Newton-ovi zakoni

Isaac Newton
(1643 – 1727)

Telesa se gibljejo zaradi vpliva drugih teles na obravnavano telo. Vzrok gibanja torej običajno leži v interakciji med telesi. V okolici opazovanega telesa je navadno mnogo teles, kar naredi analizo gibanja teles težavno. To je najbrž tudi vzrok, da je šele sir Isaac Newton v drugi polovici 17. stoletja uspel dobro definirati temeljne zakone (sedaj jih imenujemo Newton-ovi zakoni) klasične dinamike (dynamis (gr.) = sila), ki jih je objavil v knjigi z naslovom Matematična načela naravoslovja. Tri Newton-ove zakone za določanje gibanja točkastih teles lahko opišemo z besedami:

I. Vsako telo vztraja v stanju mirovanja ali enakomernega gibanja po ravni črti, če ne deluje nanj nobena sila.

II. Sprememba gibanja telesa je sorazmerna sili, ki deluje na telo in ima smer te sile.

III. K vsaki sili (akciji) ostaja vedno nasprotno enaka sila (reakcija); ali drugače, če deluje prvo telo na drugo telo z neko silo, deluje drugo telo na prvo telo z enako veliko silo v nasprotni smeri.

K zgornjim Newton-ovim zakonom podajmo še definiciji sile in telesa:

Sila je količina, ki meri vpliv enega telesa na drugo telo.
Telo je vsak del snovi, ki ga lahko vsaj teoretično ločimo od okolice.

Drugi Newton-ov zakon izrazimo v matematični obliki kot:

$$\vec{F} = m\,\vec{a}\,, \tag{1}$$

oziroma

$$\vec{F} = \frac{\mathrm{d}\left(m\,\vec{v}\right)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{G}}{\mathrm{d}t}\,, \tag{2}$$

PHILOSOPHIÆ NATURALIS PRINCIPIA MATHEMATICA

Autore *JS.* NEWTON, *Trin. Coll. Cantab. Soc.* Matheseos Professore *Lucasiano*, & Societatis Regalis Sodali.

IMPRIMATUR.

S. PEPYS, *Reg. Soc.* PRÆSES.

Julii 5. 1686.

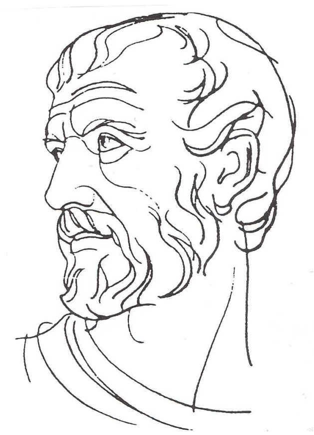
LONDINI,

Jussu *Societatis Regiæ* ac Typis *Josephi Streater*. Prostant Venales apud *Sam. Smith* ad insignia Principis *Walliæ* in Cœmiterio D. *Pauli*, aliosq; nonnullos Bibliopolas. *Anno* MDCLXXXVII.

kjer je m (vztrajnostna) masa točkastega telesa, ki meri vztrajnost telesa pri spremembi hitrosti telesa, $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$ je pospešek točkastega telesa, $\vec{v}$ je hitrost,

$$\vec{G} = m\vec{v} , \tag{3}$$

pa gibalna količina točkastega telesa. Masa opisuje množino snovi in je aditivna količina. Enota za maso je kilogram (kg). V klasični fiziki velja tudi zakon o ohranitvi mase. Iz vsakdanjih izkušenj po občutku tudi vemo, da **masivnejšemu** telesu težje spremenimo hitrost kot manj masivnemu. Na primer, ping-pong žogici lažje spremenimo hitrost kot košarkarski žogi ali železniškemu vagonu. Pri obravnavi Newtonovih zakonov je treba poudariti, da je do časa renesanse namesto drugega Newtonovega zakona veljal **Aristotelov zakon gibanja**.



Aristotel
(384 – 322 pred n. št.)

Aristotel je delil gibanje teles na **naravna** in **vsiljena** gibanja. Naravna gibanja, takó je po Aristotelu na primer gibanje planetov, ne potrebuje nobene sile. Vsiljeno gibanje, na primer premikanje voza, pa vedno potrebuje za svoje vzdrževanje od nič različno zunanjo silo (zunanji vzrok). Aristotel kot primer navaja, da dva konja vlečeta voz hitreje kot en konj. Če pa niti eden konj ni vprežen v voz, se ta ne giblje. V skladu s tem razmišljanjem je Aristotel prišel do zaključka, da je vzdrževanje **enakomernega** gibanja (t.j. konstantne hitrosti) vedno potrebna sila. Aristotelov zakon gibanja bi lahko zato matematično izrazili kot

