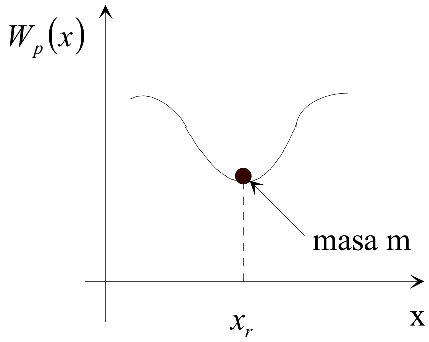
HARMONIČNO NEDUŠENO NIHANJE

Splošno:

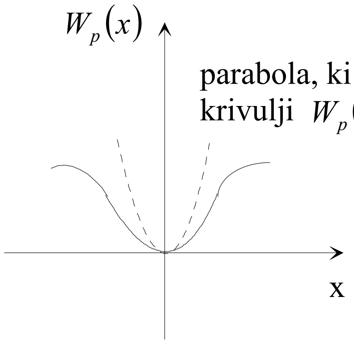
Potencialna energija (1 – D):



Pogoj za minimum potencialne energije:

$$\left.\frac{\mathrm{d}W_p}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_r} = 0, \quad \left.\frac{\mathrm{d}^2W_p}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=x_r} > 0$$

Izhodišče koordinatnega sistema premaknemo v minimum potencialne energije:



Za x<<1 razvijemo $W_p(x)$ v Taylorjevo vrsto:

$$W_p(x) = W_p(x=0) + x\left.\left(\frac{\mathrm{d}W_p}{\mathrm{d}x}\right)\right|_{x_r=0} + \frac{x^2}{2}\left.\left(\frac{\mathrm{d}^2W_p}{\mathrm{d}x^2}\right)\right|_{x_r=0} + \ldots \cong \frac{x^2}{2}\left.\left(\frac{\mathrm{d}^2W_p}{\mathrm{d}x^2}\right)\right|_{x_r=0},$$

kjer smo upoštevali $W_p(x=0) = 0$ in $\left.\left(\frac{\mathrm{d}W_p}{\mathrm{d}x}\right)\right|_{x_r=0} = 0$ (glejte sliko).

Torej:

$$W_p(x) \cong \mathrm{k}\frac{x^2}{2}, \tag{1}$$

kjer je:

$$\mathrm{k} = \left(\frac{\mathrm{d}^2 W_p}{\mathrm{d}x^2}\right)\Bigg|_{x_r=0} > 0. \tag{2}$$

Sila $F = -\dfrac{\mathrm{d}W_p}{\mathrm{dx}} = -\mathrm{k}x.$ (3)

Zapišimo II. Newtonov zakon za gibanje mase m:

$$\boxed{ma = -\mathrm{k}x\ ,} \tag{4}$$

Pospešek $a = \dfrac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}$, torej:

$m\dfrac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -\mathrm{k}x$, od koder sledi:

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{\mathrm{k}}{m}x\ .} \tag{5}$$

Rešitev diferencialne enačbe (5) iščemo z nastavkom:

$$\boxed{x = x_0 \sin\left[\left(\frac{2\pi}{t_0}\right)t + \delta\right].} \tag{6}$$

Iz enačbe (6) sledi:

$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x_0\left(\frac{2\pi}{t_0}\right)\cos\left[\left(\frac{2\pi}{t_0}\right)t + \delta\right] \tag{7}$$

kjer je:

$$\boxed{v_0 \equiv x_0\left(\frac{2\pi}{t_0}\right)} \tag{8}$$

amplituda hitrosti. Velja tudi:

$$\boxed{a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -x_0\left(\frac{2\pi}{t_0}\right)^2 \sin\left[\left(\frac{2\pi}{t_0}\right) + \delta\right].} \tag{9}$$

Enačbi (6) in (9) vstavimo v diferencialno enačbo (5) in dobimo:

$$-x_0\left(\frac{2\pi}{t_0}\right)^2 \sin\left[\left(\frac{2\pi}{t_0}\right) + \delta\right] = -\frac{k}{m}x_0 \sin\left[\left(\frac{2\pi}{t_0}\right) + \delta\right], \tag{10}$$

od koder sledi:

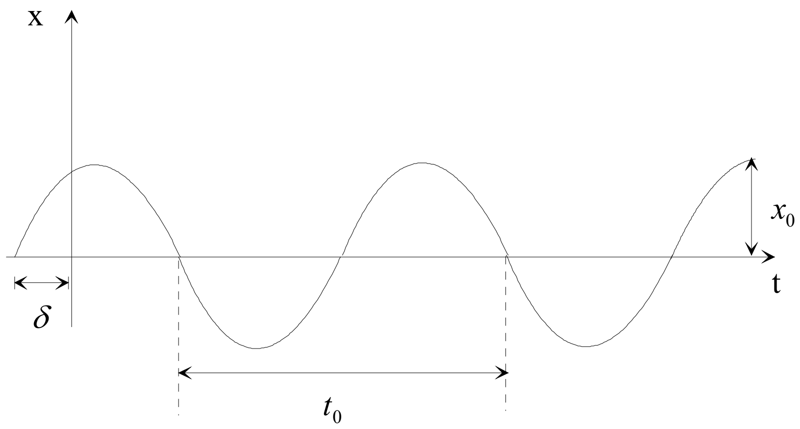
$$\left(\frac{2\pi}{t_0}\right)^2 = \frac{k}{m}\ , \tag{11}$$

oziroma

$$\boxed{t_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}\ .} \tag{12}$$

Vidimo torej, da nastavek $x = x_0 \sin\left[\left(\frac{2\pi}{t_0}\right)t + \delta\right]$ reši enačbo (5), kjer je nihajni čas t_0 določen z enačbo (12), δ pa je fazni zamik. Gibanje, določeno z enačbo (6), imenujemo **harmonično** ali **sinusno** nedušeno nihanje.

$$\boxed{x = x_0 \sin\left[\left(\frac{2\pi}{t_0}\right)t + \delta\right]}$$



Na zgornji sliki vidimo, da velja zveza $\omega_0\, t_0 = 2\pi \quad \Rightarrow \quad \boxed{\omega_0 = \frac{2\,\pi}{t_0}}$

$\omega_0 =$ lastna krožna frekvenca

Lastna frekvenca $\nu = \dfrac{1}{t_0} \quad \Rightarrow \ \omega_0 = 2\pi\,\nu$

Energija harmoničnega nihanja

- **Kinetična** energija mase m (glejte še enačbo (7)):

$$W_k = \frac{m v^2}{2} = \frac{1}{2} m x_0^2 \left(\frac{2\pi}{t_0} \right)^2 \cos^2 \left[\left(\frac{2\pi}{t_0} \right) t + \delta \right]. \qquad (13)$$

- **Potencialna** energija (glejte enačbi (1) in (6)):

$$W_p = \frac{k x^2}{2} = \frac{k}{2} x_0^2 \sin^2 \left[\left(\frac{2\pi}{t_0} \right) t + \delta \right]. \qquad (14)$$

