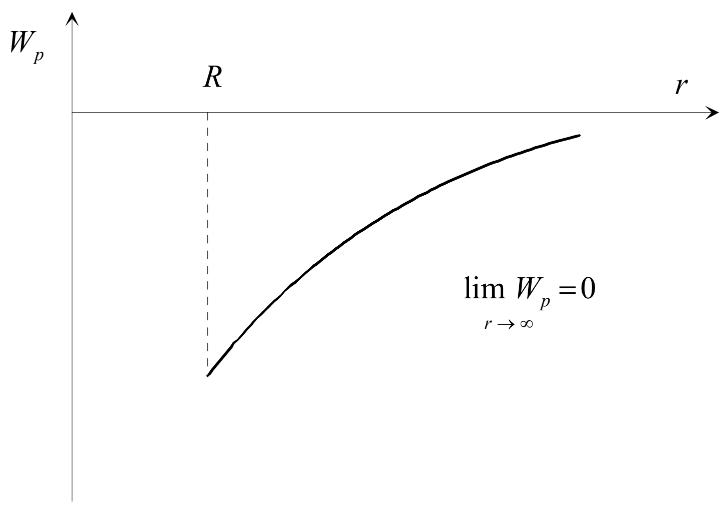
od koder sledi:

$$\vec{r}\cdot d\vec{r} = \frac{1}{2}d\left(\vec{r}\cdot\vec{r}\right) = \frac{1}{2}d\left(r^2\right) = r\,dr \tag{16b}$$

Narišimo odvisnost gravitacijske potencialne energije točkastega telesa od razdalje od središča Zemlje

$$r = R + h\;, \tag{17}$$

kjer je R polmer Zemlje, h pa nadmorska višina.



Gravitacijsko potencialno energijo lahko za majhne nadmorske višine h razvijamo v vrsto:

$$W_p = -G\frac{mM_z}{r} = -G\frac{mM_z}{(R+h)} = -G\frac{mM_z}{R\left(1+\frac{h}{R}\right)} = -G\frac{mM_z}{R}\left(1-\frac{h}{R}+\frac{h^2}{R^2}-\cdots\right) \quad . \tag{18}$$

Iz enačbe (18) vidimo, da za zelo majhne nadmorske višine $\frac{h}{R}\to 0$ velja približno zveza:

$$W_p \cong -G\frac{mM_z}{R}\left(1-\frac{h}{R}\right) = -G\frac{mM_z}{R} + G\frac{M_z}{R^2}mh \ . \tag{19}$$

Pri konstantni vrednosti mase m in upoštevanju definicije gravitacijskega pospeška pri morski gladini

$$g_0 = G\frac{M_z}{R^2} \cong 9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}} ,$$

lahko zapišemo enačbo (19) v obliki:

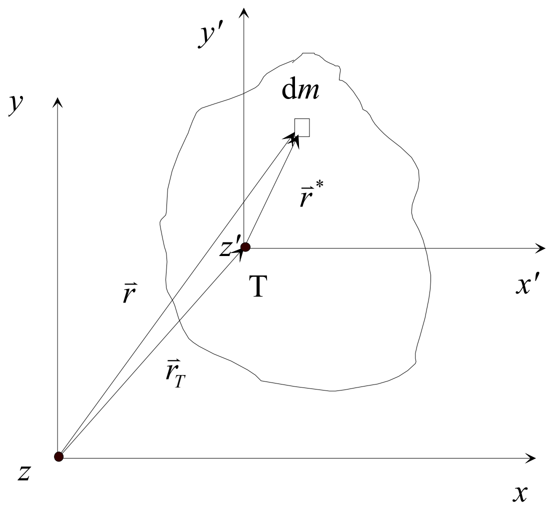
$$\boxed{W_p = m\,g_0\,h} \ . \tag{20}$$

Konstantni člen $\frac{-G\,m\,M_z}{R}$ v enačbi (19) smo izpustili, saj v enačbi (15) nastopa le razlika potencialnih energij.

