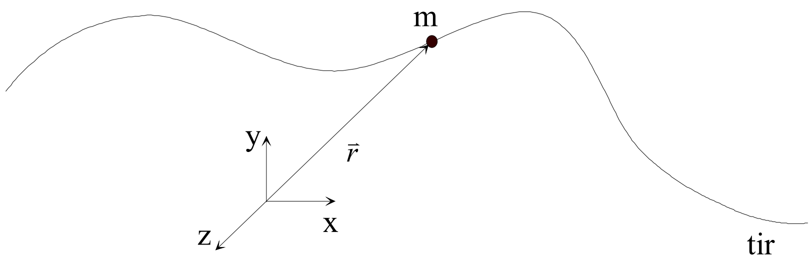
Izrek o vrtilni količini

Točkasto telo

Krivo gibanje točkastega telesa z maso m opišemo s časovno odvisnim krajevnim vektorjem $\vec{r}(t)$, definiranim v kartezičnem koordinatnem sistemu $(x,\ y,\ z)$.



hitrost $\vec{v} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}$

pospešek $\vec{a} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t}$

Zapišemo II. Newton-ov zakon za gibanje točkastega telesa:

$$m\,\vec{a} = \vec{F}\ , \tag{1}$$

kjer je $\vec{F}$ rezultanta vseh zunanjih sil, ki delujejo na točkasto telo. Enačbo (1) množimo vektorsko na obeh straneh enačaja s krajevnim vektorjem $\vec{r}$:

$$\vec{r} \times m\,\vec{a} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{M}\ , \tag{2}$$

kjer je $\vec{M}$ rezultantni navor vseh zunanjih sil.

Člen ($\vec{r} \times m\,\vec{a}$) lahko zapišemo malce drugače:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\vec{r} \times m\,\vec{v}\right) = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} \times m\,\vec{v} + \vec{r} \times m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \vec{v} \times m\,\vec{v} + \vec{r} \times m\,\vec{a} = \vec{r} \times \vec{m}\,a\ , \tag{3}$$

kjer upoštevamo, da je skalarni produkt dveh vzporednih vektorjev $\vec{v} \times m\,\vec{v}$ enak nič. Torej ob upoštevanju enačbe (3) se enačba (2) transformira v:

$$\frac{\mathrm{d}\left(\vec{r} \times m\,\vec{v}\right)}{\mathrm{d}t} = \vec{M}\ . \tag{4}$$

Definiramo vrtilno količino točkastega telesa:

$$\vec{\Gamma} = \vec{r} \times m\,\vec{v}\ . \tag{5}$$

Iz enačb (4) in (5) tako sledi izrek o vrtilni količini za točkasto telo:

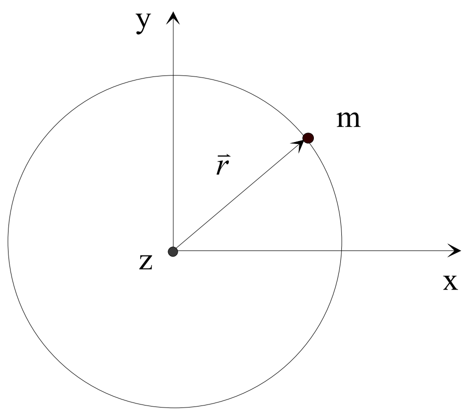
$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\vec{\Gamma}}{\mathrm{d}t} = \vec{M}} \tag{6}$$

Enačbo (6) prepišemo v obliko:

$$\mathrm{d}\vec{\Gamma} = \vec{M}\mathrm{d}t \ ,$$

oziroma

$$\int \vec{M}\ \mathrm{d}t = \vec{\Gamma}_2 - \vec{\Gamma}_1 = \Delta\vec{\Gamma} \ , \tag{7}$$



kjer je $\int \vec{M}\ \mathrm{d}t$ sunek navora, $\vec{\Gamma}_1$ začetna vrtilna količina, $\vec{\Gamma}_2$ končna vrtilna količina, $\Delta\vec{\Gamma}$ pa sprememba vrtilne količine.

Za enakomerno **krožečo točkasto maso**, kjer postavimo izhodišče koordinatnega sistema v središče krožnice:

kaže vektor vrtilne količine $\vec{\Gamma}$ v smeri (ali pa v nasprotni smeri) osi z. Velikost vrtilne točkaste mase m, ki kroži s kotno hitrostjo ω po krožnici s polmerom r je:

$$\Gamma = r\,m\,v = r\,m\,\omega\,r = m\,r^2\,\omega \ , \tag{8}$$

kjer smo upoštevali $v = \omega\,r$. Kinetična energija krožeče točkaste mase pa je:

$$W_k = \frac{1}{2}m\,v^2 = \frac{1}{2}m\,r^2\,\omega^2 \quad . \tag{9}$$

Če definiramo vztrajnostni moment krožeče točkaste mase kot

$$J = m\,r^2 \ , \tag{10}$$

lahko zapišemo enačbe (5), (6), (7) in (9) v obliki:

$$\vec{\Gamma} = J\,\vec{\omega}\,, \tag{11}$$

$$\vec{M} = \frac{\mathrm{d}\vec{\Gamma}}{\mathrm{d}t} = J\,\frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t} = J\,\vec{\alpha}\,, \tag{12}$$