Celotna energija:

$$W = W_k + W_p = \frac{1}{2} m x_0^2 \left(\frac{2\pi}{t_0} \right)^2 \cos^2 \left[\left(\frac{2\pi}{t_0} \right) t + \delta \right] + \frac{k}{2} x_0^2 \sin^2 \left[\left(\frac{2\pi}{t_0} \right) t + \delta \right]. \qquad (15)$$

Ob upoštevanju enačbe (11) preide enačba (15) v:

$$W = \frac{1}{2} k x_0^2 \left\{ \cos^2 \left[\left(\frac{2\pi}{t_0} \right) t + \delta \right] + \sin^2 \left[\left(\frac{2\pi}{t_0} \right) t + \delta \right] \right\} = \frac{1}{2} k x_0^2 . \qquad (16)$$

Ob upoštevanju enačbe (8) in (11) velja:

$$\frac{1}{2} k x_0^2 = \frac{1}{2} k v_0^2 \bigg/ \left(\frac{2\pi}{t_0} \right)^2 = \frac{1}{2} m v_0^2 . \qquad (17)$$

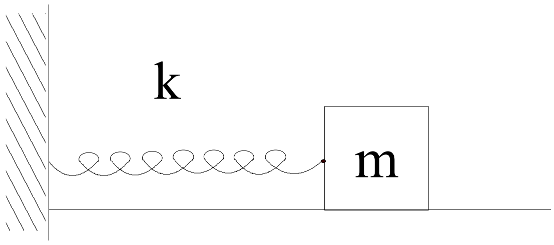
Torej:

$$\boxed{W = \frac{1}{2} k x_0^2 = \frac{1}{2} m v_0^2 .} \qquad (18)$$

Primeri nihal, ki nihajo sinusno

1. Nihalo na vijačno vzmet

A: HORIZONTALNO gibanje mase m



k ≡ konstanta vzmeti

Newtonov zakon za gibanje mase m:

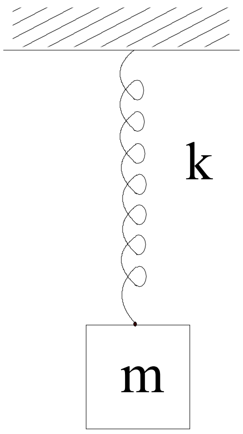
$$m\,\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}\,t^2} = -kx \quad , \tag{19}$$

kjer je $-kx$ sila vzmeti. Rešitev enačbe (19) že poznamo (glejte enačbe (5) – (12)):

$$\boxed{x = x_0 \sin\left[\left(\frac{2\pi}{t_0}\right)t + \delta\right] \ ,} \tag{20}$$

kjer je $\boxed{t_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}}$ nihajni čas. (21)

B: VERTIKALNO gibanje mase m



$\overline{x}$ ≡ celoten raztezek vzmeti

x_r ≡ ravnovesni raztezek

x ≡ odstopanje od ravnovesnega raztezka

Velja: $\overline{x} = x_r + x$. (22)

V ravnovesju napišemo pogoj za statično ravnovesje mase m v obliki:

$$kx_r = mg \ . \tag{23}$$

Newtonov zakon za gibanje mase m pa kot:

$$\boxed{ma = mg - k\overline{x}} \ , \tag{24}$$

kjer je $\dfrac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}\,t^2}$ pospešek mase m. Torej:

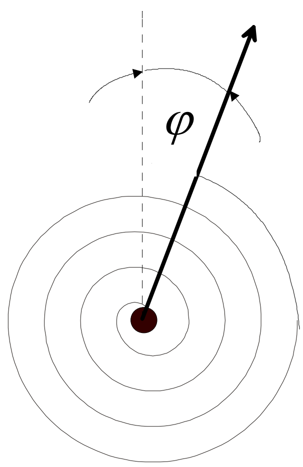
$$m\,\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}\,t^2} = mg - k\left(x_r + x\right) \ , \tag{25}$$

kjer smo upoštevali enačbo (22). Ob upoštevanju enačbe (23) iz enačbe (25) sledi:

$$\boxed{m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}\,t^2} = -kx} \ . \tag{26}$$

Rešitev enačbe (26) pa že poznamo od prej.

2. Nihalo na polžasto vzmet (sučno sinusno nihanje)



Navor polžaste vzmeti:

$$\boxed{M = -D\varphi} \tag{27}$$

kjer je φ zasuk vzmeti in D konstanta vzmeti.

Zapišemo enačbo za vrtenje togega telesa okrog fiksne osi:

$$\boxed{M = J \frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2}} \quad , \tag{28}$$

J ≡ vztrajnostni moment nihala,

$$\alpha = \frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2} \equiv \text{ kotni pospešek} \ , \tag{29}$$

$$\beta = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} \equiv \text{ kotna hitrost} \ . \tag{30}$$

Vstavimo enačbo (27) v enačbo (28) in dobimo:

$$J \ \frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2} = -D \ \varphi \ , \tag{31}$$

oziroma:

$$\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{D}{J} \ \varphi \ . \tag{32}$$

Rešitev diferencialne enačbe (32) iščemo z nastavkom:

$$\boxed{\varphi = \varphi_0 \sin\left[\left(\frac{2\pi}{t_0}\right)t + \delta\right]} \quad . \tag{33}$$

Kotna hitrost $\omega = \dfrac{d\varphi}{dt} = \varphi_0 \cos\left(\dfrac{2\pi}{t_0}\right)\cos\left[\left(\dfrac{2\pi}{t_0}\right)t + \delta\right]$, (34)

kjer je

$$\omega_0 = \varphi_0 \left(\frac{2\pi}{t_0}\right), \tag{35}$$

amplituda kotne hitrosti.

Kotni pospešek

$$\alpha = \frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2} = -\varphi_0 \left(\frac{2\pi}{t_0}\right)^2 \sin\left[\left(\frac{2\pi}{t_0}\right)t + \delta\right], \tag{36}$$

oziroma

$$\boxed{\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\left(\frac{2\pi}{t_0}\right)^2 \varphi} \quad . \tag{37}$$

Vidimo, da nastavek (33) reši enačbo (32). Iz primerjave enačb (37) in (32) sledi:

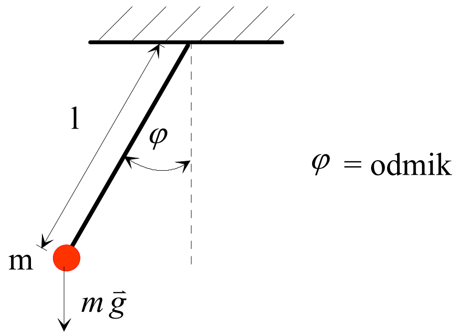
$$\left(\frac{2\pi}{t_0}\right)^2 = \frac{D}{J} \quad , \tag{38}$$

oziroma

$$\boxed{t_0 = 2\pi\sqrt{\frac{J}{D}}} \quad . \tag{39}$$

3. Matematično nihalo

Obravnavamo nihanje točkaste mase m, ki visi na zelo lahki nitki dolžine l.



