REŠITVE

Naloga 1 (20 točk)

a.) Poenostavite izraz
$$I = \frac{x^2 \cdot \frac{1}{2x} + x^{-3}}{2\sqrt[3]{x^6} \cdot x^2 + 4}.$$

b.) Poiščite vsa realna števila, ki rešijo enačbo $I - |x| = x$.

c.) Napišite eno enačbo, ki ima kompleksno, a nobene realne rešitve, in eno enačbo, ki nima nobene (niti realne niti kompleksne) rešitve.

Rešitev:

a.) Velja
$$I = \frac{x^2 \cdot \frac{1}{2x} + x^{-3}}{2\sqrt[3]{x^6} \cdot x^2 + 4} = \frac{x^2 \cdot \frac{1}{2x} + x^{-3}}{2\sqrt[3]{x^6} \cdot x^2 + 4} \cdot \frac{2x^3}{2x^3} = \frac{x^4 + 2}{4(x^4 + 2)x^3} = \frac{1}{4x^3}.$$

b.) Enačba $I - |x| = x$ se sedaj glasi takole
$$\frac{1}{4x^3} - |x| = x.$$

Ločimo dve možnosti.

$x > 0$: *V tem primeru dobimo:*
$$\begin{aligned} \frac{1}{4x^3} - x &= x, \\ \frac{1}{4x^3} &= 2x, \\ 1 &= 8x^4, \\ 8x^4 - 1 &= 0, \\ (\sqrt{8}x^2 - 1)(\sqrt{8}x^2 + 1) &= 0, \\ (\sqrt[4]{8}x - 1)(\sqrt[4]{8}x + 1)(\sqrt{8}x^2 + 1) &= 0, \\ x_1 = \frac{1}{\sqrt[4]{8}} \quad \text{in} \quad x_2 &= -\frac{1}{\sqrt[4]{8}}. \end{aligned}$$

$x < 0$: *Sedaj pa velja:*
$$\begin{aligned} \frac{1}{4x^3} + x &= x, \\ \frac{1}{4x^3} &= 0, \end{aligned}$$
ni rešitve.

Rešitev je ena sama, $x_1 = \frac{1}{\sqrt[4]{8}}$*, saj* x_2 *ne zadošča pogoju* $x > 0$.

c.) Enačba $x^2 = -1$ *nima nobene realne rešitve, ima pa dve kompleksni (i in* $-i$*). Enačba* $1 = 0$ *nima nobene rešitve, niti realne niti kompleksne.*

Naloga 2 (20 točk)

Dano je rekurzivno zaporedje

$$a_1 = 2 \text{ in } a_{n+1} = 2a_n - 3 \text{ za } n \in \mathbb{N}.$$

a.) Pokažite, da je splošni člen zaporedja enak $a_n = 3 - 2^{n-1}$.

b.) Ali je zaporedje omejeno? Odgovor utemeljite.

Rešitev:

a.) Dokaz z matematično indukcijo. Predpostavimo, da velja $a_n = 3-2^{n-1}$*, in dokažimo, da tedaj velja tudi* $a_{n+1} = 3 - 2^n$.

baza: $3 - 2^{1-1} = 3 - 2^0 = 2 = a_1$

korak: $a_{n+1} = 2a_n - 3 = 2(3 - 2^{n-1}) - 3 = 6 - 2^n - 3 = 3 - 2^n$.

b.) Iz splošnega člena $a_n = 3 - 2^{n-1}$ *sledi, da zaporedje pada. Ker je* $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$*, zaporedje navzdol ni omejeno. Zaporedje je torej neomejeno.*

Naloga 3 (20 točk)

Po podvodnem telefonskem kablu potuje signal s hitrostjo $v(x) = Cx^2 \ln \frac{1}{x}$, kjer je x razmerje med polmerom sredice in debelino zaščitnega ovoja, C pa neka pozitivna konstanta.

a.) Izračunajte največjo hitrost, ki jo lahko doseže telefonski signal.

b.) Kakšna je predvidena hitrost signala, če sta polmer sredice in debelina zaščitnega ovoja kabla enaka? Odgovor utemeljite.

