Matematika 1 – ustna vprašanja

Razširitve množic števil

Lastnosti kompleksnih števil

Moivrova formula

Zaporedje

Natančna zgornja, natančna spodnja meja zaporedja

Stekališče, limita zaporedja

Konvergenca zaporedja

Cauchy-jev pogoj za konvergenco zaporedja

Monotona zaporedja

Zaporedje $a_n = c^n$, $c \in \Re$. Kdaj zaporedje konvergira? Koliko je limita zaporedja?

Definicija potence z iracionalnim eksponentom

Definicija števila e

Številska vrsta

Konvergenca vrste

Harmonična vrsta

Kriteriji za konvergenco vrste

Leibnitzev kriterij za konvergenco vrste

Absolutna - pogojna konvergenca vrste

Definicijsko območje, zaloga vrednosti funkcije

Preslikava, injektivnost, surjektivnost, kompozitum, graf

Inverzna funkcija

Sodost, lihost funkcij

Zveznost funkcije

Limita funkcije

Leva in desna limita funkcije

Limita $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$

Lastnosti zveznih funkcij na zaprtem intervalu

Algebraične funkcije

Graf racionalne funkcije

Transcendentne funkcije (katere so, lastnosti ...)

Eksponentna, logaritemska funkcija

Kotne, ciklometrične funkcije

Hiperbolične, area funkcije

Odvod funkcije

Pravila za odvajanje funkcij

Odvodi elementarnih funkcij

Odvod inverzne funkcije

Diferencial funkcije

Računanje približnih vrednosti funkcije s pomočjo diferenciala

Definicija višjih odvodov funkcije

Neskončno odvedljive funkcije

Ekstremi funkcij

Fermatov izrek

Rolleov izrek

Lagrangeov izrek

L'Hospitalovo pravilo

Geometrijska interpretacija odvoda funkcije

Iskanje ekstremov funkcije

Tangenta na krivuljo

Konveksna, konkavna funkcija

Nedoločeni integral funkcije

Definicija določenega integrala funkcije

Lastnosti določenega integrala funkcije

Zveza med določenim in nedoločenim integralom funkcije

Integral racionalne funkcije

Integral $\int R(\cos x, \sin x)dx$, kjer je R racionalna funkcija

Posplošeni integral funkcije

Ploščina krivočrtnih likov

Ploščina izseka $r = r(\varphi)$

Prostornina rotacijskega telesa

Površina rotacijskega telesa

RAZŠIRITVE MNOŽIC ŠTEVIL

NARAVNA ŠTEVILA :

- MNOŽICO $\mathbb{N}$ LAHKO UREDIMO ($n \leq m$ ALI $m \leq n$)
- ZA VSAKO NARAVNO ŠT. OBSTAJA ŠT. m KI JE NAJMANJŠE OD VSEH NARAVNIH ŠTEVIL KI SO VEČJI OD n

  TEMU PRAVIMO **DISKRETNOST** ($\mathbb{N}$ JE DISKRETNA MNOŽICA)
- VSAKA PODMNOŽICA MNOŽICE $\mathbb{N}$ IMA NAJMANJŠI ELEMENT
- V $\mathbb{N}$ DEFINIRAMO SEŠTEVANJE IN MNOŽENJE

CELA ŠTEVILA :

V MNOŽICI $\mathbb{Z}$ OBSTAJA NEVTRALEN ELEMENT ZA SEŠTEVANJE $a + 0 = a$, IN ZA VSAK ELEMENT a OBSTAJA NASPROTEN ELEMENT $-a$ TAKO DA JE $a + (-a) = 0$

RACIONALNA ŠTEVILA :

- MNOŽICA ULOMKOV JE MNOŽICA $\mathbb{Q}$
- MNOŽICA $\mathbb{Q}$ NI DISKRETNA, VELJA, DA MED POLJUBNIMA ULOMKOMA LAHKO NAJDEMO ŠE EN ULOMEK

  TO LASTNOST IMENUJEMO **GOSTOST** ($\mathbb{Q}$ JE GOSTA MNOŽICA)

REALNA ŠTEVILA

- VSAK ULOMEK LAHKO PONAZORIMO S TOČKO NA ŠT. PREMICI, VENDAR NI VSAKA TOČKA NA PREMICI PREDSTAVLJENA Z ULOMKOM.
- MNOŽICA $\mathbb{R}$ JE POLNA (NOBENO ŠT. NE MANJKA)

  MNOŽICA $\mathbb{R}$ NI ŠTEVNA (MNOGO VEČJA KOT $\mathbb{N}$)
- REALNA ŠT. PREDSTAVIMO Z DEC. ZAPISOM.

KOMPLEKSNA ŠTEVILA $\mathbb{C}$

KOMPLEKSNO ŠT. JE UREJEN PAR REALNIH ŠTEVIL PRVI DEL IMENUJEMO REALNI DEL, DRUGEGA PA IMAGINARNI $a = Re(a,b)$ $b = Im(a,b)$

KOMPLEKSNO ŠT. $(0,b)$ IMENUJEMO ČISTO IMAGINARNO ŠTEVILO

LASTNOSTI KOMPLEKSNIH ŠTEVIL

$x^2 + 1$ → NIMA REAL. REŠITEV ZATO ~~REA~~ $\mathbb{R}$ RAZŠIRIMO V MNOŽICO KOMPLEKSNIH ŠTEVIL.

KOMPLEKSNO ŠTEVILO JE UREJEN PAR REALNIH ŠT. $(\underbrace{a}_{\text{REAL. DEL}}, b)$ → IMAG. DEL

KONJUGIRANO ŠT.

ČE JE $\alpha = (a + ib)$

$$\bar{\alpha} = \overline{a + ib} = a - ib$$

VELJA:

$$\boxed{(\bar{\bar{\alpha}}) = \alpha} \quad \boxed{\alpha + \bar{\alpha} = 2 \cdot Re\,\alpha} \quad \boxed{\alpha - \bar{\alpha} = 2 \cdot i \cdot Im\,\alpha}$$

$$\boxed{\overline{\alpha \cdot \beta} = \bar{\alpha} \cdot \bar{\beta}} \quad \boxed{\overline{\alpha + \beta} = \bar{\alpha} + \bar{\beta}}$$

DELJENJE KOMPL. ŠT.