Navor sile teže $m\vec{g}$ je:

$$M = -mgl\,\sin\varphi \tag{40}$$

Ob predpostavki, da so odmiki majhni (φ << 1) velja $\sin\varphi \cong \varphi$, torej

$$\boxed{M \cong -mgl\varphi} \tag{41}$$

Opis vrtenja togega telesa okrog fiksne osi:

$$\boxed{M = J\frac{d^2\varphi}{dt^2}} \quad , \tag{42}$$

kjer je $J = ml^2$ vztrajnostni moment točkaste mase. Če vstavimo enačbo (41) v enačbo (42) dobimo:

$$-mgl\varphi = ml^2\frac{d^2\varphi}{dt^2},$$

oziroma:

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{g}{l}\varphi} \quad . \tag{43}$$

Rešitev diferencialne enačbe (43) iščemo z nastavkom:

$$\boxed{\varphi = \varphi_0 \sin\left[\left(\frac{2\pi}{t_0}\right)t + \delta\right]} \quad . \tag{44}$$

Če enačbo (44) dvakrat odvajamo dobimo:

$$\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2} = -\varphi_0 \left(\frac{2\pi}{t_0}\right)^2 \sin\left[\left(\frac{2\pi}{t_0}\right)t + \delta\right], \tag{45}$$

oziroma

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2} = \left(\frac{2\pi}{t_0}\right)^2 \varphi} \quad . \tag{46}$$

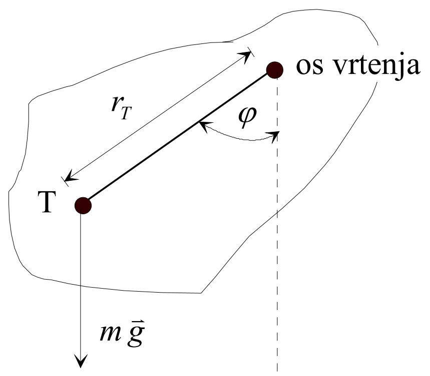
Vidimo torej da nastavek (44) reši enačbo (43). Iz primerjave enačb (43) in (46) dobimo:

$$\left(\frac{2\pi}{t_0}\right)^2 = \frac{g}{l},$$

od koder sledi izraz za nihajni čas:

$$\boxed{t_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}} \tag{47}$$

4. Fizično nihalo



T $\equiv$ težišče
r_T $\equiv$ ročica rezultante sile teže

Navor rezultante sile teže $m\,\vec{g}$ je:

$$M = -\,mgr_T \sin\varphi\,. \tag{48}$$

Ob predpostavki $(\sin\varphi \cong \varphi)$ za (φ << 1), velja:

$$\boxed{M \cong -\,mgr_T\varphi} \tag{49}$$

Opis vrtenja togega telesa okrog fiksne osi:

$$\boxed{M = J\,\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2}} \tag{50}$$

kjer je J vztrajnostni moment togega telesa okrog izbrane osi. Če vstavimo enačbo (49) v enačbo (50) dobimo:

$$\boxed{-\,m\,g\,r_T\,\varphi = J\,\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2}}\;, \tag{51}$$

Enačbo (51) zapišemo v obliki:

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2} = -\left(\frac{mg\,r_T}{J}\right)\varphi.} \tag{52}$$

Rešitev enačbe (52) iščemo z nastavkom:

$$\boxed{\varphi = \varphi_0 \sin\left[\left(\frac{2\pi}{t_0}\right)t + \delta\right]}\;. \tag{53}$$

Enačbo (53) dvakrat odvajamo po času in dobimo:

$$\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2} = -\varphi_0\left(\frac{2\pi}{t_0}\right)^2 \sin\left[\left(\frac{2\pi}{t_0}\right)t + \delta\right], \tag{54}$$

oziroma

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2} = -\left(\frac{2\pi}{t_0}\right)^2 \varphi}\;. \tag{55}$$

Iz primerjave med enačbama (52) in (55) sledi:

$$\left(\frac{2\pi}{t_0}\right)^2 = \frac{m\,g\,r_T}{J}, \tag{56}$$

oziroma:

$$\boxed{t_0 = 2\pi\sqrt{\frac{J}{m\,g\,r_T}}}\ . \tag{57}$$

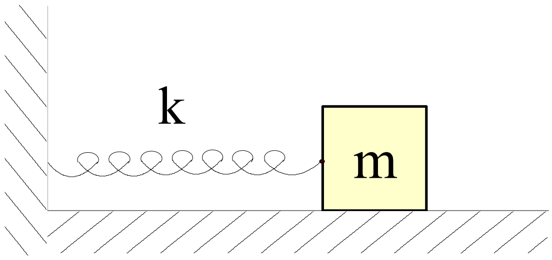
V posebnem primeru $J = m\,r_T^2$ in $r_T = l$ preide enačba (57) v enačbo (47):

$$t_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\ ,$$

ki velja za matematično nihalo.

DUŠENO NIHANJE

Obravnavamo primer nihala na vijačno vzmet.



m ≡ masa
k ≡ konstanta vzmeti

V dosedanji obravnavi nihala na vijačno vzmet smo predpostavili, da je sila vzmeti $-kx$ edina sila. Zanemarili pa smo silo trenja, ki je sorazmerna masi telesa *m*. Pa tudi silo upora, ki je pri majhnih hitrostih sorazmerna hitrosti *v*. V nadaljevanju za to poleg sile vzmeti upoštevamo tudi silo dušenja F_d, ki jo zapišemo v približnem zapisu kot:

$$F_d = -2m\beta v \ , \tag{58}$$

kjer je *m* masa in β koeficient dušenja. Zapišimo II. Newtonov zakon za gibanje težišča mase *m*:

$$m\ddot{x} = -kx - 2\beta m\dot{x} , \tag{59}$$

kjer smo definirali:

$$\dot{x} \equiv \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} , \qquad \ddot{x} \equiv \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} \ . \tag{60}$$

Enačbo (59) na obeh straneh enačaja delimo z maso m in dobimo:

$$\boxed{\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0} , \tag{61}$$

kjer je

$$\omega_0^2 = \left(\frac{2\pi}{t_0}\right)^2 = \frac{k}{m} , \tag{62}$$

lastna krožna frekvenca nedušenega nihanja, t_0 pa lastni nihajni čas nedušenega nihanja (glejte enačbo (21)). Rešitev enačbe (61) iščemo z nastavkom:

$$x(t) = y(t)e^{-\beta t} \tag{63}$$

kjer je $y(t)$ neznana funkcija časa. Funkcijo (63) dvakrat odvajamo:

$$\dot{x} = \dot{y}\, e^{-\beta t} - \beta\, y\, e^{-\beta t}, \tag{63a}$$
$$\ddot{x} = \ddot{y}\, e^{-\beta t} - 2\,\dot{y} e^{-\beta t} + \beta^2\, y\, e^{-\beta t}, \tag{63b}$$

in dobljena izraza za $\dot{x}$ in $\ddot{x}$ vstavimo v diferencialno enačbo (61). Tako dobimo:

$$e^{-\beta t}\left[\ddot{y} + \left(\omega_0^2 - \beta^2\right) y\right] = 0\,. \tag{64}$$