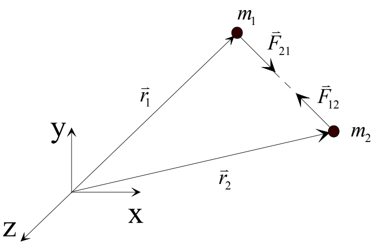
$$\int \vec{M}\,\mathrm{d}t = J\vec{\omega}_2 - J\vec{\omega}_1\,, \tag{13}$$

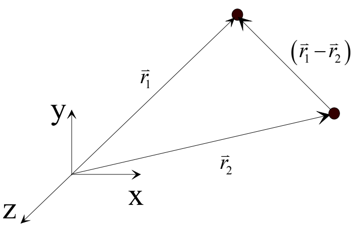
$$W_k = \frac{1}{2}J\,\omega^2\,, \tag{14}$$

kjer je $\vec{\alpha} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t}$ kotni pospešek.

Sistem točkastih mas

Za začetek pokažemo za sistem dveh točkastih delcev, da je navor notranjih sil nič, če so sile centralne.





Vsota navorov notranjih sil $\vec{F}_{12}$ in $\vec{F}_{21}$ je enaka:

$$\sum_i \vec{M}_i = \vec{r}_1 \times \vec{F}_{21} + \vec{r}_2 \times \vec{F}_{12} = \vec{r}_1 \times \vec{F}_{21} + \vec{r}_2 \times \left(-\vec{F}_{21}\right), \tag{15}$$

kjer smo upoštevali III. Newtonov zakon, t.j. $\vec{F}_{12} + \vec{F}_{21} = \vec{0}$. Enačbo (15) zapišemo v obliki:

$$\sum_i \vec{M}_i = \left(\vec{r}_1 - \vec{r}_2\right) \times \vec{F}_{21} = \vec{0}\,, \tag{16}$$

kjer smo upoštevali, da je vektorski produkt dveh vzporednih vektorjev $\left(\vec{r}_1 - \vec{r}_2\right)$ in $\vec{F}_{21}$ nič. Posplošitev enačbe (16) za množico točkastih mas nas vodi do zaključka, da je navor vseh notranjih sil vedno nič, če so dvodelčne notranje sile centralne.

Na osnovi enačbe (5) zapišemo vrtilno količino množice točkastih mas kot:

$$\vec{\Gamma} = \sum_i \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i \,, \tag{17}$$

kjer teče indeks *i* po vseh točkovnih masah, ki sestavljajo sistem. V nadaljevanju odvajamo po času enačbo (17) na obeh straneh enačaja.

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\vec{\Gamma}}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_i \vec{r}_i \times m_i\, \vec{v}_i\right) = \sum_i \frac{\mathrm{d}\vec{r}_i}{\mathrm{d}t} \times m_i\, \vec{v}_i + \sum_i \vec{r}_i \times m_i \frac{\mathrm{d}\vec{v}_i}{\mathrm{d}t} = \\ &= \sum_i \vec{v}_i \times m_i\, \vec{v}_i + \sum_i \vec{r}_i \times m_i\, \vec{a}_i = \sum_i \vec{r}_i \times m_i\, \vec{a}_i \end{aligned} \,, \tag{18}$$

kjer smo upoštevali, da je vektorski produkt vzporednih vektorjev $\vec{v}_i$ in $m_i\, \vec{v}_i$ enak nič. V nadaljevanju upoštevamo II. Newtonov zakon za posamezno točkasto maso (glejte še str. xx):

$$m_i\, \vec{a}_i = \sum_j \vec{F}_{ji} + \vec{F}_i \tag{19}$$

kjer je $\sum_j \vec{F}_{ji}$ vsota vseh notranjih sil, ki delujejo na maso m_i, $\vec{F}_i$ pa rezultanta vseh zunanjih sil, ki delujejo na maso m_i. Iz enačb (18) in (19) sledi:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{\Gamma}}{\mathrm{d}t} = \sum_i \left(\vec{r}_i \times \sum_j \vec{F}_{ji}\right) + \sum_i \left(\vec{r}_i \times \vec{F}_i\right). \tag{20}$$

