

1. KOLOKVIJ IZ MATEMATIKE 1

Univerzitetni študij

19. november 2007

1. [15T] Poiščite rešitev neenačbe

$$|x - 2| + 3x + 1 < 4.$$

Rešitev:

Neenačbo najprej zapišemo v ekvivalentni obliki z dvema neenačbama

$$-4 < |x - 2| + 3x + 1 < 4.$$

1) Najprej rešimo neenačbo $-4 < |x - 2| + 3x + 1$.

i) Ko je $x \geq 2$, dobimo neenačbo $-4 < x - 2 + 3x + 1$, ki ima rešitev $x > -\frac{3}{4}$. Torej je rešitev v tem primeru interval $[2, \infty)$.

ii) Ko je $x < 2$, dobimo neenačbo $-4 < -x + 2 + 3x + 1$, ki ima rešitev $x > -\frac{7}{2}$. Torej je rešitev v tem primeru interval $(-\frac{7}{2}, 2)$.

Skupna rešitev je tako interval $(-\frac{7}{2}, \infty)$.

2) Nato rešimo še neenačbo $|x - 2| + 3x + 1 < 4$.

i) Ko je $x \geq 2$, dobimo neenačbo $x - 2 + 3x + 1 < 4$, ki ima rešitev $x < \frac{5}{4}$. Torej je rešitev v tem primeru prazna.

ii) Ko je $x < 2$, dobimo neenačbo $-x + 2 + 3x + 1 < 4$, ki ima rešitev $x < \frac{1}{2}$. Torej je rešitev v tem primeru interval $(-\infty, \frac{1}{2})$.

Skupna rešitev je tako interval $(-\infty, \frac{1}{2})$.

Prvotna neenačba ima rešitev tam, kjer imata rešitev obe gornji neenačbi, torej na intervalu $(-\frac{7}{2}, \frac{1}{2})$.

2. [15T] Izračunajte

$$\sqrt[4]{-8\sqrt{3} + 8i}.$$

Rešitev:

Število $z = -8\sqrt{3} + 8i$ najprej zapišemo v polarni obliki (z je v II kvadrantu!):

$$r = \sqrt{3 \cdot 64 + 64} = 16,$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{8}{-8\sqrt{3}}\right) = -\arctan\frac{\sqrt{3}}{3} = -\frac{\pi}{6} + \pi = \frac{5\pi}{6}.$$

Torej $z = 16\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$.

Izraz $\sqrt[4]{-8\sqrt{3} + 8i}$ ima štiri rešitve, ki jih dobimo po formuli

$$z_k = r^{\frac{1}{4}} \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{4} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{4} \right), \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

Rešitve so torej:

$$z_0 = 2 \left(\cos \frac{5\pi}{24} + i \sin \frac{5\pi}{24} \right),$$

$$z_1 = 2 \left(\cos \frac{17\pi}{24} + i \sin \frac{17\pi}{24} \right),$$

$$z_2 = 2 \left(\cos \frac{29\pi}{24} + i \sin \frac{29\pi}{24} \right),$$

$$z_3 = 2 \left(\cos \frac{41\pi}{24} + i \sin \frac{41\pi}{24} \right).$$

3. [10T] Izračunajte

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 + 7}{n^2 + 3} \right)^{3n^2 - 2}.$$

Rešitev:

To limito izračunamo s pomočjo limite $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 + 7}{n^2 + 3} \right)^{3n^2 - 2} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4}{n^2 + 3} \right)^{3n^2 - 2} \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{m} \right)^{12m - 11} \\ &= e^{12} \end{aligned}$$

Napravili smo substitucijo $\frac{1}{m} = \frac{4}{n^2 + 3}$ oz. $n^2 = 4m - 3$.

4. [10T] Določite konvergenco vrste

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{3^n}.$$

Rešitev:

Konvergenco preverimo s kvocientnim kriterijem:

$$q = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n \cdot (n+1)!}{n! \cdot 3^{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{3} = \infty.$$

Ker je $q > 1$, je vrsta divergentna.