Ker $e^{-\beta t}$ v splošnem ni enak nič, mora biti

$$\ddot{y} + \left(\omega_0^2 - \beta^2\right) y = 0\ . \tag{65}$$

Rešitev enačbe (65) je sinusno nihanje:

$$y = x_0 \sin\left(\omega_0^{'}\, t + \delta\right), \tag{66}$$

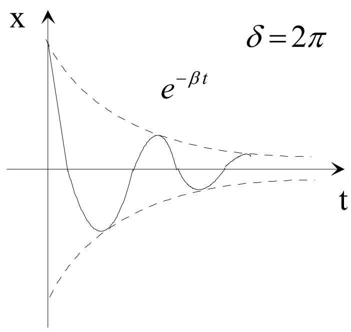
kjer je:

$$\omega_0^{'} = \left(\omega_0^2 - \beta^2\right)^{\frac{1}{2}} \tag{67}$$

lastna krožna frekvenca dušenega nihanja.

Na osnovi enačb (63) in (66) zapišemo rešitev enačbe (61) v obliki:

$$\boxed{x = x_0\, e^{-\beta t} \sin\left(\omega_0^{'}\, t + \delta\right)} \tag{68}$$



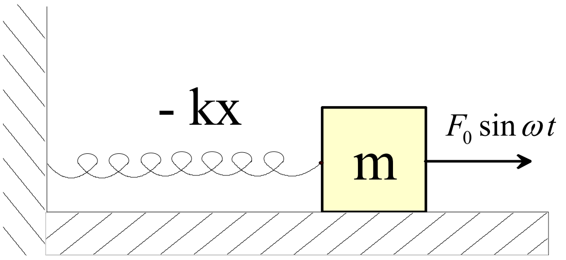
Funkcija (68) reši enačbo (61) le v primeru, ko je $\beta < \omega_0$ (glejte enačbo (67)). Če je $\beta > \omega_0$ se enačba (65) lahko zapiše v obliki:

$$\ddot{y} = \left(\beta^2 - \omega_0^2\right) y\ , \tag{69}$$

kjer je $\left(\beta^2 - \omega_0\right) > 0$. Zato je v tem primeru rešitev enačbe (69) eksponentna funkcija, pa tudi celotna rešitev (glejte še enačbo (63)) je eksponentna funkcija:

$$x = x_0\, e^{-\alpha t}\ ,\ \ \alpha > 0\,. \tag{70}$$

VSILJENO NIHANJE



m ≡ masa
k ≡ konstanta vzmeti
F_0 ≡ amplituda vsiljene sile
ω ≡ vsiljena krožna frekvenca

Sila, ki vsiljuje nihanje: $\boxed{F(t) = F_0 \sin \omega t}$ (71)

Enačba gibanja:

$m\ddot{x} = -kx - 2\beta m\dot{x} + F_0 \sin \omega t$, oziroma

$$\boxed{\ddot{x} + 2\beta \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \sin \omega t}, \tag{72}$$

kjer je $\omega_0^2 = k/m$ (73)

lastna krožna frekvenca nedušenega nihanja in β koeficient dušenja.

Če je $\omega << \omega_0$: $\ddot{x} \to 0, \dot{x} \to 0$, torej:

$\omega_0^2 x \cong \frac{F_0}{m} \sin \omega t$, oziroma:

$$x = \frac{F_0}{m\omega_0^2} \sin \omega t. \tag{74}$$

Splošno rešitev diferencialne enačbe (72) iščemo z nastavkom:

$$\boxed{x(t) = x_h(t) + x_p(t)}, \tag{75}$$

kjer je $x_p(t)$ partikularna rešitev nehomogene diferencialne enačbe, $x_h(t)$ pa je rešitev homogene diferencialne enačbe $\ddot{x} + 2\beta \dot{x} + \omega_0^2 x = 0$ (glejte enačbo (68)):

$$\boxed{x_h = x_0 e^{-\beta t} \sin \omega_0' t},$$

$$\omega_0' = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}.$$

Lastno nihanje z lastno krožno frekvenco ω_0' se po zadosti velikem času zaduši, ker $x_h(t \to \infty) \to 0$.

Partikularno rešitev nehomogene diferencialne enačbe (72) iščemo z nastavkom:

$$\boxed{x_p(t) = x_0 \sin(\omega t + \delta)}\,, \tag{76}$$

kjer je ω krožna frekvenca vsiljene sile. V nadaljevanju iščemo x_0 in δ. Izraz (76) predelamo v:

$$x_p = x_0 \sin(\omega t + \delta) = x_0 \sin \omega t \cos \delta + x_0 \cos \omega t \sin \delta \text{ , oziroma} \tag{77}$$

$$\boxed{x_p(t) = A_1 \sin \omega t + A_2 \cos \omega t}\,, \tag{78}$$

kjer smo vpeljali nove oznake:

$$x_0 \cos \delta = A_1 \quad \text{ter} \quad x_0 \sin \delta = A_2 \,, \tag{79}$$

Odvode:

$$\dot{x}_p = A_1\, \omega \cdot \cos \omega t - A_2 \omega \cdot \sin \omega t \,,$$
$$\ddot{x}_p = A_1\, \omega^2 \cdot \sin \omega t - A_2 \omega^2 \cdot \cos \omega t ,$$

vstavimo v diferencialno enačbo (72):

$$\begin{aligned} &- A_1\, \omega^2 \sin \omega t - A_2 \omega^2 \cos \omega t + 2\,\beta\, A_1 \omega \cos \omega t - 2\,\beta\, A_2\, \omega \cos \omega t + \\ &+ \omega_0^2\, A_1 \sin \omega t + \omega_0^2\, A_2 \cos \omega t = \frac{F_0}{m} \sin \omega t \end{aligned} \tag{80}$$

Enačba (80) mora veljati posebej za člene s $\sin(\omega t)$ in posebej za člene z $\cos(\omega t)$:

$$- A_1\, \omega^2 - 2\,\beta\, A_2\, \omega + \omega_0^2\, A_1 = \frac{F_0}{m} \,,$$
$$- A_2\, \omega^2 + 2\,\beta\, A_1\, \omega + \omega_0^2\, A_2 = 0 \,,$$

oziroma:

$$\left(\omega_0^2 - \omega^2\right) A_1 - 2\,\beta\, \omega\, A_2 = \frac{F_0}{m} \,, \tag{81}$$
$$\left(\omega_0^2 - \omega^2\right) A_2 + 2\,\beta\, \omega\, A_1 = 0 \,. \tag{82}$$

Iz enačbe (82) ob upoštevanju enačbe (79) sledi:

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{x_0 \sin \delta}{x_0 \cos \delta} = tg\, \delta = \frac{-2\,\beta\, \omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \text{ , torej:} \tag{83}$$

$$\boxed{tg\,\delta = \frac{-2\beta\omega}{\omega_0^2-\omega^2}}\ .$$

Enačbi (81) in (82) kvadriramo ter seštejemo:

$$\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2\left(A_1^2+A_2^2\right)+4\beta^2\omega^2\left(A_1^2+A_2^2\right)=\left(\frac{F_0}{m}\right)^2 . \tag{84}$$