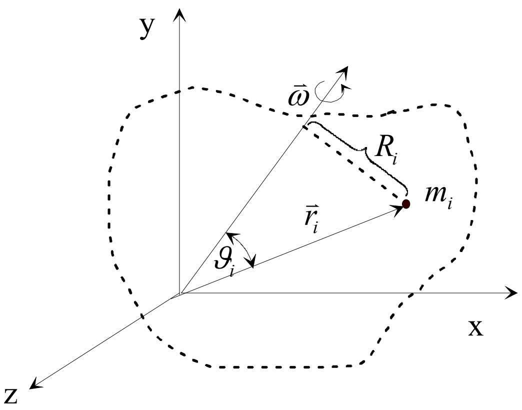
Ker smo prej pokazali, da je vsota vseh notranjih navorov $\sum_i \left(\vec{r}_i \times \sum_j \vec{F}_{ji}\right)$ enaka nič lahko enačbo (20) zapišemo v obliki:

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\vec{\Gamma}}{\mathrm{d}t} = \sum_i \left(\vec{r}_i \times \vec{F}_i\right) = \sum_i \vec{M}_i} \,, \tag{21}$$

kjer je $\sum_i \vec{M}_i$ vsota vseh zunanjih navorov, ki delujejo na sistem točkastih mas $m_1, m_2, m_3 \ldots$. Enačbo (21) imenujemo izrek o vrtilni količini za sistem točkastih mas.

Togo telo

- togo telo obravnavamo kot skupek točkastih mas m_i
- $\vec{\omega}$ je trenutna kotna hitrost v smeri osi okoli katere se vrtijo vsi deli telesa (vse točkaste mase) z enako kotno hitrostjo: $\vec{\omega}(\vec{r}_i) = \omega = \text{konst.}$
- koordinatno izhodišče je na osi vrtenja



$$\vec{\omega} = \left(\omega_x, \omega_y, \omega_z\right)$$
$$\vec{r}_i = \left(x_i, y_i, z_i\right)$$
$$r_i^2 = x_i^2 + y_i^2 + z_i^2$$

$$\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i$$
$$\left|\vec{v}_i\right| = \omega \underbrace{r_i \sin \vartheta_i}_{R_i} = \omega R_i$$

vrtilna količina sistema točkastih mas:

$$\vec{\Gamma} = \sum_i \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i \tag{22}$$

Izrek o vrtilni količini: $\dfrac{\mathrm{d}\vec{\Gamma}}{\mathrm{d}t} = \sum_i \vec{M}_i \equiv \vec{M}$ (23)

Prehod iz sistema točkastih mas na togo telo: $\sum_i \;\rightarrow \int$, $m_i \rightarrow \mathrm{d}m$, $\vec{r}_i \rightarrow \vec{r}$, $\vec{v}_i \rightarrow \vec{v}$,

torej $\sum_i \vec{r}_i \, x \, m_i \vec{v}_i \;\rightarrow \int \vec{r} \times \vec{v} \, \mathrm{d}m$ (24)

Uporabimo zvezo:

$\vec{r} \times \vec{v} = \vec{r} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}\right) = \vec{\omega}\left(\vec{r} \cdot \vec{r}\right) - \vec{r}\left(\vec{r} \cdot \vec{\omega}\right)$, od koder sledi:

$$\vec{\Gamma} = \int \vec{r} \times \vec{v} \, \mathrm{d}m = \int \vec{r} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}\right) \mathrm{d}m = \int \vec{\omega} r^2 \mathrm{d}m - \int \vec{r} \, \left(\vec{\omega} \cdot \vec{r}\right) \mathrm{d}m \tag{25}$$

Ob upoštevanju:

$$\vec{r} = \left(x, y, z\right)$$
$$\vec{\omega} = \left(\omega_x, \omega_{y,} \omega_z\right)$$

$$r^2 = \vec{r} \cdot \vec{r} = x^2 + y^2 + z^2$$
$$\vec{\omega} \cdot \vec{r} = \omega_x x + \omega_y y + \omega_z\, z$$

zapišemo vektorsko enačbo (25) po komponentah v obliki:

$$\Gamma_x = \omega_x \int r^2 \mathrm{d}m - \int x\left(\omega_x x + \omega_y y + \omega_z z\right)\mathrm{d}m \tag{26a}$$
$$\Gamma_y = \omega_y \int r^2 \mathrm{d}m - \int y\left(\omega_x x + \omega_y y + \omega_z z\right)\mathrm{d}m \tag{26b}$$
$$\Gamma_z = \omega_z \int r^2 \mathrm{d}m - \int z\left(\omega_x x + \omega_y y + \omega_z z\right)\mathrm{d}m \tag{26c}$$

