

1. KOLOKVIJ IZ MATEMATIKE 1

Univerzitetni študij

14. november 2003

1. [15T] Reši neenačbo in rešitev zapiši kot interval oziroma unijo intervalov:

$$\left| \frac{2x - 1}{x} \right| < 2.$$

Rešitev:

Rešiti moramo

$$-2 < \frac{2x - 1}{x} < 2,$$

pri čemer je $x \neq 0$.

Oglejmo si prvo neenačbo:

$$\begin{aligned} -2 &< \frac{2x - 1}{x} \\ -2x^2 &< 2x^2 - x \\ 4x^2 - x &> 0 \\ x(4x - 1) &> 0 \end{aligned}$$

Prva neenačba ima rešitev na intervalu $(-\infty, 0) \cup (\frac{1}{4}, \infty)$.

Oglejmo si še drugo neenačbo:

$$\begin{aligned} \frac{2x - 1}{x} &< 2 \\ 2x^2 - x &< 2x^2 \\ x &> 0 \end{aligned}$$

Rešitev druge enačbe je interval $(0, \infty)$.

V obeh primerih smo množili z x^2 , da se je znak neenakosti ohranil.

Skupna rešitev prvotne neenačbe je presek rešitev prve in druge neenačbe.

Rešitev je torej interval

$$\left(\frac{1}{4}, \infty \right).$$

2. [15T] Poišči vse rešitve enačbe:

$$z^3 + 2 + 2i\sqrt{3} = 0.$$

Rešitev:

Enačbo

$$z^3 = -2 - 2i\sqrt{3}$$

zapišemo v polarni obliki. Kompleksno število v polarni obliki zapišemo kot

$$z = |z|(\cos \phi + i \sin \phi).$$

Leva stran se tako glasi:

$$z^3 = |z|^3(\cos 3\phi + i \sin 3\phi).$$

Sedaj je potrebno v polarni obliki zapisati še število $-2 - 2i\sqrt{3}$.

Izračunamo oba argumenta, to je oddaljenost od izhodišča in kot:

$$\begin{aligned} r &= 4, \\ \alpha &= \frac{4\pi}{3}. \end{aligned}$$

Sledi:

$$-2 - 2i\sqrt{3} = 4 \left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} \right).$$

Dobimo enačbo:

$$|z|^3(\cos 3\phi + i \sin 3\phi) = 4 \left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} \right).$$

Dve kompleksni števili sta enaki, ko imata enaka polmera in enaka kosinusa kotov. Dobimo dve enačbi, in sicer:

$$|z|^3 = 4 \quad \text{in} \quad \cos(3\phi) = \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right).$$

Rešitev prve enačbe je

$$|z| = \sqrt[3]{4},$$

za rešitev druge pa se spomnimo, kdaj sta dva kosinusa enaka. To je tedaj, ko se argumenta razlikujeta za večkratnik periode, to je za $k \cdot 2\pi$.

Dobimo:

$$\begin{aligned} 3\phi &= \frac{4\pi}{3} + k \cdot 2\pi, & k \in \mathbb{Z}, \\ \phi_k &= \frac{4\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}, & k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Zanimajo nas trije koti, in sicer:

$$\phi_0 = \frac{4\pi}{9}, \quad \phi_1 = \frac{10\pi}{9}, \quad \phi_2 = \frac{16\pi}{9}.$$

Rešitev zapišemo v obliki:

$$z_k = |z|(\cos \phi_k + i \sin \phi_k).$$

Enačba ima tedaj tri rešitve:

$$\begin{aligned} z_0 &= \sqrt[3]{4} \left(\cos \frac{4\pi}{9} + i \sin \frac{4\pi}{9} \right), \\ z_1 &= \sqrt[3]{4} \left(\cos \frac{10\pi}{9} + i \sin \frac{10\pi}{9} \right), \\ z_2 &= \sqrt[3]{4} \left(\cos \frac{16\pi}{9} + i \sin \frac{16\pi}{9} \right). \end{aligned}$$

3. [10T] Izračunaj limito zaporedja, podanega s splošnim členom:

$$a_n = \sqrt{n}(\sqrt{n+7} - \sqrt{n}).$$

Rešitev:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n}(\sqrt{n+7} - \sqrt{n}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}(\sqrt{n+7} - \sqrt{n})(\sqrt{n+7} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+7} + \sqrt{n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}(n+7-n)}{\sqrt{n+7} + \sqrt{n}} \\ &= 7 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+7} + \sqrt{n}} \\ &= 7 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{7}{n}} + 1} \\ &= \frac{7}{2} \end{aligned}$$

4. [10T] Ali je vrsta

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{(2n)!}$$

konvergentna? Odgovor utemelji. **Rešitev:**

Za dokaz konvergence vrste bomo uporabili kvocientni kriterij. V ta namen izračunajmo q .

$$\begin{aligned}q &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \\&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2(n+1) \cdot (2n)!}{(2(n+1))! \cdot 2n} \\&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+2)(2n)!}{(2n+2)(2n+1)(2n)!2n} \\&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n(2n+1)} \\&= 0\end{aligned}$$

Ker je $q < 1$, je vrsta konvergentna.