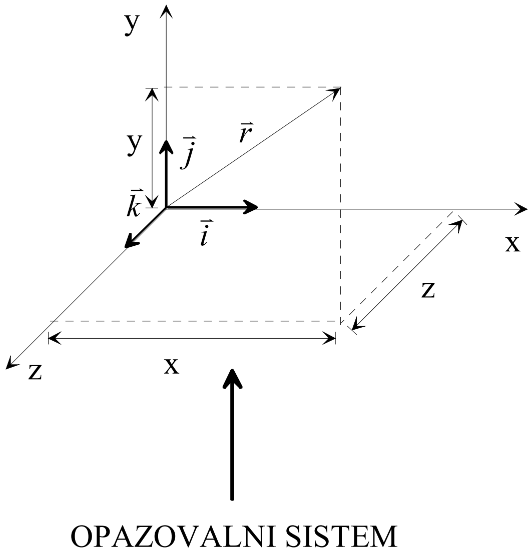
Kinematika

Gibanje točkastega telesa je dober približek (aproksimacija) kadar so premiki telesa **veliko** večji kot razsežnost telesa (primer: gibanje Zemlje okoli Sonca).

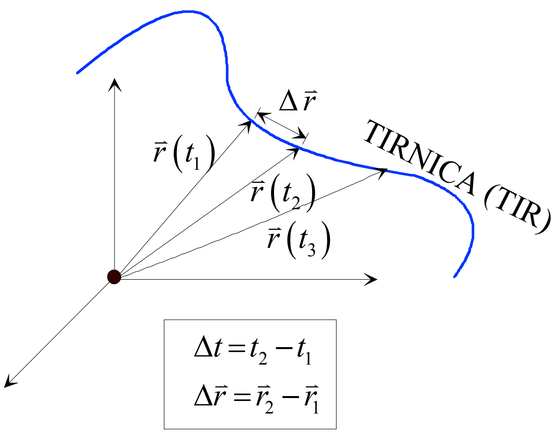
- **Lego točkastega telesa opišemo s krajevnim vektorjem** $\vec{r}\left(x,y,z\right)$

$$\vec{r}=x\,\vec{i}+y\,\vec{j}+z\,\vec{k}$$



če se $\vec{r}$ spreminja s časom $\Rightarrow$ **gibanje**

- krivuljo, ki določa $\vec{r}\left(t\right)$ imenujemo **tirnica** ali **trajektorija**



$$\vec{r}\left(t\right)=\left(x\left(t\right),\,y\left(t\right),\,z\left(t\right)\right) \tag{1}$$

- Zanima nas kako hitro se lega delca spreminja. Definiramo vektor **hitrosti** kot:

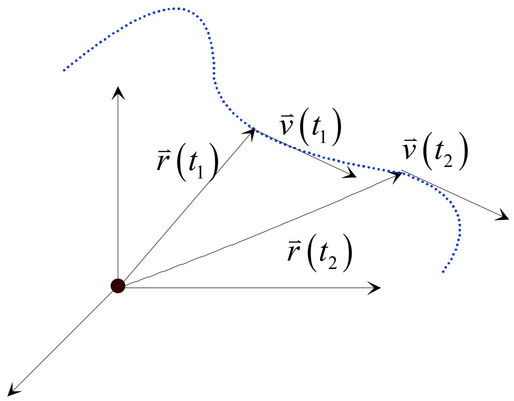
$$\vec{v}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}=\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t},\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t},\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)=\left(v_x,v_y,v_z\right) \tag{2}$$

velikost hitrosti: $v = |\vec{v}| = \left(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2\right)^{1/2}$

- **Pospešek** pove kako se s časom spreminja hitrost $\vec{v}(t)$

$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)$

$\Delta t = t_2 - t_1$



definicija pospeška:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \left(\frac{dv_x}{dt}, \frac{dv_y}{dt}, \frac{dv_z}{dt}\right)$$

$$\vec{a} = \frac{d}{dt}(\vec{v}) = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right) = \left(\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right) = \left(\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}, \frac{d^2z}{dt^2}\right) \tag{3}$$