$$F \propto v \quad ,$$

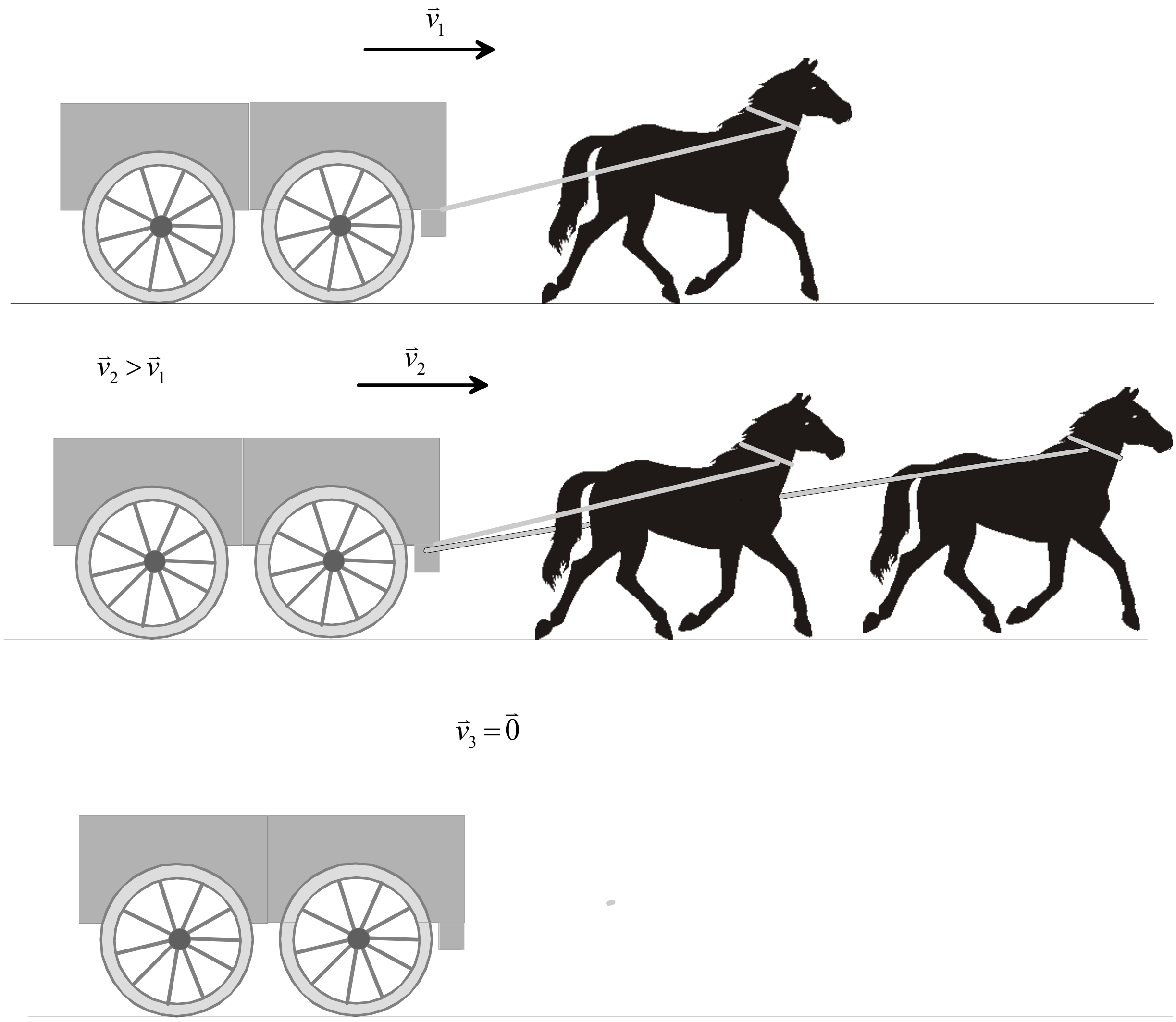
oziroma

$$v \propto F \quad ,$$

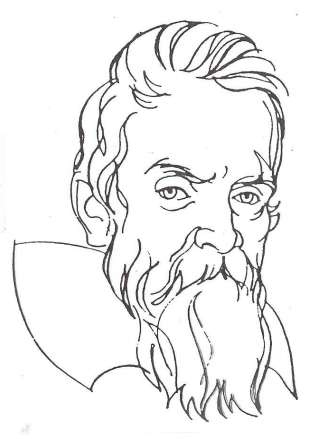
to je hitrost je sorazmerna sila, kar seveda ni pravilno. Vidimo, da je Aristotel pozabil na sile upora in silo trenja. Za vzdrževanje enakomerne hitrosti telesa je namreč sila potrebna zato, da premaguje silo upora in silo trenja. Če sile upora in sile trenja ni (n.pr. pri gibanju telesa v vakuumu v breztežnem prostoru) za vzdrževanje konstantne hitrosti telesa, ki se giblje po ravni črti ni potrebna sila, kar je vsebina I. Newtonovega zakona.

Kako je razmišljal Aristotel?

Newton.dsf



Premik od Aristotelovega napačnega razmišljanja je naredil **Galileo Galilei**, ki je prišel do zaključka, da za vzdrževanje konstantne hitrosti telesa ni nujno potrebna tudi sila. Pač pa je sila potrebna, da telo ustavimo, to je za spremembo hitrosti.



Galileo Galilei
(1564 – 1642)

Galileo dejansko nikoli ni prišel do zaključka, da se telo v odsotnosti sil giblje s konstantno hitrostjo po ravni črti. Vsebino I. Newtonovega zakona je prvi formuliral francoski matematik in filozof **René Descartes** (1596 – 1650). Latinska varianta Descartesovega priimka (Cartezius) je dala ime kartezičnemu koordinatnemu sisitemu, ki ima paroma pravokotne osi x, y in z.

René Descartes
(1596 – 1650)

Na osnovi povedanega lahko torej zaključimo, da v okviru Newtonovega opisa gibanje teles za vzdrževanje stalne hitrosti ni potrebna sila. Pač pa je sila potrebna za spremembo hitrosti, to je za pospešek (pojemek) telesa. Z drugimi besedami, vzrok za spremembo hitrosti imenujemo silo. Masivnejšemu telesu težje spremenimo hitrost, zato rečemo masi m tudi vztrajnostna masa. Sila je aditivna vektorska količina.

Sile med telesi so običajno centralne, to se pravi, da delujejo na zveznici, ki povezuje dve točkasti telesi. Primer centralnih sil je Coulombska elektrostatska sila, ki deluje med točkastima nabojema e_1 in e_2:

$$\vec{F} = \frac{e_1 e_2}{4\pi \varepsilon_0 r^2} \frac{\vec{r}}{r}, \tag{4}$$

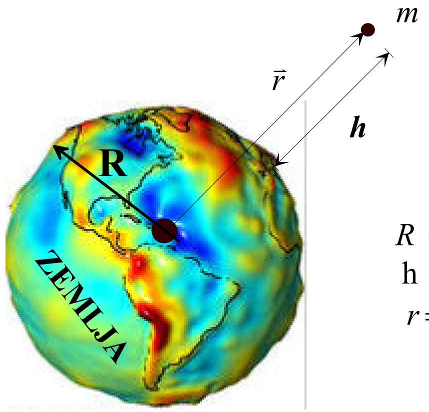
kjer je ε_0 influenčna konstanta, r pa razdalja med nabojema, ali pa gravitacijska privlačna sila med dvema točkastima masama m_1 in m_2 na razdalji r:

$$\vec{F} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}, \tag{5}$$

kjer je G gravitacijska konstanta. V primeru gravitacijske sile med Zemljo z maso M_Z in točkastim telesom z maso m je gravitacijska sila

$$\vec{F}_g = -G \frac{M_Z m}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}, \tag{6}$$

kjer je r razdalja od središča Zemlje do točkastega telesa.



$R \equiv$ polmer Zemlje
h $\equiv$ nadmorska višina
$r = R + h$

Velikost gravitacijske privlačne sile, ki deluje na maso *m* lahko zapišemo tudi v obliki (glejte sliko):

$$F_g = G\frac{M_Z m}{r^2} = G\frac{M_Z m}{(R+h)^2}\frac{R^2}{R^2} = mg\,, \tag{7}$$

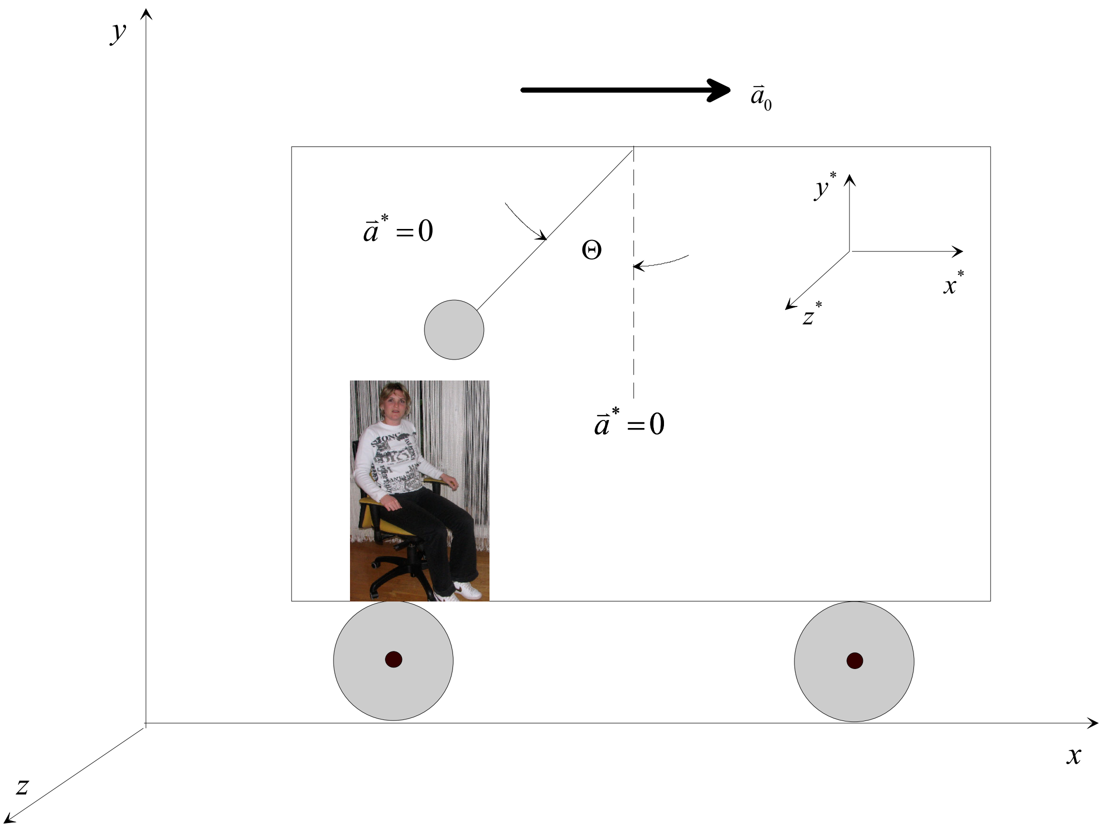
kjer je gravitacijski pospešek *g*:

