

Naloga 1 (20 točk)

a.) Poenostavite izraz

$$I = \frac{x^2 \cdot \frac{1}{2x} + x^{-3}}{2\sqrt[3]{x^6 \cdot x^2 + 4}}.$$

b.) Poiščite vsa realna števila, ki rešijo enačbo $I - |x| = x$.

c.) Napišite eno enačbo, ki ima kompleksno, a nobene realne rešitve, in eno enačbo, ki nima nobene (niti realne niti kompleksne) rešitve.

Naloga 2 (20 točk)

Dano je rekurzivno zaporedje

$$a_1 = 2 \text{ in } a_{n+1} = 2a_n - 3 \text{ za } n \in \mathbb{N}.$$

a.) Pokažite, da je splošni člen zaporedja enak $a_n = 3 - 2^{n-1}$.

b.) Ali je zaporedje omejeno? Odgovor utemeljite.

Naloga 3 (20 točk)

Po podvodnem telefonskem kablu potuje signal s hitrostjo $v(x) = Cx^2 \ln \frac{1}{x}$, kjer je x razmerje med polmerom sredice in debelino zaščitnega ovoja, C pa neka pozitivna konstanta.

a.) Izračunajte največjo hitrost, ki jo lahko doseže telefonski signal.

b.) Kakšna je predvidena hitrost signala, če sta polmer sredice in debelina zaščitnega ovoja kabla enaka? Odgovor utemeljite.

Naloga 4 (20 točk)

a.) Izračunajte nedoločeni integral $\int \frac{x^2}{x^6 - 1} dx$.

b.) V katerih točkah funkcija, ki jo dobimo pri integriranju, ni odvedljiva? Utemeljite.

Naloga 5 (20 točk)

a.) Izračunajte volumen telesa, ki nastane, če krivuljo $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, $-1 \leq x \leq 1$, zarotiramo okoli x osi.

b.) Dobljeno telo skicirajte.