Togo telo

Dimenzije togih teles, ki jih obravnavamo so veliko manjše od polmera Zemlje, zato je gravitacijski pospešek znotraj telesa praktično konstanten v vseh delih telesa. Zato sta izraza za gravitacijsko potencialno energijo (13) in (20), ki smo ju izpeljali za točkasto telo, dobra tudi za toga telesa končnih razsežnosti.

Drugače pa je s kinetično energijo togega telesa, ki je v splošnem ne moremo opisati z izrazom $\frac{1}{2}mv^2$ (razen, če se togo telo giblje po premici). Narišimo shematsko togo telo v kartezičnem koordinatnem sistemu (x, y, z). V težišče togega telesa (T) postavimo izhodišče lokalnega koordinatnega sistema (x', y', z'), kjer predpostavimo, da so koordinatne osi laboratorijskega inercialnega koordinatnega sistema (x, y, z) paroma vzporedne z osmi lokalnega težiščnega sistema (x', y', z').



$\vec{r}$ ≡ krajevni vektor do majhnega dela togega telesa z maso dm merjeno v laboratorijskem sistemu (x, y, z)
$\vec{r}_T$ ≡ krajevni vektor do težišča togega telesa merjeno v laboratorijskem sistemu (x, y, z)
$\vec{r}^*$ ≡ krajevni vektor do majhnega dela togega telesa z maso dm merjeno v lokalnem (težiščnem) koordinatnem sistemu (x', y', z')
T ≡ težišče togega telesa

Iz zgornje slike vidimo, da velja zveza

$$\vec{r} = \vec{r}_T + \vec{r}^{\,*} . \tag{21}$$

Če enačbo (21) odvajamo po času na obeh straneh enačaja dobimo:

$$\vec{v} = \vec{v}_T + \vec{v}^{\,*} , \tag{22}$$

kjer je $\vec{v}_T$ hitrost težišča togega telesa, $\vec{v}^{\,*}$ pa hitrost mase dm v težiščnem sistemu. Izračunajmo sedaj kinetično energijo togega telesa, za katero vzamemo, da je vsota kinetičnih energij vseh mas dm, ki sestavljajo togo telo z maso m:

$$W_k = \frac{1}{2}\int v^2 \,\mathrm{d}m = \frac{1}{2}\int \vec{v}\cdot\vec{v}\,\mathrm{d}m . \tag{23a}$$

Izraz (22) vstavimo v enačbo (23a):

$$W_k = \frac{1}{2}\int \left(\vec{v}_T + \vec{v}^{\,*}\right)\cdot\left(\vec{v}_T + \vec{v}^{\,*}\right)\mathrm{d}m = \frac{1}{2}\int v_T^2 \mathrm{d}m + v_T \cdot \int \vec{v}^{\,*}\,\mathrm{d}m + \frac{1}{2}\int \vec{v}^{\,*2}\,\mathrm{d}m . \tag{23b}$$

Drugi člen v gornjem izrazu je enak nič. Koordinate težišča v težiščnem sistemu so namreč enake nič:

$$\vec{r}_T^{\,*} = \frac{1}{m}\int \vec{r}^{\,*}\,\mathrm{d}m = 0\,,$$

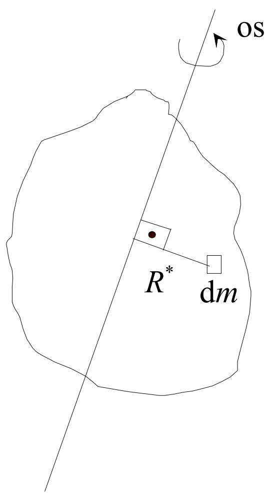
zato je tudi

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{m}\int \vec{r}^{\,*}\,\mathrm{d}m\right) = \frac{1}{m}\int \vec{v}^{\,*}\mathrm{d}m = 0. \tag{24}$$

