iz knjige: R. Kladnik: Fizika I

1

MATEMATIČNE OSNOVE

MATEMATIČNI PRIPOMOČKI

Fizikalne zakone običajno napišemo v obliki matematičnih enačb. Rešujoč te enačbe, nujno naletimo na diferencialni in integralni račun, če le nočemo ostati v okviru srednješolske fizike. Potrebno je, da so študentje seznanjeni z osnovami diferencialnega in integralnega računa.

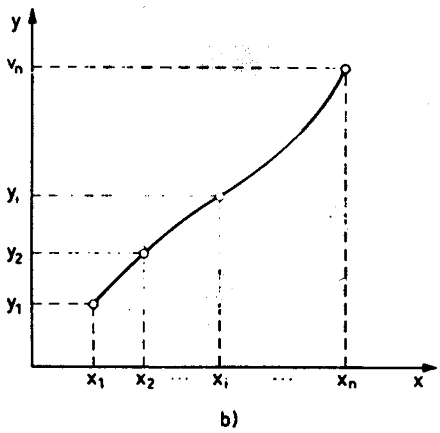
Večkrat uporabljamo količine, pri katerih je poleg vrednosti pomembna tudi smer; takšne količine imenujemo vektorji. V takih primerih so fizikalni zakoni izraženi v vektorski obliki in lahko dobimo končni rezultat po enostavni poti le, če obvladamo osnove vektorskega računa.

Fizik uporablja matematična sredstva kot nujno potrebno orodje, ki mu omogoča, da razume in obravnava fizikalne zakone.

Nekateri študentje se naučijo v srednji šoli nekaj osnov vektorskega in diferencialnega računa, večina pa ne. Zato je umestno, da na kratko podamo nekaj matematičnih osnov, ki jih bomo uporabljali pri naših izvajanjih. To bodo le matematični pripomočki; podrobnejšo teorijo omenjenih računov se slušatelji učijo pri predavanjih iz matematike.

x	y
x_1	y_1
x_2	y_2
$\vdots$	$\vdots$
x_i	y_i
$\vdots$	$\vdots$
x_n	y_n

a)



b)

Sl. 0.1

KRIVULJE — DIAGRAMI

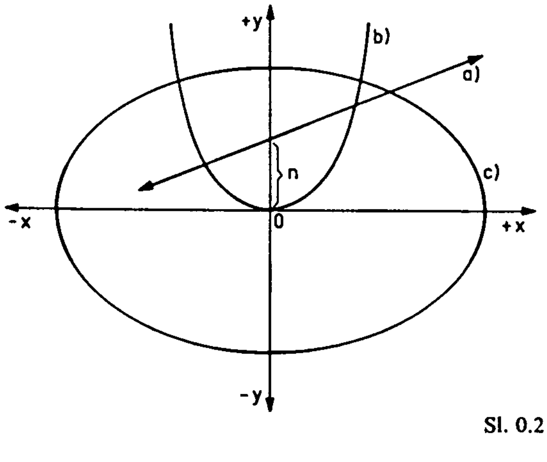
Recimo, da je fizikalna količina y odvisna od fizikalne količine x. Spremenljivka x se lahko spreminja v okviru predpisanega območja, npr. med x_1 in x_n. Vrednost spremenljivke y je določena, brž ko izberemo vrednost za x; če se x spreminja od x_1 do x_n, se y spreminja od y_1 do y_n. Fizikalni zakoni ali pravilo pove, kako je y odvisen od x. To odvisnost zapišemo v obliki funkcije, npr. $y = y(x)$, in jo lahko predstavimo bodisi v tabelarni obliki (Sl. 0.1 a) bodisi kot krivuljo v koordinatnem sistemu, pri katerem nanašamo vrednosti spremenljivke x na vodoravno os (os x), ustrezne vrednosti spremenljivke y pa na navpično os (os y; Sl. 0.1 b). Izvlečena krivulja grafično prikazuje funkcijo $y(x)$, to je odvisnost fizikalne količine y od fizikalne količine x. Oblika krivulje je za vsak primer drugačna. Navedli bomo nekaj enostavnih krivulj, ki jih večkrat vidimo:

1. **Linearna odvisnost** (enačba premice): $y = kx + n$ (Sl. 0.2a). Število n pove odsek premice na osi y ($n = y$ za $x = 0$). Število k imenujemo smerni koeficient premice; je premosorazmerno tangensu kota, ki ga premica oklepa z osjo x.

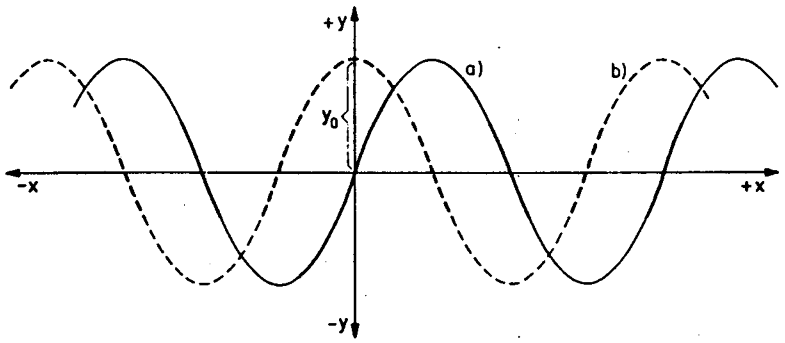
2. **Kvadratna odvisnost** (enačba parabole): $y = ax^2$ (Sl. 0.2b). Parameter a pove, kako »široka« je parabola; manjšemu a ustreza širše dno parabolne jame, večjemu a pa ožje dno.

3. **Enačba elipse:** $(x/a)^2 + (y/b)^2 = 1$ (Sl. 0.2c). Središče te elipse je v koordinatnem izhodišču in osi elipse sovpadata s koordinatnima osema. Parametra a in b sta polosi elipse. Elipsa se prelevi v krog, če se ena polos elipse izenači z drugo: $a = b = R$; R je potem polmer kroga: $x^2 + y^2 = R^2$.

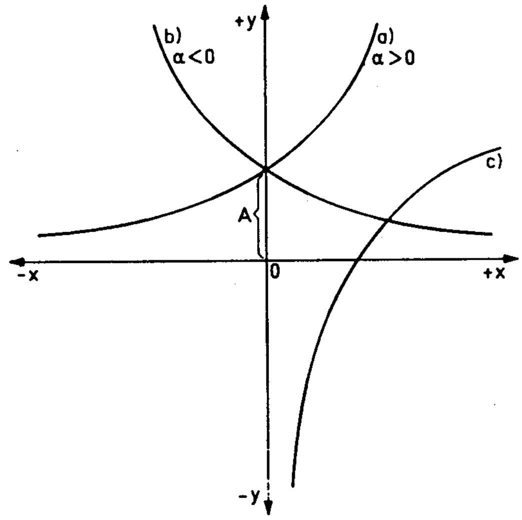
4. **Eksponentna odvisnost:** $y = Ae^{ax} = A\exp(ax)$ (Sl. 0.3a, b). Eksponentna odvisnost je v fiziki kaj pogosta. Večkrat se zgodi, da kakšna količina (y) eksponentno narašča ali pada, če se druga količina (x) spreminja. Število e je baza naravnih logaritmov; $e = 2{,}71\ldots$ Parameter a je lahko pozitiven ali negativen; produkt ax mora biti brez dimenzije, kar pomeni, da je dimenzija parametra a enaka recipročni dimenziji spremenljivke x. Eksponentna funkcija ima lastnost, da se njena vrednost poveča ali zmanjša (odvisno od predznaka parametra a) vedno za enak faktor, če se spremenljivka x za enako poveča. Npr.: Če x povečamo



Sl. 0.2



Sl. 0.4



Sl. 0.3

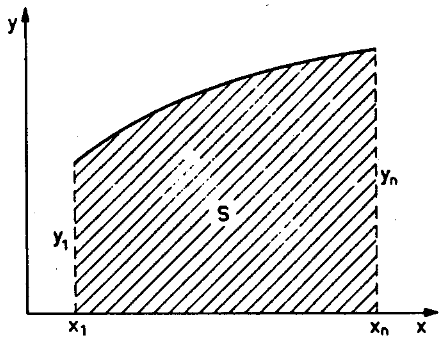
za a, se y poveča za faktor $\exp(aa)$, ki je neodvisen od prvotne vrednosti spremenljivke x.