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{a + ib}{c + id} = \frac{a + ib\,(c - id)}{(c + id)(c - id)}$$

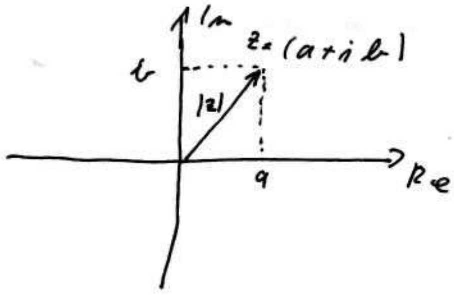
POMNOŽIMO S KONJUGIRANIM

ABSOL. VREDNOST

$$\boxed{|\alpha| = \sqrt{Im^2 + Re^2}}$$

UPODOBITEV KOMPL. ŠTEVIL

UPODOBIMO S TOČKO V KOMPLEKSNI RAVNINI



POLARNI ZAPIS

$$z = \underbrace{r}_{} \cdot \underbrace{(\cos\varphi + i\sin\varphi)}_{}$$

r: ODDALJENOST OD KOORDINATNEGA IZHODIŠČA $|z|$

φ: KOT OD ABSCISE DO KRAJEVNEGA VEKTORJA V POZITIVNI SMERI.

③ MOIVROVA FORMULA

$$z^n = r^n \cdot \left(\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi)\right)$$

UPORABLJA SE ZA MNOŽENJE ENAKIH KOMPLEKSNIH ŠTEVIL MED SEBOJ. $z_n = z_1 = z_2 = z_3 \ldots z_n$

---

④ ZAPOREDJE

ZAPOREDJE ŠTEVIL JE PRESLIKAVA FUNKCIJE IZ MNOŽICE NARAVNIH ŠTEVIL V MNOŽICO REALNIH ŠTEVIL

$$f\, \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$

VREDNOST $f(n)$ NAM POVE KATERO ŠTEVILO JE NA n-TEM MESTU OZ. n-TI ČLEN ZAP. PIŠEMO a_n

ZAP. LAHKO JE PODANO NA VEČ NAČINOV

EKSPLICITNO: $a_n = f(n)$

PRIM: $a_n = \frac{n}{3}$

REKURZIVNO: $a_n = g(a_{n-1})$ ČLEN JE PODAN KOT FUNKCIJA PREJŠNEGA ČLENA

PRIM: $a_n = 2 \cdot a_{n-1}$, $a_1 = 1$

---

⑤ NATANČNA ZGORNJA / SPODNJA MEJA ZAPOREDJA

ZGORNJA MEJA

ZAP. JE NA VZGOR OMEJENO ČE OBSTAJA ŠTEVILO $M \in \mathbb{R}$ DA JE $a_n \leq M$ ZA VSAK $M \in \mathbb{N}$

NATANČNA ZGORNJA MEJA JE JE NAJMANJŠE ŠTEVILO IZMED VSEH ZGORNJIH MEJ. IMENUJEMO GA SUPREMUM ZAPOREDJA IN PIŠEMO:

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} a_n$$

SPODNJA MEJA

ZAPOREDJE JE NAVZDOL OMEJENO ČE OBSTAJA ŠTEVILO $m \in \mathbb{R}$ DA JE $a_n \geq m$ ZA VSAK $n \in \mathbb{N}$

NATANČNA SPODNJA MEJA JE NAJVEČJA IZMED VSEH SPODNJIH MEJ IN JO IMENUJEMO INFIMUM ZAPOREDJA. PIŠEMO

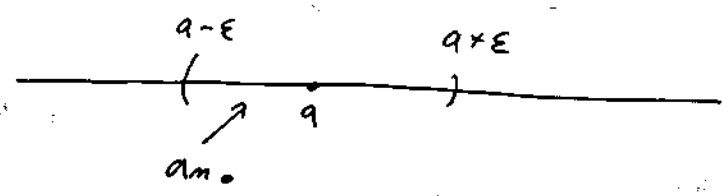
$\inf a_n$

---

6 STEKALIŠČE, LIMITA ZAPOREDJA

STEKALIŠČE

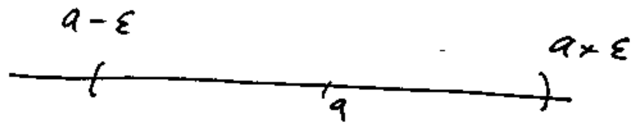
ŠTEVILO a JE STEKALIŠČE ZAPOREDJA $\{a_n\}$, ČE ZA VSAK $\varepsilon > 0$ OBSTAJA NEKO $n_0 \in \mathbb{N}$, DA JE a_{n_0} ELEMENT INTERVALA $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$



POLJUBNO BLIZU STEKALIŠČA LAHKO NAJDEMO NEK ČLEN ZAPOREDJA.

LIMITA

ŠTEVILO a JE LIMITA ZAP. a_n, ČE ZA VSAK $\varepsilon > 0$ OBSTAJA $n_0 \in \mathbb{N}$, DA JE $|a_n - a| < \varepsilon$ ZA VSAK $n > 0$



TO POMENI, DA SO ZA VSAKO OKOLICO LIMITE a VSI ČLENI ZAPOREDJA OD NEKJE NAPREJ V TEJ OKOLICI ŠTEVILA a

TO POMENI, DA JE ZUNAJ VSAKE OKOLICE ŠT. a KVEČJEMU KONČNO MNOGO ČLENOV ZAPOREDJA

VSAKA LIMITA JE STEKALIŠČE, OBRATNO NE VELJA VEDNO.

