REŠITVE

Naloga 1 (20 točk)

Poiščite množico rešitev neenačbe

$$\frac{1}{3-x} < 2.$$

Neenačbo pomnožimo s pozitivnim izrazom $(3-x)^2$ *in dobimo:*

$$3-x < 2(3-x)^2 \text{ oz. } 3-x < 18-12x+2x^2.$$

Neenačbo uredimo

$$2x^2 - 11x + 15 > 0$$

in izračunamo presečišči parabole $y = 2x^2 - 11x + 15$ *z abscisno osjo:*

$$x_{1,2} = \frac{11 \pm \sqrt{121-120}}{4} = \frac{11 \pm 1}{4} = \begin{cases} 3 \\ \frac{5}{2} \end{cases}.$$

Sledi rešitev neenačbe (ko točke parabole ležijo nad abscisno osjo):

$$x \in (-\infty, \frac{5}{2}] \cup [3, \infty).$$

Naloga 2 (20 točk)

Določite najmanjši in največji člen ter infimum in supremum zaporedja s splošnim členom

$$a_n = \frac{2008^n}{(n+2)!}.$$

Najprej preverimo, kje zaporedje narašča in kje pada:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{2008^{n+1}}{((n+1)+2)!}}{\frac{2008^n}{(n+2)!}} = \frac{2008 \cdot (n+2)!}{(n+3)!} = \frac{2008 \cdot (n+2)!}{(n+3)\cdot(n+2)!} = \frac{2008}{n+3},$$

torej

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2008}{n+3} = \begin{cases} >1, & n < 2005 \\ 1, & n = 2005 \\ <1, & n > 2005 \end{cases}.$$

Zaporedje narašča za $n < 2005$, naslednja dva člena sta enaka $a_{2006} = a_{2005}$, za $n > 2005$ pa pada. Največji člen zaporedja in zato tudi supremum je tako 2005. oz. 2006. člen

$$\max_{n\geq 1} a_n = a_{2005} = a_{2006} = \frac{2008^{2005}}{2007!},$$

najmanjši člen zaporedja pa ne obstaja. Vsi členi zaporedja so pozitivni in infimum je enak 0.

Naloga 3 (20 točk)

Določite parametra a in b, tako da bo funkcija

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{\sin x}, & x < 0 \\ ax + b, & x \geq 0 \end{cases}$$

zvezno odvedljiva na intervalu $(-\pi, \pi)$.

Funkcija $f(x)$ mora biti zvezna na intervalu $(-\pi, \pi)$, to je

$$\lim_{x\uparrow 0} f(x) = f(0)$$

oziroma

$$\lim_{x\uparrow 0} \frac{x^2}{\sin x} = b.$$

Vrednost parametra b mora biti torej enaka levi limiti:

$$b = \lim_{x\uparrow 0} \frac{x^2}{\sin x} = \lim_{x\uparrow 0} \frac{2x}{\cos x} = 0.$$

Pri izračunu smo uporabili L'Hospitalovo pravilo. Sedaj izračunajmo odvod funkcije $f(x)$:

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{2x\sin x - x^2\cos x}{\sin^2 x}, & x < 0 \\ a, & x \geq 0 \end{cases}$$

Odvod obstaja povsod na intervalu $(-\pi, \pi)$, razen morda v točki $x = 0$. Tam morata biti levi in desni odvod enaka. Funkcija $f(x)$ bo poleg tega zvezno odvedljiva na intervalu $(-\pi, \pi)$, če bo odvod povsod na intervalu zvezna funkcija. Da bo odvod $f'(x)$ zvezen tudi v točki $x = 0$, mora veljati

$$\lim_{x\uparrow 0} \frac{2x\sin x - x^2\cos x}{\sin^2 x} = a.$$

Vrednost parametra a mora biti zato enaka levi limiti:

$$a = \lim_{x\uparrow 0} \frac{2x\sin x - x^2\cos x}{\sin^2 x} = \lim_{x\uparrow 0} \frac{2\sin x + 2x\cos x - 2x\cos x + x^2\sin x}{2\sin x\cos x} = \lim_{x\uparrow 0} \frac{2 + x^2}{2\cos x} = 1.$$

Sledi, funkcija $f(x)$ bo zvezno odvedljiva na intervalu $(-\pi, \pi)$, če bosta $a = 1$ in $b = 0$.