$$g = g_0 \frac{R^2}{(R+h)^2}\,, \tag{8}$$

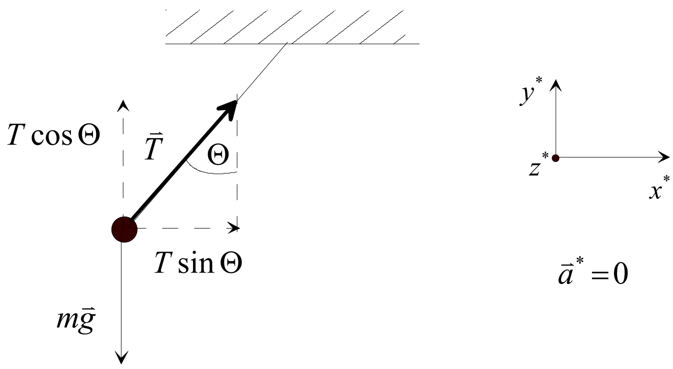
$$g_0 = G\frac{M_Z}{R^2} \simeq 9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}} \tag{9}$$

pa je gravitacijski pospešek na nadmorski višini $h = 0$. Enakost gravitacijske mase, ki nastopa v gravitacijskem zakonu (enačba (5)) in vztrajnostne mase, ki nastopa v II. Newtonovem zakonu (enačba (1)) ni samoumevna. O tem so se znanstveniki prepričali šele z natančnimi poskusi.

Drugi Newtonov zakon velja le v tako imenovanih **inercialnih** sistemih, to je v nepospešenih sistemih. Za ilustracijo si poglejmo primer opazovalca v zaprtem vagonu, ki se giblje s pospeškom $\vec{a}_0$, v smeri x osi laboratorijskega (t.j. inercialnega) opazovalnega sistema in opazuje majhno kroglico, ki je z zelo lahko nitko pritrjena na strop vagona. V vagonu, to je v pospešenem (neinercialnem) sistemu, deluje v smeri x^*-osi na visečo kroglico sila $T\sin\Theta$, kljub temu pa je pospešek kroglice za opazovalca v vagonu $\vec{a}^* = 0$, **kar je v nasprotju z veljavnostjo II. Newtonovega zakona**. V pospešenem vagonu torej II. Newtonov zakon ne velja:



OPAZOVALEC
V VAGONU:

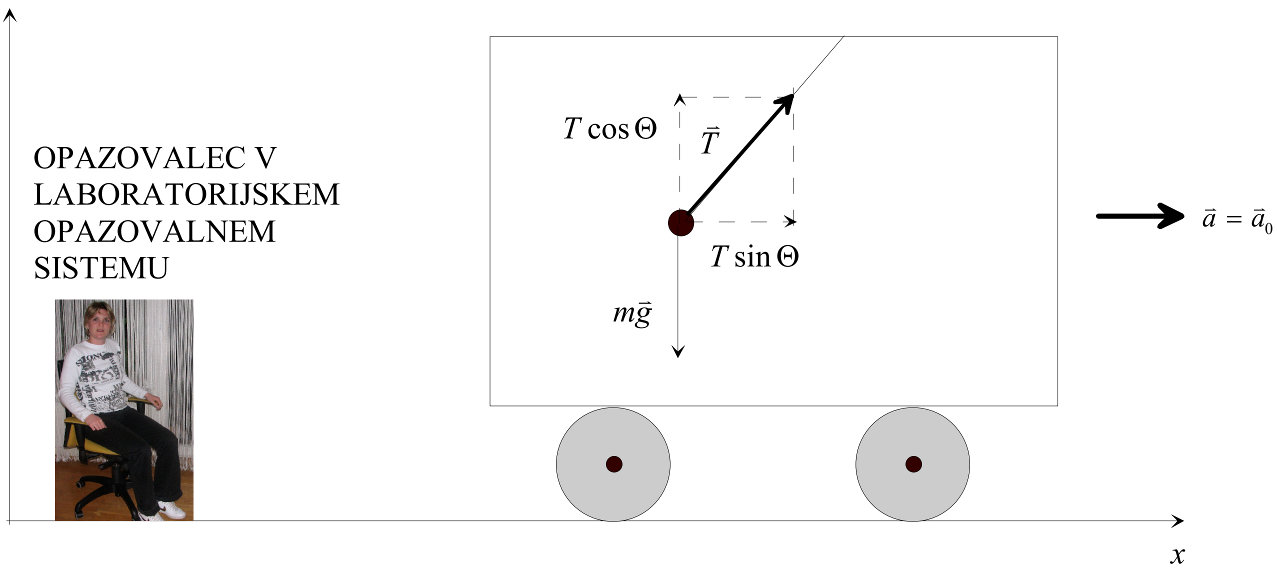


Drugi Newtonov zakon seveda velja za opazovalca v laboratorijskem inercialnem sistemu:

v smeri x osi: $T \sin \Theta = m\, a_0$, (10)

v smeri y osi: $T \cos \Theta = m\, g$, (11)

kjer je m masa na nitki viseče kroglice, g pa gravitacijski pospešek.