Enačbe (26) preuredimo v obliko:

$$\Gamma_x = \omega_x \underbrace{\int\left(y^2 + z^2\right)\mathrm{d}m}_{J_{xx}} - \omega_y \underbrace{\int xy\,\mathrm{d}m}_{D_{xy}} - \omega_z \underbrace{\int xz\,\mathrm{d}m}_{D_{xz}} \tag{27a}$$
$$\Gamma_y = \omega_x \underbrace{\int xy\,\mathrm{d}m}_{D_{yx}} + \omega_y \underbrace{\int\left(x^2 + z^2\right)\mathrm{d}m}_{J_{yy}} - \omega_z \underbrace{\int zy\,\mathrm{d}m}_{D_{yz}} \tag{27b}$$
$$\Gamma_z = \omega_x \underbrace{\int zx\,\mathrm{d}m}_{D_{zx}} - \omega_y \underbrace{\int zy\,\mathrm{d}m}_{D_{zy}} + \omega_z \underbrace{\int\left(x^2 + y^2\right)\mathrm{d}m}_{J_{zz}} \tag{27c}$$

Enačbe (27) ponovno zapišemo v vektorskem zapisu:

$$\boxed{\vec{\Gamma} = \underline{J}\,\vec{\omega}}\ , \tag{28}$$

kjer je $\underline{J}$ vztrajnostni tenzor:

$$\underline{J} = \begin{bmatrix} J_{xx} & -D_{xy} & -D_{xz} \\ -D_{yz} & J_{yy} & -D_{yz} \\ -D_{zx} & -D_{zy} & J_{zz} \end{bmatrix} \tag{29}$$

Zaključek:

Vektorja $\vec{\Gamma}$ in $\vec{\omega}$ v splošnem **nista** vzporedna.

Poimenovanje:

- J_{xx}, J_{yy}, J_{zz} so **vztrajnostni momenti** okrog treh pravokotnih osi
- $D_{xy}, D_{xz}, D_{yz}, D_{yx}, D_{zx}, D_{zy}$ so **deviacijski momenti**

Torej:

$$J_{xx} = \int \left(y^2 + z^2 \right) \mathrm{d}m, \tag{30}$$

$$J_{yy} = \int \left(x^2 + z^2 \right) \mathrm{d}m, \tag{31}$$

$$J_{zz} = \int \left(x^2 + y^2 \right) \mathrm{d}m, \tag{32}$$

$$D_{xy} = \int xy \, \mathrm{d}m, \quad D_{xz} = \int xz \, \mathrm{d}m \tag{33}$$

$$D_{yx} = \int yx \, \mathrm{d}m, \quad D_{yz} = \int yz \, \mathrm{d}m \tag{34}$$

$$D_{zx} = \int zx \, \mathrm{d}m, \quad D_{zy} = \int yz \, \mathrm{d}m \tag{35}$$

Iz enačb (33) – (35) sledi:

$$D_{xy} = D_{yx} \ ,$$
$$D_{xz} = D_{zx} \ ,$$
$$D_{yz} = D_{zy} \ .$$

Vidimo, da je tenzor $\underline{J}$ simetričen.

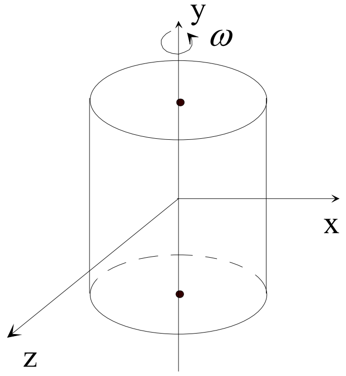
Diagonalizacija tenzorja $\underline{J}$: $D_{ij} = 0$,
koordinate osi so usmerjene vzdolž glavnih osi:

$$\underline{J} = \begin{vmatrix} J_x & 0 & 0 \\ 0 & J_y & 0 \\ 0 & 0 & J_z \end{vmatrix} , \quad J_x \equiv J_{xx} , J_y \equiv J_{yy} , \ J_z \equiv J_{zz} \tag{36}$$

Poseben primer: $\vec{\omega} = (0, \omega, 0)$

torej:

$\Gamma_y = J_y \, \omega, \ \Gamma_x = \Gamma_z = 0$
$\vec{\Gamma}$ in $\vec{\omega}$ sta vzporedna

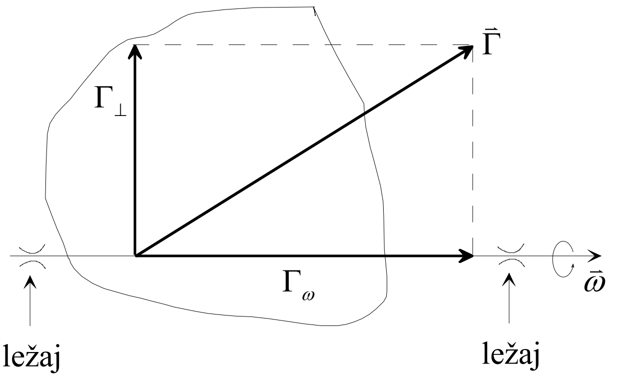


$\Gamma_y = J_y\, \omega,$

$$\frac{\mathrm{d}\Gamma_y}{\mathrm{d}t} = M_y$$

$$J_y = \int \left(x^2 + z^2\right) \mathrm{d}m$$

Poseben primer: os vrtenja togega telesa je vpeta v ležaje (togo telo prisilimo z ležaji, da se vrti okoli nepremične osi):



