Matematika I (UNI) 2. kolokvij (18. januar 2013)

REŠITVE

**Naloga 1** (25 točk)

Dana je funkcija

$$g(x) = \sqrt[3]{(x^2-4)^2}.$$

- Čim bolj natančno narišite graf funkcije $g$.
- Izračunajte $\lim_{x\uparrow 2} g'(x)$ in $\lim_{x\downarrow 2} g'(x)$. Kako se to odraža na grafu funkcije $g$?

*Rešitev:*

*Izračunajmo nekatere lastnosti funkcije $g$.*

- *Začetna vrednost:* $g(0) = \sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{2^4} = 2\sqrt[3]{2} \doteq 2,5$.
- *Definicijsko območje:* $\mathbb{R}$.
- *Ničle:*

$$\begin{aligned} g(x) &= 0, \\ \sqrt[3]{(x^2-4)^2} &= 0, \\ (x^2-4)^2 &= 0, \\ (x-2)^2(x+2)^2 &= 0, \\ x_1 &= 2 \text{ (2. stopnja)}, \\ x_2 &= -2 \text{ (2. stopnja)}. \end{aligned}$$

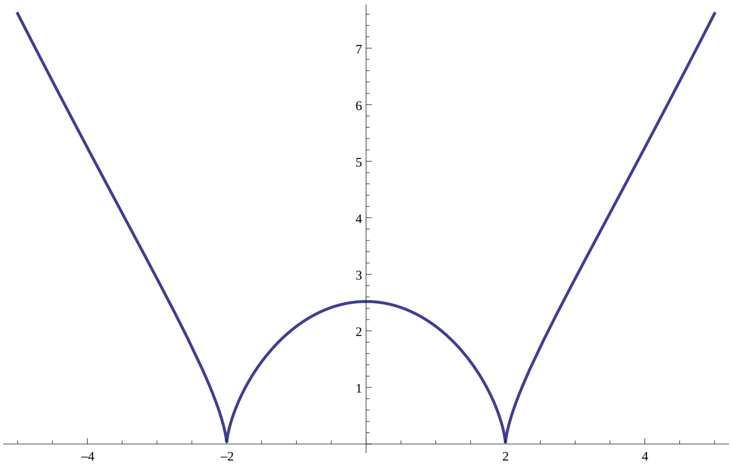
- *Stacionarne točke:*

$$\begin{aligned} g'(x) &= 0, \\ ((x^2-4)^{\frac{2}{3}})' &= 0, \\ \frac{2}{3}(x^2-4)^{-\frac{1}{3}} \cdot 2x &= 0, \\ \frac{4x}{3\sqrt[3]{x^2-4}} &= 0, \\ x &= 0. \end{aligned}$$

  *Opazimo, da funkcija v $x = 2$ in $x = -2$ ni odvedljiva.*

- *Obnašanje v neskončnostih:*

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\infty} g(x) &= \lim_{x\to\infty} \sqrt[3]{(x^2-4)^2} = \infty, \\ \lim_{x\to-\infty} g(x) &= \infty \text{ (funkcija je soda)}. \end{aligned}$$




*Nadaljujemo:*

$$\lim_{x\uparrow 2} g'(x) = \lim_{x\uparrow 2} \frac{4x}{3\sqrt[3]{x^2-4}} = -\infty,$$
$$\lim_{x\downarrow 2} g'(x) = \lim_{x\downarrow 2} \frac{4x}{3\sqrt[3]{x^2-4}} = \infty.$$

*Funkcija $g$ v točki $x = 2$ ni odvedljiva (nima enolično določene tangente), tam je koničasta.*

**Naloga 2** (25 točk)

V množici tangent na graf funkcije

$$f(x) = \frac{6}{x^2+3}, \;\; x \in \mathbb{R},$$

poiščite enačbe tistih, ki imajo najmanjši naklon, in enačbe tistih, ki imajo največji naklon.

Ali je kakšna tangenta vzporedna z $x$ osjo? Ali je kakšna tangenta vzporedna z $y$ osjo? Odgovora utemeljite.