Naloga 4 (20 točk)

Izračunajte nedoločeni integral

$$\int \frac{1}{3+\sqrt{x}}\, dx.$$

Nedoločeni integral rešimo z uvedbo nove spremenljivke $t = \sqrt{x} \;\Rightarrow\; dt = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$, torej:

$$\int \frac{1}{3+\sqrt{x}}\, dx = \int \frac{2t}{3+t}\, dt = \int (2 - \frac{6}{3+t})\, dt = 2t - 6\ln|3+t| + C = 2\sqrt{x} - 6\ln|3+\sqrt{x}| + C.$$

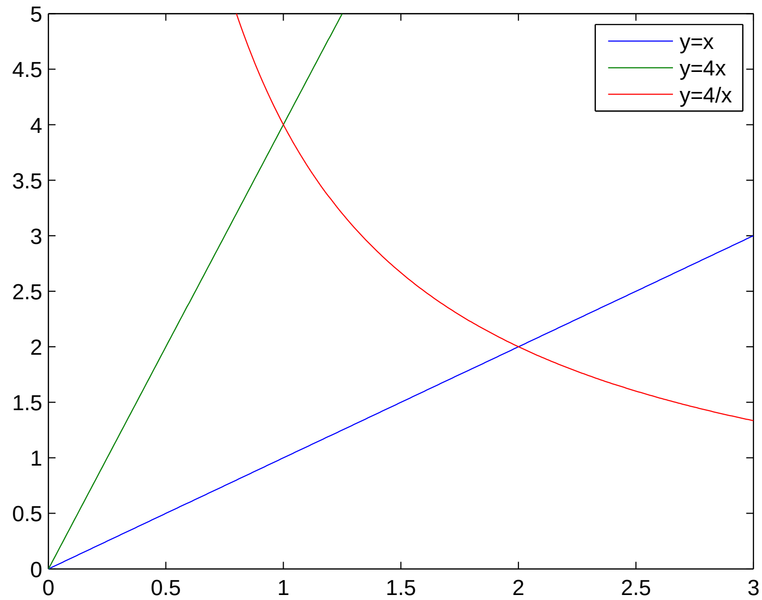
Naloga 5 (20 točk)

Izračunajte ploščino lika v prvem kvadrantu, ki je omejen s krivuljami

$$y = x, \quad y = 4x, \quad y = \frac{4}{x}.$$

Narišite sliko.

Slika prikazuje lik, ki ga dane krivulje omejujejo v prvem kvadrantu.



Izračunajmo presečišča krivulj v prvem kvadrantu:

- $x = \frac{4}{x} \;\Rightarrow\; x^2 - 4 = 0 \;\Rightarrow\; (x-2)(x+2) = 0 \;\Rightarrow\; x_1 = 2,$
- $4x = \frac{4}{x} \;\Rightarrow\; x^2 - 1 = 0 \;\Rightarrow\; (x-1)(x+1) = 0 \;\Rightarrow\; x_2 = 1.$

Dobljeni krivočrtni trikotnik lahko razdelimo na dva dela: na trikotnik, ki se nahaja med $x = 0$ in $x = 1$, ter na krivočrtni trikotnik, ki se nahaja med $x = 1$ in $x = 2$. Ploščino celotnega lika zato izračunamo kot vsoto dveh določenih integralov (funkciji pod integralom sta razliki zgornje in spodnje krivulje obeh delnih likov):

$$S = \int_0^1 (4x - x)\,dx + \int_1^2 \left(\frac{4}{x} - x\right)dx = \left[\frac{3}{2}x^2\right]_0^1 + \left[4\ln x - \frac{1}{2}x^2\right]_1^2 = \frac{3}{2} + 4\ln 2 - 2 - 4\ln 1 + \frac{1}{2} = 4\ln 2.$$