Komponenta vektorja $\vec{\Gamma}$ v smeri kotne hitrosti $\vec{\omega}$:

$$\Gamma_\omega = \vec{\Gamma} \cdot \frac{\vec{\omega}}{\omega}, \tag{37}$$

kjer je $\frac{\vec{\omega}}{\omega}$ enotni vektor $\left(\left|\frac{\vec{\omega}}{\omega}\right| = 1\right)$. Z M_ω označimo komponento navora $\vec{M}$ v smeri vektorja kotne $\vec{\omega}$:

Velja:

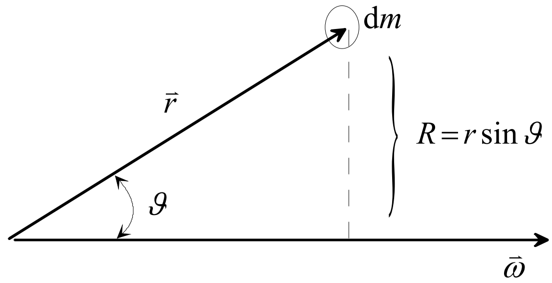
$$\Gamma_\omega = \frac{\vec{\omega}}{\omega} \cdot \int \vec{r} \times \vec{v}\, \mathrm{d}m = \frac{\vec{\omega}}{\omega} \cdot \int \vec{r} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}\right) \mathrm{d}m = \frac{\vec{\omega}}{\omega} \cdot \left[\int r^2 \vec{\omega}\, \mathrm{d}m - \int \vec{r} \left(\vec{r} \cdot \vec{\omega}\right) \mathrm{d}m \right] =$$

$$= \int \left(r^2 \omega - \frac{\left(\vec{r} \cdot \vec{\omega}\right)^2}{\omega} \right) \mathrm{d}m = \int r^2 \omega \left(1 - \cos^2 \vartheta\right) \mathrm{d}m = \int r^2 \omega \sin^2 \vartheta = \omega \int R^2\, \mathrm{d}m = \omega J_\omega\,,$$

kjer smo upoštevali:

$$\boxed{J_\omega = \int R^2\, \mathrm{d}m} \tag{38}$$

in $\vec{r} \cdot \vec{\omega} = r\, \omega \cos \vartheta$, $R = r \sin \vartheta$ (glejte še sliko).



Z upoštevanjem gornjega rezultata

$$\boxed{\Gamma_\omega = J_\omega \, \omega} \tag{39}$$

zapišemo:

$$M_\omega = \frac{\mathrm{d}\,\Gamma_\omega}{\mathrm{d}t} = J_\omega \frac{\mathrm{d}\,\omega}{\mathrm{d}t} = J_\omega \, \alpha, \tag{40a}$$

torej

$$\boxed{M_\omega = J_\omega \alpha} \tag{40b}$$

kjer je $\alpha = \dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}$ kotni pospešek.

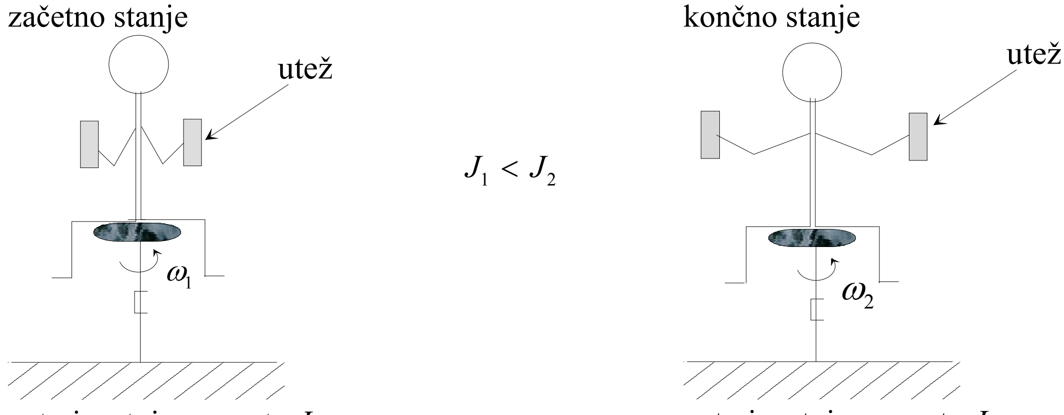
Iz enačbe (40a) sledi:

$$\int M_\omega \,\mathrm{d}t = \int_{\Gamma_1}^{\Gamma_2} d\,\Gamma_\omega = \Gamma_2 - \Gamma_1 = \Delta\Gamma \,. \tag{41}$$