Velja pa tudi (glejte enačbo (79):

$$A_1^2+A_2^2 = x_0^2\cos^2\delta + x_0^2\sin^2\delta = x_0^2\ . \tag{85}$$

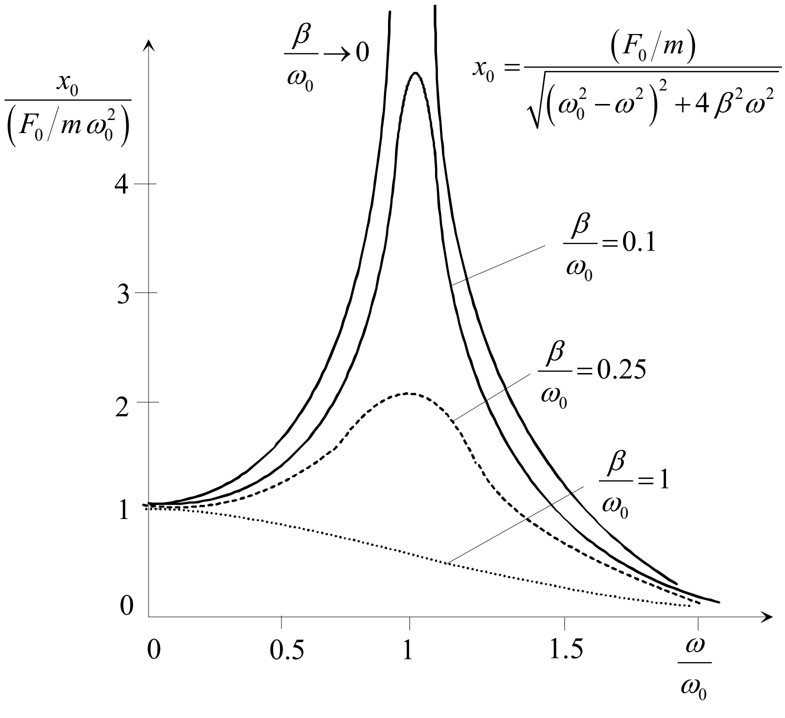
Iz enačb (84) in (85) sledi:

$$\left(\omega_0^2-\omega^2\right)x_0^2+4\beta^2\omega^2x_0^2=\left(\frac{F_0}{m}\right)^2,$$

od tod pa:

$$\boxed{x_0=\frac{\left(\dfrac{F_0}{m}\right)}{\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+4\beta^2\omega^2}}} \tag{86}$$

Odvisnost amplitude x_0 od vsiljene krožne frekvence ω:

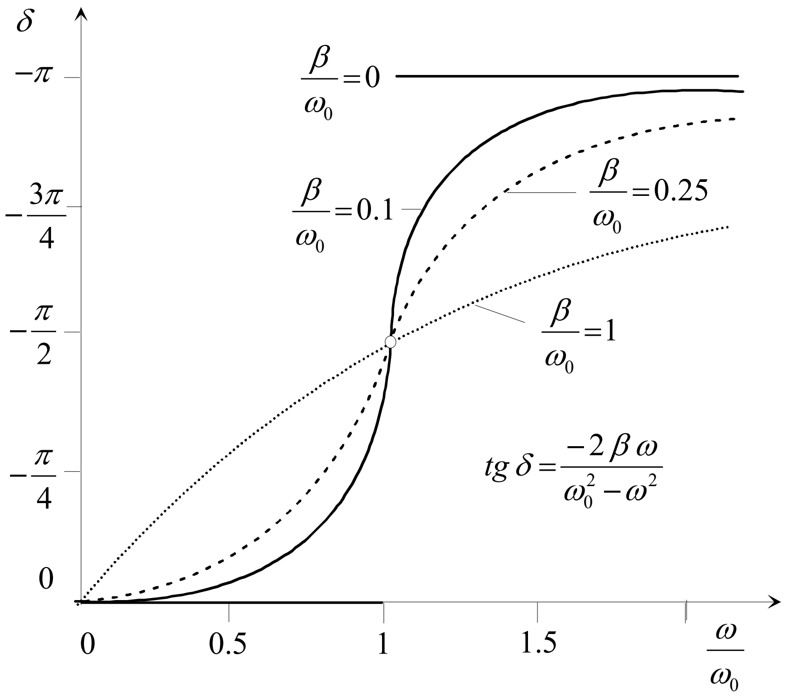


Torej:

- splošna rešitev enačbe (72) je: $\boxed{x = x_0\, e^{-\beta t} \sin\left(\omega_0^{'}\, t\right) + x_0 \sin\left(\omega t + \delta\right)}$
- za zadosti velike čase niha nihalo sinusno $\left(x = x_0 \sin\left(\omega t + \delta\right)\right)$ s frekvenco vsiljene sile
- lastno nihanje $x_h = x_0\, e^{-\beta t} \sin\left(\omega_0^{'}\, t\right)$ se zaduši $\left(\omega_0^{'} = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}\right)$
- $\omega << \omega_0 :\ x_0 \rightarrow \dfrac{F_0}{m\,\omega_0^2}$
- $\omega \cong \omega_0 :\ \dfrac{\mathrm{d}\,x_0}{\mathrm{d}\,\omega} = 0$ je pri $\boxed{\omega = \omega_{\max} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}}$

  za $\beta \rightarrow 0 :\ \omega_{\max} \rightarrow \omega_0\ \ in\ \ x_0 \rightarrow \infty$
- $\omega >> \omega_0 :\ x_0 \rightarrow 0$

Odvisnost faznega zamika δ od vsiljene krožne frekvence ω:



Torej:

$$\omega << \omega_0 : \delta \rightarrow 0 \quad \left(x_0 \rightarrow \frac{F_0}{m\,\omega_0^2}\right)$$

$$\omega \cong \omega_0 : \delta \rightarrow -\frac{\pi}{2} \quad \left(x_0 \rightarrow \infty\right)$$

$$\omega >> \omega_0 : \delta \rightarrow -\pi \quad \left(x_0 \rightarrow 0\right)$$

Moč vsiljene sile

$$\boxed{P(t)=F(t)\cdot v(t)=F_0\sin\omega t\cdot x_0\,\omega\cos(\omega t+\delta)}\ . \tag{87}$$

Upoštevali smo: $x=x_0\sin(\omega t+\delta)\ \Rightarrow\ v=\dot{x}=x_0\,\omega\cos(\omega t+\delta)$.