5. **Logaritemska odvisnost:** $y = \ln x$ (Sl. 0.3c). V fiziki delamo običajno z naravnimi logaritmi, katerih baza je število e. Torej lahko zgornjo funkcijo obrnemo v eksponentno funkcijo: $x = e^y = \exp(y)$. Spremenljivka x mora biti brez dimenzije in vedno pozitivna. Pri $x > 1$ je y pozitiven, pri $x = 1$ je $y = 0$, pri $0 < x < 1$ pa negativen, in sicer gre k $-\infty$, če se x približuje ničli.

6. **Trigonometrična odvisnost:** $y = y_0 \sin(x)$ (Sl. 0.4a) ali $y = y_0 \cos(x)$ (Sl. 0.4b) je tudi pogost gost v fiziki. S trigonometričnimi funkcijami opisujemo pojave, ki se periodično ponavljajo. Argument x mora biti brez dimenzije, to je, mora biti čisto število. Vrednost trigonometrične funkcije se ne spremeni, če se argument x poveča ali zmanjša za poljuben mnogokratnik števila 2π. Veljajo naslednje zveze:

$$\sin(x + n \cdot 2\pi) = \sin(x),$$
$$\sin(x + n \cdot \pi) = (-1)^n \sin(x),$$
$$\sin[x + (2n + 1)\pi/2] = (-1)^{n+1} \cos(x),$$

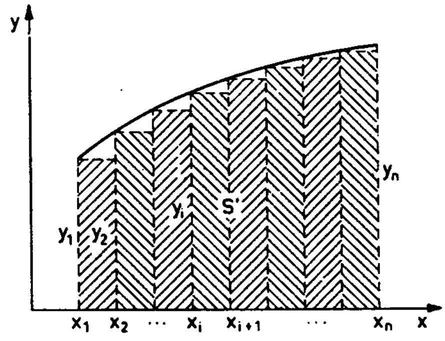
kjer je n poljubno celo, pozitivno ali negativno število. Četudi se x spreminja od $-\infty$ do $+\infty$, so vrednosti funkcij $y_0 \sin(x)$ ter $y_0 \cos(x)$ vedno znotraj intervala $(-y_0, +y_0)$. Krivuljo za funkcijo $\cos(x)$ dobimo, če sinusno krivuljo premaknemo v desno za $3\pi/2$ (ali v levo za $\pi/2$!). Funkciji $\sin(x)$ in $\cos(x)$ imata podobno vlogo, razlikujeta se predvsem v začetni vrednosti: pri $x = 0$ je $\sin(x) = 0$ ter $\cos(x) = 1$.



Sl. 0.5

INTEGRAL FUNKCIJE

Večkrat nas zanima ploščina, ki jo določena krivulja $y = y(x)$ objema skupaj z vodoravno osjo x, npr. ploščina S na sliki (0.5). Če se y na območju od x_1 do x_n ne spreminja ($y = y_1 = y_n = c$), je S enostavno ploščina pravokotnika: $S = c(x_n - x_1)$. V splošnem pa se y spreminja in ne moremo uporabljati preprostega izraza. V takih primerih dobimo končni rezultat, če interval (x_1, x_n) na osi x razdelimo na enake podintervale Δx ($\Delta x = x_2 - x_1 = x_3 - x_2 = \ldots = x_{i+1} - x_i = \ldots = x_n - x_{n-1}$), ploščino S pa razrežemo na ozke pokončne pravokotnike z enako osnovnico Δx (Sl. 0.6). Poiščemo ploščino vsakega majhnega pravokotnika posebej. Njih celokupna vsota S' je gotovo manjša od ploščine S, ki jo iščemo:



Sl. 0.6

$$S' = y_1(x_2 - x_1) + \ldots + y_i(x_{i+1} - x_i) + \ldots + y_{n-1}(x_n - x_{n-1}) = \sum_{i=1}^{n-1} y_i \Delta x < S$$

Vendar je razlika $S - S'$ tem manjša, čim manjši je Δx, to je čim ožji so posamezni pravokotniki in čim več jih je (večji n). Če se Δx približuje ničli, se ploščina vsakega pravokotnika tudi približuje ničli, število pravokotnikov pa narašča preko vseh meja; pri tem se ploščina S' približuje iskani ploščini S.

Zmanjševanje intervala (npr. Δx) na izredno majhno vrednost imenujemo **limitiranje** (lim). Tako zmanjšani interval označujemo z $\mathrm{d}x$ in mu pravimo **diferencial** x; $\mathrm{d}x = \lim(\Delta x)$.

Seštevanju izredno velikega števila izredno majhnih delov pravimo **integriranje**; označujemo ga z integralnim znakom $\int$, ki nadomešča znak $\sum$ običajnega seštevanja. Torej lahko zapišemo:

$$S = \lim_{\Delta x \to 0} S' = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{n-1} y_i \Delta x = \int_{x_1}^{x_n} y(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\boxed{S = \text{ploščina} = \int_{x_1}^{x_n} y(x)\,\mathrm{d}x} \qquad (0.1)$$

Z znakoma x_1 in x_n pod in nad integralnim znakom povemo, da seštevamo ploščine diferencialno majhnih pravokotnikov $y(x)\mathrm{d}x$, začenši pri x_1 pa do x_n; x_1 je spodnja meja integrala, x_n pa zgornja meja.

Integral funkcije $y(x)$, če integriramo po x od x_1 do x_n, je premosorazmeren ploščini S, ki jo krivulja $y(x)$ oklepa z vodoravno osjo x na odseku med x_1 in x_n.

