

1. KOLOKVIJ IZ MATEMATIKE 1

Univerzitetni študij

19. november 2007

1. [15T] Poiščite rešitev neenačbe

$$|x - 1| + 2x + 4 < 3.$$

Rešitev:

Neenačbo najprej zapišemo v ekvivalentni obliki z dvema neenačbama

$$-3 < |x - 1| + 2x + 4 < 3.$$

1) Najprej rešimo neenačbo $-3 < |x - 1| + 2x + 4$.

- i) Ko je $x \geq 1$, dobimo neenačbo $-3 < x - 1 + 2x + 4$, ki ima rešitev $x > -2$. Torej je rešitev v tem primeru interval $[1, \infty)$.
- ii) Ko je $x < 1$, dobimo neenačbo $-3 < -x + 1 + 2x + 4$, ki ima rešitev $x > -8$. Torej je rešitev v tem primeru interval $(-8, 1)$.

Skupna rešitev je tako interval $(-8, \infty)$.

2) Nato rešimo še neenačbo $|x - 1| + 2x + 4 < 3$.

- i) Ko je $x \geq 1$, dobimo neenačbo $x - 1 + 2x + 4 < 3$, ki ima rešitev $x < 0$. Torej je rešitev v tem primeru prazna.
- ii) Ko je $x < 1$, dobimo neenačbo $-x + 1 + 2x + 4 < 3$, ki ima rešitev $x < -2$. Torej je rešitev v tem primeru interval $(-\infty, -2)$.

Skupna rešitev je tako interval $(-\infty, -2)$.

Prvotna neenačba ima rešitev tam, kjer imata rešitev obe gornji neenačbi, torej na intervalu $(-8, -2)$.

2. [15T] Izračunajte

$$\sqrt[4]{-8\sqrt{3} - 8i}.$$

Rešitev:

Število $z = -8\sqrt{3} - 8i$ najprej zapišemo v polarni obliki (z je v III kvadrantu!):

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{3 \cdot 64 + 64} = 16, \\ \varphi &= \arctan\left(\frac{-8}{-8\sqrt{3}}\right) = \arctan\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\pi}{6} + \pi = \frac{7\pi}{6}. \end{aligned}$$

Torej $z = 16 \left(\cos \frac{7\pi}{6} + i \sin \frac{7\pi}{6} \right)$.

Izraz $\sqrt[4]{-8\sqrt{3} - 8i}$ ima štiri rešitve, ki jih dobimo po formuli

$$z_k = r^{\frac{1}{4}} \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{4} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{4} \right), \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

Rešitve so torej:

$$\begin{aligned} z_0 &= 2 \left(\cos \frac{7\pi}{24} + i \sin \frac{7\pi}{24} \right), \\ z_1 &= 2 \left(\cos \frac{19\pi}{24} + i \sin \frac{19\pi}{24} \right), \\ z_2 &= 2 \left(\cos \frac{31\pi}{24} + i \sin \frac{31\pi}{24} \right), \\ z_3 &= 2 \left(\cos \frac{43\pi}{24} + i \sin \frac{43\pi}{24} \right). \end{aligned}$$

3. [10T] Izračunajte

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 + 5}{n^2 + 2} \right)^{2n^2+1}.$$

Rešitev:

To limito izračunamo s pomočjo limite $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 + 5}{n^2 + 2} \right)^{2n^2+1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{n^2 + 2} \right)^{2n^2+1} \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{m} \right)^{6m-3} \\ &= e^6 \end{aligned}$$

Napravili smo substitucijo $\frac{1}{m} = \frac{3}{n^2+2}$ oz. $n^2 = 3m - 2$.

4. [10T] Določite konvergenco vrste

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^n}{n!}.$$

Rešitev:

Konvergenco preverimo s kvocientnim kriterijem:

$$q = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^{n+1} \cdot n!}{(n+1)! \cdot 5^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5}{n+1} = 0.$$

Ker je $q < 1$, je vrsta konvergentna.