Ker $\cos(\omega t+\delta)=\cos(\omega t)\cdot\cos\delta-\sin(\omega t)\cdot\sin\delta$:

$P(t)=F_0x_0\omega\left[\sin(\omega t)\cdot\cos(\omega t)\cdot\cos\delta-\sin^2(\omega t)\cdot\sin\delta\right]$

Povprečna moč $\overline{P}=\frac{1}{t_0}\int_0^{t_0}P(t)\,\mathrm{d}t$ je:

$$\overline{P}=F_0x_0\,\omega\left[\frac{\cos\delta}{t_0}\underbrace{\int_0^{t_0}\frac{1}{2}\sin(2\omega t)\,\mathrm{d}t}_{=0}-\sin\delta\,\underbrace{\frac{1}{t_0}\int_0^{t_0}\sin^2(\omega t)\,\mathrm{d}t}_{=\frac{1}{2}}\right]\ ,$$

torej:

$$\boxed{\overline{P}=-\frac{F_0}{2}\,\omega\,x_0\sin\delta}\ . \tag{88}$$

V enačbo (88) vstavimo: $x_0=\frac{(F_0/m)}{\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+4\beta^2\omega^2}}$ in $\sin\delta=\frac{tg\,\delta}{\sqrt{1+tg^2\delta}}$,

kjer je $tg\,\delta=\frac{-2\beta\,\omega}{\omega_0^2-\omega^2}$,

in dobimo:

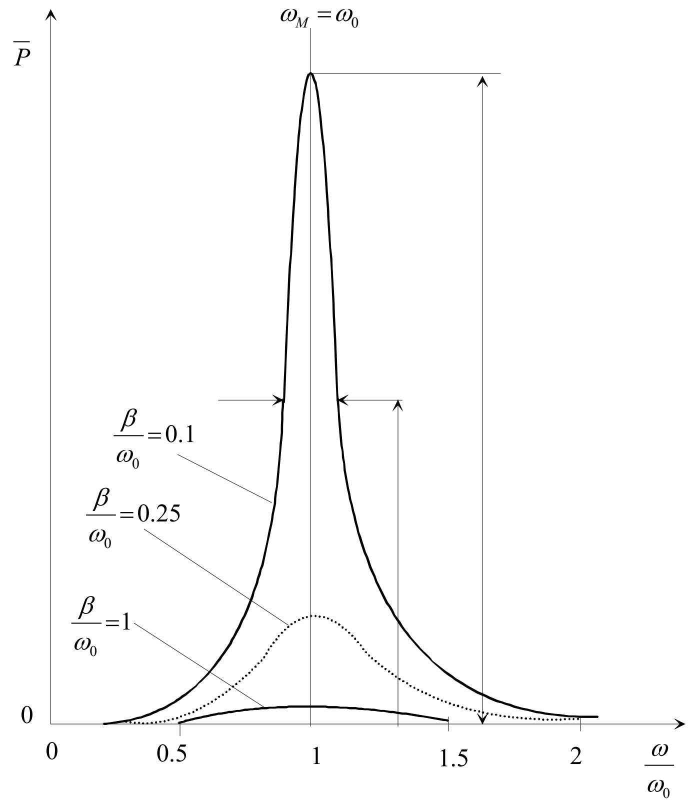
$$\overline{P}=\frac{-\frac{F_0}{2}\,\omega\frac{F_0}{m}}{\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+4\beta^2\omega^2}}\cdot\frac{-\frac{2\beta\,\omega}{\omega_0^2-\omega^2}}{\sqrt{1+\frac{4\beta^2\omega^2}{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2}}}\ ,$$

torej:

$$\boxed{\overline{P}=\frac{\frac{F_0^2}{m^2}\,\beta\,\omega^2}{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+4\beta^2\omega^2}}\ . \tag{89}$$

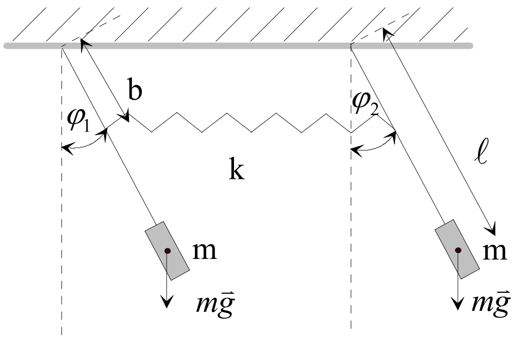
Maksimalna vrednost $\overline{P}$ je pri $\frac{\mathrm{d}\overline{P}}{\mathrm{d}\omega}=0\ \Rightarrow\ \omega_M=\omega_0$.

Sklep: za vse β je $\overline{P}$ največja pri ω_0



SKLOPLJENO NIHANJE

I. model: dve enaki fizični nihali sta sklopljeni z vzmetjo s konstanto k



Enačbi gibanja (vrtenje togega telesa okoli fiksne osi):

$M = J\,\ddot{\varphi}$, $\alpha = \ddot{\varphi}$,

zapišemo v obliki:

$$J\,\ddot{\varphi}_1 = -\,mg\,\ell \sin\varphi_1 + k\,\Delta x\, b \cos\varphi_1 \ , \qquad (90a)$$
$$J\,\ddot{\varphi}_2 = -\,mg\,\ell \sin\varphi_2 - k\,\Delta x\, b \cos\varphi_2 \ , \qquad (90b)$$

kjer smo upoštevali $\sin\left(90^0 \pm \varphi\right) = \cos\varphi$.
Ob upoštevanju:

$$\sin\varphi = \varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - .... \ ,$$
$$\cos\varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{3!} + \frac{\varphi^4}{5!} - .... \ ,$$

ter $\varphi_1 << 1$ in $\varphi_2 << 1$ velja: (glejte še sliko):

$\sin\varphi_1 \approx \varphi_1$, $\sin\varphi_2 \approx \varphi_2$, $\cos\varphi_1 \approx 1$, $\cos\varphi_2 \approx 1$,
in $\Delta x = b\sin\varphi_2 - b\sin\varphi_1 \cong b\left(\varphi_2 - \varphi_1\right)$.

Enačbi (90a) in (90b) tako zapišemo v obliki:

$$J\,\ddot{\varphi}_1 \cong -mg\,\ell\,\varphi_1 + k\ b^2\left(\varphi_2 - \varphi_1\right) \ , \qquad (91a)$$
$$J\,\ddot{\varphi}_2 \cong -mg\,\ell\,\varphi_2 - k\ b^2\left(\varphi_2 - \varphi_1\right) \ . \qquad (92a)$$

Definiramo: $\omega_0^2 = \dfrac{m\,g\,\ell}{J}$ (lastna frekvenca fizičnega nihala) in

$$D = \frac{k\,b^2}{J}\,.$$

Ob upoštevanju gornjih definicij za ω_0 in D prepišemo enačbi (91a) in (92a) v obliko:

$$\ddot{\varphi}_1 = -\omega_0^2\,\varphi_1 + D\left(\varphi_2 - \varphi_1\right)\ , \tag{91}$$
$$\ddot{\varphi}_2 = -\omega_0^2\,\varphi_2 + D\left(\varphi_2 - \varphi_1\right)\ . \tag{92}$$

Seštejemo enačbi (91) in (92):

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\left(\varphi_2 + \varphi_1\right) = -\,\omega_0^2\left(\varphi_2 + \varphi_1\right)\ . \tag{93}$$

Odštejemo enačbi (92) in (91):

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\left(\varphi_2 - \varphi_1\right) = -\left(\omega_0^2 + 2D\right)\left(\varphi_2 - \varphi_1\right)\ . \tag{94}$$

Rešitvi enačb (93), (94) sta:

$$\varphi_2 + \varphi_1 = \varphi_0 \cos\omega_1 t\ , \tag{93'}$$
$$\varphi_2 - \varphi_1 = \varphi_0 \cos\omega_2 t\ , \tag{94'}$$

kjer sta $\omega_1 = \omega_0$ in $\omega_2 = \sqrt{\omega_0^2 + 2D}$ dve lastni krožni frekvenci.

