IZPIT IZ MATEMATIKE I

Univerzitetni študij

26. januar 2010

1. Rešite enačbo
$$z^3 = \frac{-1-\mathrm{i}}{\sqrt{2}}.$$

Rešitev:

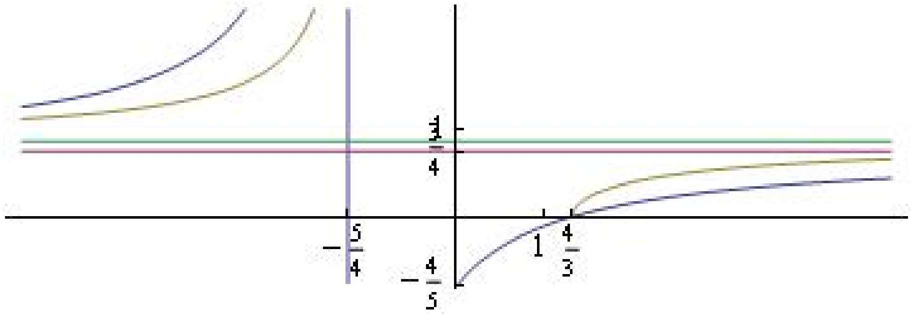
Zapišemo levo in desno stran enačbe v polarni obliki.
Velja: $z = |z|(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$ oz. $z^3 = |z|^3(\cos 3\varphi + \mathrm{i}\sin 3\varphi)$.
Ker je $r = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = 1$ in $\alpha = \mathrm{arctg}1 = \frac{5\pi}{4}$, je $\frac{-1-\mathrm{i}}{\sqrt{2}} = 1(\cos\frac{5\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{4})$.
Sledi:
$$|z|^3(\cos 3\varphi + \mathrm{i}\sin 3\varphi) = 1(\cos\frac{5\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{4}).$$
Dve kompleksni števili sta enaki, ko imata enak radij in enak kot. Zato rešimo enačbi: $|z|^3 = 1$ in $\cos 3\varphi = \cos\frac{5\pi}{4}$. Prva ima rešitev $|z| = 1$, druga pa $3\varphi = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, torej $\varphi_k = \frac{5\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}$, $k = 0, 1, 2$.
Dobimo tri kote: $\varphi_0 = \frac{5\pi}{12}$, $\varphi_1 = \frac{13\pi}{12}$ in $\varphi_2 = \frac{21\pi}{12}$. Ti nam dajo tri rešitve po formuli $z_k = |z|(\cos\varphi_k + \mathrm{i}\sin\varphi_k)$, $k = 0, 1, 2, 3$:
$$\begin{aligned} z_0 &= \cos\frac{5\pi}{12} + \mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{12}, \\ z_1 &= \cos\frac{13\pi}{12} + \mathrm{i}\sin\frac{13\pi}{12}, \\ z_2 &= \cos\frac{21\pi}{12} + \mathrm{i}\sin\frac{21\pi}{12}. \end{aligned}$$

2. Določite definicijsko območje in narišite graf funkcije
$$f(x) = \sqrt{\frac{3x-4}{4x+5}}.$$

Rešitev:

Najprej narišemo funkcijo $g(x) = \frac{3x-4}{4x+5}$.
Ničla: $x = \frac{4}{3}$. Pol: $x = -\frac{5}{4}$. Začetna vrednost: $g(0) = -\frac{4}{5}$. Vodoravna asimptota: $y = \frac{3}{4}$. Ekstremov ni.
$$g'(x) = \frac{3(4x+5) - 4(3x-4)}{(4x+5)^2} = \frac{31}{(4x+5)^2} \neq 0$$

Definicijsko območje lahko preberemo iz grafa funkcije $g(x)$ ali rešimo neenačbo $\frac{3x-4}{4x+5} \geq 0$. Dobimo: $\mathcal{D}f = (-\infty, -\frac{5}{4}) \cup [\frac{4}{3}, \infty)$.



3. S pomočjo diferenciala poiščite približek za $\sqrt[3]{28}$. Rezultat zapišite na 3 decimalke.

Rešitev:
Funkcija, ki jo uporabimo je $f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$. Njen odvod je $f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$. Približek poiščemo po formuli

$$f(a+h) \doteq f(a) + f'(a) \cdot h,$$

kjer vzamemo $a = 27$ in $h = 1$. Torej:

$$f(28) \doteq f(27) + f'(27) \cdot 1 = 3 + \frac{1}{27} = 3.037$$

4. Izračunajte integral

$$\int_0^\pi \sqrt{1+\cos 2x}\, \mathrm{d}x.$$

Rešitev:

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi \sqrt{1+\cos 2x}\, \mathrm{d}x &= \int_0^\pi \sqrt{\cos^2 x + \sin^2 x + \cos^2 x - \sin^2 x}\, \mathrm{d}x \\
&= 2\sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, \mathrm{d}x \\
&= 2\sqrt{2} \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2\sqrt{2}
\end{aligned}$$

5. Izračunajte volumen vrtenine, ki nastane, če krivuljo $y = x\mathrm{e}^{2x}$ zavrtite okrog x osi na intervalu $0 < x < 1$.

Rešitev:

Volumen vrtenine izračunamo po formuli $V = \pi \int_a^b y^2 \,\mathrm{d}x$.

$$\begin{aligned}
V &= \pi \int_0^1 x^2 \mathrm{e}^{4x} \,\mathrm{d}x \\
&= \pi \left[\frac{x^2}{4}\mathrm{e}^{4x}\Big|_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 x\mathrm{e}^{4x}\,\mathrm{d}x \right] \\
&= \pi \left[\frac{1}{4}\mathrm{e}^4 - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{4}\mathrm{e}^{4x}\Big|_0^1 - \frac{1}{4}\int_0^1 \mathrm{e}^{4x}\,\mathrm{d}x \right) \right] \\
&= \pi \left[\frac{1}{4}\mathrm{e}^4 - \frac{1}{8}\mathrm{e}^4 + \frac{1}{32}\mathrm{e}^{4x}\Big|_0^1 \right] \\
&= \frac{\pi(5\mathrm{e}^4 - 1)}{32}
\end{aligned}$$

Dvakrat smo uporabili pravilo per partes. Iz prve v drugo vrstico: $u = x^2$, $\mathrm{d}u = 2x\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}v = e^{4x}\mathrm{d}x$, $v = \frac{1}{4}\mathrm{e}^{4x}$. Iz druge v tretjo vrstico: $u = x$, $\mathrm{d}u = \mathrm{d}x$, $\mathrm{d}v = e^{4x}\mathrm{d}x$, $v = \frac{1}{4}\mathrm{e}^{4x}$.