# IZPIT IZ MATEMATIKE 1
## Univerzitetni študij
## 26. januar 2009

1. Poišči rešitev enačbe
$$z^2 + (2+\mathrm{i})z - \mathrm{i}\overline{z} = -1.$$

   **Rešitev:**
   Kompleksno število $z = x + \mathrm{i}y$ vstavimo v enačbo:
$$x^2 + 2\mathrm{i}xy - y^2 + 2x + \mathrm{i}x + 2\mathrm{i}y - y - \mathrm{i}x - y = -1.$$
   Primerjava realnih in imaginarnih komponent da sistem:
$$x^2 + 2x - y^2 - 2y = -1, \qquad 2xy + 2y = 0.$$
   Iz druge enačbe $(x+1)y = 0$ sledi $x = -1$ ali $y = 0$. Vstavimo v prvo enačbo. V prvem primeru je $-y^2 - 2y - 1 = -1$, torej $y(y-2) = 0$ in zato $y_1 = 0$ in $y_2 = 2$. V drugem primeru pa je $x^2 + 2x = -1$, kar je $(x+1)^2 = 0$ in zato je $x = -1$. Dobimo dve rešitvi: $z_1 = -1$ in $z_2 = -1 - 2\mathrm{i}$.

2. Od katerega člena dalje se vsi členi zaporedja $a_n = \frac{2n^2-1}{3n^2+3}$ razlikujejo od limite za manj kot $\varepsilon = \frac{1}{100}$?

   **Rešitev:**
   Najprej izračunamo limito:
$$a = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2-1}{3n^2+3} = \frac{2}{3}.$$
   Nato pa rešimo enačbo $|a_n - a| < \varepsilon$:
$$\begin{aligned}
\left|\frac{2n^2-1}{3n^2+3} - \frac{2}{3}\right| &< \frac{1}{100}\\
\frac{|2n^2-1-2n^2-2|}{3n^2+3} &< \frac{1}{100}\\
\frac{1}{n^2+1} &< \frac{1}{100}\\
n^2 &> 99\\
n &> 9
\end{aligned}$$
   Od 10−tega člena dalje so členi v $\varepsilon$−okolici limite.

3. Poišči tisto presečišče med krivuljama $y = -x^3 + 2x^2 + x - 1$ in $y = -2x^2 + x + 2$, katerega abscisa leži na intervalu $[0, 2]$. Določi kot med krivuljama v tem presečišču.

   **Rešitev:**
   Najprej izračunamo presečišče:

$$\begin{aligned} -x^3 + 2x^2 + x - 1 &= -2x^2 + x + 2 \\ x^3 - 4x^2 + 3 &= 0 \end{aligned}$$

   Enačbo rešimo s Hornerjevim algoritmom in dobimo rešitve $x_1 = 1$ in $x_{2,3} = \frac{3 \pm \sqrt{21}}{2}$. Prva rešitev leži na danem intervalu, zato je iskano presečišče v točki $P(1, 1)$.
   Kot med krivuljama je enak kotu med tangentama, ki ga izračunamo s formulo:

$$\mathrm{tg}\varphi = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \right|.$$

   Potrebujemo oba smerna koeficienta. Odvod prve krivulje je $y' = -3x^2 + 4x + 1$ in zato $k_1 = y'(1) = 2$, odvod druge krivulje pa je $y' = -4x + 1$ in zato $k_2 = y'(1) = -3$. Zato je:

$$\mathrm{tg}\varphi = \left| \frac{2 + 3}{1 - 6} \right| = 1.$$

   Torej je $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

4. Izračunaj integrala

   (a)
$$\int \sin^3 x \cos^3 x \,\mathrm{d}x,$$

   (b)
$$\int \frac{2x^2 - x + 4}{x^3 + 2x} \,\mathrm{d}x.$$

   **Rešitev:**

   (a) Uvedemo novo spremenljivko $t = \sin x$, $\mathrm{d}t = \cos x \mathrm{d}x$:

$$\begin{aligned} \int \sin^3 x \cos^3 x \,\mathrm{d}x &= \int \sin^3 x (1 - \sin^2 x) \cos x \,\mathrm{d}x \\ &= \int (t^3 - t^5) \mathrm{d}t = \frac{t^4}{4} - \frac{t^6}{6} \\ &= \frac{\sin^4 x}{4} - \frac{\sin^6 x}{6} + C \end{aligned}$$

(b) To je integral racionalne funkcije, ki jo najprej razbijemo na parcialne ulomke:

$$\frac{2x^2 - x + 4}{x(x^2+2)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2+2} = \frac{(A+B)x^2 + Cx + 2A}{x(x^2+2)}$$

Primerjava koeficientov da sistem enačb $A + B = 2$, $C = -1$ in $2A = 4$, ki ima rešitev $A = 2$, $B = 0$ in $C = -1$. Zato je

$$\begin{aligned} \int \frac{2x^2 - x + 4}{x^3 + 2x}\,\mathrm{d}x &= \int \left(\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2+2}\right)\mathrm{d}x \\ &= 2\ln|x| - \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}} + D \end{aligned}$$

5. Izračunaj dolžino loka krivulje $r = \mathrm{e}^{a\varphi}$ za $r < 1$.

**Rešitev:**

Da bo radij $0 < r < 1$, mora biti $-\infty < \varphi < 0$. Dolžino loka v polarnih koordinatah izračunamo po formuli: $s = \int_a^b \sqrt{(r')^2 + r^2}\,\mathrm{d}r$.
Ker je $r = \mathrm{e}^{a\varphi}$, je $r' = a\mathrm{e}^{a\varphi}$ in zato

$$\sqrt{(r')^2 + r^2} = \sqrt{a^2\mathrm{e}^{2a\varphi} + \mathrm{e}^{2a\varphi}} = \sqrt{a^2+1}\mathrm{e}^{a\varphi}.$$

Dolžina loka:

$$s = \int_{-\infty}^{0} \sqrt{a^2+1}\mathrm{e}^{a\varphi}\,\mathrm{d}r = \frac{\sqrt{a^2+1}}{a}\mathrm{e}^{a\varphi}\Big|_{-\infty}^{0} = \frac{\sqrt{a^2+1}}{a}$$