Velikost ploščine S, to je vrednost integrala, je odvisna od oblike krivulje $y(x)$ in od obeh meja (x_1 in x_n). Matematika nas uči različnih pravil, kako integrirati posamezne funkcije. Navajamo le nekaj enostavnih primerov, ki se jih velja zapomniti. (Pri vsakem integralu je spodnja meja x_1, zgornja pa x_n, da ne bo treba pisati vsakokrat.)

$$\int a y(x)\,\mathrm{d}x = a\int y(x)\,\mathrm{d}x$$ a je poljubna konstanta

$$\int [y_1(x) \pm y_2(x)]\,\mathrm{d}x = \int y_1(x)\,\mathrm{d}x \pm \int y_2(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\int x^N \mathrm{d}x = (x_n^{N+1} - x_1^{N+1})/(N+1)$$ N je poljubno število, ki je različno od -1.

$$\int (1/x)\,\mathrm{d}x = \ln(x_n/x_1)$$ x_n in x_1 morata biti pozitivna

$$\int \exp(ax)\,\mathrm{d}x = (\mathrm{e}^{ax_n} - \mathrm{e}^{ax_1})/a$$

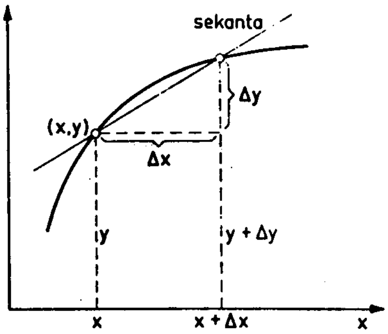
$$\int \sin(ax)\,\mathrm{d}x = (1/a)\,[\cos(ax_1) - \cos(ax_n)]$$

$$\int \cos(ax)\,\mathrm{d}x = (1/a)\,[\sin(ax_n) - \sin(ax_1)]$$

14

ODVOD FUNKCIJE

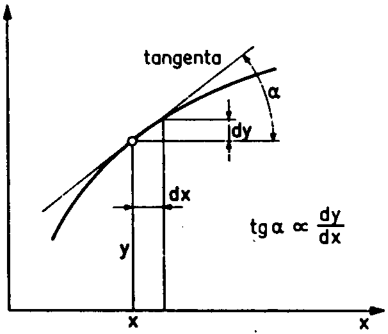
Vrednost funkcije $y(x)$ za določen x sama po sebi še ne pove, kolikšne so vrednosti funkcije za kakšen drug x. Večkrat želimo vedeti, kako se funkcija spremeni, če spremenimo vrednost spremenljivke x. Obnašanje funkcije v okolici določene točke lahko grobo ocenimo tako, da povemo usmerjenost tangente na krivuljo v izbrani točki krivulje. Če je tangenta vodoravna, pomeni, da se funkcija v neposredni okolici izbrane točke (x) malo spreminja. Tangenta, ki kaže navzgor in oklepa s pozitivno osjo x oster kot, napoveduje povečanje vrednosti funkcije, če x nekoliko povečamo, in zmanjšanje, če x zmanjšamo. Obratno je v primeru, da je tangenta usmerjena navzdol.



Sl. 0.7

Naklonski kot tangente je pomembna količina, saj napoveduje, kako se funkcija v okolici določene točke spreminja. Priporočljivo je naučiti se računati naklonski kot tangente, da ne bi bilo treba vsakokrat posebej risati funkcije in načrtovati tangente na krivuljo.

Tangento na krivuljo dobimo tako, da najprej poiščemo sekanto, to je premico, ki gre skozi dve točki krivulje. Potegnimo premico skozi točko (x, y) ter skozi točko $(x + \Delta x, y + \Delta y)$ (Sl. 0.7)! Količnik $\Delta y/\Delta x$ imenujemo strmina sekante in je merilo tangensa naklonskega kota sekante. Če Δx zmanjšamo, se zmanjšuje tudi Δy in sekanta se približuje tangenti. V limiti $\Delta x \to dx$ in $\Delta y \to dy$ se sekanta praktično zlije s tangento.



Sl. 0.8

Kvocient dy/dx je merilo za strmino tangente in ga imenujemo odvod funkcije y po x (Sl. 0.8). **Odvod funkcije** (dy/dx) je le drugo ime za strmino tangente na krivuljo, saj **določa tangens naklonskega kota tangente** (Sl. 0.8).

Na ravnem delu krivulje se strmina tangente ne spreminja z x, kar pomeni, da je odvod konstanten, torej neodvisen od x. Odvod linearne funkcije ($y = kx + n$) je konstanten. Če je odvod neke funkcije za vsak x isti, je krivulja te funkcije lahko le premica. Odvod funkcije (če je konstanten) pove, za koliko se vrednost funkcije spremeni, če x povečamo za enoto.

Odvod funkcije v neki točki je nič, če je tangenta v tej točki vzporedna z osjo x (npr. vodoravna). Vodoravna premica $y = k$ ima odvod nič, ne glede na x. Torej je odvod konstante vedno nič.

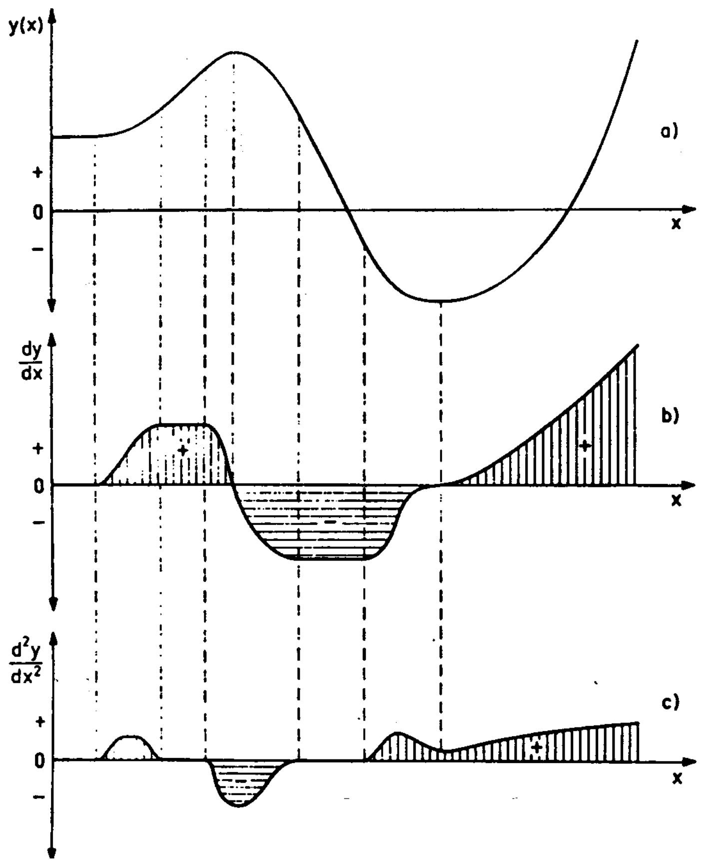
Pozitivnemu odvodu ustreza dvignjena tangenta — vrednost funkcije narašča, če se x povečuje; pozitivnemu dx ustreza pozitivni dy, to je prirastek funkcije. Čim večji je odvod, tem bolj je krivulja strma. Odvod lahko postane neskončno velik; to se zgodi, če je tangenta navpična — paralelna z osjo y. Pri zelo velikih odvodih vrednost funkcije izredno močno naraste, četudi se x le malo spremeni. Negativni odvod pomeni, da je tangenta usmerjena navzdol, da torej krivulja funkcije pada; pozitivnemu dx ustreza negativni dy in obratno (Sl. 0.9b).

Matematika uči, kako poiskati odvod funkcije, to je kako funkcijo odvajati. Tu si bomo ogledali preprost primer in navedli nekaj najpomembnejših rezultatov.