Rešitev:

a.) Pri iskanju globalnega maksimuma funkcije $v(x)$ *moramo pregledati stacionarne točke, robno točko definicijskega območja* $x_1 = 0$ *in morebitne dodatne točke, v katerih funkcija ni odvedljiva. Funkcijo odvajajmo:*

$$v'(x) = 2Cx \ln \frac{1}{x} + Cx^2 \cdot x \cdot (-\frac{1}{x^2}) = Cx(2 \ln \frac{1}{x} - 1).$$

Vidimo, da je funkcija odvedljiva povsod, kjer je definirana, torej na $(0,\infty)$. Izračunajmo stacionarne točke:

$$\begin{aligned} v'(x) &= 0, \\ Cx(2\ln\frac{1}{x} - 1) &= 0, \\ \ln\frac{1}{x} &= \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{x} &= e^{\frac{1}{2}}, \\ x_2 &= e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}. \end{aligned}$$

Ker je $\lim_{x\downarrow 0} v(x) = 0$ in $v(x_2) = v(\frac{1}{\sqrt{e}}) = \frac{C}{e}\ln\sqrt{e} = \frac{C}{2e} > 0$, doseže signal največjo hitrost $\frac{C}{2e}$ pri $x = \frac{1}{\sqrt{e}}$.

b.) V primeru, ko sta polmer sredice in debelina zaščitnega ovoja kabla enaka, je $x = 1$. Tedaj velja $v(1) = C\ln 1 = 0$.

Naloga 4 (20 točk)

a.) Izračunajte nedoločeni integral $\displaystyle\int \frac{x^2}{x^6-1}\,dx$.

b.) V katerih točkah funkcija, ki jo dobimo pri integriranju, ni odvedljiva? Utemeljite.

Rešitev:

a.) Ko v integral uvedemo novo spremenljivko $t = x^3$ ($\Rightarrow$ $dt = 3x^2\,dx$), dobimo

$$\int \frac{x^2}{x^6-1}\,dx = \int \frac{\frac{dt}{3}}{t^2-1} = \frac{1}{3}\int \frac{1}{t^2-1}\,dt.$$

Sedaj ulomek pod integralom razbijemo na parcialna ulomka:

$$\frac{1}{t^2-1} = \frac{1}{(t-1)(t+1)} = \frac{A}{t-1} + \frac{B}{t+1} = \frac{A(t+1)+B(t-1)}{(t-1)(t+1)}.$$

Ko izenačimo števca, dobimo

$$\begin{aligned} t^1 &: \ A + B = 0, \\ t^0 &: \ A - B = 1. \end{aligned}$$

Sledi $A = \frac{1}{2}$ in $B = -\frac{1}{2}$ in zato

$$\frac{1}{t^2-1} = \frac{\frac{1}{2}}{t-1} - \frac{\frac{1}{2}}{t+1}.$$

Nedoločeni integral je sedaj enak

$$\begin{aligned}\frac{1}{3}\int \frac{1}{t^2-1}\,dt &= \frac{1}{3}\int \left(\frac{\frac{1}{2}}{t-1} - \frac{\frac{1}{2}}{t+1}\right)\,dt = \frac{1}{6}\left(\ln|t-1| - \ln|t+1|\right) + C \\ &= \frac{1}{6}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C = \frac{1}{6}\ln\left|\frac{x^3-1}{x^3+1}\right| + C.\end{aligned}$$

b.) Za primitivno funkcijo

$$F(x) = \frac{1}{6}\ln\left|\frac{x^3-1}{x^3+1}\right|$$

velja

$$F'(x) = \frac{x^2}{x^6-1}.$$

Sledi, da $F(x)$ ni odvedljiva natanko v polih racionalne funkcije

$$f(x) = \frac{x^2}{x^6-1}.$$

To pa sta točki $x_1 = 1$ in $x_2 = -1$, saj je

$$x^6 - 1 = (x^3-1)(x^3+1) = (x-1)(x^2+x+1)(x+1)(x^2-x+1).$$

Naloga 5 (20 točk)

a.) Izračunajte volumen telesa, ki nastane, če krivuljo $y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$, $-1 \leq x \leq 1$, zarotiramo okoli x osi.

b.) Dobljeno telo skicirajte.

Rešitev:

a.) Volumen rotacijskega telesa izračunamo takole:

$$V = \pi \int_a^b y^2\,dx.$$

V našem primeru dobimo

$$\begin{aligned}V &= \pi \int_{-1}^{1}\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2 dx = \frac{\pi}{4}\int_{-1}^{1}\left(e^{2x} + 2e^x e^{-x} + e^{-2x}\right)\,dx = \frac{\pi}{2}\int_0^1 \left(e^{2x} + 2 + e^{-2x}\right)\,dx \\ &= \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2}e^{2x} + 2x - \frac{1}{2}e^{-2x}\right)\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}\left(4 + e^2 - e^{-2}\right).\end{aligned}$$

b.)