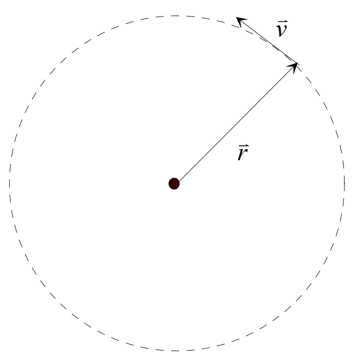
Torej:

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{r}(t) &= \big(x(t), y(t), z(t)\big) \\ \vec{v}(t) &= \left(v_x, v_y, v_z\right) = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right) \\ \vec{a}(t) &= \left(a_x, a_y, a_z\right) = \left(\frac{dv_x}{dt}, \frac{dv_y}{dt}, \frac{dv_z}{dt}\right) \end{aligned}} \tag{4}$$

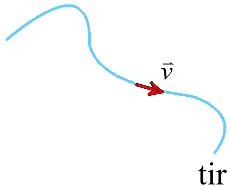
Opombe: pospešek je lahko različen od nič, čeprav se velikost $\vec{r}$ in $\vec{v}$ ne spreminjata s časom (n.pr. enakomerno kroženje)

$|\vec{r}| = r = \text{konst.}$

$|\vec{v}| = v = \text{konst.}$



- **Računanje poti:** $\boxed{s = \int |\vec{v}|\ \mathrm{d}t}$ (5)



- **Poseben primer:** enakomerno pospešeno gibanje

$$\boxed{\vec{a}(t) = \vec{a}_0 = \text{konstanta}}$$

izberemo začetne pogoje: $\vec{v}_0 = \vec{v}(t=0)$

$\vec{r}_0 = \vec{r}(t=0)$

$$\vec{a}_0 = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \quad \Rightarrow \quad \int_{\vec{v}_0}^{\vec{v}} \mathrm{d}\vec{v} = \int_{9}^{t} \vec{a}_0 \mathrm{d}t$$

$$\boxed{\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}_0\, t} \tag{6}$$

$$\vec{v}_0 = \vec{v}(\ t = 0)$$

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} \Rightarrow \mathrm{d}\vec{r} = \vec{v}\ \mathrm{d}t$$

$$\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \mathrm{d}r = \int_{0}^{t} (\vec{v}_0 + \vec{a}_0 t)\,\mathrm{d}t$$

$$\vec{r}_0 = \vec{r}(t=0)$$

$$\vec{r} - \vec{r}_0 = \vec{v}_0 t + \vec{a}_0 \frac{t^2}{2}$$

$$\boxed{\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \vec{a}_0 \frac{t^2}{2}} \tag{7}$$

Zapis krajevnega vektorja $\vec{r}$ po komponentah:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + v_{0x}\, t + a_{0x} \frac{t^2}{2} \\ y &= y_0 + v_{0y}\, t + a_{0y} \frac{t^2}{2} \\ z &= z_0 + v_{0z}\, t + a_{0z} \frac{t^2}{2} \end{aligned} \tag{8}$$

Poseben primer: $\vec{a}_0 = 0 \Rightarrow \quad \vec{v} = \vec{v}_0 = \text{konstanta}$

Enakomerno gibanje:

- **Premo enakomerno pospešeno gibanje** (gibanje po premici)

$$\boxed{\begin{aligned} v &= v_0 + a_0\, t \\ x &= x_0 + v_0\, t + \frac{a_0 t^2}{2} \end{aligned}} \qquad (9)$$

- **Premo enakomerno gibanje**

če a = 0:

$$\boxed{\begin{aligned} v &= v_0 \\ x &= x_0 + v_0 t \end{aligned}} \qquad (10)$$

če $x_0 = 0$:

$$\boxed{x = v_0 t + a_0 \frac{t^2}{2}} \qquad (11)$$

$$\boxed{v = v_0 + a_0 t} \qquad (12)$$

Iz enačbe (12) izrazimo čas $t = \dfrac{v - v_0}{a_0}$ in ga vstavimo v enačbo (11):

$$x = v_0 \frac{(v - v_0)}{a_0} + \frac{a_0}{2} \frac{(v - v_0)^2}{a_0^2} \qquad / 2a_0$$