LIMITA JE NAJVEČ ENA

7. KONVERGENCA ZAPOREDJA

ČE IMA ZAPOREDJE LIMITO, POTEM JE KONVERGENTNO

DRUGAČE JE DIVERGENTNO.

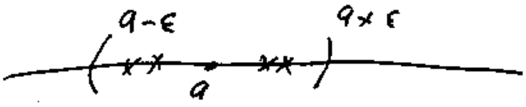
ČE JE ZAPOREDJE KONVERGENTNO JE OMEJENO.

ČE JE ZAPOREDJE NARAŠČAJOČE IN OMEJENO, POTEM JE KONVERGENTNO IN LIMITA JE NATANČNA ZGORNJA MEJA

8. CAUCHIJEV POGOJ ZA KONVERGENCO ZAPOREDJA

ZAPOREDJE a_n JE KONVERGENTNO ČE ZA VSAK $\varepsilon > 0$ OBSTAJA TAK $n_0 \in \mathbb{N}$ DA JE ~~a_n~~

$$(a_n - a_{n+p}) < \varepsilon \quad , \text{ ZA VSAK } n_0 \in \mathbb{N}, p \in \mathbb{N}$$



9. MONOTONA ZAPOREDJA

ČE ZA ZAPOREDJE a_n VELJA DA JE!

$$a_{n+1} \geq a_n$$

POTEM JE TAKO ZAPOREDJE MONOTONO NARAŠČAJOČE

ČE PA $a_{n+1} > a_n$, PA STROGO MONOTONO NARAŠČAJOČE

ČE PA VELJA! $a_{n+1} \leq a_n \rightarrow$ MONOTONO PADAJOČE

$a_{n+1} < a_n \rightarrow$ STROGO MONOTONO PADAJOČE

(10) $a_n = c^n \quad c \in \mathbb{R}$ KDAJ ZAP. KONVERGIRA, KOLIKO JE LIMITA

$c > 1$ DIVERGIRA $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$

$-1 < c < 1$ KONVERGIRA $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

$c = 1 \Rightarrow$ KONVERGIRA K 1, $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$

(12) DEFINICIJA ŠTEVILA e

DEFINIRAMO ZAPOREDJI

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad , \quad b_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n}$$

- NARAŠČAJOČE
- NAVZGOR OMEJENO

- PADAJOČE OD $n > 1$ NAPREJ
- NAVZDOL OMEJENO

ZAPOREDJI IMATA ISTO LIMITO, TO LIMITO OZNAČIMO Z e

(13) ŠTEVILSKE VRSTE

IMAMO ZAP. a_n, ZANIMA NAS VSOTA ZAPOREDJA

ZATO DEFINIRAMO NOVO ZAPOREDJE DELNIH VSOT

$$\{s_n\}$$

$$\{s_{n_1}\} = a_1$$

$$\{s_{n_2}\} = a_1 + a_2$$

$$\vdots$$

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \cdots$$

$$\vdots$$

ČE OBSTAJA LIMITA DELNIH VSOT ŠTEVILSKA VRSTA KONVERGIRA (OBSTAJA)

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots$$

(14) KONVERGENCA VRSTE

KDAJ VRSTA KONVERGIRA LAHKO PREVERIMO S COSHYJEVEM POGOJEM:

ZA VSAK $\varepsilon > 0$ OBSTAJA NEKO $n_0 \in \mathbb{N}$ DA JE

$$\Big|\underbrace{s_{n+p}}_{\substack{\text{PRVIH}\\ n+p\\ \text{ČLENOV}}} - \underbrace{s_n}_{a_1+a_2+\dots a_n}\Big| < \varepsilon \quad \text{ZA VSAK } n > n_0 \text{ IN } p \in \mathbb{N}$$

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+p}| < \varepsilon \quad \text{ZA VSAK } n > n_0 \text{ IN } p \in \mathbb{N}$$

V PRIMERU KO VRSTA $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ KONVERGIRA JE

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

TO POMENI, DA JE POTREBEN POGOJ ZA KONVERGENCO VRSTE, TO, DA GRE SPLOŠNI ČLEN PROTI „0"

(TA POGOJ JE POTREBEN, NI PA ZADOSTEN)

(15) HARMONIČNA VRSTA

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots \quad (\text{DIVERGIRA})$$

ČE HARMONIČNO VRSTO RAZDELIMO NA VEČ DELOV, PRI ČEMER JE VSOTA VSAKEGA DELA VEČJA OD $\frac{1}{2}$ POTEM VIDIMO DA VRSTA DIVERGIRA:

$$\underbrace{1}_{>\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{2}}_{\geq\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{>\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}}_{>\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \dots \frac{1}{16}}_{>\frac{1}{2}} \dots$$

VSOTA JE VEČJA OD POLJUBNO VELIKEGA ŠT.

(VRSTA DIVERGIRA)

(16) KRITERIJ ZA KONVERGENCO VRSTE

PRIMERJALNI

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{ir} \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n \qquad a_n \le b_n \quad \forall n$$

(1) (2)

- ČE (2) KONVERGIRA, POTEM KONVERGIRA TUDI (1)
- ČE (1) DIVERGIRA, POTEM DIVERGIRA TUDI (2)

KVOCIENTNI

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ JE VSOTA ZA KATERO VELJA $\frac{a_{n+1}}{a_n} < q < 1$

ČE TO VELJA POTEM VRSTA KONVERGIRA (LAHKO JO SEŠTEJEMO)

KVOCIENTNI IZREK:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$$

$L < 1 \to$ KONVERGIRA

$L > 1 \to$ DIVERGIRA

$L = 1 \to$ NE VEMO.

KORENSKI

ČE ZA VRSTO VELJA: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ VELJA $\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{a_n} = q$

$q < 1 \to$ KONVERGIRA

$q > 1 \to$ DIVERGIRA

$q = 1 \to$ NE VEMO

(17) LEIBNIZOV KRITERIJ ZA KONVERGENCO

ALTERNIRAJOČA VRSTA JE KONVERGENTNA, ČE GREDO NJENI ČLENI PO ABSOLUTNI VREDNOSTI PROTI "0" IN VELJA: $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$

(18) ABSOLUTNO IN POGOJNO KONVERGENTNE VRSTE

- ČLENI VRSTE SO LAHKO TUDI NEG. ŠT.

- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ JE <u>ABSOLUTNO KONVERGENTNA</u> ČE KONVERGIRA $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$

  ČE JE ABSOLUTNO KONVERGENTNA, JE TUDI KONVERGENTNA.

- ČE $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ KONVERGIRA, $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ PA DIVERGIRA, POTEM PRAVIMO DA JE $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ <u>POGOJNO KONVERGENTNA</u> VRSTA

  Z MENJAVO VRSTNEGA REDA, LAHKO VSOTA DOSEŽE KATERO KOLI ŠTEVILO.

- ČE SE V VRSTI $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ IZMENJUJEJO POZ. IN NEG. ČLENI JE VRSTA <u>ALTERNIRAJOČA</u>

---

(19) DEFINICIJSKO OBMOČJE, ZALOGA VREDNOSTI FUNKCIJE

Df, Zf

$D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$ (X-OS)

$Zf \Rightarrow \{ f(x) : x \in D \}$ (Y-OS)

20 PRESLIKAVA, INJEKTIVNOST, SURJEKTIVNOST, KOMPOZITUM, GRAF

ČE JE FUNKCIJA <u>INJEKTIVNA</u>, POTEM KATERAKOLI VZPOREDNICA Z OSJO X <u>SEKA GRAF FUNKCIJE NAJVEČ ENKRAT.</u>

ČE PA JE <u>SURJEKTIVNA</u>, POTEM VSAKA VZPOREDNICA Z OSJO X <u>SEKA GRAF VSAJ 1X</u>

<u>KOMPOZITUM FUNKCIJ</u>

$$(f\circ g)(x) = f(g(x)), \quad (g\circ f)(x) = g(f(x))$$

$f\circ g$ JE RAZLIČEN OD $g\circ f$

GRAF JE PODMNOŽICA KORD.-RAVNINE

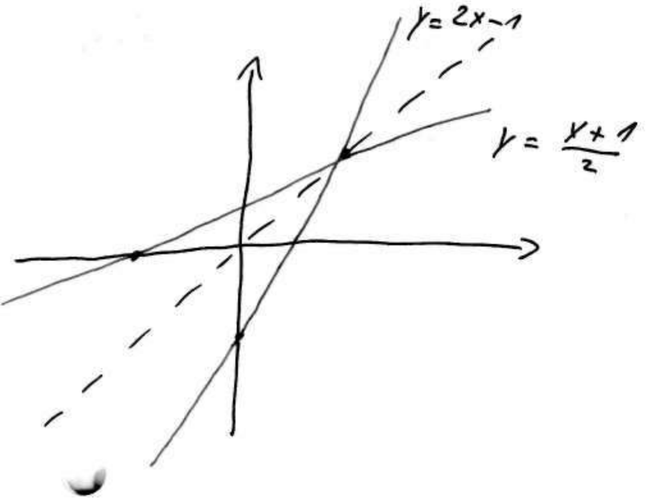
21 INVERZNA FUNKCIJA

- ČE JE FUNKCIJA INJEKTIVNA, POTEM OBSTAJA INVERZNA FUNKCIJA f^{-1}, TAKO, DA VELJA: $(f^{-1}\circ f)(x) = x$

$f^{-1}\circ f$ = IDENTITETA

- INVERZNO FUNKCIJO IZRAČUNAMO TAKO, DA V PREDPISU ZAMENJAMO VLOGI X IN Y IN IZRAZIMO Y.

- GRAF INVERZNE FUNKCIJE JE SIMETRIČEN GLEDE NA SIMETRALO LIHIH KVADRANTOV.

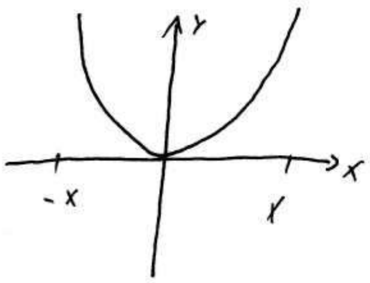


(22) SODOST, LIHOST FUNKCIJ

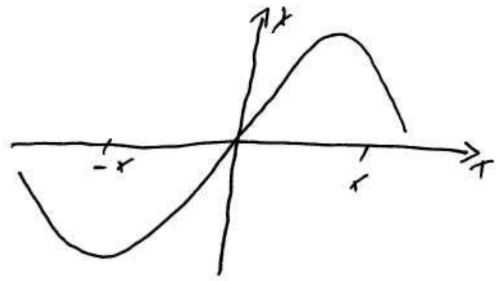
SODA: $\left(f(-x)\right) = \left(f(x)\right)$

LIHA: $\left(f(-x)\right) = -\left(f(x)\right)$

GRAF SODE FUNKCIJE JE SIMETRIČEN GLEDE NA X OS



GRAF LIHE FUNKCIJE PA JE SIMETRIČEN GLEDE NA KOORD. IZHODIŠČE:

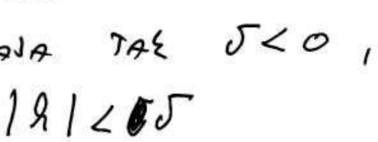


VEČINA FUNKCIJ NI NE SODIH, NE LIHIH.

---

(23) ZVEZNOST FUNKCIJE

- FUNKCIJA F JE ZVEZNA V TOČKI X_0 ČE ZA VSAK $\varepsilon > 0$ OBSTAJA TAK $\delta < 0$, DA JE $|f(x_0+h) - f(x_0)| < \varepsilon$, ČE JE $|h| < \delta$
- GRAF ZVEZNE FUNKCIJE NI PRETRGAN.
- FUNKCIJA JE ZVEZNA, ČE JE ZVEZNA Z LEVE IN Z DESNE
- —||— , ČE JE ZVEZNA V VSAKI TOČKI DEF. OBMOČJA
- FUNKCIJA JE ODSEKOMA ZVEZNA, ČE JE ZVEZNA V VSEH TOČKAH DEFINICIJSKEGA OBMOČJA, Z IZJEMO KONČNO ALI ŠTEVNO NESKONČNO TOČK.