Iz definicije odvoda sledi naslednje:

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y(x + \Delta x) - y(x)}{\Delta x} = \text{Odvod funkcije}} \quad (0.2)$$

Spreminjanje odvoda z x je različno za različne funkcije. Kot primer navedimo preprosto potenčno funkcijo: $y = x^n$, kjer je n poljubno realno število. Odvod te funkcije računamo z enačbo (0.2):



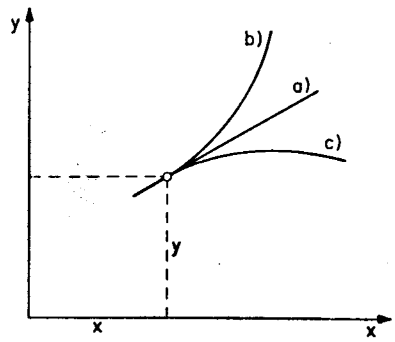
Sl. 0.9

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x)^n - x^n}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[x^n + nx^{n-1}\,\Delta x + \ldots + (\Delta x)^n] - x^n}{\Delta x} =$$
$$= nx^{n-1}$$

pri čemer smo uporabili obrazec za n-to potenco binoma. Po limiti $\Delta x \to 0$ ostane le člen, ki vsebuje Δx kot faktor, medtem ko se ostali členi uničijo. Na podoben način dobimo odvode ostalih funkcij. Nekaj splošnih navodil:

$y(x) =$	$dy/dx =$	
$kx + n$	k	k in n sta poljubni konst.
kx^n	knx^{n-1}	
e^{nx}	ne^{nx}	
$\sin(kx)$	$k \cdot \cos(kx)$	
$\cos(kx)$	$-k \cdot \sin(kx)$	
$\ln(x)$	$1/x$	
$y_1(x) \pm y_2(x)$	$dy_1/dx \pm dy_2/dx$	
$y_1(x)y_2(x)$	$y_1 dy_2/dx + y_2 dy_1/dx$	
$y_1(x)/y_2(x)$	$(y_2 dy_1/dx - y_1 dy_2/dx)/y_2^2$	
$f(g)$	$(df/dg)(dg/dx)$	

Konstantni faktor funkcije pride pred odvod kot faktor. Odvod vsote oz. razlike več funkcij je vsota oz. razlika odvodov posameznih funkcij. Odvajanje produkta ali kvocienta dveh funkcij je nekoliko bolj zamotano in si je pravila pač treba zapomniti (gl. tabelo!).



Sl. 0.10

Drugi odvod. Vrednost funkcije in njen odvod v določeni točki krivulje sicer napovedujeta približno obnašanje funkcije v neposredni bližini izbrane točke, vendar pa ta podatka ne zadostujeta, če želimo vedeti kaj več, kako se funkcija naprej spreminja. Če je odvod konstanten, vemo, da se funkcija linearno spreminja z x (Sl. 0.10a). V večini primerov pa se odvod spreminja. Kadar se odvod povečuje, se strmina tangente povečuje in krivulja se krivi navzgor (Sl. 0.10b). Navzdol (konveksno) zakrivljena krivulja pomeni, da se odvod zmanjšuje z večjim x, saj je tangens naklonskega kota manj in manj pozitiven (Sl. 0.10c). Dobro bi bilo vedeti, kako se odvod spreminja z x, ter posebno spreminjanje odvoda znati računati.

Odvod (dy/dx) neke funkcije je sam po sebi tudi funkcija x in ga zato lahko odvajamo. Dobljeni odvod imenujemo **drugi odvod funkcije** y **in ga** označimo z:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d^2y}{dx^2} = \text{drugi odvod } y \text{ po } x$$

Odvod funkcije y, dy/dx, imenujemo tudi **prvi odvod funkcije** y, da ga razlikujemo od drugega odvoda.

Drugi odvod funkcije (d^2y/dx^2) je pozitiven, če prvi odvod te funkcije z x narašča, to je, če je tangenta bolj in bolj strma. To velja pri navzgor (konkavno) ukrivljeni krivulji. Na ravnem delu krivulje $y(x)$ je prvi odvod konstanten, zatorej je drugi odvod nič. Drugi odvod linearne funkcije (premice) je vedno nič. Navzdol ukrivljeni krivulji ustreza negativni drugi odvod (Sl. 0.9c).

Medtem ko prvi odvod funkcije izraža tangens naklonskega kota tangente na krivuljo, pa lahko drugi odvod funkcije povežemo z ukrivljenostjo krivulje. Čim večji je drugi odvod, tem bolj je krivulja zakrivljena, in sicer je zakrivljena navzgor, če je drugi odvod pozitiven, ter navzdol pri negativnem drugem odvodu (gl. Sl. 0.9!).

Drugi odvod funkcije $y(x)$ izračunamo tako, da najprej izračunamo njen prvi odvod, dy/dx, ter dobljeni odvod (ki je funkcija x!) ponovno odvajamo. Drugi odvod je torej odvod odvoda funkcije.

Primer:

Izračunaj drugi odvod funkcije $y = x^n$!

Prvi odvod te funkcije že poznamo iz prejšnjega primera: $dy/dx = nx^{n-1}$. Pri ponovnem odvajanju lahko ponovno uporabimo obrazec za odvajanje potenčne funkcije, le da število n nadomestimo z $n - 1$. Dobimo:

$$d^2y/dx^2 = n(n-1)x^{n-2}$$

Pri $n = 1$ se funkcija $y = x^n$ poenostavi v premico $y = x$, katere drugi odvod je zares nič.

Drugi odvod funkcije je funkcija x in ga lahko naprej odvajamo, pri čemer dobimo **tretji odvod**, ki je ravno tako funkcija x itd. Vendar višji odvodi nimajo preprostega geometrijskega pomena in v fiziki ne nastopajo pogosto. V glavnem bomo uporabljali prvi in drugi odvod funkcije.

Prvi odvod in posebno višje odvode je nerodno pisati, če primanjkuje prostora, zato se je udomačila krajša pisava:

$dy/dx = y'(x)$, $d^2y/dx^2 = y''(x)$,
$dy^3/dx^3 = y'''(x)$ ali $y^{(3)}(x)$ ter splošno:
$d^ny/dx^n = y^{(n)}(x)$

Apostrof nad funkcijo pomeni odvajanje funkcije po spremenljivki, ki je v oklepaju.

Parcialni odvod. Zgoraj smo govorili o odvajanju funkcije ene spremenljivke. Odvajamo lahko tudi funkcijo, ki je odvisna od več spremenljivk hkrati. Funkcijo $z(x, y)$ npr. odvajamo po x tako, da si mislimo y konstanten. Dobljeni odvod imenujemo **parcialni odvod funkcije z po x**; označujemo ga z $\partial z/\partial x$. Isto funkcijo z lahko odvajamo tudi po drugi spremenljivki y, pri čemer ohranjamo x konstanten; dobimo parcialni odvod funkcije z po y: $\partial z/\partial y$.

Pravila za parcialno odvajanje so enaka kot pri odvajanju funkcije ene spremenljivke, ravno tako ima parcialni odvod podoben geometrijski pomen kot navadni odvod. Razlika je le v tem, da se v parcialnem odvodu nahaja dodatna spremenljivka, ki jo obravnavamo kot spreminjajoči se parameter.

Funkcija dveh spremenljivk ima štiri druge odvode:

1. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right) \rightarrow$ dvakrat zapored odvajamo po x, pri konstantnem y.
2. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right) \rightarrow$ funkcijo z najprej pri stalnem y odvajamo po x, dobljeni parcialni odvod $\partial z/\partial x$ še enkrat odvajamo — tokrat po y.
3. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right) \rightarrow$ funkcijo z najprej odvajamo po y, dobljeni parcialni odvod $\partial z/\partial y$ pa še po x.
4. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right) \rightarrow$ dvakrat zapored odvajamo po y; x je stalen.