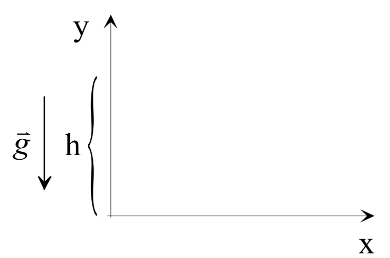
$$2\, x\, a_0 = 2\, v_0 (v - v_0) + (v - v_0)^2$$

$$2a_0\, x = 2\, v_0 v - 2 v_0^2 + v^2 - 2\, v_0 v + v_0^2$$

$2a_0\, x = v^2 - v_0^2$, torej:

$$\boxed{v^2 = v_0^2 + 2a_0\, x} \qquad (13)$$

- **Prosti pad (**upor zraka zanemarimo)



gravitacijski pospešek: $g \approx 9.8\,\mathrm{ms}^{-2}$

začetni pogoji:

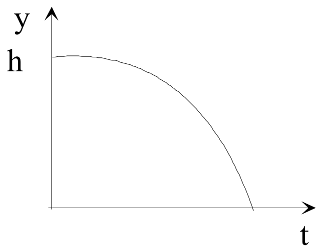
$$y(t=0)=h$$
$$v_y(t=0)=0$$
$$a_y=\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}=-g \Rightarrow \int_0^{v_y}\mathrm{d}\,v_y=-g\int_0^t \mathrm{d}t$$

$$\boxed{v_y=-gt}$$

$$v_y=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \Rightarrow \mathrm{d}y=v_y\,\mathrm{d}t$$
$$\int_h^y \mathrm{d}y=\int_0^t -gt\,\mathrm{d}t$$

$$y-h=-g\frac{t^2}{2} \Rightarrow \boxed{y=h-g\frac{t^2}{2}}$$

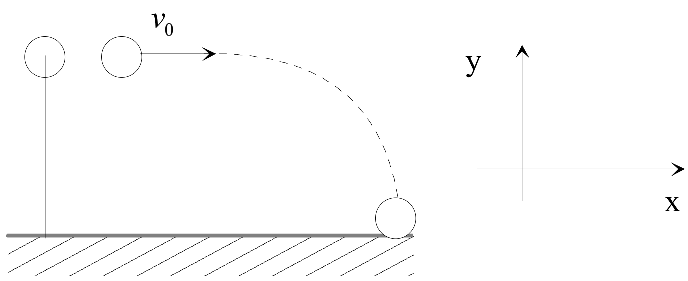
ko $y=0$ pade telo na tla



$$0=h-g\frac{t_p^2}{2} \Rightarrow \boxed{t_p=\sqrt{\frac{2h}{g}}}$$ čas padanja

$$v(y=0)=-g\,t_p=-g\sqrt{\frac{2h}{g}}=-\sqrt{2gh}$$ je hitrost pri tleh tik preden se telo dotakne tal

- **Vodoravni met**



začetni pogoji:

$$v_y(t=0)=0$$
$$v_x(t=0)=v_0$$
$$y(t=0)=h$$

pospešek:

$$a_x=0$$
$$a_y=-g$$

hitrost:

$$v_x=v_0$$
$$v_y=-gt$$

$$v_x=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \Rightarrow \int_0^x \mathrm{d}x=\int_0^t \mathrm{v}_\mathrm{x}\mathrm{d}t \Rightarrow \boxed{x=v_0\,t}$$

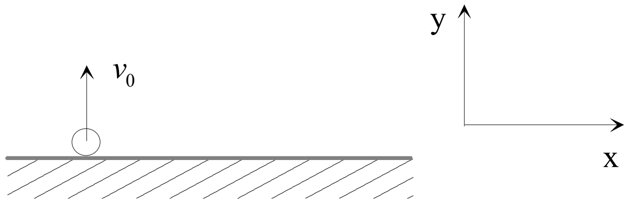
$$v_y=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \Rightarrow \int_h^y \mathrm{d}y=\int_0^t \mathrm{v}_\mathrm{y}\mathrm{d}t \Rightarrow \boxed{y=h-\frac{gt^2}{2}}$$