PRIMER:
SIGNALI SO ODSEKOMA ZVEZNI.

FUNKCIJA JE ENAKOMERNO ZVEZNA NA D_f, ČE ZA VSAK $\varepsilon > 0$ OBSTAJA $\delta > 0$, DA JE

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon \text{ , ČIM JE } |x_1 - x_2| < \delta$$

- VSAKA ZVEZNA FUNKCIJA JE NA ZAPRTEM INTERVALU ENAKOMERNO ZVEZNA.

---

(24) **LIMITA FUNKCIJE**

FUNKCIJA LIMITIRA PROTI VREDNOSTI A, KO SE X BLIŽA VREDNOSTI A, ~~KO SE X BLIŽA~~, ČE ZA VSAK $\varepsilon > 0$ OBSTAJA $\delta > 0$, DA JE $|f(x) - A| < \varepsilon$, ČIM JE $|x - a| < \delta$, ZAPIŠEMO:

$$\lim_{x \to a} f(x) = A$$

---

(25) **LEVA IN DESNA LIMITA FUNKCIJE**

FUNKCIJA JE V NEKI TOČKI ZVEZNA, TAKRAT KO JE

$$\lim_{x \uparrow x_0} f(x) = \lim_{x \downarrow x_0} f(x) = f(a)$$

---

(26)

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{+\cos x}{1} = \frac{+1}{1} = +1$$

27 ZVEZNOST FUNKCIJ NA ZAPRTEM INTERVALU

GLEJ ZVEZNOST FUNKCIJE

28 ALGEBRAIČNE FUNKCIJE

– POLINOMI, RAC. FUNKCIJE, KORENI (KOMBINACIJE)

ČE $y = f(x)$ ZADOŠČA ENAČBI

$$a_n(x)y^n + a_{n-1}(x)y^{n-1} + \dots + a_1(x)y + a_0(x) = 0$$

– VSOTE, PRODUKTI, KVOCIENTI, POTENCE, KOMPOZITUMI SO SPET ALGEBRAIČNE FUNKCIJE

29 GRAF RACIONALNE FUNKCIJE

– RACIONALNA FUNK. JE DEFINIRANA ZA VSAKO REAL. ŠT. RAZEN V NIČLAH POLINOMA g

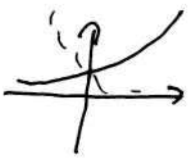
$$r(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \quad f, g \text{ - POLINOMA}$$

IŠČEMO: NIČLE, POLE, ASIMPTOTE, ZAČ. VREDNOST, EKSTREME

30 TRANSCENDENTNE FUNKCIJE

EKSPONENTNA → STROGO MONOTONA, INJEKTIVNA NI SURJEKTIVNA

$y = a^x$



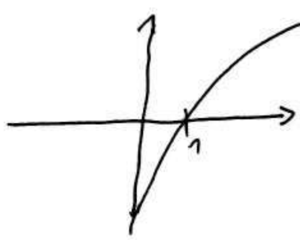
$a > 1$ → STROGO NARAŠČA

$0 < a < 1$ → STROGO PADA

LOGARITEMSKA → INVERZNA EKSPONENTNI

$y = \log_a x \quad (a^y = x)$

DEFINIRANA ZA $x > 0$



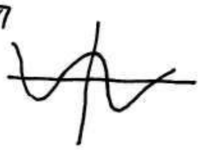
$a > 1$ – STROGO NARAŠČ.

$a < 1$ – STROGO PADA

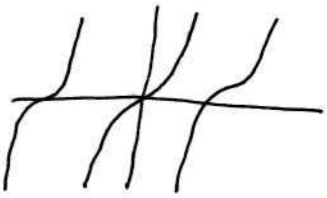
TRIGONOMETRIČNE:

SIN X
- LIHA
- PERIODA 2π
- OMEJENA
- Z_f $[-1, 1]$

COS X:
- SODA
- PERIODA 2π
- $Z_f [-1, 1]$



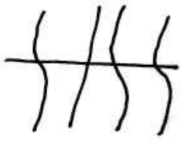
$Tg\, x = \frac{\sin x}{\cos x}$



- LIHA
- PER. $k\pi$

$Z_f = \mathbb{R}$, $D_f = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi\}$

$Ctg\, x = \frac{\cos x}{\sin x}$



CIKLOMETRIČNE:

RADI BI POISKALI INVERZ. TRIGONOMETRIČNIH FUNKCIJ ZATO ZOŽIMO D_f NA TAKO PODOBMOČJE DA JE NA NJEM f INJEKTIVNA.

HIPERBOLIČNE:

AREA FUNKCIJE:

(31) EKSPONENTNA, LOGARITEMSKA FUNKCIJA

GLEJ 30

34 ODVOD FUNKCIJE

- ODVOD FUNKCIJE V NEKI TOČKI JE ENAK LIMITI

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

, ČE LIMITA OBSTAJA JE FUNKCIJA V TEJ TOČKI ODVEDLJIVA.

- ODVOD NAM MERI POVPREČNO HITROST S KATERO SE FUNKCIJA f SPREMINJA V TOČKI X
- ČE JE f ODVEDLJIVA V x_0 POTEM JE V TEJ TOČKI TUDI ZVEZNA (IZ ODVEDLJIVOSTI SLEDI ZVEZNOST)

35 PRAVILA ZA ODVAJANJE

ODVOD KONSTANTE JE 0

$$(f \pm g)' = f' \pm g'$$

$$(f \cdot g)' = f'g + f \cdot g'$$

$$(c \cdot f)' = c \cdot f'$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' g - f \cdot g'}{g^2}$$

$$(f \circ u)(x) = f(u(x)) \xrightarrow{\text{SLEDI}} f'(x) = f'(u) \cdot u'(x)$$

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(x)}$$

36 ODVODI ELEMENTARNIH FUNKCIJ

EKSPONENTNA

$$(a^x)' = a^x \cdot \ln a$$

LOGARITEM

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

POTENCA

$$x^r = r \cdot x^{r-1}$$

KOTNE FUNKCIJE

$$y = (\cos x)' = -\sin x$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

CIKLOMETRIČNE F.

