IZPIT IZ MATEMATIKE 1

Univerzitetni študij

2. junij 2008

1. Poišči rešitev enačbe
$$|z|^2 + 2z\mathrm{i} = 1 + 2\mathrm{i}.$$

   Rešitev:

   Zapišemo kompleksno število $z = x + \mathrm{i}y$, zato je $|z|^2 = x^2 + y^2$. Vstavimo v enačbo in dobimo
$$x^2 + y^2 + 2\mathrm{i}x - 2y = 1 + 2\mathrm{i}.$$

   Primerjamo realni in imaginarni komponenti in dobimo sistem dveh enačb:
$$x^2 + y^2 - 2y = 1, \qquad 2\mathrm{i}x = 2\mathrm{i}.$$

   Iz druge enačbe takoj sledi $x = 1$. To vstavimo v prvo enačbo in dobimo
$$\begin{aligned} 1 + y^2 &= 2y + 1 \\ y(y-2) &= 0 \end{aligned}$$

   To nam da dve rešitvi $y_1 = 0$ in $y_2 = 2$. Zato ima enačba dve rešitvi $z_1 = 1$ in $z_2 = 1 + 2\mathrm{i}$.

2. Ali je vrsta $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n!}{3n^3}$ konvergentna?

   Rešitev:

   Izračunamo po kvocientnem kriteriju:
$$q = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2(n+1)! \cdot 3n^3}{3(n+1)^3 \cdot 2n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{(n+1)^2} = \infty > 1$$

   Ker je $q > 1$, je po kvocientnem kriteriju vrsta divergentna.

3. Določi parametre a, b, c in d tako, da bo funkcija
$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + b, & x < 0 \\ \cos x, & 0 \le x \le \frac{\pi}{2} \\ cx + d, & x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

zvezna in zvezno odvedljiva.

Rešitev:

Funkcija $f(x)$ je zvezna v točki x_0, ko je $\lim_{n\uparrow x_0} f(x) = \lim_{n\downarrow x_0} f(x)$ in zvezno odvedljiva, ko je $\lim_{n\uparrow x_0} f'(x) = \lim_{n\downarrow x_0} f'(x)$.
Najprej izračunamo odvod:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x + a, & x < 0 \\ -\sin x, & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ c, & x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Preverimo zveznost in zvezno odvedljivost v točki $x = 0$:

$$\begin{aligned} \lim_{n\uparrow 0} f(x) &= \lim_{n\uparrow 0}(x^2 + ax + b) = b \\ \lim_{n\downarrow 0} f(x) &= \lim_{n\downarrow 0}(\cos x) = 1 \\ \lim_{n\uparrow 0} f'(x) &= \lim_{n\uparrow 0}(2x + a) = a \\ \lim_{n\downarrow 0} f'(x) &= \lim_{n\downarrow 0}(-\sin x) = 0 \end{aligned}$$

Iz prvih dveh enačb sledi, da je $b = 1$, iz drugih dveh pa, da je $a = 0$.
Preverimo zveznost in zvezno odvedljivost še v točki $x = \frac{\pi}{2}$:

$$\begin{aligned} \lim_{n\uparrow \frac{\pi}{2}} f(x) &= \lim_{n\uparrow \frac{\pi}{2}}(\cos x) = 0 \\ \lim_{n\downarrow \frac{\pi}{2}} f(x) &= \lim_{n\downarrow \frac{\pi}{2}}(cx + d) = \frac{c\pi}{2} + d \\ \lim_{n\uparrow \frac{\pi}{2}} f'(x) &= \lim_{n\uparrow \frac{\pi}{2}}(-\sin x) = -1 \\ \lim_{n\downarrow \frac{\pi}{2}} f'(x) &= \lim_{n\downarrow \frac{\pi}{2}}(c) = c \end{aligned}$$

Iz drugih dveh enačb sledi, da je $c = -1$, iz prvih dveh pa nato, da je $c = \frac{\pi}{2}$.

4. Izračunaj presečišče in kot med krivuljama $y = 3x + 1$ in $y = x^3 - 2x^2 + 4x - 1$.

Rešitev:

Najprej izračunamo presečišče:

$$\begin{aligned} 3x + 1 &= x^3 - 2x^2 + 4x - 1 \\ x^3 - 2x^2 + x - 2 &= 0 \\ (x^2 + 1)(x - 2) &= 0 \end{aligned}$$

Dobimo eno realno rešitev $x = 2$, zato je $y = 7$ in preseč"išče imamo v točki $P(2, 7)$.
Kot med krivuljama je enak kotu med tangentama, ki ga izračunamo s formulo:

$$\mathrm{tg}\varphi = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}\right|.$$

Potrebujemo oba smerna koeficienta. Ker je prva krivulja kar premica, je $k_1 = 3$. Drugo krivuljo pa najprej odvajamo: $y' = 3x^2 - 4x + 4$ in izračunamo $k_2 = y'(2) = 8$. Torej je:

$$\mathrm{tg}\varphi = \left|\frac{8 - 3}{1 + 24}\right| = \frac{1}{5}$$

Zato je $\varphi = \mathrm{arctg}\frac{1}{5}$.

5. Izračunaj integral

$$\int \frac{4x^2 - x - 7}{(x-1)^2(x+3)}\,\mathrm{d}x.$$

Rešitev:

To je integral racionalne funkcije, ki ga rešimo z nastavkom:

$$\int \frac{4x^2 - x - 7}{(x-1)^2(x+3)}\,\mathrm{d}x = \frac{A}{x-1} + B\ln|x-1| + C\ln|x+3| + D$$

Odvajamo in dobimo:

$$\begin{aligned}
\frac{4x^2 - x - 7}{(x-1)^2(x+3)} &= \frac{-A}{(x-1)^2} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+3} \\
&= \frac{-A(x+3) + B(x-1)(x+3) + C(x-1)^2}{(x-1)^2(x+3)} \\
&= \frac{(B+C)x^2 + (-A + 2B - 2C)x - 3A - 3B + C}{(x-1)^2(x+3)}
\end{aligned}$$

Primerjamo koeficiente in dobimo sistem enačb $B + C = 4$, $-A + 2B - 2C = -1$ in $-3A - 3B + C = -7$, ki ima rešitev $A = 1$, $B = 2$ in $C = 2$. Zato je

$$\int \frac{4x^2 - x - 7}{(x-1)^2(x+3)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{x-1} + 2\ln|x-1| + 2\ln|x+3| + D$$