Čas padanja:

$$0=h-\frac{gt_p^2}{2}$$

$$\boxed{t_p=\sqrt{\frac{2h}{g}}}$$

- **Navpični met**



$$\boxed{a_g=-g}$$

$$\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = -g,$$

$$\int_{v_0}^{v} \mathrm{d}v_y = -\int_0^t g\mathrm{d}t$$

$$\boxed{v_y = v_0 - gt}$$

začetni pogoji:

$$y(t=0) = 0$$
$$v_y(t=0) = v_0$$

$$v_y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$$

$$\int_0^y \mathrm{d}y = \int_0^t v_y \, \mathrm{d}t$$

$$y = \int_0^t (v_0 - gt)\mathrm{d}t = v_0 t - \frac{gt^2}{2}$$

$$\boxed{y = v_0 t - \frac{gt^2}{2}}$$

- **najvišja točka je dosežena**, ko je $v_y = 0$:

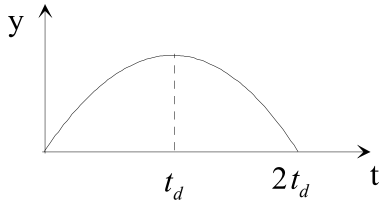
  $$v_g = v_0 - gt_d = 0 \quad \Rightarrow$$

  $$\boxed{t_d = \frac{v_0}{g}}$$

- **pri tem doseže telo višino:**

  $$h = y(t_d) = v_0 \frac{v_0}{g} - \frac{g}{2}\frac{v_0^2}{g^2} = \frac{v_0^2}{2g}$$

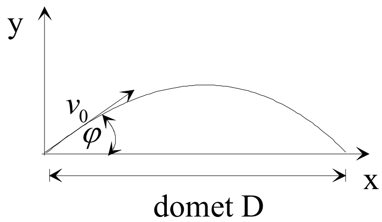
- Telo pade na tla ob času t_d:



$$y = 0 = v_0 t - \frac{gt^2}{2}$$

$$t = \frac{2v_0}{g} = 2t_d$$

- **Poševni met**



začetni pogoji:

$$a_x = 0, \quad v_x(t=0) = v_0 \cos\varphi$$
$$a_y = -g, \quad v_y(t=0) = v_0 \sin\varphi$$

$$x(t=0) = 0$$
$$y(t=0) = 0$$

komponente vektorja hitrosti:

$$v_x = v_0 \cos\varphi$$
$$v_y = v_0 \sin\varphi - gt$$

komponente krajevnega vektorja:

$$x = v_0 \cos\varphi\, t$$

$$y = v_0 \sin\varphi\, t - \frac{gt^2}{2}$$

$$x = v_0 \cos\varphi\, t \;\;\Rightarrow\;\; t = \frac{x}{v_0 \cos\varphi}$$

$$y = v_0 \sin\varphi\, t - \frac{gt^2}{2}$$

$$y = \frac{v_0 \sin\varphi\, x}{v_0 \cos\varphi} - \frac{g}{2}\frac{x^2}{v_0^2\, cos^2\varphi}$$

Enačba parabole, ki opisuje tir telesa::

$$\boxed{y = x\, tg\,\varphi - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2\varphi} x^2}$$

Domet:

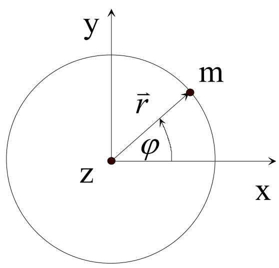
$$0 = x\, tg\,\varphi - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2\varphi} x^2$$

$$tg\,\varphi = \frac{g}{2v_0^2 \cos^2\varphi} x \;\;\Rightarrow\;\; x = \frac{2v_0^2 \sin\varphi \cos\varphi}{g} = \frac{v_0^2}{g}\sin(2\varphi)$$

domet je maksimalen, ko je $2\varphi = 90^0 \Rightarrow \varphi = 45^0$

- **Kroženje točkastega telesa**

Obravnavamo gibanje po krožnici v ravnini x,y (z = 0):



Za kroženje po krožnici s polmerom *r* v ravnini x,y zapišemo komponente krajevnega vektorja v obliki (glejte sliko):

$$\begin{aligned} x &= t\cos\varphi \\ x &= t\sin\varphi \\ z &= 0 \end{aligned} \tag{14}$$

Zasuk φ je v splošnem poljubna funkcija časa:

$$\varphi = \varphi(t) \tag{15}$$

Odvajajmo krajevni vektor

$$\vec{r} = \left(r\cos\varphi, r\sin\varphi, 0\right) \tag{16}$$

po času:

