IZPIT IZ MATEMATIKE I

Univerzitetni študij

23. junij 2011

1. Rešite enačbo
$$z^3 = \left(\frac{2}{1-\mathrm{i}}\right)^2.$$

Rešitev:
Desno stran enačbe preoblikujemo: $\left(\frac{2}{1-\mathrm{i}}\right)^2 = 2\mathrm{i}$, da dobimo
$$z^3 = 2\mathrm{i}.$$
Enačba ima 3 rešitve, ki jih poiščemo po formuli
$$z_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right), \quad k = 0, 1, 2,$$
kjer je $r = 2$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$ in $n = 3$. Dobimo:
$$\begin{aligned} z_0 &= \sqrt[3]{2}\left(\cos\tfrac{\pi}{6} + \mathrm{i}\sin\tfrac{\pi}{6}\right) = \sqrt[3]{2}\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2} + \tfrac{\mathrm{i}}{2}\right), \\ z_1 &= \sqrt[3]{2}\left(\cos\tfrac{5\pi}{6} + \mathrm{i}\sin\tfrac{5\pi}{6}\right) = \sqrt[3]{2}\left(-\tfrac{\sqrt{3}}{2} + \tfrac{\mathrm{i}}{2}\right), \\ z_2 &= \sqrt[3]{2}\left(\cos\tfrac{3\pi}{2} + \mathrm{i}\sin\tfrac{3\pi}{2}\right) = -\mathrm{i}\sqrt[3]{2}. \end{aligned}$$

2. Koliko členov zaporedja $a_n = \frac{4^n-5}{4^n+3}$ se razlikuje od limite za več kot $\varepsilon = 8^{-10}$?

Rešitev:
Najprej izračunamo limito zaporedja:
$$a = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{4^n-5}{4^n+3} = 1.$$
Nato pa poiščemo rešitev neenačbe $|a_n - a| > \varepsilon$.
$$\begin{aligned} \left|\frac{4^n-5}{4^n+3} - 1\right| &> 8^{-10} \\ \frac{8}{4^n+3} &> \frac{1}{8^{10}} \\ 4^n &< 2\cdot 4^{16} - 3 \\ n &< 17 \end{aligned}$$
Prvih 16 členov zaporedja se od limite razlikuje za več kot ε.

3. S pomočjo diferenciala izračunajte približno vrednost za $(1.03)^{11}$.

Rešitev:
Iz oblike izraza preberemo: $f(x) = x^{11}$, $a = 1$ in $h = 0.03$. Odvod funkcije: $f'(x) = 11x^{10}$. Sledi $f(1) = 1$ in $f'(1) = 11$. Približno vrednost izraza dobimo po formuli $f(a+h) \approx f(a) + h \cdot f'(a)$:
$$(1.03)^{11} \approx 1 + \tfrac{3}{100}\cdot 11 = 1.33.$$
Za primerjavo: točna vrednost izraza na 5 decimalk je 1.38423.

4. Določite in klasificirajte ekstreme funkcije

$$f(x) = x^2 \mathrm{e}^{-x}.$$

Rešitev:
Funkcijo $f(x)$ najprej odvajamo:

$$f'(x) = 2x\mathrm{e}^{-x} - x^2\mathrm{e}^{-x} = x(2-x)\mathrm{e}^{-x} = 0.$$

Stacionarne točke dobimo tam, kjer je prvi odvod enak 0: $x_1 = 0$ in $x_2 = 2$.
Nato izračunamo še drugi odvod:

$$f''(x) = 2\mathrm{e}^{-x} - 4x\mathrm{e}^{-x} + x^2\mathrm{e}^{-x} = (2 - 4x + x^2)\mathrm{e}^{-x}.$$

- Ker je $f''(0) = 2 > 0$, imamo v točki $x_1 = 0$ lokalni minimum.
- Ker je $f''(2) = -2\mathrm{e}^{-2} < 0$, imamo v točki $x_2 = 2$ lokalni maksimum.

5. Izračunajte integral

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{\mathrm{tg} x}}{\sin x \ \cos x} \, \mathrm{d}x.$$

Rešitev:
Integral izračunamo z uvedbo nove spremenljivke $t = \mathrm{tg} x$, kjer je $\mathrm{d}t = \frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x$. Ko gre $x \to 0$, gre $t \to 0$, in ko gre $x \to \frac{\pi}{2}$, gre $t \to 1$.

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{\mathrm{tg} x}}{\sin x \ \cos x} \, \mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{\mathrm{tg} x} \ \cos x}{\sin x \ \cos^2 x} \, \mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\sqrt{t}}{t} \, \mathrm{d}t = \int_0^1 t^{-\frac{1}{2}} \, \mathrm{d}t = 2t^{\frac{1}{2}} \Big|_0^1 = 2$$