Če hočemo, da II. Newtonov zakon velja vsaj formalno tudi v vagonu, to je v pospešenem (neinercialnem) sistemu, moramo vpeljati tako imenovano sistemsko silo, ki je za zgornji primer enaka

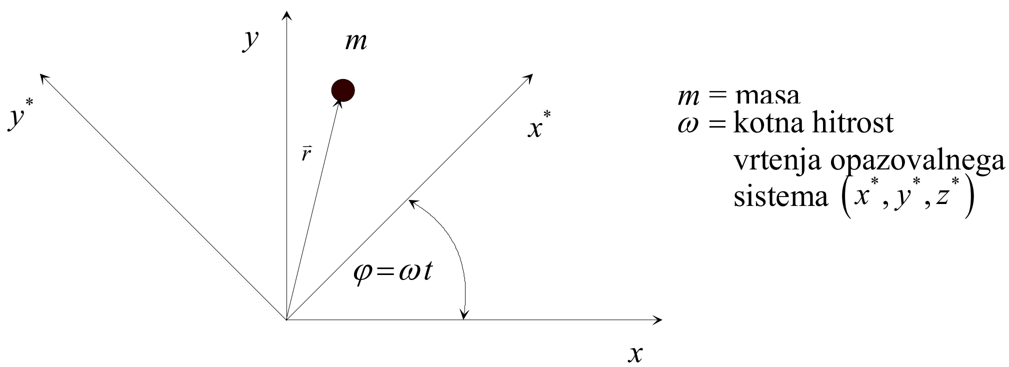
$$\vec{F}_S = -m\vec{a}_0 . \tag{12}$$

Z upoštevanjem sistemske sile (enačba (12)) potem tudi v vagonu formalno velja II. Newtonov zakon:

$$m\vec{g} + \vec{T} + \vec{F}_S = m\,\vec{a}^* = \vec{0} \ , \tag{13}$$

ki nam da za pospešek kroglice vrednost $\vec{a}^* = 0$, kar je v skladu z opažanji opazovalca v vagonu (gospodična, ki sedi na stolu v vagonu). Sistemska sila ne izhaja iz interakcij z drugimi telesi, pač pa iz pospeševanja opazovalnega sistema.

Vsem znana sistemska sila je **centrifugalna sila**, ki jo občutimo v enakomerno vrtečem se opazovalnem sistemu $\left(x^*, y^*, z^*\right)$



Za točkasto maso m, ki miruje v vrtečem opazovalnem sistemu, napišemo II. Newtonov zakon v **laboratorijskem** inercialnem opazovalnem sistemu $\left(x,\ y,\ z\right)$ v obliki:

$$\vec{F}_{cp} = -m\,\omega^2 \vec{r}\ , \tag{14}$$

kjer je $\vec{F}_{cp}$ centripetalna sila, ki vleče maso m proti središču kroženja, $-\omega^2\vec{r}$ pa je radialni pospešek, ki je prav tako usmerjen proti središču kroženja.

V vrtečem, neinercialnem sistemu, na točkasto maso m prav tako deluje centripetalna sila $\vec{F}_{cp}$, vendar pa je pospešek mase enak nič, torej II. Newtonov zakon zopet ne velja, če ne vpeljemo sistemske sile $\vec{F}_{cf}$ tako, da je:

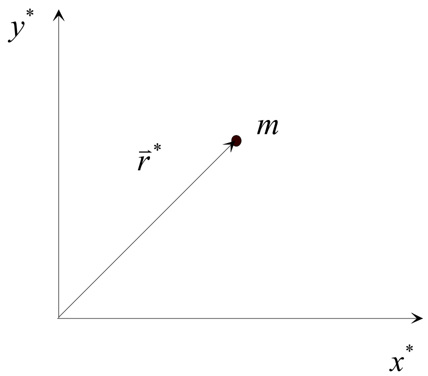
$$\vec{F}_{cp} + \vec{F}_{cf} = m\,\vec{a}^* = 0\ . \tag{15}$$

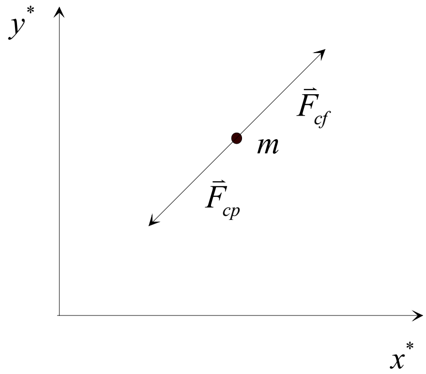
Iz enačb (14) in (15) sledi:

$$\vec{F}_{cf} = -\vec{F}_{cp} = m\,\omega^2\vec{r}\ . \tag{16}$$

Sistemska sila $\vec{F}_{cf}$, ki jo imenujemo centrifugalna sila, je usmerjena od središča kroženja v smeri krajevnega vektorja $\vec{r}^*$.

V vrtečem opazovalnem sistemu masa m miruje zato je $\vec{r}^*$ = konst. in $\vec{a}^* = \dfrac{\mathrm{d}^2\vec{r}^*}{\mathrm{d}t^2} = 0$



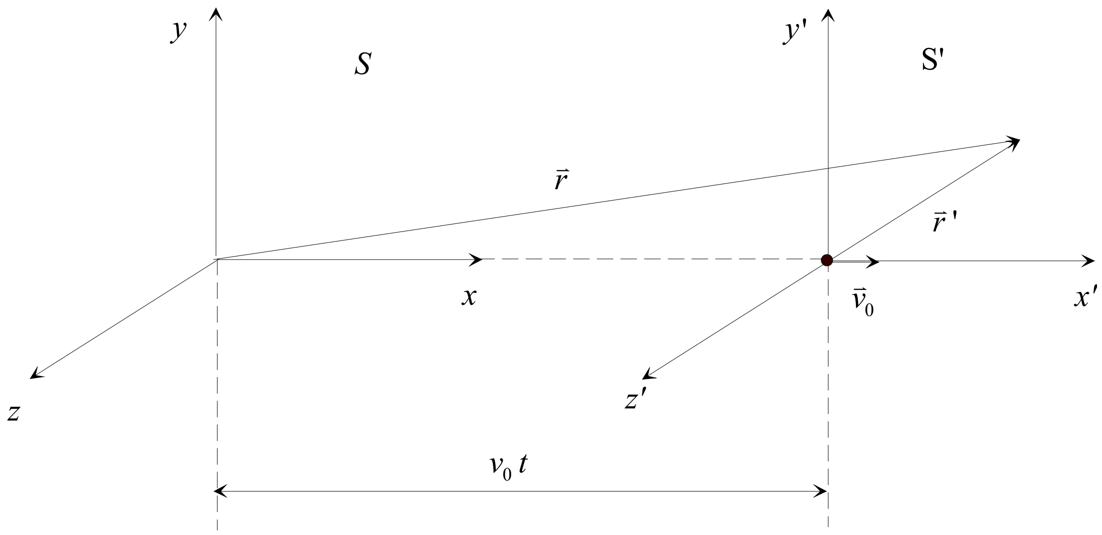


Poznana sistemska sila v vrtečem se neinecialnem sistemu je še Coriolisova sila, ki jo moramo upoštevati, če se masa m v vrtečem koordinatnem sistemu giblje tako, da se spreminja njena razdalja od izhodišča koordinatnega sistem $\left(x^*, y^*, z^*\right)$.

Na osnovi povedanega lahko definiramo **neinercialne** opazovalne sisteme kot opazovalne sisteme v katerih se opazovano telo, ki ni v interakciji z nobenim drugim telesom giblje pospešeno. **Inercialni** opazovalni sistem pa je definiran s prvim Newtonovim zakonom. Opazovalni sistem v katerem velja I. Newtonov zakon je **inercialni** opazovalni sistem. Vidimo torej, da je I. Newtonov zakon samostojni zakon, ki definira inercialni opazovalni sistem v katerem velja II. Newtonov zakon. Še enkrat je potrebno tudi opozoriti, da je tudi II. Newtonov zakon več kot definicija sile in mase. Glavna vsebina tega zakona je, da se vplivi zunanjih teles (ki jih opišemo s silami) odražajo v spremembi hitrosti telesa, ki jo opišemo s pospeškom $\vec{a} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}$.