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arccos x)' = \frac{-1}{1-x^2}$$

$$(\operatorname{arc} \operatorname{tg})' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$(\operatorname{arcctg} x)' = \frac{1}{-1+x^2}$$

HIPERBOLIČNE FUNKCIJE

$\boxed{(\sinh x)' = \cosh x}$ $\boxed{(\tanh x)' = \frac{1}{\cosh^2 x}}$ $\boxed{(\coth x)' = -\frac{1}{\sinh^2 x}}$

(37) ODVOD INVERZNE FUNKCIJE: GLEJ 35

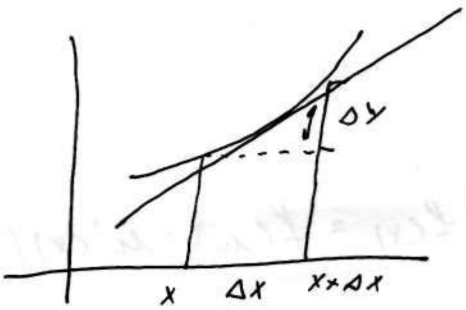
(38) DIFERENCIAL FUNKCIJE

$$f'(x) = \frac{\Delta f}{\Delta x} \Rightarrow y' = \frac{dy}{dx}$$

← DIFERENČNI KVOCIENT

ZA IZBRAN X ⇒ TO KONSTANTA

- DIFERENCIAL JE TISTA LINEARNA PRESLIKAVA, KI SE NAJBOLJE PRILEGA DANI FUNKCIJI
- TANGENTA JE TISTA PREMICA, KI SE NAJBOLJ PRILEGA DANI FUNKCIJI:



(39) RAČUNANJE PRIBLIŽNIH VREDNOSTI S POMOČJO DIFER.

40 DEFINICIJA VIŠJIH ODVODOV FUNKCIJE

ODVOD ODVEDLJIVE FUNKCIJE JE LAHKO ZOPET ODVEDLJIVA FUNKCIJA, KI JO LAHKO PONOVNO ODVAJAMO IN DOBIMO VIŠJE ODVODE!

y'', y''', y'''', $y^{(4)}$, $y^{(5)}$

---

41 ~~DEFINICIJA VIŠJIH~~ NESKONČNO ODVEDLJIVE FUNKCIJE

TO SO: POLINOMI, SINUSI IN KOSINUSI,

KI JIH LAHKO KAR NAPREJ ODVAJAMO.

---

42 EKSTREMI FUNKCIJ

$f'(x_0) = 0$ (POTREBEN POGOJ, A NE ZADOSTEN)
KJER TO VELJA SO STAC. TOČKE (KANDIDATI)

- ČE PRVI ODVOD PRI PREHODU SKOZI STAC. TOČKO SPREMENI PREDZNAK JE V TOČKI EKSTREM (DRUGAČE NE)

$f''(x_0) > 0 \rightarrow$ MINIMUM

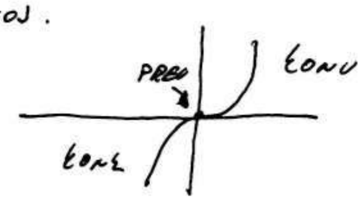
$f''(x_0) < 0 \rightarrow$ MAX

$f''(x_0) = 0$ – NE VEMO

PREVOJ

ČE JE ODVOD $f''(x)$ POZITIVEN JE $f(x_0)$ KONVEKSNA, ČE JE $f''(x)$ NEGATIV. JE $f(x)$ KONKAVNA.

KJER SE DELA STIKATA, TAM JE PREVOJ.



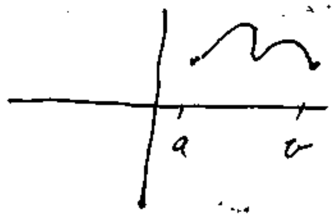
(43) FERMATOV IZREK

- ČE IMA FUNKCIJA f V TOČKI x_0 LOKALNI EXTREM (MIN, MAX) POTEM JE $f'(x_0) = 0$ (x_0 = NOTRANJA TOČKA INTERVALA)

- ČE JE ODVOD ENAK 0 JE SMERNI K. TANG. ENAK 0 → TANGENTA JE VZPOREDNA OSI X

(44) ROLLEOV IZREK

ČE JE f ODVEDLJIVA NA $[a, b]$ IN JE $f(a) = f(b)$ POTEM OBSTAJA VSAJ 1. TOČKA x_0 ZNOTRAJ INTERVALA TAKO DA JE $f'(x_0) = 0$



(45) LAGRANGOV IZREK

- ČE JE f ODVEDLJIVA NA $[a, b]$, POTEM OBSTAJA $x_0 \in (a, b)$ TAKO DA JE $$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

- TANGENTA SKOZI TOČKO $(x_0, f(x_0))$ JE VZPOREDNA SEKANTI SKOZI TOČKI $(a, f(a))$, $(b, f(b))$.

