1. KOLOKVIJ IZ MATEMATIKE I

Univerzitetni študij

23. november 2012

1. a) [20T] Poiščite rešitev neenačbe

$$|2x-3|-|3x+4|-3>0.$$

   b) [5T] Kdaj je $|x+3|=|x|+3$? Odgovor utemeljite.

Rešitev:

a) Ločimo tri primere:

i) $x<-\frac{4}{3}$:

$$-2x+3+3x+4>3$$
$$x>-4$$
$$x\in\left(-4,-\tfrac{4}{3}\right)$$

ii) $-\frac{4}{3}\le x<\frac{3}{2}$:

$$-2x+3-3x-4>3$$
$$x<-\frac{4}{5}$$
$$x\in\left[-\tfrac{4}{3},-\tfrac{4}{5}\right)$$

iii) $x\ge\frac{3}{2}$:

$$2x-3-3x-4>3$$
$$x<-10$$
$$x\in\emptyset$$

Skupna rešitev: $x\in\left(-4,-\frac{4}{5}\right)$.

b) Z upoštevanjem definicije absolutne vrednosti in trikotniške neenakosti, enakost $|x+3|=|x|+3$ velja za vse $x\ge 0$.

2. Dan je sistem enačb

$$|z-1-2\mathrm{i}|=2,\quad z(1-p\mathrm{i})-\bar{z}(1+p\mathrm{i})=-8\mathrm{i}.$$

   a) [20T] Poiščite rešitev sistema za izbiro $p=4$.

   b) [5T] Narišite obe množici točk v kompleksni ravnini ter na podlagi slike sklepajte za koliko različnih vrednosti parametra p ima dan sistem enačb natanko eno rešitev. Odgovor utemeljite.

Rešitev:

a) Najprej v drugi enačbi upoštevamo $z=x+\mathrm{i}y$ in $p=4$, da dobimo:

$$\begin{aligned}(x+\mathrm{i}y)(1-4\mathrm{i})-(x-\mathrm{i}y)(1+4\mathrm{i}) &= -8\mathrm{i}\\ (2y-8x)\mathrm{i} &= -8\mathrm{i}\\ y &= 4x-4\end{aligned}$$

Dobljeni rezultat nato vstavimo v prvo enačbo, da dobimo:

$$\begin{aligned}(x-1)^2+(y-2)^2 &= 4\\ 17x^2-50x+33 &= 0\\ (x-1)(17x-33) &= 0\end{aligned}$$

Dobimo dve rešitvi, in sicer $x_1=1$, $y_1=0$ ter $x_2=\frac{33}{17}$, $y_2=\frac{64}{17}$:

$$z_1=1\qquad z_2=\frac{33}{17}+\frac{64}{17}\mathrm{i}.$$

b) Množica rešitev prve enačbe predstavlja krožnico, množica rešitev druge enačbe pa premico v kompleksni ravnini. Za izbiro $p = 4$ se premica in krožnica sekata v dveh točkah. Da bo imel sistem enačb natanko eno rešitev, pa se morata dotikati v eni točki. To velja za dve različni premici, torej za dve različni vrednosti parametra p.

3. a) [15T] Z uporabo matematične indukcije dokažite zvezo

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}.$$

b) [10T] Izračunajte limito

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)}.$$

Rešitev:

a) Za $n = 1$ trditev drži, saj sta leva in desna stran obe enaki $\frac{1}{3}$. Predpostavimo sedaj, da trditev drži za n, in dokažimo, da drži tudi za $n + 1$:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} + \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} \\ = & \frac{n}{2n+1} + \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{2n^2+3n+1}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{(2n+1)(n+1)}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{2n+3}{n+1} \end{aligned}$$

b) Limito izračunamo z uporabo enakosti iz točke a):

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} \cdot \frac{n}{2n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{2n+1} = 0$$

4. a) [20T] Ali je vrsta

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{3n+2}}{(n+1) \cdot 3^{2n}}$$

konvergentna? Odgovor utemeljite.

b) [5T] Ali je dana vrsta geometrijska? Če je, izračunajte njeno vsoto. Odgovor utemeljite.

Rešitev:

a) Uporabimo lahko kvocientni ali korenski kriterij:

$$\begin{aligned} q &= \lim_{n\to\infty} \frac{2^{3n+5} \cdot (n+1) \cdot 3^{2n}}{(n+2) \cdot 3^{2n+2} \cdot 2^{3n+2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{8(n+1)}{9(n+2)} = \frac{8}{9} < 1, \\ q &= \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2^{3n+2}}{(n+1) \cdot 3^{2n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{8\sqrt[n]{4}}{9\sqrt[n]{n+1}} = \frac{8}{9} < 1. \end{aligned}$$

V obeh primerih je limita manjša od 1, kar pomeni, da je vrsta konvergentna.

b) Dana vrsta ni geometrijska, saj kvocient

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{8(n+1)}{9(n+2)}$$

ni konstanten za vsak n.