Invariantnost pospeška telesa merjena v različnih inercialnih opazovalnih sistemih nas navede tudi na sklep o invariantnosti sil glede na spremembo **inercialnega** opazovalnega sistema.

V zvezi s tem omenimo še **Galilejevo načelo**, ki pravi, da imajo zakoni klasične fizike enako obliko v vseh inercialnih sistemih. In pa ne pozabimo na **Galilejeve transformacije,** ki povezujejo koordinate krajevnega vektorja $\vec{r} = (x, y, z)$ in komponente hitrosti $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$ točkastega telesa izmerjene v dveh različnih inercialnih opazovalnih sistemih S in S'. Predpostavimo, da se koordinatne osi in izhodišči obeh sistemov ob času $t = 0$ pokrivajo, kjer so koordinatne osi paroma vzporedne. Izhodišče koordinatnega sistem S' se giblje s konstantno hitrostjo v_0 glede na izhodišče koordinatnega sistema S.



Galilejeve transformacije za koordinate:

$$\vec{r} = \vec{r}\,' + \vec{v}_0\, t, \tag{17}$$

$$x = x' + v_0\, t, \tag{18}$$

$$y = y', \tag{19}$$

$$z = z'. \tag{20}$$

Če enačbe (17) – (20) odvajamo po času dobimo:

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \vec{v}\,' + \vec{v}_0, \tag{21}$$

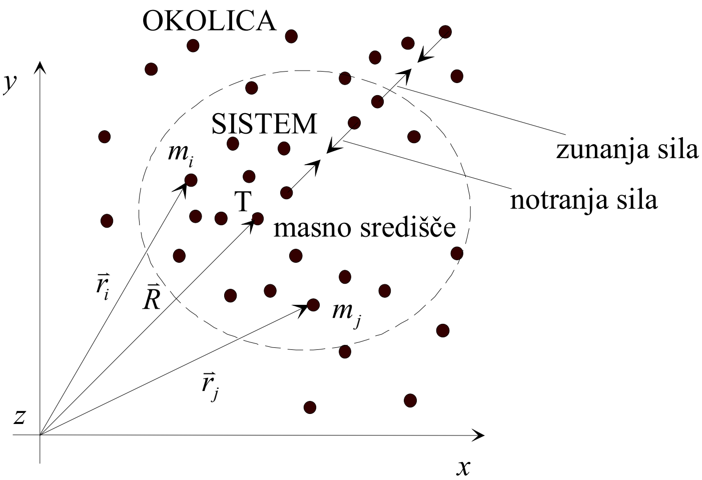
$$v_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v_x' + v_0, \tag{22}$$

$$v_y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = v_y', \tag{23}$$

$$v_z = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = v_z'. \tag{24}$$

Newtonov zakon za sistem točkastih teles

V obliki $\vec{F}=\sum_i \vec{F}_i = m\,\vec{a}$ (enačba (1)) , kjer je $\vec{F}=\sum_i \vec{F}_i$ rezultanta vseh zunanjih sil, velja II. Newtonov zakon za točkasto telo. V nadaljevanju bomo II. Newtonov zakon posplošili za sistem točkastih teles. Pri tem se moramo najprej odločiti, katera telesa štejemo k **sistemu** in katera k **okolici**. V skladu z izbiro (definicijo) sistema definiramo tudi **zunanje** in **notranje** sile.



Zapišimo II. Newtonov zakon za i-to točkasto maso v sistemu:

$$\sum_j \vec{F}_{ji} + \vec{F}_i = m_i \frac{\mathrm{d}^2\vec{r}_i}{\mathrm{d}t^2}\ , \quad i=1,2,\ldots N, \tag{25}$$

kjer so $\vec{F}_{ji}$ notranje sile med delci (n.pr. $\vec{F}_{23}$ je sila 2. delca na 3. delec v sistemu), $\vec{F}_i$ je rezultanta vseh zunanji sil na i-to točkasto maso v sistemu, N pa je število točkastih mas (delcev) v sistemu. Seštejemo vse enačbe (25):

$$\sum_j \vec{F}_{j1} + \vec{F}_1 = m_1 \frac{\mathrm{d}^2\,\vec{r}_1}{\mathrm{d}t^2}\ ,$$

$$\sum_j \vec{F}_{j2} + \vec{F}_2 = m_2 \frac{\mathrm{d}^2\,\vec{r}_2}{\mathrm{d}t^2}\ ,$$

$$\vdots$$

$$\sum_j \vec{F}_{jN} + \vec{F}_N = m_N \frac{\mathrm{d}^2\,\vec{r}_N}{\mathrm{d}t^2}\ ,$$

$$\sum_{\substack{i,j\\ i\neq j}} \vec{F}_{ji} + \sum_i \vec{F}_i = \sum_i \left(m_i \frac{\mathrm{d}^2\,\vec{r}_i}{\mathrm{d}t^2} \right)\ . \tag{26}$$

Prvi člen v enačbi (26) je enak vsoti vseh dvodelčnih sil $\left(\vec{F}_{ij}+\vec{F}_{ji}\right)$, ki pa je enaka nič saj v skladu s III.. Newtonovem zakonom o akciji in reakciji velja:

$$\vec{F}_{ij}+\vec{F}_{ji}=\vec{0}\,. \tag{27}$$

Enačbo (26) lahko tako zapišemo v obliki:

$$\sum_i \vec{F}_i=\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\left(\sum_i m_i\vec{r}_i\right). \tag{28}$$

Če definiramo krajevni vektor $\vec{R}$ do centra mase sistema (glejte še sliko) v obliki:

$$\vec{R}=\frac{\sum_i m_i\vec{r}_i}{\sum_i m_i}=\frac{\sum_i m_i\vec{r}_i}{m}, \tag{29}$$

kjer je $m=\sum_i m_i$ celotna masa sistema, lahko enačbo (28) zapišemo kot:

$$\boxed{\sum_i \vec{F}_i=m\frac{\mathrm{d}^2\vec{R}}{\mathrm{d}t^2}}\;. \tag{30}$$