*Rešitev:*

*Naklon oziroma smerni koeficient tangente v točki $x = a$ je enak $f'(a)$, zato izračunajmo odvod funkcije $f$:*

$$f'(x) = \frac{-12x}{(x^2+3)^2}.$$

*Iščemo globalne ekstreme (minimume in maksimume) funkcije $f'$. Ker je ta funkcija (odvod) definirana, zvezna in odvedljiva za vsa realna števila, so edini kandidati za globalne* *ekstreme stacionarne točke funkcije $f'$. To so točke, v katerih je odvod funkcije $f'$ enak* $0$*:*

$$\begin{aligned} f''(x) &= 0, \\ \left(\frac{-12x}{(x^2+3)^2}\right)' &= 0, \\ \frac{-12(x^2+3)^2 + 12x \cdot 2(x^2+3) \cdot 2x}{(x^2+3)^4} &= 0, \\ \frac{36(x^2+3)(x^2-1)}{(x^2+3)^4} &= 0, \\ \frac{36(x-1)(x+1)}{(x^2+3)^3} &= 0, \\ (x-1)(x+1) &= 0. \end{aligned}$$

*Dobimo dve stacionarni točki: $x_1 = 1$ in $x_2 = -1$. Funkcijske vrednosti funkcije $f'$ (smerni koeficienti tangent) v obeh točkah dajo odgovor na vprašanje:*

$$\begin{aligned} f'(1) &= -\frac{3}{4} = k_{min}, \quad \textit{(najmanjši naklon)} \\ f'(-1) &= \frac{3}{4} = k_{max}. \quad \textit{(največji naklon)} \end{aligned}$$

*Tangenta v točki $(1, \frac{3}{2})$ ima zato enačbo $y = -\frac{3}{4}x + \frac{9}{4}$, tangenta v točki $(-1, \frac{3}{2})$ pa enačbo $y = \frac{3}{4}x + \frac{9}{4}$.*

*Smerni koeficient tangent, ki so vzporedne z $x$ osjo, je enak $0$. Ker je $f'(x) = 0$ samo v $x = 0$, obstaja ena takšna tangenta. Njena enačba je $y = f(0) = 2$. Z $y$ osjo ni vzporedna nobena tangenta, saj je $f$ povsod odvedljiva.*

**Naloga 3** (25 točk)

Izračunajte nedoločeni integral realne funkcije:

$$\int \sqrt{x} \ln x \, dx.$$

Določite vse pare realnih števil $a$ in $b$, za katere obstaja določeni integral

$$\int_a^b \sqrt{x} \ln x \, dx.$$

Ali posplošeni integral, v katerem je natanko ena izmed mej enaka $\infty$, obstaja? Odgovor utemeljite.

*Rešitev:*

*Nedoločeni integral lahko izračunamo z metodo integracije po delih:*

$$\begin{aligned} u = \ln x &\implies du = \frac{1}{x}\, dx, \\ dv = \sqrt{x}\, dx &\implies v = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}}. \end{aligned}$$

*Dobimo:*

$$\begin{aligned}\int \sqrt{x}\ln x\,dx &= uv - \int v\,du\\ &= \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\ln x - \int \frac{2}{3}x^{\frac{1}{2}}\,dx\\ &= \frac{2}{3}x\sqrt{x}\ln x - \frac{4}{9}x\sqrt{x} + C\\ &= \frac{2}{9}x\sqrt{x}(3\ln x - 2) + C.\end{aligned}$$

*Definicijsko območje funkcije pod integralom je množica pozitivnih realnih števil:* $(0,\infty)$. *Ker je funkcija pod integralom zvezna, določeni integral obstaja za vse pare* $(a,b)$, *kjer je* $a \in (0,\infty)$ *in* $b \in (0,\infty)$. *Ker je funkcija pod integralom navzgor neomejena, posplošena integrala* $\int_a^\infty \sqrt{x}\ln x\,dx$ *in* $\int_\infty^a \sqrt{x}\ln x\,dx = -\int_a^\infty \sqrt{x}\ln x\,dx$ *ne obstajata.*

**Naloga 4** (25 točk)

Izračunajte ploščino dela realne ravnine, ki zadošča pogojema

$$r \le \sin^2(2\varphi) \quad \text{in} \quad 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}.$$

Pri tem sta $r$ in $\varphi$ polarni koordinati. Območje tudi skicirajte!

NAMIG: $P = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\varphi)\,d\varphi$.

*Rešitev:*

*Ploščino dela realne ravnine, ki je opisan s polarnima koordinatama in omejen s krivuljo* $r(\varphi)$, *izračunamo po formuli*

$$P = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\varphi)\,d\varphi.$$

*Računajmo:*

$$\begin{aligned}P &= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4(2\varphi)\,d\varphi\\ &= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1-\cos(4\varphi)}{2}\right)^2 d\varphi\\ &= \frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos(4\varphi))^2\,d\varphi\\ &= \frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - 2\cos(4\varphi) + \cos^2(4\varphi)\right) d\varphi\\ &= \frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - 2\cos(4\varphi) + \frac{1+\cos(8\varphi)}{2}\right) d\varphi\\ &= \frac{1}{8}\left[\varphi - \frac{1}{2}\sin(4\varphi) + \frac{1}{2}\varphi + \frac{1}{16}\sin(8\varphi)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\\ &= \frac{3\pi}{32}.\end{aligned}$$

*Skica območja:*