Primer:

Poišči prve in druge parcialne odvode funkcije $z = x^3 + y^2 + xy$!

$\partial z/\partial x = 3x^2 + y$, $\partial z/\partial y = 2y + x$,

$$\partial^2 z/\partial x^2 = \frac{\partial}{\partial x}(3x^2 + y) = 6x,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(3x^2 + y) = 1, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(2y + x) = 1,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}(2y + x) = 2$$

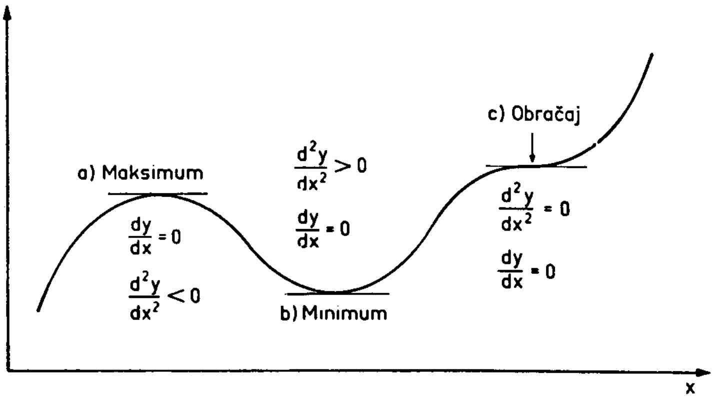
EKSTREM FUNKCIJE

V fiziki večkrat naletimo na nalogo, da moramo ugotoviti, pod kakšnimi pogoji neka fizikalna količina doseže največjo oz. najmanjšo vrednost.

8

V matematičnem jeziku to pomeni, da moramo poiskati ekstrem funkcije, ki predstavlja fizikalno količino.

Funkcija dosega v neki točki maksimum, če je vrednost funkcije v tej točki večja kot v sosednjih točkah. Iz tega sledi, da je v maksimumu tangenta na krivuljo (če ta obstaja, to je če je funkcija v tej točki odvedljiva) vodoravna in da je krivulja v neposredni okolici maksimuma zakrivljena navzdol (Sl. 0.11 a). Matematično to pomeni, da je v maksimumu prvi odvod funkcije nič, drugi odvod pa negativen:



Sl. 0.11

$dy/dx = 0$ in $d^2y/dx^2 < 0$	Zadosteń pogoj za maksimum funkcije	(0.3)

Minimum funkcije je v točki, v kateri je vrednost funkcije najmanjša. Če se kakorkoli premaknemo iz minimuma, se vrednost funkcije poveča. Krivulja ima tam obliko jame — je zakrivljena navzgor in tangenta na krivuljo v minimumu je vodoravna (Sl. 0.11 b). Iz tega sledi naslednji pogoj:

$dy/dx = 0$ in $d^2y/dx^2 > 0$	Minimum funkcije	(0.4)

Zapleti nastopijo, če je v točki ekstrema, kjer je prvi odvod nič, tudi drugi odvod nič: $d^2y/dx^2 = 0$. V takih primerih preiščemo, ali ima funkcija v tej točki minimum ali maksimum, najpreprosteje tako, da ugotovimo predznak prvega odvoda v okolici točke. Minimum ali maksimum dobimo, če je predznak prvega odvoda na eni strani ekstrema drugačen kot na drugi strani. Ako je predznak prvega odvoda na obeh straneh isti (npr. pozitiven, Sl. 0.11 c), funkcija v tej točki (ki se imenuje **obračajna točka**) nima ne maksimuma ne minimuma. V obračajni točki se predznak drugega odvoda spremeni — levo od te točke je funkcija npr. zakrivljena navzdol, desno pa navzgor, ali obratno. Krivulja ima obliko skakalnice.

Primera:

a) Funkcija $y = (x - a)^2$ ima v točki $x = a$ minimum, ker za to točko velja: $dy/dx = 2(x - a) = 0$ in $d^2y/dx^2 = 2 > 0$.
b) $y = x^3$. Tangenta te krivulje je vodoravna v točki $x = 0$, kjer je $dy/dx = 3x^2 = 0$. Ker je za $x = 0$ tudi drugi odvod nič: $d^2y/dx^2 =$

$6x = 0$, moramo raziskati predznak prvega odvoda na obeh straneh točke $x = 0$. Ta je pozitiven tako za negativne kot za pozitivne x, zatorej funkcija $y = x^3$ v točki $x = 0$ nima ne minimuma ne maksimuma.

TAYLORJEVA VRSTA

Večkrat je ugodno, če lahko predvidimo obnašanje funkcije za poljuben x, poznavajoč le lastnosti funkcije za določen x, npr. za $x = 0$. Količine, ki določajo obnašanje funkcije, so vsi njeni odvodi. Vemo, da prvi odvod funkcije pove, kako strmo funkcija narašča, drugi odvod pa, kako je krivulja funkcije zakrivljena. Ostali višji odvodi opisujejo bolj podrobno spreminjanje funkcije, ki ga ne znamo nazorno-geometrijsko predstaviti. Zatorej je načelno možno povezati funkcijo z njenimi odvodi v taki obliki, da lahko ocenimo vrednost funkcije za poljubno vrednost spremenljivke x. Izkaže se, da lahko vsako (dovolj pohlevno!) funkcijo izrazimo s potenčno vrsto, v kateri nastopajo odvodi funkcije. Takšno vrsto imenujemo **Taylorjeva vrsta.**

Taylorjeve vrste ne bomo splošno dokazali, pač pa jo bomo izpeljali preko enostavnih primerov.

Najprej vzemimo najenostavnejšo funkcijo — linearno funkcijo: $y(x) = kx + n$. Prvi odvod te funkcije je konstanten: $y'(x) = k = y'(0)$, vsi višji odvodi pa so nič. Ker je parameter n enak vrednosti funkcije za $x = 0$, to je $y(0)$, lahko zapišemo: $y(x) = y(0) + x \cdot y'(0)$.

Vrednost funkcije in njen odvod v točki $x = 0$ potemtakem popolnoma določata linearno funkcijo za poljuben x. To je zato, ker je funkcija linearna in so vsi višji odvodi nič. Pri bolj zapleteni funkciji vrednost funkcije in njen prvi odvod prav gotovo ne zadoščata; potrebni so še višji odvodi, ki povedo, kako se krivulja krivi in spreminja.

Naslednji primer: $y(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$. Odvodi te funkcije so: $y'(x) = b + 2cx + 3dx^2$, $y''(x) = 2c + 6dx$, $y^{(3)}(x) = 6d$, $y^{(4)}(x) =$ itd. $= 0$. V točki $x = 0$ velja; $y'(0) = b$, $y''(0) = 2c$, $y^{(3)}(0) = 6d$. Če parametre a, b, c in d, ki določajo zgornjo funkcijo, nadomestimo z odvodi te funkcije v točki $x = 0$, dobimo:

$$y(x) = y(0) + xy'(0) + (x^2/2)y''(0) + (x^3/6)y^{(3)}(0)$$

V tem primeru so bili za popoln opis funkcije potrebni prvi trije odvodi. Če je funkcija še bolj zapletena (npr. nima oblike preprostega polinoma), moramo dodati še višje odvode. Izkaže se, da lahko poljubno funkcijo, ki je zvezna in ima zvezne odvode, izrazimo z vrsto potenc x, v kateri nastopajo vsi odvodi funkcije v točki $x = 0$.