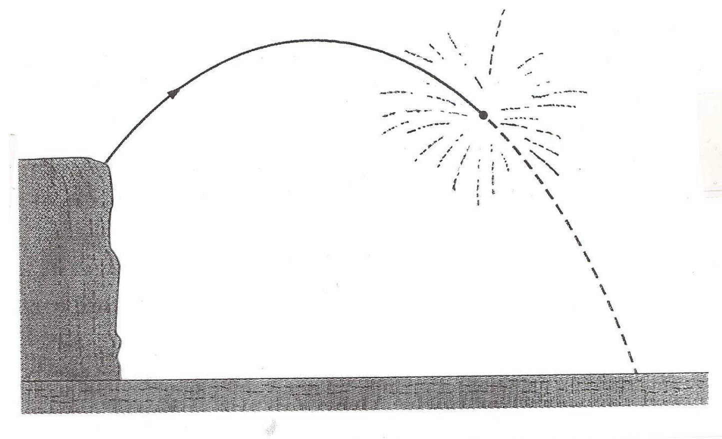
Enačba (30), to je II. Newtonov zakon za sistem točkastih teles, ima enako obliko kot II. Newtonov zakon za eno samo točkasto telo. Razlika je, da v II. Newtonovem zakonu za eno točkasto maso (enačba (1)) nastopa pospešek

$$\vec{a}=\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2},$$

kjer je $\vec{r}(t)$ krajevni vektor do točkaste mase *m*, v II Newtonovem zakonu za sistem točkastih mas (enačba (30)) pa nastopa pospešek masnega središča, ki mu pravimo tudi težišče (če je gravitacijski pospešek po celem sistemu enak):

$$\vec{a}_R=\frac{\mathrm{d}^2\vec{R}}{\mathrm{d}t^2} \tag{31}$$

V izpeljavi enačbe gibanja za sistem točkastih teles (enačba (30)) nismo nikjer predpostavili, da so razdalje med delci, ki sestavljajo sistem konstantne. Od koder sledi, da se na primer po eksploziji rakete masni center delcev eksplodirane rakete giblje v vakuumu po istem tiru kot če raketa sploh ne bi eksplodirala. **(Razlaga:** sile, ki delujejo na delce med eksplozijo so notranje sile in zato v enačbi (30) ne nastopajo).

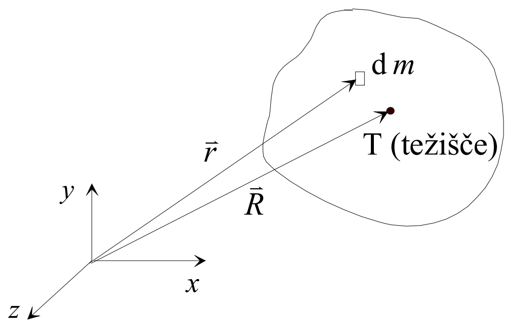


Enačbo (30) imenujemo tudi izrek o gibanju težišča za sistem točkastih mas.

Newtonov zakon za togo telo

Enačbo za gibanje težišča sistema točkastih mas (oziroma centra točkastih mas) razširimo na **togo telo** v katerem so razdalje med posameznimi deli telesa konstantne. V okviru kontinuumskega opisa lahko zato uvedemo gostoto togega telesa kot:

$$\rho(\vec{r}) = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}V}, \tag{32}$$



kjer je $\mathrm{d}m$ infinitezimalno majhna masa dela togega telesa z volumnom $\mathrm{d}V$ do katerega kaže krajevni vektor $\vec{r}$. Za togo telo se izraz (29) za računanje lege težišča transformira v:

$$\vec{R} = \frac{\int \vec{r}\,\mathrm{d}m}{\int \mathrm{d}m} = \frac{\int \vec{r}\,\mathrm{d}m}{m} = \frac{\int \vec{r}\,\rho\,\mathrm{d}V}{\int \rho\mathrm{d}V}, \tag{33}$$

kjer smo v enačbi (29) naredili naslednje transformacije:

$$\sum_i \to \int$$

$$m_i \to \mathrm{d}m$$

$$\vec{r}_i \to \vec{r}\ .$$

Če je gostota togega telesa konstantna preide enačba (33) v izraz:

$$\vec{R}=\frac{\int \vec{r}\,\mathrm{d}V}{\int \mathrm{d}V}=\frac{\int \vec{r}\,\mathrm{d}V}{V}\,, \tag{34}$$

kjer je V volumen togega telesa.

Ob upoštevanju enačbe (31) prepišemo enačbo (30) v obliko:

$$\boxed{\vec{F}=m\,\vec{a}_R=m\frac{\mathrm{d}\,\vec{v}_R}{\mathrm{d}t}=m\frac{\mathrm{d}^2\,\vec{R}}{\mathrm{d}\,t^2}}\,, \tag{35}$$

kjer je $\vec{v}_R$ hitrost težišča togega telesa. Vidimo, da ima zakon gibanja za togo telo enako obliko kot ustrezen zakon gibanja za točkasto telo (enačba (1)). Enačbo (35) lahko predelamo tudi v obliko:

$$\vec{F}=\frac{\mathrm{d}\,\vec{G}}{\mathrm{d}t}\,, \tag{36}$$

kjer je

$$\vec{G}=m\,\vec{v}_R\,, \tag{37}$$

gibalna količina togega telesa.

Iz enačbe (36) sledi:

$$\int \vec{F}\,\mathrm{d}t=\vec{G}\,\Big|_{\vec{G}_1}^{\vec{G}_2}=\vec{G}_2-\vec{G}_1=\Delta\vec{G}\,, \tag{38}$$

kjer je $\int \vec{F}\,\mathrm{d}t$ sunek rezultante zunanjih sil, $\vec{G}_1$ začetna gibalna količina togega telesa, $\vec{G}_2$ pa končna gibalna količina, to je gibalna količina po delovanju sunka sile $\int \vec{F}\,\mathrm{d}t$. Enačbo (38) imenujemo izrek o sunku sile. Sunek sile lahko torej določimo z meritvijo spremembe gibalne količine togega telesa (ali sistema togih teles).

Če je sunek rezultante zunanjih sil enak nič, se gibalna količina togega telesa ali sistema togih teles ohranja:

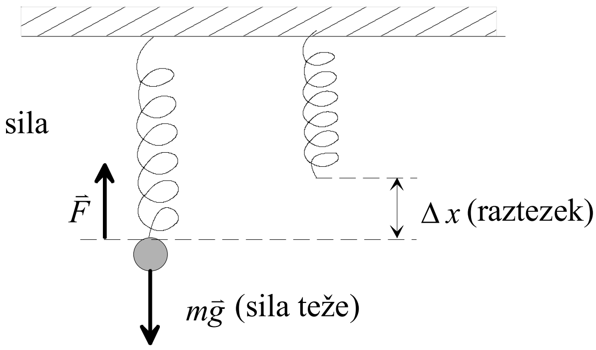
$$\Delta\,\vec{G}=0\,,$$

oziroma

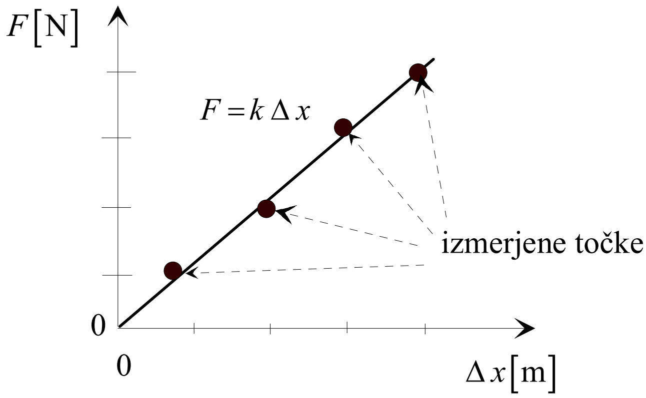
$$\vec{G}_1=\vec{G}_2\,, \tag{39}$$

kjer je $\vec{G}_1 = m\vec{v}_1$ začetna gibalna količina, $\vec{G}_2 = m\vec{v}_2$ pa končna gibalna količina. Enačbo (39) imenujemo tudi izrek o ohranitvi gibalne količine.