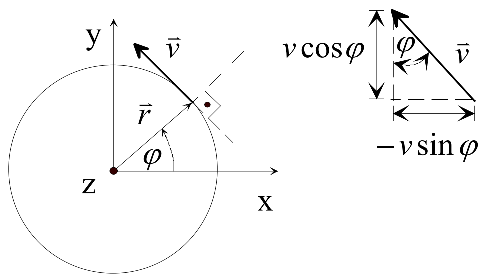
$$\vec{v}\left(t\right) = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \left(-r\sin\varphi\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t},\ r\cos\varphi\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}, 0\right), \tag{17}$$

kjer definiramo kotno hitrost kot:

$$\omega = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}, \tag{18}$$

torej:

$$\vec{v} = \omega r\left(-\sin\varphi,\ \cos\varphi, 0\right) \tag{19}$$



Vektor hitrosti $\vec{v}$ lahko zapišemo kot (glejte sliko):

$$\vec{v} = v\left(-\sin\varphi,\ \cos\varphi, 0\right). \tag{20}$$

Iz primerjave enačb (11) in (12) sledi izraz za velikost obodne hitrosti:

$$\boxed{v = \omega r}\ . \tag{21}$$

Definiramo enotni vektor v smeri hitrosti, to je v smeri tangente na tir (glejte enačbo (20) in sliko):

$$\vec{e}_t = \left(-\sin\varphi, \cos\varphi, 0\right). \tag{22}$$

Ker je $\vec{e}_t$ enotni vektor je njegova velikost 1:

$$\left|\vec{e}_t\right| = \vec{e}_t = \left(\vec{e}_t \cdot \vec{e}_t\right)^{\frac{1}{2}} = \left[\left(-\sin\varphi\right)^2 + \cos^2\varphi\right]^{\frac{1}{2}} = 1.$$

S pomočjo enotnega vektorja $\vec{e}_t$ zapišemo enačbo (19) v obliki:

$$\vec{v} = \omega r(-\sin\varphi,\ \cos\varphi, 0) = \omega r\,\vec{e}_t\,. \tag{23}$$

Definirajmo še enotni vektor v smeri osi z:

$$\vec{e}_z = (0,0,1) \tag{24}$$

in enotni vektor v smeri krajevnega vektorja $\vec{r}$ (glejte sliko):

$$\vec{e}_r = (\cos\varphi, \sin\varphi, 0), \tag{25}$$

kjer je:

$$e_z = (\vec{e}_z \cdot \vec{e}_z)^{\frac{1}{2}} = 1\,,$$

$$e_r = (\vec{e}_r \cdot \vec{e}_r)^{\frac{1}{2}} = (\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)^{\frac{1}{2}} = 1\,.$$

Če izrazimo enotni vektor v smeri vektorja hitrosti $\vec{v}$ (to je v smeri tangente na tir) kot (glejte še sliko):

$$\vec{e}_t = \vec{e}_z \times \vec{e}_r\,, \tag{26}$$

lahko zapišemo enačbo (15) v obliki:

$$\vec{v} = \omega r\,\vec{e}_t = \omega r(\vec{e}_z \times \vec{e}_r) = \omega\vec{e}_z \times r\,\vec{e}_r = \vec{\omega} \times \vec{r}\,, \tag{27}$$

kjer smo predpostavili, da vektor kotne hitrosti kaže v smeri ali nasprotni smeri osi z in je pravokoten na ravnino kroženja. Smer vektorja $\vec{\omega}$ določimo po pravilu desnosučnega vijaka.

$$\boxed{\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}}$$

Izračunajmo se pospešek krožeče točkaste mase:

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{\omega} \times \vec{r}) = \frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v}\,, \tag{28}$$

kjer smo definirali vektor kotnega pospeška:

$$\vec{\alpha} = \frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t}. \tag{29}$$

Ker velja $\vec{\omega} = (0, 0, \omega)$ je

$$\vec{\alpha} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(0, 0, \omega) = \left(0, 0, \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}\right) = (0, 0, \alpha). \tag{30}$$