Pri zapisu rešitev (93') in (94') smo upoštevali začetna pogoja:

$$\varphi_1 = 0,\ \ \varphi_2 = \varphi_0 \text{ ob } t = 0, \tag{95}$$

oziroma:

$$\begin{aligned}\varphi_2 + \varphi_1 &= \varphi_0\,,\\ \varphi_2 - \varphi_1 &= \varphi_0\,.\end{aligned} \tag{96}$$

Torej:

$$\varphi_2 = \frac{\varphi_0}{2}\left(\cos\omega_1 t + \cos\omega_2 t\right), \tag{97'}$$
$$\varphi_1 = \frac{\varphi_0}{2}\left(\cos\omega_1 t - \cos\omega_2 t\right). \tag{98'}$$

Upoštevamo:

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cdot\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \quad ,$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\cdot\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \quad .$$

Dobimo:

$$\varphi_2 = \varphi_0 \cos\left[\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t\right]\cdot\cos\left[\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t\right], \tag{97}$$

$$\varphi_1 = -\varphi_0 \sin\left[\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t\right]\cdot\sin\left[\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t\right]. \tag{98}$$

Definiramo amplitudo:

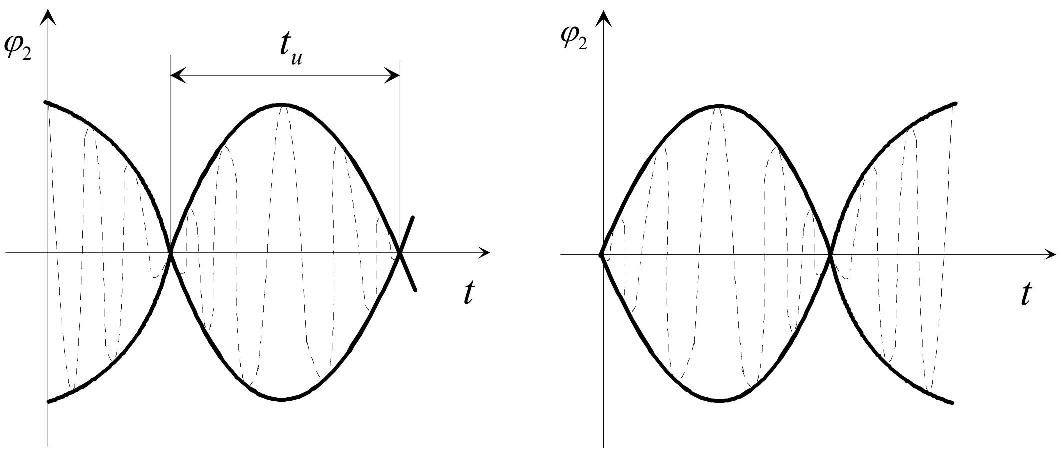
$$\varphi_2 = \underbrace{\varphi_0 \cos\left[\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t\right]}_{\text{amplituda}}\cdot\cos\left[\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t\right],$$

$$\varphi_1 = \underbrace{-\varphi_0 \sin\left[\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t\right]}_{\text{amplituda}}\cdot\sin\left[\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t\right].$$

Zaključek:

- nihali nihata s frekvenco $\frac{\omega_1+\omega_2}{2}$
- amplituda se spreminja s frekvenco $\frac{\omega_1-\omega_2}{2}$

$$\boxed{\omega_1 = \omega_0} \qquad \boxed{\omega_2 = \sqrt{\omega_0^2 + 2D}} \tag{99}$$



- **Utripanje:**

  $t_u \equiv$ čas utripanja: $\frac{\omega_2-\omega_1}{2}\cdot t_u = \pi \;\Rightarrow \boxed{t_u = \frac{2\pi}{\omega_2-\omega_1}}$

- **Šibka sklopitev** (2D << ω_0^2):

$$\omega_2 = \left(\omega_0^2 + 2D\right)^{1/2} = \omega_0\left(1+\frac{2D}{\omega_0^2}\right)^{1/2} \cong \omega_0\left(1+\frac{D}{\omega_0^2}\right) = \omega_0 + \frac{D}{\omega_0}\text{ , kjer } \frac{2D}{\omega_0^2} << 1.$$

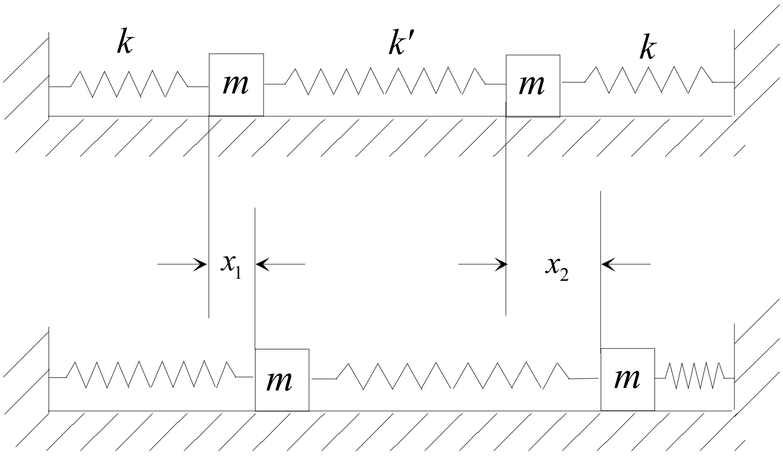
Uporabili smo razvoj: $\left(1+x\right)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \ldots$; če $x << 1$: $\left(1+x\right)^{\frac{1}{2}} \cong 1+\frac{1}{2}x$.

Torej: $\frac{\omega_1+\omega_2}{2} \cong \omega_0 + \frac{D}{2\,\omega_0}$.

Nihali nihata s frekvenco, ki je le malo večja od lastne frekvence ω_0 .

Izračunajmo še $\frac{\omega_2-\omega_1}{2} \cong \frac{D}{2\,\omega_0}$.

