Matematika 1

Gregor Dolinar

Fakulteta za elektrotehniko
Univerza v Ljubljani

24. december 2013

Zanima nas, kdaj določeni integral funkcije f na intervalu $[a, b]$ obstaja.

Izrek

Naj bo $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ zvezna funkcija na intervalu $[a, b]$. Potem je f na tem intervalu integrabilna.

Skica dokaza

Oglejmo si dokaz v primeru, ko je f na intervalu $[a, b]$ nenegativna, torej $f(x) \geq 0$ za $x \in [a, b]$.
Funkcija f je zvezna, zato na zaprtem intervalu doseže svoj minimum in svoj maksimum.
Torej za vsak podinterval $[x_k, x_{k-1}]$ obstajata taki števili $x_{m_k}, x_{M_k} \in [x_{k-1}, x_k]$, da je

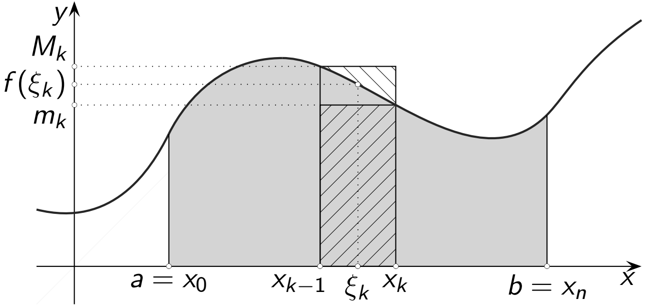
$$m_k = f(x_{m_k}) \leq f(x) \leq f(x_{M_k}) = M_k$$

za vsak $x \in [x_{k-1}, x_k]$,.

Sledi, da je

$$f(x_{m_k}) \leq f(\xi_k) \leq f(x_{M_k})$$

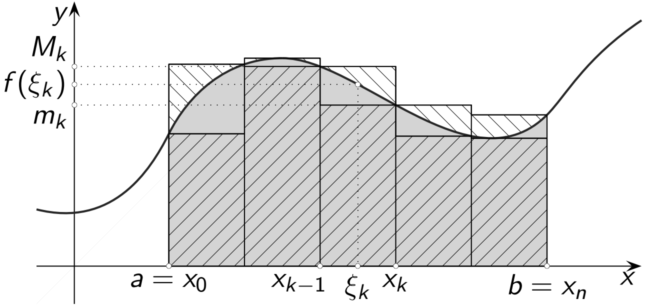
za vsak $k = 1, \ldots, n$.



Za vsako delitev intervala $[a, b]$ potem velja ocena

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_{m_k})\delta_k \leq \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\delta_k \leq \sum_{k=1}^{n} f(x_{M_k})\delta_k,$$

pri čemer je $\delta_k = x_k - x_{k-1}$.



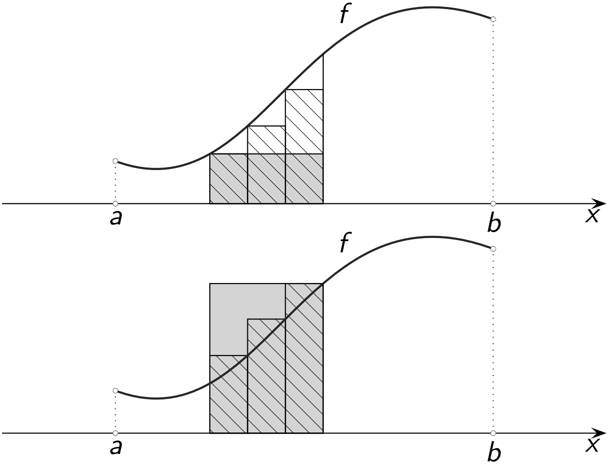
Vsoto na levi imenujemo spodnja integralska vsota, vsoto na desni pa zgornja integralska vsota.
Ker je funkcija f zvezna na intervalu $[a, b]$, torej tudi enakomerno zvezna, za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja $\delta > 0$, da je $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$, čim je $|x - y| < \delta$.
Naj bo $\max_{k=1,\dots,n}\{\delta_k\} < \delta$. Potem je $f(x_{M_k}) - f(x_{m_k}) < \epsilon$ za vsak $k = 1, \dots, n$.
Sledi

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_{M_k})\delta_k - \sum_{k=1}^{n} f(x_{m_k})\delta_k$$

$$= \sum_{k=1}^{n}(f(x_{M_k}) - f(x_{m_k}))\delta_k \leq \sum_{k=1}^{n} \varepsilon\delta_k$$

$$= \varepsilon \sum_{k=1}^{n} \delta_k = \varepsilon(b - a).$$

Vrednost spodnje vsote se pri delitvi na več intervalov poveča, vrednost zgornje vsote pa zmanjša.



Ko gre dolžina najdaljšega podintervala proti nič, dobimo, da je zaporedje spodnjih vsot naraščajoče in navzgor omejeno s katerokoli zgornjo vsoto, zaporedje zgornjih vsot pa je padajoče in navzdol omejeno s katerokoli spodnjo vsoto.
Zato imata obe zaporedji isto limito, ki je enaka limiti integralskih vsot, torej določeni integral $\int_a^b f(x)dx$ obstaja.

Opomba

Pokazali smo, da je vsaka zvezna funkcija na zaprtem intervalu integrabilna.
Integrabilnih funkcij pa je še veliko več. Na primer, vsaka odsekoma zvezna funkcija je integrabilna (funkcija je odsekoma zvezna, če ima končno ali števno neskončno točk nezveznosti).

Primer

Izračunajmo integral $\displaystyle\int_1^2 x dx$.

Naj bo $\xi_k = \frac{x_k + x_{k-1}}{2}$.

Lastnosti določenega integrala

1. Integracijsko spremenljivko lahko poljubno označimo

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt.$$

2. Če integralu zamenjamo meji, se spremeni predznak

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

3. Integral z enakima mejama je enak nič

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

4. Naj bo f integrabilna na intervalu $[a, b]$ in naj bo $\lambda \in \mathbb{R}$ konstanta. Potem je

$$\int_a^b \lambda f(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx.$$

5. Naj bosta f in g integrabilni na intervalu $[a, b]$. Potem je

$$\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

6. Naj bo $a < c < b$. Funkcija f je na intervalu $[a, b]$ integrabilna natanko tedaj, ko je integrabilna na vsakem izmed podintervalov $[a, c]$ in $[c, b]$. Velja

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

7. Če sta f in g integrabilni in je $f(x) \leq g(x)$ za vsak $x \in [a, b]$, potem je

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$