Taylorjeva vrsta za neko funkcijo $y(x)$ se glasi:

$$\boxed{\begin{aligned} y(x) = y(0) + (x/1!)y'(0) + (x^2/2!)y''(0) + \ldots +\\ + (x^n/n!)y^{(n)}(0) + \ldots \end{aligned}} \qquad (0.5)$$

Izraz $n!$ beremo n-faktoriela in predstavlja večkratni produkt: $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1)n$; $1! = 1$, $2! = 2$, $3! = 6$ itd.

Taylorjeva vrsta za določeno funkcijo $y(x)$ je mnogokrat bolj primerna kot sama funkcija $y(x)$, posebno če je argument funkcije majhen, da lahko člene z višjimi potencami x zanemarimo.

Primera:

a) Taylorjevo vrsto ste gotovo že uporabljali v srednji šoli, le da je niste imenovali s tem imenom. Mislim na vsoto neskončnega geometrijskega zaporedja: $1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$, ki je $1/(1-x)$, s pogojem da je $|x| < 1$. Taylorjevo vrsto za funkcijo $y(x) = 1/(1-x)$ potemtakem lahko zapišemo v obliki: $1/(1-x) = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots$.
Ta vrsta velja le, če je absolutna vrednost x manjša od 1.

b) Napiši Taylorjevo vrsto za funkcijo $y(x) = (1+x)^{1/2}$! Najprej moramo poiskati odvode te funkcije:

$y'(x) = (1/2)(1+x)^{-1/2}, \quad y'(0) = 1/2$
$y''(x) = (-1/4)(1+x)^{-3/2}, \quad y''(0) = -1/4$
$y^{(3)}(x) = (3/8)(1+x)^{-5/2}, \quad y^{(3)}(0) = 3/8$
itd.

Iz enačbe (0.5) potem dobimo:

$$(1+x)^{1/2} = 1 + x/2 - x^2/8 + x^3/16 \ldots$$

To vrsto lahko koristno uporabimo npr., če moramo izračunati kvadratne korene števil, ki so blizu 1, npr. $\sqrt{1{,}004} = \sqrt{1+x}$, $x = 0{,}004$.

$$\sqrt{1{,}004} = 1 + 0{,}004/2 - 0{,}004^2/8 + 0{,}004^3/16 - \ldots =$$
$$= 1 + 0{,}002 - 0{,}000002 + 0{,}000000004 \ldots$$

Če smo zadovoljni z natančnostjo na pet decimalnih mest, lahko pri zgornji vrsti obdržimo le prva člena. Dobimo: $\sqrt{1{,}004} = 1{,}00200$. Na podoben način lahko ugotovimo, da velja; $\sqrt{0{,}9998} \approx 0{,}9999$

Navedimo prve člene Taylorjevih vrst nekaterih najpomembnejših funkcij, ki jih bomo pri predavanjih večkrat uporabljali. Pri vsaki Taylorjevi vrsti si moramo zapomniti območje veljavnosti, to je interval, v katerem se lahko spreminja x, da je vrsta veljavna.

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{1}{2!}n(n-1)x^2 + \frac{1}{3!}n(n-1)(n-2)x^3 + \ldots + x^n, \quad |x| < 1$$

$$(1+x)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4}x^2 + \frac{1 \cdot 1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 - \frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}x^4 + \ldots, \quad |x| < 1$$

$$(1+x)^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^2 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}x^4 - \ldots, \quad |x| < 1$$

$$\left.\begin{aligned}
\sin x &= x - x^3/3! + x^5/5! - \ldots \\
\cos x &= 1 - x^2/2! + x^4/4! + \ldots \\
\operatorname{tg} x &= x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \frac{62}{2835}x^9 + \ldots \\
e^x &= 1 + x/1! + x^2/2! + x^3/3! + \ldots
\end{aligned}\right\} \text{ poljuben } x \qquad (0.6)$$

$$\ln(1+x) = x - x^2/2 + x^3/3 - x^4/4 + \ldots, \qquad -1 < x \leq 1$$

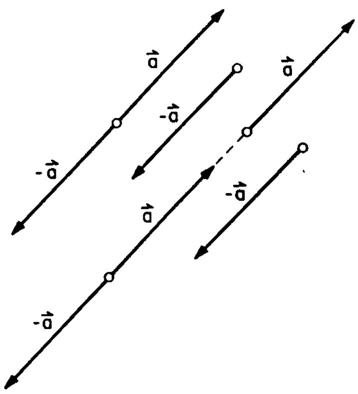
VEKTORJI

Fizikalne količine lahko razdelimo v dve skupini — v skalarje in vektorje. **Skalarji** so količine, katerih vrednost je neodvisna od smeri, pri katerih smer ni pomembna. Skalarji so npr. količine: cena, masa, temperatura, delo, moč itd. Dovolj je, če povemo, da je masa nekega telesa 1 kg; ni treba omenjati smeri, v kateri moramo opazovati, da je masa telesa zares 1 kg. Podobno je s temperaturo; temperatura na nekem mestu je toliko in toliko stopinj, ne glede na smer opazovanja.

Drugače je pri vektorskih količinah. **Vektor** je določen, če podamo njegovo vrednost (velikost, dolžino, absolutno vrednost) in smer. Ako npr. rečemo, da je neki kraj oddaljen od nas 10 km, je lega tega kraja določena, če še povemo, v kateri smeri je treba meriti ali prehoditi teh 10 km, da pridemo do kraja. Pot je torej vektor. Vektorji so tudi: hitrost, pospešek, sila, električna poljska jakost itd.

Vektor predstavimo s puščico, katere dolžina izraža velikost vektorja, smer puščice pa ponazarja njegovo smer. Vektorsko lastnost neke količine (npr. a) označujemo z majhno puščico, ki jo pišemo nad količino (npr. $\vec{a}$ ali $\vec{a}$) ali pa z mastnim tiskom (**a**); količina a (brez puščice) je velikost vektorja. Domenimo se, da bomo vektorski značaj neke količine označili z mastnim tiskom količine, pri slikah pa s puščico.

Vektorja sta enaka, če se ujemata v velikosti in smeri. Iz tega sledi, da lahko vektor paralelno (translatorno) premikamo ali pomikamo vzdolž lastne smeri, ne da se pri tem spremeni (Sl. 0.12). Vektorja **a** in —**a** sta enaka po dolžini, po smeri pa ravno nasprotna; s predznakom minus označimo nasprotno smer vektorja.



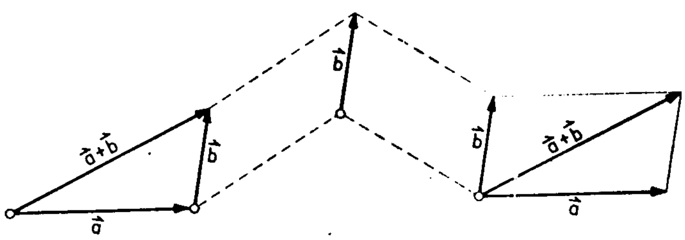
Sl. 0.14

Enotni vektor (vektor enote). Vsakemu vektorju **a** lahko pripišemo enotni vektor (označimo ga z **â**), ki kaže v isto smer kot sam vektor **a**, njegova dolžina pa je enota. Potemtakem lahko vsak vektor **a** zapišemo v obliki:

$$\mathbf{a} = a\hat{\mathbf{a}}$$

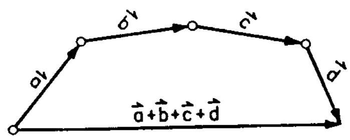
Enotni vektor **â** podaja smer vektorja **a**, skalar a pa njegovo velikost.