II. model: nihanje dveh sklopljenih nihal na vijačno vzmet



Zapišemo II. Newtonov zakon za masi m:

$$m\ddot{x}_1 = -k\,x_1 - k'(x_1 - x_2), \tag{100}$$

$$m\ddot{x}_2 = -k\,x_2 - k'(x_2 - x_1). \tag{101}$$

Seštejemo enačbi (101) in (102):

$$m(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2) = -k\,(x_1 + x_2). \tag{102}$$

Odštejemo enačbi (101) in (102):

$$m(\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2) = -k\,(x_1 - x_2) - 2k'(x_1 - x_2) = -(k + 2k')(x_1 - x_2)\ . \tag{103}$$

Izberemo začetna pogoja: $x_1 = x_0$ in $x_2 = 0$ (ob času $t = 0$)
Ob času $t = 0$ tako velja:

$$x_1 + x_2 = x_0\,, \tag{104}$$

$$x_1 - x_2 = x_0\,. \tag{105}$$

Ob upoštevanju enačb (104) in (105) napišemo rešitvi enačb (102) in (103) v obliki:

$$x_1 + x_2 = x_0 \cos\omega_1 t\,, \tag{106}$$

$$x_1 - x_2 = x_0 \cos\omega_2 t\,, \tag{107}$$

kjer sta lastni krožni frekvenci: $\omega_1^2 = \dfrac{k}{m}$ in $\omega_2^2 = \dfrac{k + 2k'}{m}$.

Iz enačb (106) in (107) sledi:

$$x_1 = \frac{x_0}{2}(\cos\omega_1 t + \cos\omega_2 t) = x_0 \cos\left[\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}\right)t\right]\cdot\cos\left[\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right)t\right]\,, \tag{108}$$

$$x_2 = \frac{x_0}{2}\left(\cos\omega_1 t - \cos\omega_2 t\right) = -x_0 \sin\left[\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}\right)t\right]\cdot\sin\left[\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right)t\right]. \tag{109}$$

Upoštevali smo:

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right),$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right).$$

Dobili smo **utripanje**:

$$x_1 = x_0 \cos\left[\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right]\cdot\cos\left[\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\right], \tag{110}$$

$$x_2 = -x_0 \sin\left[\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right]\cdot\sin\left[\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right)t\right], \tag{111}$$

kjer sta dve lastni krožni frekvenci:

$$\omega_1 = \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \tag{112}$$

$$\omega_2 = \omega_0\left(1 + 2\frac{k'}{k}\right)^{1/2}. \tag{113}$$

- **Šibka sklopitev:** $k' << \mathrm{k}$

Če uporabimo $\left(1+x\right)^{1/2} \cong 1 + \frac{1}{2}x$ za x<<1 iz enačb (112) in (113) sledi:

$$\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \cong \omega_0\left(1 + \frac{k'}{2k}\right), \tag{114}$$

$$\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} \cong \frac{k'\omega_0}{2k}. \tag{115}$$

FOURIEROVA ANALIZA PERIODIČNEGA GIBANJA

- Poljubno periodično gibanje lahko zapišemo kot:

$$x(t)=\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\,\omega_0 t)+\sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos(n\,\omega_0 t)\,. \tag{116}$$

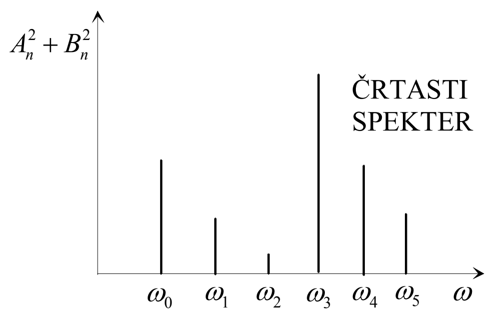
Zgornjo vrsto imenujemo Fourierova vrsta, kjer je

ω_0 je najmanjša krožna frekvenca, koeficienti A_n in B_n pa so:

$$A_n=\frac{2}{t_0}\int_0^{t_0} x(t)\cdot\sin(n\,\omega_0 t)\,\mathrm{d}t \quad , \tag{117}$$

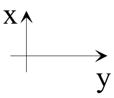
$$B_n=\frac{2}{t_0}\int_0^{t_0} x(t)\cdot\cos(n\,\omega_0 t)\,\mathrm{d}t \quad . \tag{118}$$

- Sestavo določenega periodičnega gibanja opišemo s spektrom v obliki:

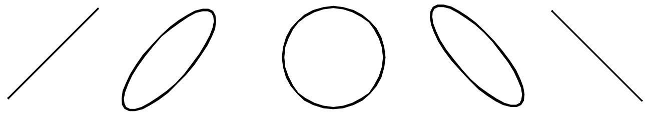


SESTAVLJANJE DVEH PRAVOKOTNIH NIHANJ

$$x = x_0 \sin(\omega_1 t) \qquad y = y_0 \sin(\omega_2 t - \delta) \tag{119}$$

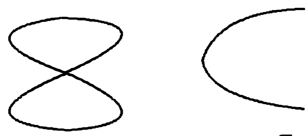


$\boxed{\omega_1 = \omega_2}$:



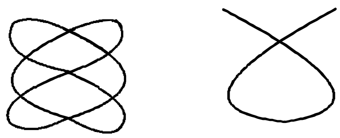
$\delta = 0$ $\quad \delta = \frac{\pi}{4}$ $\quad \delta = \frac{\pi}{2}$ $\quad \delta = \frac{3\pi}{4}$ $\quad \delta = \pi$

$\boxed{\frac{\omega_1}{\omega_2} = 2}$:



$\delta = 0$ $\quad \delta = \frac{\pi}{4}$

$\boxed{\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{3}{2}}$:



$\delta = 0$ $\quad \delta = \frac{\pi}{4}$

- gibanje v splošnem ni periodično
- je pa omejeno na področje $|x| < |x_0|$ in $|y| < |y_0|$

- **kroženje** (primer):

$$\left.\begin{array}{l} x_0 = y_0 = r_0 \\ \omega_1 = \omega_2 \equiv \omega \\ \delta = \frac{\pi}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = r_0 \sin(\omega t) \\ y = r_0 \cos(\omega t) \end{array}\right\} \Rightarrow x^2 + y^2 = r_0^2 \left[\sin^2(\omega t) + \cos^2(\omega t)\right] = r_0^2$$

- **gibanje po premici** (primer):

$$\left.\begin{array}{l} \omega_1 = \omega_2 \equiv \omega \\ \delta = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = x_0 \sin(\omega t) \\ y = y_0 \sin(\omega t) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\frac{x}{y} = \frac{x_0}{y_0}\right\} \Rightarrow y = \left(\frac{y_0}{x_0}\right) x$$

Literatura

R.A. Serwaj in J.W. Jewett: Physics for Scientisticts and Engineers with Modern Physics, Saunders Golden Sunburst Series, Philadelphia, 2004.

J. Strnad: Fizika (1., 2. in 3. del), DMFA Slovenije, Ljubljana, 2002.

R. Kladnik: Visokošolska fizika (2. in 3. del.), DZS, Ljubljana, 1992.

B.H. Bransden, C.J. Joachain: Quantum Mechanics, Pearson-Prentice Hall, London, 2000.

S. Poberaj: Fizika snovi, Založba FE, Ljubljana, 1976.

E. Kreyszig: Advanced Engineering Mathematics, Wiley, New York, 1993.

G.B. Arfken and H.J. Weber: Mathematical Methods. for Physicists, Academic Press, San Diego, 2001.