Če je torej sunek zunanjih navorov nič, iz enačbe (41) sledi, da se vrtilna količina togega telesa ohranja.

$$\boxed{\Gamma_2 = \Gamma_1} \tag{42}$$

Zgled: človek na vrtljivem stolu z utežmi v obeh rokah:



vztrajnostni moment: J_1
vrtilna količina:
$\Gamma_1 = J_1 \, \omega_1$

vztrajnostni moment: J_2
vrtilna količina: $\Gamma_2 = J_2 \, \omega_2$

Ker je navor notranjih sil enak nič (glejte enačbo (16)) se vrtilna količina ohranja:

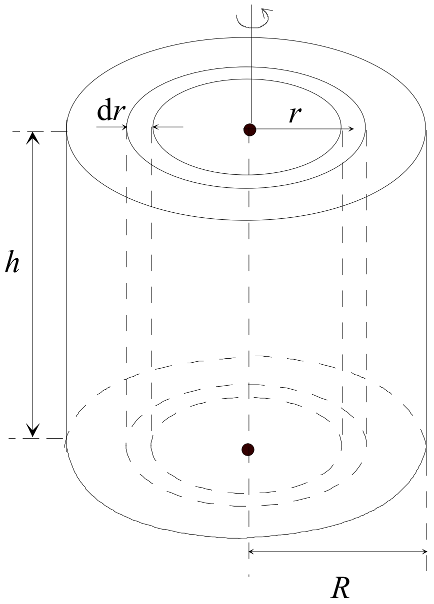
$$J_1\,\omega_1 = J_2\,\omega_2\,,$$

od koder sledi:

$$\omega_2 = \omega_1 \frac{J_1}{J_2} < \omega_1\,,$$

kjer smo upoštevali $J_1 < J_2$ (glejte sliko).

Zgled: vztrajnostni moment homogenega valja okrog geometrijske osi



$R \equiv$ polmer valja

$h \equiv$ višina valja

$$J = \int r^2\,\mathrm{d}m = \int r^2 \rho\,\mathrm{d}V \quad , \tag{43a}$$

kjer je ρ gostota valja,

$$\mathrm{d}V = 2\pi\, r\,\mathrm{d}r\, h\,. \tag{43b}$$

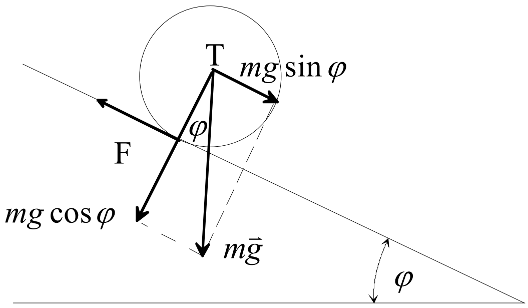
Iz enačb (43a) in (43b) sledi:

$$J = \int_0^R r^2 \rho\, 2\pi\, r\, h\,\mathrm{d}r = 2\pi\, h\rho \int_0^R r^3 \mathrm{d}r = 2\pi\, h\rho \left.\frac{r^4}{4}\right|_0^R = \pi R^4 \rho \frac{h}{2} = \frac{1}{2} m\, R^2 \quad , \tag{43}$$

kjer smo upoštevali, da je celotna masa valja $m = \pi\, R^2\, h\, \rho$.

Zgled: kotaljenje homogenega valja po klancu navzdol brez podrsavanja

Za os vrtenje izberemo geometrijsko os valja na kateri leži težišče valja.



T ≡ težišče valja
m ≡ masa valja
R ≡ polmer valja
F ≡ komponenta sile podlage vzdolž klanca
φ ≡ nagib klanca
$mg\sin\varphi$ ≡ komponenta sile teže $m\vec{g}$ vzdolž klanca
$mg\cos\varphi$ ≡ komponenta sile teže $m\vec{g}$ v smeri pravokotno na površino klanca

Zapišimo II. Newtonov zakon za gibanje težišča valja vzdolž klanca:

$$mg\sin\varphi - F = m\,a_T \ , \tag{44}$$

kjer je a_T pospešek težišča valja vzdolž klanca.