Seštevanje in odštevanje vektorjev. Pri seštevanju dveh vektorjev, npr. **a** in **b**, najprej drugi vektor (npr. **b**) vzporedno premaknemo, da njegova začetna točka sovpada s končno točko prvega vektorja (**a**). Vsota obeh vektorjev je vektor (**a** + **b**), ki vodi od začetne točke prvega vektorja do končne točke drugega vektorja (Sl. 0.13a). Pravilo seštevanja dveh vektorjev lahko razširimo na poljubno število vektorjev. Vektorje translatorno premaknemo, da tvorijo nekakšno verigo (Sl. 0.14). Vsota vseh vektorjev je vektor, katerega začetna točka sovpada z začetno točko prvega vektorja, končna točka pa s končno točko zadnjega vektorja.

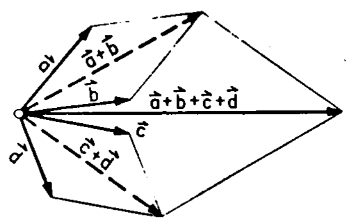


a) b)

Sl. 0.13



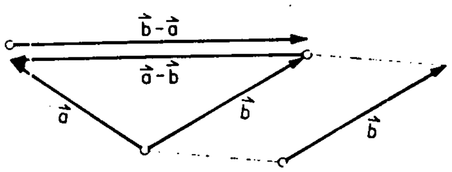
Sl. 0.12



Sl. 0.15

Vektorje lahko seštevamo še na drug način, ki mora seveda dati enak rezultat. Vektorje translatorno premaknemo, tako da njihove začetne točke sovpadajo, nakar jih seštevamo v parih. Dvojica vektorjev tvori paralelogram, katerega diagonala je ravno vektor vsote obeh vektorjev (Sl. 0.13b in Sl. 0.15).

Vektorje odštevamo v parih. Vektor **b** odštejemo od vektorja **a** tako, da ga najprej translatorno premaknemo do skupnega izhodišča obeh vektorjev. Vektor, ki povezuje končni točki obeh vektorjev, je vektor razlike, to je **a** — **b**, če kaže od vektorja **b** do vektorja **a**, in **b** — **a**, če kaže v nasprotno smer (Sl. 0.16). Takšno pravilo za odštevanje vektorjev je v skladu s pravilom seštevanja, kajti vsota vektorjev **b** in (**a** — **b**) je zares vektor **a**.



Sl. 0.16

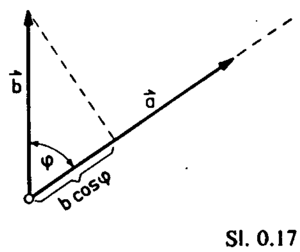
Množenje vektorjev. Množenje vektorja s skalarjem spremeni le absolutno vrednost (dolžino) vektorja, njegova smer pa ostane ista:

$$c\mathbf{a} = ca\hat{\mathbf{a}} = (ca)\hat{\mathbf{a}}$$

Medsebojno množenje dveh vektorjev lahko dá kot rezultat skalar ali vektor; v prvem primeru govorimo o skalarnem produktu, v drugem primeru o vektorskem produktu vektorjev.

Skalarni produkt vektorjev **a** in **b** označimo z $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ ali kar **ab**; po definiciji je enak skalarju $ab\cos\varphi$, pri čemer je φ kót, ki ga oklepata smer vektorja **a** in smer vektorja **b**:

$$\boxed{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = ab\cos\varphi} \qquad (0.15)$$



Sl. 0.17

S slike (0.17) je razvidno, da je skalarni produkt dveh vektorjev enak produktu dolžine enega vektorja (npr. a) in projekcije drugega vektorja na smer prvega vektorja ($b\cos\varphi$). Kadarkoli naletimo na skalarno količino oblike $ab\cos\varphi$, lahko takšno količino na kratko označimo s skalarnim produktom vektorjev **a** in **b**, to je kot $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$, če je le φ kót med obema vektorjema. Lahko se prepričamo, da je skalarni produkt vektorjev komutativen (to je, da lahko faktorja zamenjamo):

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \mathbf{b}\cdot\mathbf{a}$$

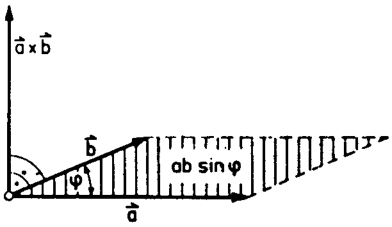
Skalarni produkt dveh vektorjev je pri danih dolžinah obeh vektorjev največji v primeru, če oba vektorja kažeta v isto smer ($\varphi = 0$), in je nič, če sta vektorja pravokotna drug na drugega ($\varphi = 90°$). Skalarni produkt dveh enakih vektorjev je kvadrat vrednosti enega vektorja:

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{a} = a^2$$

Če vektorja oklepata topi kót ($\varphi > 90°$), je njun skalarni produkt negativen.

Vektorski produkt vektorjev **a** in **b** označimo $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$, po definiciji je enak vektorju, ki je pravokoten na oba vektorja **a** in **b**, po velikosti pa je enak produktu $ab\sin\varphi$, kar je ploščina paralelograma, ki ga tvorita vektorja (Sl. 0.18):

$$\boxed{|\mathbf{a}\times\mathbf{b}| = ab\sin\varphi} \qquad (0.16)$$



Sl. 0.18

Smer vektorskega produkta dobimo s pravilom desnosučnega vijaka: prvi vektor (**a**) z desno roko zasukamo po najkrajši poti, da sovpade z drugim vektorjem (**b**); kamor se pri tem zasuku premakne desni vijak, tja kaže smer vektorskega produkta $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$. Iz takšne definicije sledi, da vektorski produkt ni komutativen, saj ima produkt $\mathbf{b} \times \mathbf{a}$ ravno nasprotno smer kot produkt $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, to je:

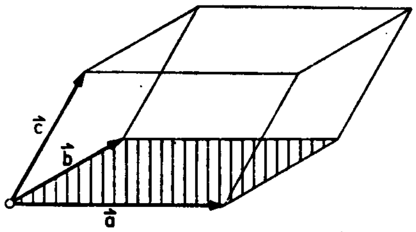
$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a} \tag{0.17}$$

Vektorski produkt dveh vektorjev je nič ne le, če je eden od vektorjev nič, ampak tudi če vektorja kažeta v isto smer ($\varphi = 0$), saj je v tem primeru ploščina paralelograma ($ab \sin\varphi$) nič. Vektorski produkt je pri danih dolžinah vektorjev največji v primeru, če sta vektorja pravokotna drug na drugega ($\varphi = 90°$).