Vidimo torej, da vektor $\vec{\alpha}$ kaže v isto smer kot vektor kotne hitrosti . Zapišimo sedaj drugi člen v enačbi (20) malo drugače:

$$\vec{\omega} \times \vec{v} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = \vec{\omega}(\vec{\omega} \cdot \vec{r}) - \vec{r}(\vec{\omega} \cdot \vec{\omega}) = 0 - \omega^2 \vec{r}, \tag{31}$$

kjer smo upoštevali, da je skalarni produkt dveh pravokotnih vektorjev $\vec{\omega}$ in $\vec{r}$ enak nič. Z upoštevanjem enačbe (31) lahko enačbo (28) zapišemo v obliki:

$$\boxed{\vec{a} = \vec{\alpha} \times \vec{r} - \omega^2 \vec{r}} \tag{32}$$

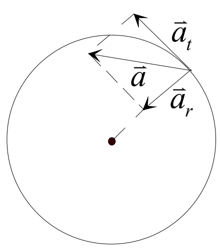
Definiramo tangentni pospešek

$$\vec{a}_t = \vec{\alpha} \times \vec{r} = \alpha \vec{e}_z \times r \vec{e}_r = \alpha r (\vec{e}_z \times \vec{e}_r) = \alpha r \vec{e}_t, \tag{33}$$

ki kaže v smeri tangente na tir, ter radialni pospešek

$$\vec{a}_r = -\omega^2 \vec{r}, \tag{34}$$

ki kaže proti središču kroženja v nasprotni smeri od krajevnega vektorja $\vec{r}$. Radialni pospešek je različen od nič tudi v primeru, ko je $v = |\vec{v}| = \text{konst.}$



V splošnem je velikost celotnega pospeška

$$a = (\vec{a} \cdot \vec{a})^{\frac{1}{2}} = (a_t^2 + a_r^2)^{\frac{1}{2}} = (\alpha^2 r^2 + \omega^4 r^2)^{\frac{1}{2}}. \tag{35}$$

- **Poseben primer:** neenakomerno pospešeno kroženje

Osnovna predpostavka: $\alpha = \alpha_0 = \text{konst.}$

$$\alpha_0 = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}$$

$$\mathrm{d}\omega = \alpha_0 \, \mathrm{d}t$$

$$\int_{\omega_0}^{\omega} \mathrm{d}\omega = \int_0^t \alpha_0 \, \mathrm{d}t$$

$$\omega - \omega_0 = \alpha_0 \, t$$

$$\boxed{\omega = \omega_0 + \alpha_0 \, t} \tag{36}$$

$$\omega = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}$$

$$\mathrm{d}\varphi = \omega \, \mathrm{d}t$$

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi} \mathrm{d}\varphi = \int_0^t \left(\omega_0 + \alpha_0 \, t\right) \mathrm{d}t$$

$$\varphi - \varphi_0 = \omega_0 \, t + \alpha_0 \frac{t^2}{2}$$

$$\boxed{\varphi = \omega_0 \, t + \alpha_0 \frac{t^2}{2}}, \tag{37}$$

kjer smo postavili $\varphi_0 = 0$.

- **Poseben primer:** enakomerno kroženje

Osnovna predpostavka: $\alpha = 0$

$$\alpha = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = 0 \;\Rightarrow\; \boxed{\omega = \omega_0 = \text{konst.}} \tag{38}$$

$$\mathrm{d}\omega = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = \omega_0$$

$$\mathrm{d}\varphi = \omega_0 \, \mathrm{d}t$$

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi} \mathrm{d}\varphi = \int_0^t \omega_0 \, \mathrm{d}t$$

$$\varphi - \varphi_0 = \omega_0 \, t$$

$$\boxed{\varphi = \omega_0 \, t}, \tag{39}$$

če postavimo $\varphi_0 = 0$.

Izračunajmo čas enega obhoda (obhodni čas):

$$t_0 = \frac{2\pi r}{v_0} = \frac{2\pi r}{\omega_0 r} = \frac{2\pi}{\omega_0} \,, \tag{40}$$

od koder sledi:

$$\omega_0 = 2\pi \frac{1}{t_0} = 2\pi \upsilon_0 \,, \tag{41}$$

kjer smo definirali frekvenco

$$\upsilon_0 = \frac{1}{t_0} \,. \tag{42}$$