MATEMATIKA I - 1. kolokvij

Univerzitetni študij

17. 11. 2004

1. Skiciraj množico

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x - y - 1 \geq 0 \text{ ali } x^2 + y^2 + 2(x-y) < 2\} \ .$$

[10 točk]

Meji množice sta premica $y = 2x - 1$ in $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 4$, krožnica s središčem v $(-1,1)$ in polmerom 2. Rešitev je tako **unija** notranjosti krožnice (brez meje) in polravnine pod premico (z mejo).

2. Poišči in izpiši vse rešitve enačbe

$$z^5 + \sqrt{\frac{1}{2}}z + i\sqrt{\frac{3}{2}}z = 0 \ .$$

[15 točk]

Izpostavimo z in dobimo

$$z(z^4 + \sqrt{\frac{1}{2}} + i\sqrt{\frac{3}{2}}) = 0 \ .$$

Ena rešitev je tako $z = 0$, druge štiri pa dobimo iz enačbe

$$z^4 = -\sqrt{\frac{1}{2}} - i\sqrt{\frac{3}{2}} = \sqrt{2}(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}) \ .$$

Rešitve te enačbe lahko zapišemo kot

$$z_k = \sqrt[4]{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\frac{4\pi}{3} + 2k\pi}{4} + i\sin\frac{\frac{4\pi}{3} + 2k\pi}{4}\right),$$

kjer $k = 0,1,2,3$. Rešitve so tako $z_0 = \sqrt[8]{2}(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}) = \sqrt[8]{2}(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})$, $z_1 = \sqrt[8]{2}(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}) = \sqrt[8]{2}(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2})$, $z_2 = \sqrt[8]{2}(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}) = \sqrt[8]{2}(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2})$, $z_3 = \sqrt[8]{2}(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}) = \sqrt[8]{2}(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2})$ in $z_4 = 0$.

3. Izračunaj limito zaporedja podanega s splošnim členom

$$a_n = \left(\frac{n^3 - n}{n^3 - n - 1}\right)^{n - n^3} \ .$$

[10 točk]

Najprej delimo ulomek v osnovi

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^3-n}{n^3-n-1}\right)^{n-n^3} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^3-n-1}\right)^{n-n^3} .$$

Uvedemo novo spremenljivko $k = n^3 - n - 1$. Opazimo še, da $k \to \infty$, ko $n \to \infty$ in $n - n^3 = -k - 1$. Torej je

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^3-n-1}\right)^{n-n^3} &= \lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{-k-1} \\
&= \lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{-k}\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{-1} \\
&= e^{-1}1 \\
&= e^{-1} .
\end{aligned}$$

4. Določi vse $a \in \mathbb{R}$, za katere velja enakost

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n a^n}{10^n} = \frac{10a}{3} .$$

Odgovor utemelji!

[15 točk]

Opazimo, da je $a = 0$ rešitev enačbe. V primeru, ko je $a \neq 0$ pa je vrsta na levi (netivialna) geometrijska vrsta

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n a^n}{10^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3a}{10}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3a}{10}\right)^{n-1} .$$

V primeru, ko je $\left|\frac{3a}{10}\right| < 1$, je vsota te vrste $\frac{1}{1-\frac{3a}{10}}$. Dobimo kvadratno enačbo

$$\frac{1}{1-\frac{3a}{10}} = \frac{10a}{3} ,$$

oziroma

$$3a^2 - 10a + 3 = 0 ,$$

ki ima rešitvi $a_1 = 3$ in $a_2 = \frac{1}{3}$. Preverimo še, da je $\left|\frac{3a_1}{10}\right| < 1$ in $\left|\frac{3a_2}{10}\right| < 1$. Rešitve naloge so tako 0, $\frac{1}{3}$ in 3.