Tako vektorski kot skalarni produkt sta asociativna, kar sledi iz preprostega dejstva, da se ploščine in projekcije seštevajo:

$$(\mathbf{a} \pm \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} \pm \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$$

$$(\mathbf{a} \pm \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = (\mathbf{a} \times \mathbf{c}) \pm (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$$

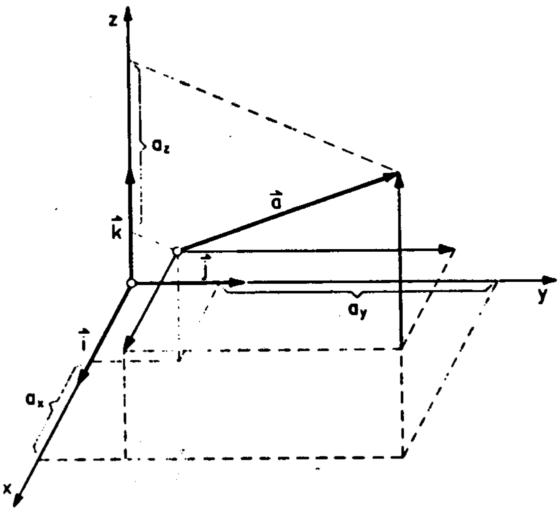


Sl. 0.19

Mešani produkt: $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$ je skalar, katerega vrednost je enaka prostornini paralelopipeda, ki ga definirajo vektorji **a**, **b** in **c** (Sl. 0.19). Vektorski produkt $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ je pravokoten na osnovno ploskev, ki jo omejujeta vektorja **a** in **b**, po dolžini pa je enak ploščini osnovne ploskve. Če ta produkt skalarno pomnožimo z vektorjem **c** tretje stranice paralelopipeda, dobimo produkt ploščine osnovne ploskve in višine paralelopipeda, kar je prostornina paralelopipeda. Ker se prostornina ne spremeni, če paralelopiped prevrnemo na kakšno drugo ploskev, velja:

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} \tag{0.18}$$

Komponente vektorja. Položaj vektorja v prostoru narišemo v določenem koordinatnem sistemu. Koordinatni sistem določajo tri med seboj pravokotne osi x, y, z, katerih smeri podajajo enotni vektoji **i**, **j**, **k**; enotni vektor **i** kaže v smer osi x, **j** v smer osi y in **k** v smer osi z. Ker so enotni vektorji **i**, **j** in **k** drug na drugega pravokotni, velja:



Sl. 0.20

$$\begin{aligned} &\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1 \\ &\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{i} = 0 \\ &\mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{k} = 0 \\ &\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}, \quad \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}, \quad \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \end{aligned} \tag{0.19}$$

(Gl. definicijo skalarnega in vektorskega produkta, 0.15 in 0.16!)

Velikost vektorja in njegovo usmerjenost v prostoru lahko predstavimo s projekcijami dolžine vektorja na posamezne koordinatne osi (Sl. 0.20). Recimo, da je a_x dolžina projekcije (sence) vektorja **a** na os x, a_y dolžina projekcije vektorja na os y in a_z na os z. Trojico števil (a_x, a_y, a_z) imenujemo komponente vektorja **a**. Vektor **a** potemtakem lahko zapišemo kot vsoto treh vektorjev: $a_x\mathbf{i}$, $a_y\mathbf{j}$ in $a_z\mathbf{k}$:

$$\boxed{\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}} \tag{0.20}$$

Dolžino vektorja dobimo po Pitagorovem izreku (je diagonala kvadra s stranicami a_x, a_y in a_z):

$$a = |\mathbf{a}| = (a_x^2 + a_y^2 + a_z^2)^{1/2} \tag{0.21}$$

Tudi seštevanje, odštevanje in množenje vektorjev lahko izvršimo v komponentni obliki. Naj bodo števila b_x, b_y in b_z komponente vektorja **b**! Potem velja:

$$\mathbf{a} \pm \mathbf{b} = (a_x \pm b_x)\mathbf{i} + (a_y \pm b_y)\mathbf{j} + (a_z \pm b_z)\mathbf{k} \qquad (0.22)$$

Vektorje seštevamo oz. odštevamo tako, da seštevamo oz. odštevamo ustrezne komponente posameznih vektorjev.

$$n\mathbf{a} = (na_x)\mathbf{i} + (na_y)\mathbf{j} + (na_z)\mathbf{k} \qquad (0.23)$$

Pri množenju vektorja s skalarjem moramo vsako komponento vektorja pomnožiti s skalarjem. Dobljeni vektor ima enako smer kot prvotni vektor, le njuni dolžini se razlikujeta za konstantni faktor.

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k})\,(b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j} + b_z\mathbf{k}),$$
$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}) \times (b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j} + b_z\mathbf{k}).$$

Upoštevaje enačbe (0.19), ki jim enotni vektorji **i**, **j** in **k** zadoščajo, dobimo:

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} &= a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z, \\ \mathbf{a} \times \mathbf{b} &= (a_y b_z - a_z b_y)\mathbf{i} + (a_z b_x - a_x b_z)\mathbf{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\mathbf{k}. \end{aligned}} \qquad \begin{aligned} (0.24) \\ (0.25) \end{aligned}$$

Skalarni produkt dveh vektorjev je vsota produktov ustreznih komponent obeh vektorjev. Vektorski produkt dveh vektorjev je bolj zapleten. Vzemimo kot posebni primer, da vektor **a** kaže v smeri osi x ($a_x = a$, $a_y = a_z = 0$), vektor **b** pa v smeri osi y ($b_x = b_z = 0$, $b_y = b$). Njun skalarni produkt je nič (kar sledi tudi iz enačbe 0.24). Njun vektorski produkt kaže v smeri osi z in je po velikosti enak ploščini pravokotnika (ab); iz enačbe (0.25) dobimo:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = ab\mathbf{k}$$

Primer:

Prepričaj se s pomočjo vektorskih komponent, da velja naslednja zveza:

$$\mathbf{c} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{b} \cdot (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})! \qquad (0.26)$$

Vektorski produkt ($\mathbf{a} \times \mathbf{b}$) najprej napišemo v komponentni obliki (0.25) in ga obravnavamo kot nov vektor, ki ga vektorsko pomnožimo z vektorjem **c**:

$$\begin{aligned} \mathbf{c} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = {} & [c_y(a_x b_y - a_y b_x) - c_z(a_z b_x - a_x b_z)]\mathbf{i} + \\ & + [c_z(a_y b_z - a_z b_y) - c_x(a_x b_y - a_y b_x)]\mathbf{j} + \\ & + [c_x(a_z b_x - a_x b_z) - c_y(a_y b_z - a_z b_y)]\mathbf{k} = \\ & = a_x(b_y c_y + c_z b_z)\mathbf{i} - b_x(a_y c_y + a_z c_z)\mathbf{i} + \\ & + a_y(b_z c_z + c_x b_x)\mathbf{j} - b_y(a_z c_z + a_x c_x)\mathbf{j} + \\ & + a_z(b_x c_x + c_y b_y)\mathbf{k} - b_z(a_x c_x + a_y c_y)\mathbf{k} \end{aligned}$$

V prvi vrsti desne strani zadnje enačbe prištejemo in odštejemo $a_x b_x c_x \mathbf{i}$, v drugi vrsti $a_y b_y c_y \mathbf{j}$ in v zadnji vrsti $a_z b_z c_z \mathbf{k}$, tako da lahko zapišemo:

$$\begin{aligned} \mathbf{c} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = {} & (a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k})\,(b_x c_x + b_y c_y + b_z c_z) - \\ & - (b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j} + b_z\mathbf{k})\,(a_x c_x + a_y c_y + a_z c_z) = \\ & = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{b} \cdot (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}), \end{aligned}$$

kar smo morali dokazati.