Iz enačb (23b) in (24) sledi:

$$W_k = \frac{1}{2}m\,v_T^2 + \frac{1}{2}\int v^{*2}\,\mathrm{d}m\,. \tag{25}$$

V splošnem v vsakem trenutku obstaja neka os okoli katere se s kotno hitrostjo ω vrti obravnavano telo, ki je v izbranem trenutku enaka za vse točkaste mase dm, ki sestavljajo togo telo, zato velja (glejte sliko):



$$v^* = R^*\omega\,. \tag{26}$$

Ob upoštevanju enačbe (26) lahko enačbo (25) zapišemo v obliki:

$$\boxed{W_k = \frac{1}{2}m\,v_T^2 + \frac{1}{2}J^*\,\omega^2}\,, \tag{27}$$

kjer smo upoštevali

$$\frac{1}{2}\int v^{*2}\,\mathrm{d}m = \frac{1}{2}\omega^2\int R^{*2}\mathrm{d}m = \frac{1}{2}J^*\omega^2\,, \tag{28a}$$

$$J^* = \int R^{*2}\,\mathrm{d}m\,. \tag{28b}$$

Kinetično energijo $W_T = \frac{1}{2} m v_T^2$ imenujemo translacijska kinetična energija togega telesa, $W_r = \frac{1}{2} J^* \omega^2$ pa je rotacijska kinetična energija togega telesa. Za izbrani težiščni sistem lahko v splošnem zapišemo rotacijsko kinetično energijo kot:

$$W_r = \frac{1}{2} \sum J_{\alpha\beta}\, \omega_\alpha\, \omega_\beta \ , \tag{29}$$

$$\alpha = x^*, y^*, z^*, \quad \beta = x^*, y^*, z^*,$$

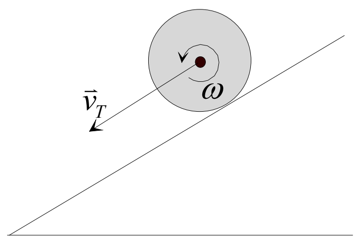
kjer so $J_{x^*x^*}, J_{y^*y^*}$ in $J_{z^*z^*}$ vztrajnostni momenti okrog treh pravokotnih osi x^*, y^* in z^*, $J_{\alpha\beta}\left(\alpha \neq \beta\right)$ pa so deviacijski momenti (glejte še str. vrtilna količina). Če so osi težiščnega sistema hkrati tudi glavne osi dobi izraz (29) obliko:

$$W_T = \frac{1}{2} J_{x^*} \omega_1^2 + \frac{1}{2} J_{y^*} \omega_2^2 + \frac{1}{2} J_{z^*} \omega_3^2 \ . \tag{30}$$

Če pa se trenutna os vrtenja vedno ujema z eno izmed glavnih osi, n.pr. z J_{x^*}, je

$$W_r = \frac{1}{2} J_{x^*} \omega_1^2 \ . \tag{31}$$

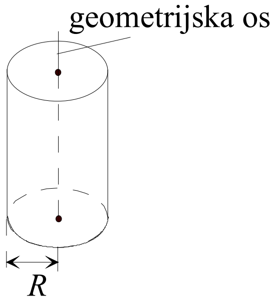
Nazorna ilustracija zadnjega primera je kotaljenje homogenega valja s polmerom *R* in maso *m* po klancu navzdol brez podrsavanja.



Če se valj kotali brez podrsavanja sta hitrost težišča valja v_T in kotna hitrost vrtenja valja povezana z enačbo

$$v_T = R\, \omega \ . \tag{32}$$

Trenutna os vrtenja valja pri kotaljenju brez podrsavanja se ujema z geometrijsko osjo valja, ki je hkrati tudi ena izmed glavnih osi. Vztrajnostni moment homogenega valja okrog te osi je $J = \frac{1}{2} m R^2$, torej velja:



$$W_k = \frac{1}{2} m\, v_T^2 + \frac{1}{2} J\, \omega^2 = \frac{1}{2} m\, v_T^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} m\, R^2\right)\frac{v_T^2}{R^2} = \frac{3}{4} m\, v_T^2\,, \tag{33}$$

kjer smo upoštevali veljavnost enačbe (32). Če se valj po klancu ne bi kotalil, ampak bi samo drsel s hitrostjo v_T, bi bila ustrezna kinetična energija valja samo $\frac{1}{2} m\, v_T^2$.