Izrek o vrtilni količini za vrtenje valja okrog geometrijske osi:

$$M = FR = J\,\alpha \ , \tag{45}$$

kjer je $J = \frac{1}{2} m R^2$ vztrajnostni moment valja okrog geometrijske osi, α pa kotni pospešek za vrtenje valja okrog geometrijske osi. Če se valj kotali brez podrsavanja je hitrost težišča valja

$$v_T = R\,\omega \ , \tag{46}$$

kjer je ω kotna hitrost vrtenje valja okrog geometrijske osi. Enačbo (46) odvajamo po času na obeh straneh enačaja in dobimo:

$$a_T = R\,\alpha \ . \tag{47}$$

Enačbe (44), (45) in (47) predstavljajo sistem treh enačb za tri neznanke F, a_T in α. Iz enačbe (47) izrazimo $\alpha = \frac{a_T}{R}$ in ga vstavimo v enačbo (45):

$$FR = \frac{1}{2} m R^2 \frac{a_T}{R} \ ,$$

od koder sledi:

$$F = \frac{1}{2} m a_T \,. \tag{48}$$

Gornji izraz za silo vstavimo v enačbo (44):

$$mg \sin\varphi - \frac{1}{2} m a_T = m a_T \,,$$

od koder lahko izračunamo pospešek težišča kotalečega se valja:

$$\boxed{a_T = \frac{2}{3} g \sin\varphi} \,. \tag{49}$$

Če vstavimo dobljeni izraz za pospešek a_T v enačbo (48), dobimo še izraz za komponento sile podlage vzdolž klanca:

$$\boxed{F = \frac{1}{3} m g \sin\varphi} \,. \tag{50}$$

Če hočemo, da se valj kotali brez podrsavanja mora biti sila F manjša od sile lepenja:

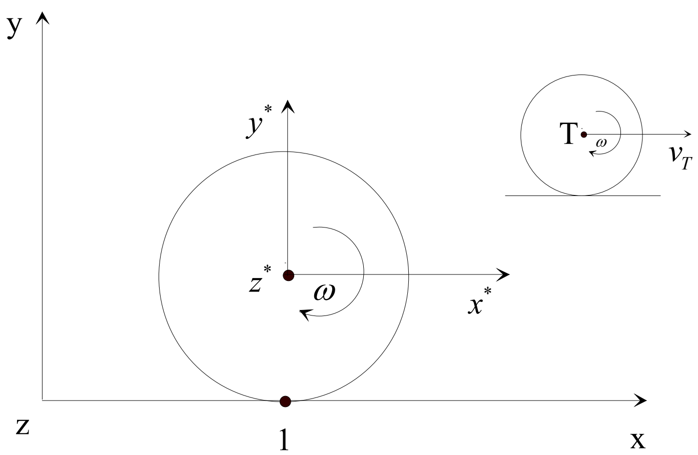
$$F = \frac{1}{3} m g \sin\varphi \; < F_\ell = m g \cos\varphi \, k_\ell \;\;,$$

od koder sledi pogoj za kotaljenje brez podrsavanja:

$$tg\,\varphi < 3 k_\ell \;\;, \tag{51}$$

kjer je k_ℓ koeficient lepenja, $m g \cos\varphi$ pa komponenta sile teže v smeri pravokotno na površino klanca (glejte še sliko).

Dokaz veljavnosti enačbe (46): $v = R\,\omega$



Obravnavamo kotaljenje homogenega valja po ravni podlagi **brez podrsavanja** v laboratorijskem opazovalnem sistemu (x, y, z) in težiščnem opazovalnem sistemu (x^*, y^*, z^*) z izhodiščem v težišču valja na njegovi geometrijski osi. Če zanemarimo deformacije na stiku med valjem in podlago, je lahko področje dotika valja s podlago daljica. Točka 1 na gornji sliki leži na tej daljici. Hitrost točke 1 v laboratorijskem sistemu.

$$v_1 = 0 \tag{52}$$

Hitrost točke 1 merjena v težiščnem sistemu pa je

$$v_1^* = -R\,\omega \quad , \tag{53}$$

kjer je *R* polmer preseka valja.

Med hitrostima v_1 in v_1^* velja Galilejeva transformacija za hitrosti:

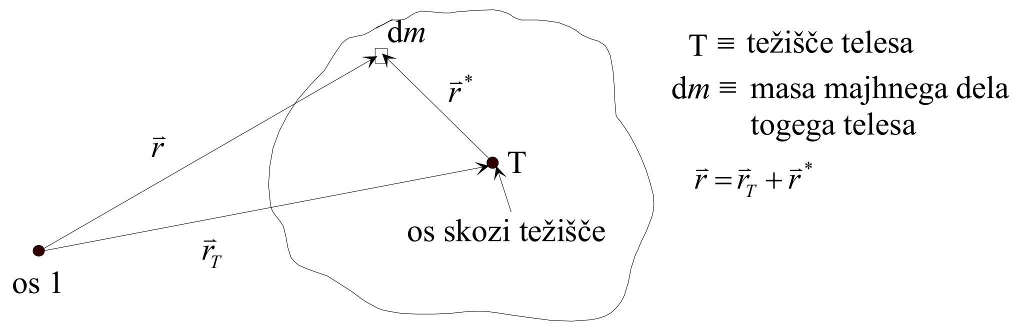
$$v_1 = v_1^* + v_T \,. \tag{54}$$

Iz enačb (52), (53) in (54) sledi:

$$v_T = -\,v_1^* = R\,\omega \,. \tag{46}$$

Steiner-jev izrek

Steinerjev izrek povezuje vztrajnostni moment togega telesa z maso *m* okoli dveh paralelnih osi, od katerih poteka ena skozi težišče telesa.