Sunek sile, oziroma sila ne spreminja le hitrosti telesa, ampak lahko telo tudi **deformira**. Tako lahko na primer deformacijo vijačne vzmeti izkoristimo za merjenje (določitev) sile teže, če poznamo konstanto vzmeti *k*.



V ravnovesju velja: $\vec{F} + m\,\vec{g} = 0 \;\Rightarrow\; \vec{F} = -m\vec{g}$



Zgled: prosti pad togega telesa v zraku

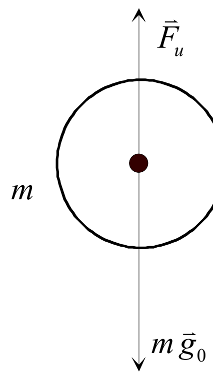
Pri prostem padu togega telesa v zraku poleg sile teže $m\,\vec{g}_0$ na togo telo v nasprotni smeri deluje še sila upora $\vec{F}_u$. Zapišimo Newtonov zakon za gibanje togega telesa:

$$m\,g_0 - F_u = m\,a\,, \tag{40a}$$

od koder sledi pospešek togega telesa:

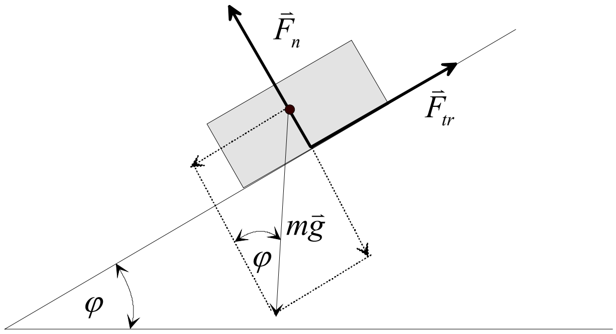
$$a = g_0 - \frac{F_u}{m}\,. \tag{40b}$$

Vidimo, da je pri enaki sili upora, ki je odvisna od velikosti, oblike in hitrosti telesa, pospešek *a* večji za večje mase telesa *m*.



Zgled: drsenja klade po klancu navzdol

$\vec{F}_n$ = normalna komponenta sile podlage
m = masa klade
φ = nagib klanca
$\vec{F}_{tr}$ = sila trenja
$m\vec{g}$ = sila teže



Zapišimo Newtonov zakon za gibanje težišča togega telesa vzdolž klanca:

$$mg\sin\varphi - F_{tr} = ma\,, \tag{41a}$$

kjer je velikost pospeška težišča klade. Sila trenja F_{tr} je sorazmerna komponenti sile teže v smeri pravokotno na površino klanca $(m\,g\cos\varphi)$:

$$F_{tr} = k_t\, m\, g\cos\varphi\,, \tag{41b}$$

kjer je k_t koeficient trenja. Če združimo enačbi (41a) in (41b) dobimo:

$$mg\sin\varphi - k_t\, m\, g\cos\varphi = ma\,,$$

oziroma

$$a = g\left(\sin\varphi - k_t\cos\varphi\right). \tag{42}$$

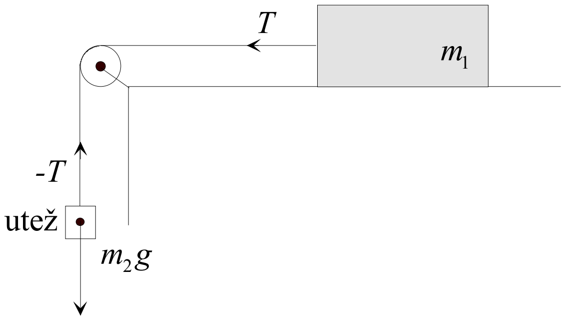
Klada začne drseti po klancu navzdol le, če je nagib zadosti velik. Mejni kot dobimo iz pogoja:

$$a = 0 = g\left(\sin\varphi_m - k_\ell\cos\varphi_m\right), \tag{43}$$

kjer je k_ℓ koeficient lepenja. Iz enačbe (43) sledi

$$tg\,\varphi_m = k_\ell\ . \tag{44}$$

Zgled: klada na zračni klopi



Klada z maso m_1 je z zelo lahko vrvico preko zelo lahkega vreten povezana z utežjo, ki ima maso m_2. Ker je klada na zračni blazini zanemarimo silo trenja. Zapišimo Newtonov zakon za gibanje togega telesa (enačba (35)) posebej za klado in posebej za utež:

$$T = m_1 a \,, \tag{45}$$

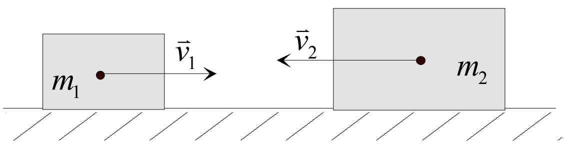
$$m_2 g - T = m_2 a \,. \tag{46}$$

Iz enačb (45) in (46) sledi za velikost pospeška uteži:

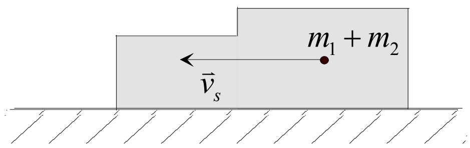
$$a = \frac{m_2 g}{\left(m_1 + m_2\right)} \,. \tag{47}$$

Zgled: neprožen trk dveh vozičkov na zračni blazini

pred trkom:



po trku:



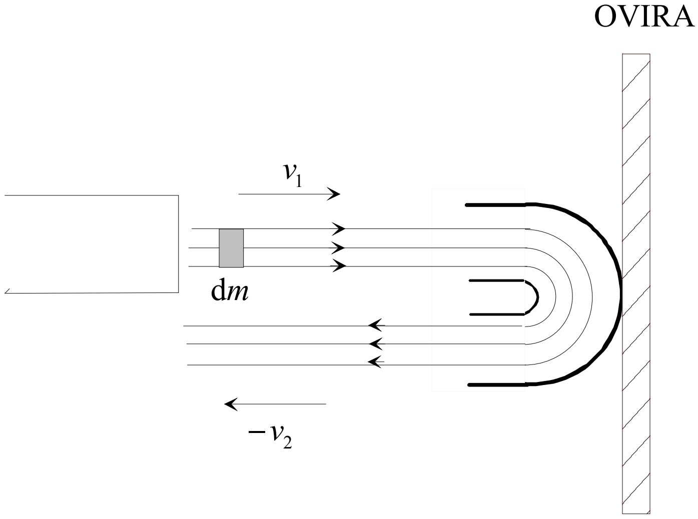
Če zanemarimo sunek zunanjih sil se pri neprožnem trku dveh vozičkov (vozička se sprimeta) ohranja skupna gibalna količina:

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = \left(m_1 + m_2\right) \vec{v}_s \,, \tag{48}$$

kjer je $\vec{v}_1$ hitrost prvega vozička pred trkom, $\vec{v}_2$ hitrost drugega vozička pred trkom, $\vec{v}_s$ pa hitrost sprijetih vozičkov po trku. Iz enačbe (48) lahko izračunamo $\vec{v}_s$:

$$\vec{v}_s = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{\left(m_1 + m_2\right)}. \qquad (49)$$