(46) L' HOSPITALOVO PRAVILO

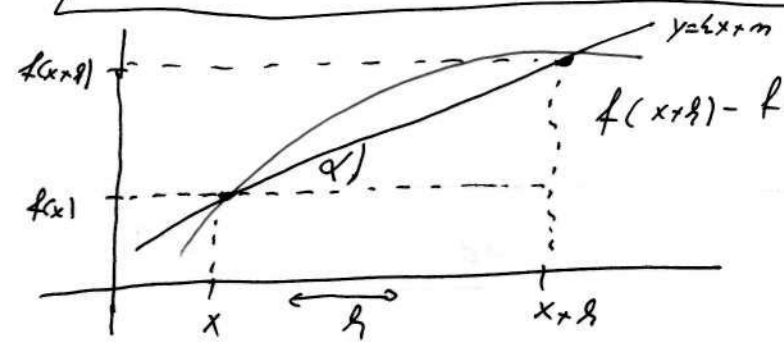
Z NJIM SI POMAGAMO PRI ODPRAVLJANJU NEDOLOČNOSTI

$$\lim_{x \to a} \frac{u(x)}{v(x)} = \lim_{x \to a} \frac{u'(x)}{v'(x)}$$ ZA LIMITE TIPA: $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \frac{-\infty}{-\infty}$

$u, v, \Rightarrow$ ODVEDLJIVE F. NA NEKEM INTERVALU

---

(47) GEOMETRIJSKA INTERPRETACIJA ODVODA



KO POŠLJEMO $h \to 0$ DOBIMO PREMICO, KI JE TANGENTA NA GRAF f, NJEN SMERNI KOEFICIENT PA JE ODVOD FUNKCIJE f V TOČKI x_0, $(k = f'(x_0))$

---

(48) ISKANJE EKSTREMOV FUNKCIJE (GLEJ EXTREMI F.)

METODA NAJMANJŠIH KOEFICIENTOV

n-KRAT OPRAVIMO NEKO MERITEV IN DOBIMO $a_1, a_2 \dots a_n$

IŠČEMO ŠTEVILO, KI JE NAJBLIŽJE VSEM MERITVAM, IŠČEMO TAKO ŠTEVILO DA JE VSOTA RAZLIK KVADRATOV NAJMANJŠE

$$f(x) = (x - a_1)^2 + (x - a_2)^2 + \dots + (x - a_n)^2$$

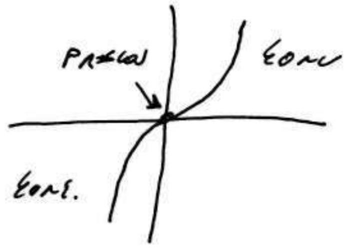
IŠČEMO TAK x DA JE VREDNOST FUNKCIJE ČIM MANJ TOREJ IŠČEMO EXTREM, TOREJ IŠČEMO ~~EXTREM, TOREJ~~ STAC. TOČKO x_0 DA JE $f(x_0) = 0$

(49) TANGENTA NA KRIVULJO

GLEJ ~~GEOMET.~~ INTERPRETACIJO LAGRANGA

(50) KONVEKSNA, KONKAVNA FUNKCIJA

$$\left.\begin{array}{l}\text{KONVEKSNA} \rightarrow f''(x) > 0 \\ \text{KONKAVNA} \rightarrow f''(x) < 0\end{array}\right\} \text{STIKALIŠČE} \rightarrow \text{PREVOJ}$$



(51) NEDOLOČEN INTEGRAL FUNKCIJE

ČE JE $f(x)$ ODVEDLJIVA LAHKO DOBIMO NJEN ODVOD. $f'(x)$ ČE PA JE DAN ODVOD FUNKCIJE, NAS ZANIMA KATERO FUNKCIJO SMO ODVAJALI DA SMO DOBILI DAN ODVOD. ISKANA FUNKCIJA JE NEDOLOČEN INTEGRAL FUNKCIJE $f'(x)$ IN PIŠEMO

$$\int f(x)\, dx$$

ČE JE $F(x) = \int f(x)\, dx$ JE $F'(x) = f(x)$

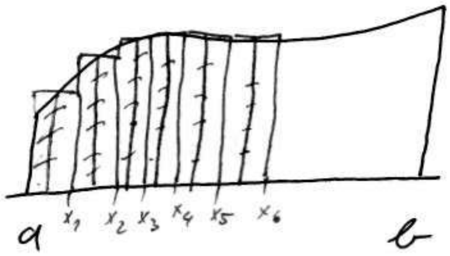
FUNKCIJI KI IMATA ENAK ODVOD SE RAZLIKUJETA KVEČJEMU ZA KONSTANTO, ZATO JE INTEGRAL FUNKCIJE DO KONSTANTE ENOLIČNO DOLOČEN.

$$\int \sin x\, dx = -\cos x + C$$

C = KONSTANTA

§2 DEFINICIJA DOLOČENEGA INTEGRALA FUNKCIJE

$f(x) \geq 0$ NA $[a, b]$



INTERVAL $[a,b]$ RAZDELIMO NA PODINTERVALE $[x_{k-1}, x_k]$

NA PODINTERVALIH SI IZBEREMO TOČKO, KI JO OZNAČIMO Z ξ

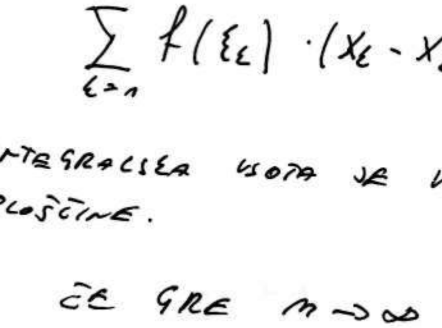
IN IZRAČUNAMO $f(\xi_k)$

DEFINIRAMO INTEGRALSKO VSOTO:

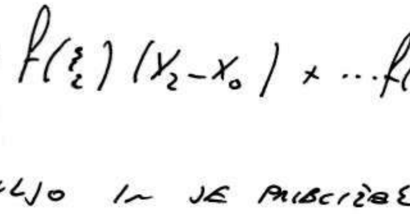
$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \cdot (x_k - x_{k-1}) = f(\xi_1)(x_1 - x_0) + f(\xi_2)(x_2 - x_0) + \dots f(\xi_n)(x_n - x_{n-1})$$

INTEGRALSKA VSOTA JE VSOTA PLOŠČIN POD KRIVULJO IN JE PRIBLIŽEK PLOŠČINE.