Vztrajnostni moment togega telesa okoli osi 1:

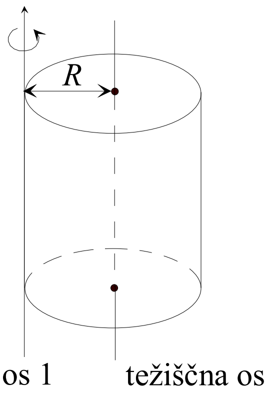
$$\begin{aligned} J_1 &= \int r^2 \mathrm{d}m = \int \vec{r}\cdot\vec{r}\,\mathrm{d}m = \int \left(\vec{r}_T + \vec{r}^{\,*}\right)\cdot\left(\vec{r}_T + \vec{r}^{\,*}\right)\mathrm{d}m = \\ &= \int \vec{r}_T^{\,2}\mathrm{d}m + 2\,\vec{r}_T \int \vec{r}^{\,*}\mathrm{d}m + \int \vec{r}^{\,2*}\mathrm{d}m = m\,r_T^2 + J^* , \end{aligned} \tag{55}$$

kjer je $J=\int r^{*2}\mathrm{d}m$ vztrajnostni moment okoli težiščne osi, r_T pa razdalja med osjo 1 in težiščno osjo. V enačbi (55) smo upoštevali, da so koordinate težišča $\vec{r}_T^{\,*}=\left(x_T^*, y_T^*, z_T^*\right)$ v težiščnem sistemu enake nič:

$$\vec{r}_T^{\,*}=\frac{1}{m}\int \vec{r}^{\,*}\mathrm{d}m=0\,, \tag{56}$$

kjer je m masa telesa.

Za ilustracijo izračunajmo vztrajnostni moment valja okoli osi, ki se dotika plašča valja.

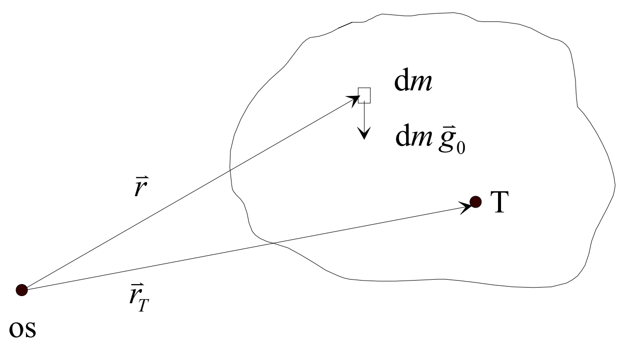


Velja: $J^*=\frac{1}{2}m\,R^2$ in $r_T=R$, torej:

$$J_1=J^*+m\,r_T^2=\frac{1}{2}m\,R^2+m\,R^2=\frac{3}{2}m\,R^2\,.$$

Navor sile teže telesa

Predpostavljamo, da je gravitacijski pospešek znotraj togega telesa konstanten, torej:
$g\left(\vec{r}\right)=\vec{g}_0\cong 9.8\ \mathrm{m/s^2}$,



T ≡ težišče telesa
$\mathrm{d}m$ ≡ masa majhnega koščka togega telesa

rezultanta sile teže: $\vec{F}_g=\int \mathrm{d}m\,\vec{g}_0=m\,\vec{g}_0$

navor sile teže:

$$\vec{M}_g = \int \vec{r} \times \mathrm{d}\vec{F}_g = \int \vec{r} \times \mathrm{d}m\, \vec{g}_0 = \int \vec{r}\,\mathrm{d}m \times \vec{g}_0 = \left(\int \vec{r}\,\mathrm{d}m\right) \times \vec{g}_0 =$$

$$= m \frac{\int \vec{r}\,\mathrm{d}m}{m} \times \vec{g}_0 = m\,\vec{r}_T \times \vec{g}_0 = \vec{r}_T \times m\vec{g}_0 = \vec{r}_T \times \vec{F}_g \ ,$$

torej:

$$\boxed{\vec{M}_g = \vec{r}_T \times \vec{F}_g} \ . \tag{57}$$

V gornji izpeljavi smo upoštevali, da je krajevni vektor od osi do težišča $\vec{r}_T$ (glejte sliko) definiran kot (glejte še str. xx):

$$\vec{r}_T = \frac{1}{m} \int \vec{r}\,\mathrm{d}m \ .$$