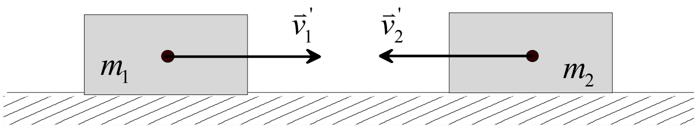
Zgled: popolnoma prožen centralni trk dveh vozičkov na zračni blazini

Prožen trk dveh teles definiramo kot trk pri katerem se ohranja skupna kinetična energija. Ker je trk centralen ne upoštevamo rotacijske kinetične energije vozičkov $\frac{1}{2} J^* \omega^2$ (enačba (27)). Predpostavimo pa tudi, da se pri trku gravitacijska potencialna energija ne spremeni ($\Delta W_p = 0$) in pa, da je delo vseh zunanjih sil enako nič (glejte še enačbo (15)). Velja torej ohranitev skupne kinetične energije:

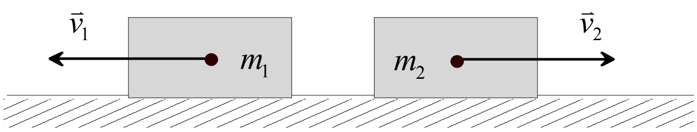
$$\frac{1}{2} m_1\, v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2\, v_2'^2 = \frac{1}{2} m_1\, v_1^2 + \frac{1}{2} m_2\, v_2^2\,, \tag{34}$$

kjer sta m_1 in m_2 masi vozičkov, $\vec{v}_1'$ in $\vec{v}_2'$ hitrosti vozičkov pred trkom ter $\vec{v}_1$ in $\vec{v}_2$ hitrosti vozičkov po trku.

pred trkom:



po trku:



Ob predpostavki, da je skupni sunek sil na oba vozička nič, se ohranja tudi skupna gibalna količina obeh vozičkov:

$$m_1\, \vec{v}_1' + m_2\, \vec{v}_2' = m_1\, \vec{v}_1 + m_2\, \vec{v}_2\,. \tag{35}$$

Iz enačb (34) in (35) lahko pri poznavanju m_1, m_2, $v_1^{'}$ in $v_2^{'}$ izračunamo končni hitrosti vozičkov v_1 in v_2. Rešimo enačbi (34) in (35) za poseben primer, ko drugi voziček pred trkom miruje, to je za $v_2^{'} = 0$. Tako preideta enačbi (35) in (36) v:

$$m_1 v_1^{'} = m_1 v_1 + m_2 v_2 \, , \tag{36}$$

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^{'2} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \, , \tag{37}$$

od koder sledi:

$$v_1^{'} = v_1 + \left(\frac{m_2}{m_1} \right) v_2 \tag{38}$$

$$v_1^{'2} = v_1^2 + \left(\frac{m_2}{m_1} \right) v_2^2 \tag{39}$$

Rešitvi enačb (39) in (38) sta:

$$v_1 = \frac{v_1^{'} \left(1 - \frac{m_2}{m_1} \right)}{\left(1 + \frac{m_2}{m_1} \right)} \, , \tag{40}$$

$$v_2 = \frac{2 v_1^{'}}{1 + \frac{m_2}{m_1}} \, . \tag{41}$$

Za poseben primer, ko sta masi obeh vozičkov enaki, sledi iz enačb (40) in (41):

$$v_1 = 0 \, .$$

$$v_2 = v_1^{'} \, .$$