ČE GRE $n \to \infty$ IN OBSTAJA LIMITA INTEGRALSKIH VSOT JO IMENUJEMO DOLOČENI INTEGRAL NA $[a, b]$ IN PIŠEMO $\int_a^b f(x)\,dx$



ZGORNJA VSOTA



SPODNJA VSOTA

53 **LASTNOSTI DOLOČENEGA INTEGRALA**

* INTEGRACIJSKO SPREMENLJIVKO LAHKO POLJUBNO OZNAČIMO

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt$$

---

* ČE ZAMENJAMO MEJI SE SPREMENI PREDZNAK

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

---

* $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

$$\int_a^a f(x)\,dx = -\int_a^a f(x)\,dx = 2\int_a^a f(x)\,dx$$

---

* $c \in (a,b)$ $\quad \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^B f(x)\,dx$

---

* IZREK O POVPREČNI VREDNOSTI.

$m = \inf\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ $\qquad M = \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ POTEM OBSTAJA P TAKO DA JE

$$m \le P \le M$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = P(b-a) \quad \text{oz.} \quad m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \le M$$

---

* $$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx$$

54 ZVEZA MED DOLOČENIM IN NEDOLOČENIM INTEGRALOM

$f(x)$ JE ZVEZNA NA $[a, b]$ DEFINIRAMO

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \quad \text{ZA VSE } x \in [a,b]$$

$F(x)$ = PLOŠČINI POD KRIVULJO f OD a DO x

ČE JE f INTEGRABILNA IN F POLJUBEN NEDOLOČEN INTEGRAL TE FUNKCIJE, POTEM VELJA:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

55 INTEGRAL RACIONALNE FUNKCIJE

NEDOLOČEN INTEGRAL RAC. FUNKCIJE VEDNO OBSTAJA
IZRAČUNAMO GA: $\int \frac{f(x)}{g(x)}$

* ČE JE STOPNJA POLINOMA ~~V IMENOVALCU MANJŠA OD STOPNJE~~ ~~f(x)~~ ~~NE~~ $f(x)$ VEČJA OD STOPNJE $g(x)$ DELIMO POLINOMA
* POLINOM $g(x)$ RAZSTAVIMO
* DOBLJEN IZRAZ RAZCEPIMO NA PARCIALNE ULOMKE
* IZRAČUNAMO INTEGRALE.

REZULTAT INTEGRALA RAC. FUNKCIJE JE VSOTA RAC. FUNKCIJE, LOGARITMA IN ARC tg, ZATO BI LAHKO INTEGRAL REŠEVALI TUDI Z NASTAVKOM

(56)

$\int R \cdot (\cos x, \sin x)\, dx$ R → RAC. FUNKCIJA

KVOCIENT DVEH POLINOMOV V SIN X IN COS X

PRIM: $\left(\frac{\sin^2 x \cdot \cos x - \cos x + 3}{\sin x + 3 \sin x \cdot \cos x} \right)$ $t = \frac{tg\, x}{2}$, ~~STAX~~

(57) $\boxed{\text{POSPLOŠEN INTEGRAL FUNKCIJE}}$

PRI RAČUNANJU DOLOČENEGA INTEGRALA JE BILA FUNKCIJA OMEJENA, INTERVAL PA PRAV TAKO.

OBSTAJATA 2 VRSTI

(1) FUNKCIJA NI OMEJENA NA $[a, b]$ IN V KAKŠNI TOČKI NI DEFINIRANA. $\left| \frac{1}{\sqrt{x}} \text{ NI DEFINIRANA V } 0 \right|$

ČE f NI DEFINIRANA V TOČKI a, OBSTAJA INTEGRAL.

$\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)$, ZA VSAK $\varepsilon > 0$

ČE OBSTAJA:

$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\, dx$ POTEM POSPLOŠEN INTEGRAL OBSTAJA: $\int_{a}^{b} f(x) dx$

(2) Integracijsko območje je omejeno, če obstajata

$$\int_a^M f(x)\,dx \quad \forall M \ge a \quad \text{in} \quad \lim_{M\to\infty}\int_a^M f(x)\,dx$$

potem posplošen integral obstaja in pišemo:

$$\int_a^\infty f(x)\,dx$$

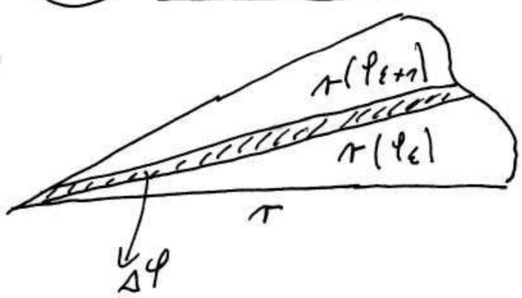
(58) Ploščina krivočrtnih likov

$$\int_a^b f(x)\,dx \ , \ f(x)\ge 0 \Rightarrow \text{ploščina pod krivuljo}$$

Ploščina med krivuljama $f_1(x)$ in $f_2(x)$ je

$$\int_a^b \left| f_1(x) - f_2(x) \right| dx$$

(59) Ploščina izseka



Če je $\Delta\varphi = \varphi_{k+1} - \varphi_k$ dovolj majhen potem je $r(\varphi_k) \doteq r(\varphi_{k+1})$ in zato privzamemo, da je ploščina osenčenega dela približno enaka krožnemu izseku

$$\frac{r^2(\varphi_k)\,\Delta\varphi}{2}$$

Celotna ploščina je potem:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{r^2(\varphi_k)}{2}\left(\varphi_k - \varphi_{k-1}\right)$$

ko gre $\varphi_k \to 0$ dobimo

Da je ploščina enaka:

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi_2} \frac{r^2(\varphi)}{2}\,d\varphi$$

60 **PROSTORNINA ROTACIJSKEGA TELESA**

$$V = \pi \int_a^b \left(f(x)\right)^2 dx$$

61 **POVRŠINA ROTACIJSKEGA TELESA**

$$P = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx$$