Zgled: sila curka vode na oviro



Sprememba gibalne količine dela curka vode z maso dm ob trku z oviro je enaka sunku sile ovire na maso dm:

$$F_0\,\mathrm{d}t = -\mathrm{d}m\,v_2 - \mathrm{d}m\,v_1, \qquad (48)$$

kjer je $F_0\,\mathrm{d}t$ sunek sile ovire na maso dm, $-\mathrm{d}m\,v_2$ končna gibalna količina mase dm po trku z oviro, $\mathrm{d}m\,v_1$ pa začetna gibalna količina pred trkom z oviro. Iz enačbe (48) sledi

$$F_0 = -\Phi_m\left(v_1 + v_2\right), \qquad (49)$$

kjer je

$$\Phi_m = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}, \qquad (50)$$

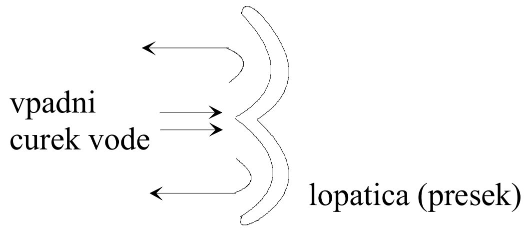
masni tok curka vode, ki pada na oviro. Sila curka vode na oviro F je v skladu s tretjim Newtonovim zakonom o akciji in reakciji nasprotno enaka sili ovire na curek vode F_0:

$$F = -F_0 = \Phi_m\left(v_1 + v_2\right). \qquad (51)$$

Če se voda od ovire ne bi odbila in bi le spolzela navzdol (torej $v_2 \approx 0$) bi bila sila curka na oviro manjša:

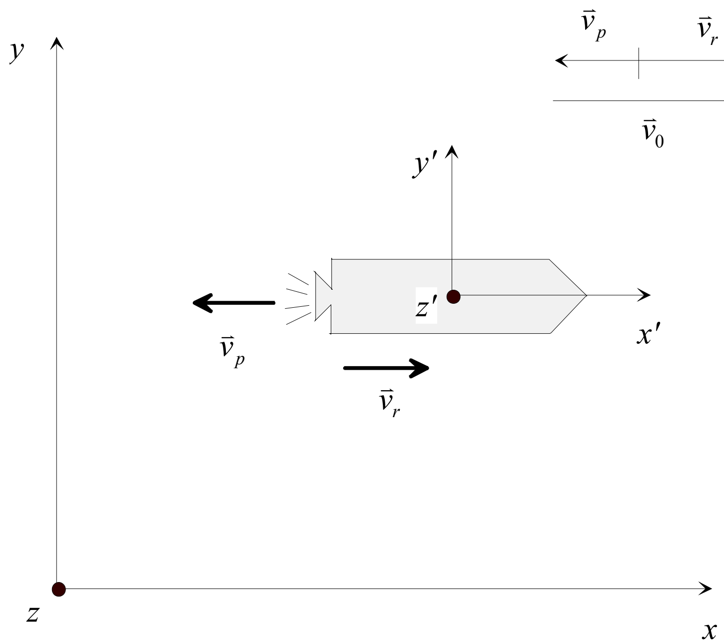
$$F \approx \Phi_m\,v_1, \qquad (52)$$

kot v prej opisanem primeru. Zato imajo lopatice turbin v hidroelektrarnah značilno obliko, da se curek od lopatice odbije.



Zgled: vozilo na reaktivni pogon (raketa)

Predpostavimo, da je raketa daleč stran od Zemlje in drugih nebesnih teles, tako, da na gibanje rakete vpliva le sila curkov plinov, ki jih raketa izpušča. Definirajmo hitrost rakete $(\vec{v}_r)$ in hitrost iz rakete izhajajočih plinov $(\vec{v}_p)$ v inercialnem (nepospešenem) sistemu (x, y, z) daleč stran od Zemlje:



V inercialnem (nepospešenem) sistemu zapišemo izrek o sunku sile za majhno maso dm iz rakete izhajajočega plina:

$$F_0\,\mathrm{d}t = -\mathrm{d}m\,v_p - \mathrm{d}m\,v_r\,, \tag{53}$$

kjer je $\mathrm{d}m\,v_r$ gibalno količino mase goriva dm pred izhodom iz rakete (torej začetna gibalna količina), $-\mathrm{d}m\,v_p$ pa gibalna količina izhajajočega uplinjenega goriva (torej končna gibalna količina), $F_0\,\mathrm{d}t$ pa ustrezen sunek sile na maso dm. Iz enačbe (53) sledi:

$$F_0 = -\Phi_m\left(v_p + v_r\right), \tag{54}$$

kjer je

$$\Phi_m = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}, \tag{55}$$

masni tok plinov, ki jih raketa izpušča. Po tretjem Newtonovem zakonu o akciji in reakciji je sila iz rakete izhajajočih plinov na raketo (F) nasprotno enaka sili F_0, torej:

$$F = -F_0 = \Phi_m v_0 \tag{56}$$

kjer je

$$v_0 = v_p + v_r, \tag{57}$$

hitrost izhajajočih plinov, ki jo izmeri opazovalec v raketi, to je v pospešenem opazovalnem sistemu (x', y', z') (glejte še sliko).

Zapišimo sedaj II. Newtonov zakon za gibanje težišča rakete v inercialnem sistemu (x, y, z):

$$F = \Phi_m v_0 = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}, \tag{58}$$

kjer je $a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ pospešek rakete,

$$m = m_0 - \Phi_m t, \tag{59}$$

pa od časa odvisna masa rakete. Začetna masa rakete m_0 se namreč s časom zmanjšuje zaradi izhajajočih plinov. Če je masa goriva enaka m_p, potem v času

$$t_0 = \frac{m_p}{\Phi_m}, \tag{60}$$

raketa porabi vso gorivo. Če združimo enačbi (58) in (59) dobimo enačbo gibanja v obliki:

$$\Phi_m v_0 = \left(m_0 - \Phi_m t\right)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}. \tag{61}$$

Diferencialno enačbo (61) rešimo z integracijo:

$$\int_0^v \frac{\mathrm{d}v}{v_0} = \int_0^v \frac{\Phi_\mathrm{m}}{\left(m_0 - \Phi_m t\right)}\mathrm{dt}, \tag{62}$$

kjer vzamemo, da je hitrost ob času nič enaka nič. Izvršeni integraciji v enačbi (62) nam podajata rešitev v obliki:

$$v = v_0 \ln\left[\frac{m_0}{m_0 - \Phi_m t}\right]. \tag{63}$$

Raketa doseže maksimalno hitrost ob času t_0, ko je porabljeno vso gorivo:

$$v_{\max} = v_0\left[\frac{m_0}{m_0 - \Phi_m t_0}\right] = v_0\left[\frac{1}{1 - \frac{\Phi_m t_0}{m_0}}\right]. \tag{64}$$

Če hočemo pri dani masi goriva m_p (enačba (60)) povečati maksimalno končno hitrost rakete moramo narediti večstopenjsko raketo, kjer se masa rakete manjša tudi tako, da raketa sproti odmetava izpraznjene dele rezervoarja goriva in na ta način doseže večje pospeške, ki je pri dani potisni sili obratno sorazmerna z maso rakete ($a = \frac{F}{m}$).